

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CURSO BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

WILLIAMAR VILELA NOGUEIRA

ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS PELO MÉTODO DA RIGIDEZ –
PÓRTICO ESPACIAL

Jataí
2021

WILLIAMAR VILELA NOGUEIRA

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS PELO MÉTODO DA RIGIDEZ –
PÓRTICO ESPACIAL**

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Ribeiro Bueno.

Jataí
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

Nogueira, Williamar Vilela.

Análise matricial de estruturas pelo método da rigidez: pórtico espacial/ Williamar Vilela Nogueira. -- Jataí: IFG, Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil, 2021.

66; il.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Ribeiro Bueno.

Bibliografias.

Apêndices.

1. Análise matricial. 2. Método da rigidez. 3. Método dos deslocamentos. 4. Pórtico espacial. I. Bueno, Fabrício Ribeiro. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS JATAÍ

Folha de Aprovação

WILLIAMAR VILELA NOGUEIRA

ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS PELO MÉTODO DA RIGIDEZ - PÓRTICO ESPACIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Coordenação do Curso Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 19 de Agosto de 2021, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício Ribeiro Bueno
Presidente da banca / Orientador(a)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Eulher Chaves Carvalho
Membro Interno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Me. Fábio Felipe dos Santos
Membro Externo
Membro Interno Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Documento assinado eletronicamente por:

- **Williamar Vilela Nogueira**, **WILLIAMAR VILELA NOGUEIRA - ESTUDANTE - IFG - CÂMPUS JATAÍ (10870883000306)**, em 17/09/2021 11:07:26.
- **Eulher Chaves Carvalho**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 24/08/2021 10:37:00.
- **Fabio Felipe dos Santos**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 24/08/2021 08:28:37.
- **Fabricio Ribeiro Bueno**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 24/08/2021 00:24:59.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 10/08/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 189077

Código de Autenticação: 384b5c4528



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Rua Maria Vieira Cunha, nº 775, Residencial Flamboyant, JATAÍ / GO, CEP 75804-714

(64) 3605-0837 (ramal: 837)

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico/Tecnológico - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Williamar Vilela Nogueira

Matrícula: 20171020260118

Título do Trabalho: Análise Matricial De Estruturas Pelo Método Da Rigidez – Pórtico Espacial

Autorização - Marque uma das opções

1. (X) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Jataí, 14 / 09 / 2021.
Local Data

Williamar Vilela Nogueira

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

RESUMO

A finalidade deste trabalho é gerar um código computacional, que utiliza o método da rigidez como artifício para análise de estruturas de pórticos espaciais. O mecanismo do método empregado faz o uso de cálculos matriciais, que são notavelmente eficazes para programação. Para o perfeito entendimento da análise estrutural, conceitos elementares são apresentados como a caracterização da estrutura empregada, a idealização partindo do modelo real até o modelo computacional, as condições que regem o comportamento dos membros estudados e as interações entre ações e os deslocamentos. Com base no método da rigidez, são denotados os cálculos para obtenção dos deslocamentos, reações de apoio e ações de extremidade de membro. Ainda são apresentadas as matrizes de rigidez de membro, a de rotação no espaço, a matriz de rigidez global e por fim as interações dos carregamentos nos elementos. Tendo como fundamento nessas considerações, foi criado algoritmo, que por meio de exemplos, calculou os deslocamentos e as reações de apoio de estruturas tridimensionais além de estruturas bidimensionais. Os resultados foram comparados com outro *software* e outros trabalhos semelhantes, possibilitando analisar a exatidão dos resultados e a rapidez de processamento do programa.

Palavras-chave: Análise Matricial. Método da Rigidez. Método dos Deslocamentos. Pórtico Espacial.

ABSTRACT

The purpose of this work is to generate a computational code, which uses the rigidity method as an artifice, for the analysis of spatial frame structures. The method engine employed makes use of matrix calculations, which are remarkably effective for programming. For a perfect understanding of structural analysis, elementary concepts are presented, such as the characterization of the structure used, the idealization from the real model to the computational model, the conditions governing the behavior of the studied members and the interactions between actions and displacements. Based on the stiffness method, calculations for obtaining displacements, support reactions and member end actions are denoted. The member stiffness matrices, the space rotation matrix, the global stiffness matrix and finally the interactions of the loadings on the elements are also presented. Based on these considerations, an algorithm was created, which, through examples, calculated the displacements and support reactions of three-dimensional structures in addition to two-dimensional structures. The results were compared with other software and other similar works, making it possible to analyze the accuracy of the results and the speed of processing the program.

Keywords: Matrix Analysis. Rigidity Method. Displacement Method. Space gantry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Trelça plana	20
Figura 2.2 - Trelça espacial.	20
Figura 2.3 - Estruturas reticuladas: (a) grelha, (b) pórtico plano	21
Figura 2.4 - Pórtico espacial	21
Figura 2.5 - Graus de liberdade de uma barra	22
Figura 2.6 - Níveis de abstração referente à análise de uma estrutura	23
Figura 2.7 - Estrutura real: edifício metálico.....	23
Figura 2.8 - Modelo estrutural da Figura 2.7.....	25
Figura 2.9 - Superposição dos efeitos.....	29
Figura 2.10 - Numeração dos deslocamentos.....	32
Figura 2.11 - Deslocamentos no apoio à esquerda	33
Figura 2.12 - Deslocamentos no apoio à direita	34
Figura 4.1 - Eixo de referência global do programa.....	42
Figura 4.2 - Eixo de referência global do SAP2000.....	42
Figura 4.3 - Carregamentos - exemplo 1	43
Figura 4.4 - Deformação - exemplo 1	44
Figura 4.5 - Carregamentos - exemplo 2	46
Figura 4.6 - Deformação - exemplo 2	47
Figura 4.7 - Carregamentos - exemplo 3	49
Figura 4.8 - Deformação - exemplo 3	51
Figura 4.9 - Carregamentos - exemplo 4	52
Figura 4.10 - Referência de sinais	53
Figura 4.11 - Carregamentos - exemplo 5	54
Figura 4.12 - Deformação - exemplo 5	55
Figura 4.13 - Carregamentos - exemplo 6	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Matriz de rigidez de membro de pórtico tridimensional	36
Tabela 4.1 - Propriedades dos materiais - exemplo 1.....	43
Tabela 4.2 - Deslocamentos nodais - exemplo 1	44
Tabela 4.3 - Reações de apoio - exemplo 1	45
Tabela 4.4 - Propriedades dos materiais - exemplo 2.....	45
Tabela 4.5 - Deslocamentos nodais - exemplo 2	46
Tabela 4.6 - Reações de apoio - exemplo 2.....	48
Tabela 4.7 - Propriedades dos materiais - exemplo 3.....	48
Tabela 4.8 - Deslocamentos nodais - exemplo 3	49
Tabela 4.9 - Reações de apoio - exemplo 3	51
Tabela 4.10 - Propriedades dos materiais - exemplo 4.....	52
Tabela 4.11 - Deslocamentos nodais - exemplo 4	52
Tabela 4.12 - Reações de apoio - exemplo 4.....	53
Tabela 4.13 - Propriedades dos materiais - exemplo 5.....	54
Tabela 4.14 - Deslocamentos nodais - exemplo 5	55
Tabela 4.15 - Reações de apoio - exemplo 5.....	56
Tabela 4.16 - Propriedades dos materiais - exemplo 6.....	56
Tabela 4.17 - Deslocamentos nodais - exemplo 6	57
Tabela 4.18 - Reações de apoio - exemplo 6.....	57
Tabela 5.1- Referência de dados.....	60
Tabela 5.2 - Entrada - exemplo1	63
Tabela 5.3 - Entrada - exemplo 4	63
Tabela 5.4 - Entrada - exemplo 5	64
Tabela 5.5 - Entrada - exemplo 6	64

LISTA DE TABELAS – ANEXO A

Tabela A. 1 - Ações correspondentes aos carregamentos	65
Tabela A. 2 - Ações correspondentes aos deslocamentos	66

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MATLAB® - MATrix LABoratory

SAP2000- Structural Analysis Program

LISTA DE SÍMBOLOS

M_x, M_y, M_z – Momento fletor em x, y e z

N^x, N^y, N^z – Esforço normal em x, y e z

Q^x, Q^y, Q^z – Esforço cortante em x, y e z

T^x, T^y, T^z – Momento torçor em x, y e z

$x_k, x_j, y_k, y_j, z_k, z_j$ – Pontos no plano tridimensional dos nós j (inicio) e k (fim)

$\Delta^x, \Delta^y, \Delta^z$ – Deslocamento em x, y e z

ε_x – Deformação normal

$\theta^x, \theta^y, \theta^z$ - Rotação em x, y e z

σ_x – Tensão normal

$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z$ – Somatório das forças em x, y e z

$\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$ – Somatório dos momentos em x, y e z

A – Área da seção transversal

A – Vetor de ações com referência aos eixos da estrutura

A_1 – Momento no ponto A

A_2 – Carga concentrada na barra

A_D – Vetor de cargas reais correspondentes aos deslocamentos (**D**) desconhecidos

A_{DL} – Vetor de ações nos nós, correspondentes as cargas da estrutura restringida

A_M – Vetor correspondente às ações de extremidade de membro na estrutura real

A_{MD} – Matriz de ações de extremidade obtida através dos valores unitários dos deslocamentos nodais

$\mathbf{A}_{ML}$ – Vetor correspondente às ações de extremidade de membro, devido as cargas que atuam na estrutura restringida

$\mathbf{A}_R$ – Vetor que representa as reações de apoio na estrutura real

$\mathbf{A}_{RD}$ – Matriz de reações de apoio obtida através dos valores unitários dos deslocamentos nodais

$\mathbf{A}_{RL}$ – Vetor de ações correspondente às reações de apoio, devido a atuação das cargas na estrutura restringida

C_X – Componente decomposta no eixo x

C_Y – Componente decomposta no eixo y

C_Z – Componente decomposta no eixo z

D – Deslocamento vertical devido a solicitações A_1 e A_2

$\mathbf{D}$ – Vetor correspondente aos deslocamentos desconhecidos

D' – Deslocamento vertical devido à solicitação A_1

D'' – Deslocamento vertical devido à solicitação A_2

EA – Módulo de rigidez de esforço axial

EI – Módulo de rigidez à flexão

G – Módulo de elasticidade transversal

I_x – Constante de torção, que também pode ser simbolizada por J

I_y – Momento de inercia em relação ao eixo y

I_z – Momento de inercia em relação ao eixo z

L – Distância entre dois nós

M'_B – Reação de momento no ponto B, devido a solicitações A_1

M''_B – Reação de momento no ponto B, devido a solicitações A_2

M_B – Reação de momento no ponto B, devido a solicitações A_1 e A_2

$\mathbf{R}$ – Matriz de rotação

R'_A – Reação de apoio no ponto A, devido a solicitações A_1

R'_B – Reação de apoio no ponto B, devido a solicitações A_1

$\mathbf{R}'_T$ – Matriz transposta da matriz de transformação de rotação

R''_A – Reação de apoio no ponto A, devido a solicitações A_2

R''_B – Reação de apoio no ponto B, devido a solicitações A_2

R_A – Reação de apoio no ponto A, devido a solicitações A_1 e A_2

R_B – Reação de apoio no ponto B, devido a solicitações A_1 e A_2

$\mathbf{R}_T$ – Matriz de transformação de rotação

$\mathbf{R}_{\text{vert}}$ – Matriz de rotação para membros verticais

$\mathbf{S}$ – Matriz de rigidez correspondente aos deslocamentos unitários

$\mathbf{S}_M$ – Matriz de rigidez de membro

$\mathbf{S}_{MD}$ – Matriz de rigidez de membro com referência aos eixos da estrutura

E – Módulo de elasticidade

ν – Coeficiente de Poisson

β – Componente para cálculo de constante de torção

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	17
1.1 JUSTIFICATIVA	17
1.2 OBJETIVOS	18
1.2.1 Objetivo Geral	19
1.2.2 Objetivos Específicos	19
CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1 CONCEITOS ELEMENTARES DA ANÁLISE ESTRUTURAL	20
2.1.1 Estruturas em barra	20
2.1.2 Estudo analítico de estruturas	22
2.1.2.1 Estrutura Real	23
2.1.2.2 Modelo estrutural	24
2.1.2.3 Modelo discreto	25
2.1.2.4 Modelo computacional	26
2.1.3 Condições para o modelo matemático	26
2.1.3.1 Compatibilidade entre deslocamentos e deformações	26
2.1.3.2 Comportamento dos materiais	26
2.1.3.3 Condições de equilíbrio	27
2.1.4 Superposição dos efeitos	27
2.2 MÉTODO DA RIGIDEZ	29
2.2.1 Etapas do método da rigidez	31
2.2.2 Matriz de rigidez de membro de pórtico espacial	32
2.2.3 Rotação de eixos em três dimensões	37
2.2.4 Matriz de rigidez global	38
2.2.5 Carregamentos	39
CAPÍTULO 3 METODOLOGIA	40
CAPÍTULO 4 RESULTADOS	42
4.1 Exemplo 1: Pórtico espacial de 8 nós	42
4.2 Exemplo 2: Pórtico espacial de 13 nós	45
4.3 Exemplo 3: Pórtico espacial de 22 nós	48
4.4 Exemplo 4: Pórtico plano de 6 nós	52
4.5 Exemplo 5: Grelha de 4 nós	54
4.6 Exemplo 6: viga de 5 nós	56
CAPÍTULO 5 CONCLUSÃO	58

REFERÊNCIAS	59
APÊNDICE A – MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA.....	60
APÊNDICE B – ENTRADA DOS EXEMPLOS	63
ANEXO A – AÇÕES DE EXTREMIDADE PARA MEMBROS RESTRINGIDOS	65

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

No âmbito da engenharia, a idealização de uma edificação passa por várias etapas – desde a concepção do modelo arquitetônico até a execução final, no canteiro de obra, de todos os projetos vinculados – sendo em cada uma delas indispensáveis para o processo construtivo, que estejam em conformidade com normas técnicas vigentes, seja a nível nacional, regional ou municipal. O projeto estrutural representa uma etapa do projeto construtivo que possibilita, por meio de análises quantitativas, o dimensionamento dos componentes da edificação idealizada, visando atender as necessidades de uso, bem como garantir condições de segurança preconizadas pela norma técnica.

A estrutura de um edifício pode ser composta por uma diversidade de materiais – como concreto, aço, madeira, e etc. – que apresentam características e propriedades heterogêneas. Ao serem submetidas a solicitações de esforços oriundas de efeitos do vento, terremotos, ocupação humana, dilatações térmicas, recalques, dentre outros eventos capazes de causar deformações estruturais, ocorre a redistribuição de esforços internos nos componentes e nas ligações da estrutura.

Deste modo, compreender o comportamento da estrutura por meio da análise estrutural é primordial na elaboração de um projeto que atenda todos os critérios construtivos e de segurança. Conforme Martha (2010), a análise estrutural, por meio do desenvolvimento de teorias que descrevem como a estrutura se comporta, obtém os esforços como cargas, reações de apoio, tensões, deslocamentos e deformações.

Dentre os métodos existentes para a realização da análise estrutural, destaca-se o método da rigidez, amplamente difundido nos programas de computação. Este método utiliza equações matemáticas no domínio da álgebra linear e permite-nos, através do emprego de matrizes e vetores, a determinação do deslocamento dos nós e, conseqüentemente, a definição dos esforços internos e reações de apoio da estrutura (FERREIRA, 2019).

1.1 JUSTIFICATIVA

Ao longo do tempo nota-se, de forma recorrente, o desenvolvimento e a aplicação de novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento, dentro da análise de estruturas o uso da programação tem sido empregado para o desenvolvimento de ferramentas capazes de facilitar e otimizar o processo de análise. Segundo Soriano (2005) o uso de sistemas computacionais é

imprescindível nesse segmento do mercado, com destaque para a aplicação do método dos deslocamentos – também chamado de método da rigidez – e do método elementos finitos, para o dimensionamento de estruturas mais complexas.

Como a grande maioria das estruturas existentes se comportam como pórticos espaciais, para o seu dimensionamento, o trabalho manual seria extremamente complexo e exaustivo. Portanto, a concepção de um algoritmo computacional, utilizando o método da rigidez para análise deste tipo de estrutura, resultaria em um dimensionamento mais prático, mais eficaz e com redução de falhas.

Martha (2010) também destaca que para o caso de estruturas e solicitações reais a análise estrutural é uma tarefa relativamente difícil, e o uso de programas computacionais proporcionam em grande parte uma simplificação do processo de dimensionamento. Dentre os programas existentes no mercado para este segmento temos Ansys, Eberick, SAP2000, TQS e outros. Ainda assim, por entender que o processo de desenvolvimento da análise estrutural e das tecnologias aplicadas a ela estão em constante desenvolvimento, reforça-se a necessidade da busca contínua por novos conhecimentos e novas ferramentas para otimizar o dimensionamento estrutural.

Neste sentido, temos o trabalho desenvolvido por Kummer (2014) que considerava a deformação pelo efeito de corte na análise de pórticos espaciais, com o intuito de avaliar a forma mais precisa e segura do comportamento das estruturas. Na linha de pesquisa que vem sendo desenvolvida no curso de bacharelado em engenharia civil do IFG, Câmpus Jataí, destacam-se os trabalhos desenvolvidos por Oliveira (2017), Ribeiro (2019) e Ferreira (2019), que tratam da análise matricial de estruturas pelo método da rigidez, de vigas e treliças, de pórticos planos e de grelhas, respectivamente.

O presente trabalho fornecerá, a partir da análise matricial de estruturas de pórticos espaciais, uma contribuição para estes trabalhos, além de fomentar o desenvolvimento de tecnologias aplicadas à análise estrutural.

1.2 OBJETIVOS

Para o melhor entendimento do trabalho os objetivos estão classificados em classes de hierarquia como “Objetivo geral” e “Objetivos específicos”.

1.2.1 Objetivo Geral

Implementar um programa para análise de pórtico espacial.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Criar o algoritmo no *software* MATLAB® (*matrix laboratory*) para análise estrutural de pórticos espaciais, utilizando o método da rigidez, para determinar os deslocamentos nodais e as reações de apoio.
- Resolver exemplos tendo como critério a exatidão e o tempo de processamento, com outros *softwares* semelhantes, como o SAP2000, para apurar os mesmos.

CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 CONCEITOS ELEMENTARES DA ANÁLISE ESTRUTURAL

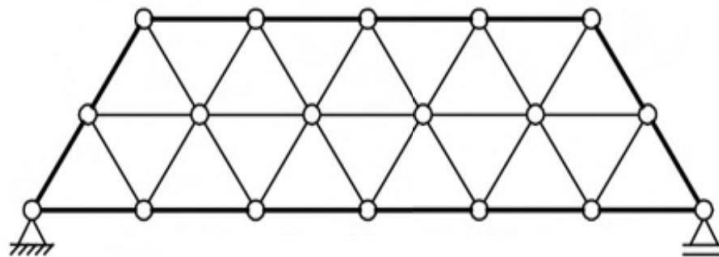
Para facilitar a compreensão da temática abordada neste trabalho, serão apresentados a seguir alguns conceitos importantes. Além disso, este capítulo traz a caracterização da estrutura em estudo, bem como a descrição dos deslocamentos e das possíveis ações atuantes.

2.1.1 Estruturas em barra

As estruturas formadas por elementos, ou componentes, que possuem uma dimensão preponderante maior que as outras dimensões são denominadas de estruturas reticuladas ou estruturas em barra. Dependendo da função desta barra ela pode ser chamada viga, pilar, escora, haste, tirante, entre outros (SORIANO, 2005).

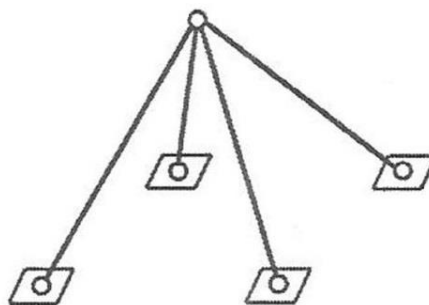
As formas estruturais mais usuais, que se utilizam destes elementos, podem ser classificadas como treliça plana (Figura 2.1) ou espacial (Figura 2.2), grelha (Figura 2.3a), pórtico plano (Figura 2.3b) e pórtico espacial (Figura 2.4). Nesse trabalho vamos abordar especificamente do pórtico espacial.

Figura 2.1 - Treliça plana



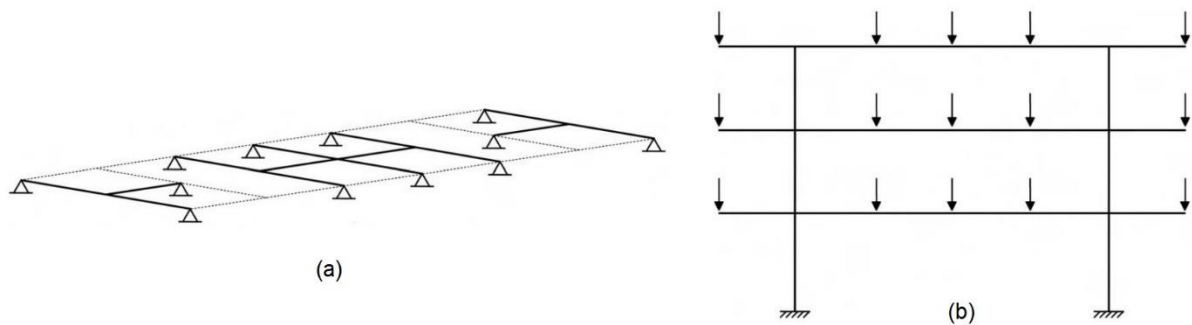
Adaptado de: MARTHA (2010).

Figura 2.2 - Treliça espacial.



Adaptado de: SORIANO (2005).

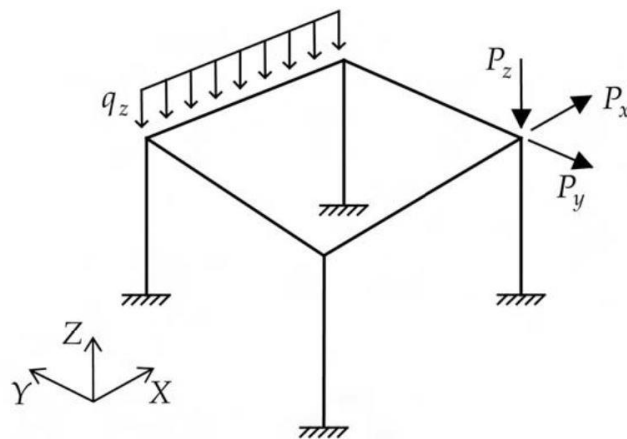
Figura 2.3 - Estruturas reticuladas: (a) grelha, (b) pórtico plano



Adaptado de: MARTHA (2010)

O pórtico espacial é o elemento estrutural mais comum utilizado para se assemelhar a uma estrutura real, dentre as estruturas reticuladas, também é o mais complexo, uma vez que sua análise depende do conhecimento de características existentes em estruturas de pórticos planos e de grelhas. Sua geometria tridimensional faz com que os esforços possam atuar em todas as direções possíveis. Na Figura 2.4 temos a representação de um pórtico, em que alguns esforços atuam em direções distintas na estrutura.

Figura 2.4 - Pórtico espacial



Adaptado de: MARTHA (2010)

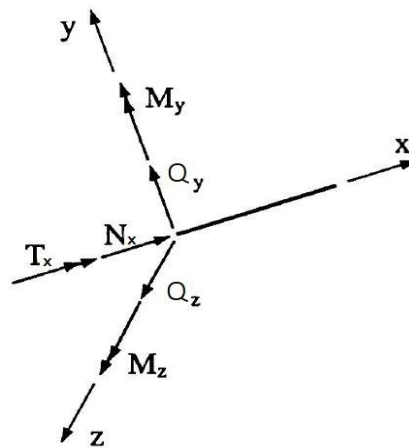
Segundo Gere e Weaver (1987, p. 3) “todos os pontos, exceto os pontos de apoio imóveis, de uma estrutura sofrem deslocamentos”.

Com relação à parte externa de uma estrutura tridimensional, os pontos de ligação podem sofrer deslocamentos na direção de x (Δ^x), deslocamento em y (Δ^y) e deslocamento em z (Δ^z), além de rotações, na direção de x (θ^x), em y (θ^y) e em z (θ^z). (MARTHA,2010).

Ainda de acordo com Martha (2010), quando o pórtico está sujeito às ações externas, as barras que o constituem desenvolvem esforços internos. Eles podem ser esforços normais na direção de x (N^x), esforços cortantes em y (Q^y), em z (Q^z) e momentos em x (M_x), em y (M_y) e em z (M_z), esses últimos – dependendo do referencial – também podem ser chamados de momentos torçores (T^x , T^y e T^z).

A Figura 2.5 retrata uma barra que está sujeita aos 6 tipos de esforços internos existentes. As setas simples representam o sentido dos esforços e as setas duplas os momentos na direção de cada eixo.

Figura 2.5 - Graus de liberdade de uma barra



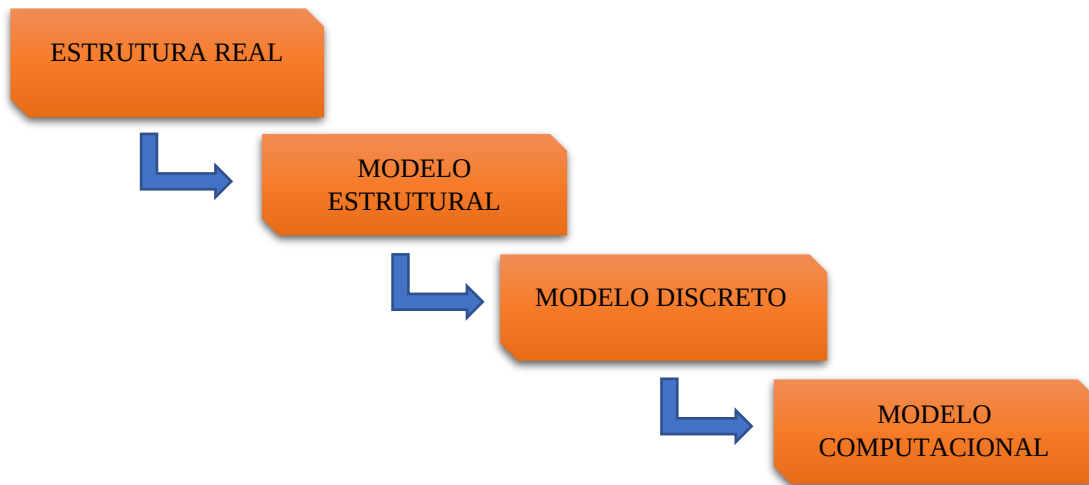
Adaptado de: SORIANO (2005).

2.1.2 Estudo analítico de estruturas

Para prever o comportamento de uma estrutura é necessário ter as teorias físicas e matemáticas que descrevem seu comportamento. É preciso transformar o modelo real em um modelo que seja regido por equações e, por processos analíticos, obter os dados que sejam relevantes.

Para desenvolver um modelo computacional que permita a análise de estruturas do tipo pórtico espacial, objetivo principal desse trabalho, é preciso utilizar o conceito dos quatro níveis de abstração proposto por Martha (2010), como indicado na Figura 2.6.

Figura 2.6 - Níveis de abstração referente à análise de uma estrutura

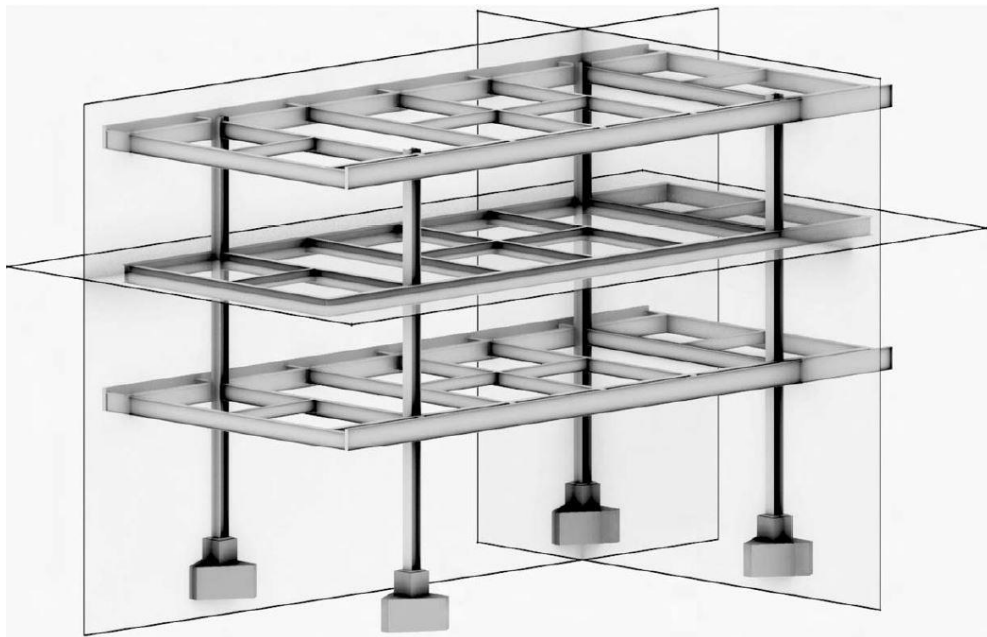


Adaptado de: MARTHA (2010).

2.1.2.1 Estrutura Real

A estrutura real pode ser qualquer modelo geométrico que possui o esqueleto constituído por barras inicialmente lineares ligadas por nós, no caso de estruturas reticuladas. Ela pode ser composta por qualquer tipo de material. Na Figura 2.7 temos um exemplo de edifício construído por perfis metálicos.

Figura 2.7 - Estrutura real: edifício metálico



Adaptado de: MARTHA (2010).

2.1.2.2 Modelo estrutural

A criação de um modelo estrutural é a fase mais importante da análise estrutural. Na concepção deste modelo faz-se uma idealização do comportamento da estrutura real tendo como base as leis constitutivas dos materiais, relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, e o equilíbrio de forças e tensões sofridas pela estrutura.

Dependendo do tipo de estrutura analisada, essa tarefa pode ser bastante complexa. Por conta disso, sua idealização leva em conta algumas hipóteses simplificadoras que são baseadas em estudos experimentais e estatísticos.

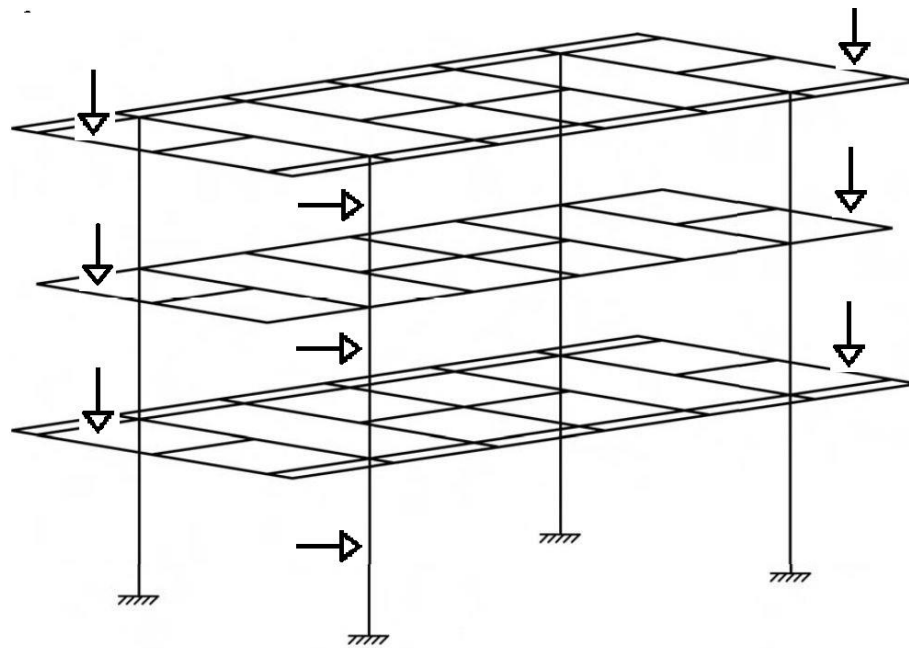
Elas podem ser divididas nos seguintes tipos: a geometria do modelo; condição de suporte (ligação com o meio externo); o comportamento dos materiais; e as solicitações que atuam na estrutura como cargas de ocupação ou ação do vento.

Para nosso modelo matemático de pórtico espacial os eixos são bem definidos e estão caracterizados por linhas que representam vigas e colunas. Estes membros, ou elementos estruturais, se comportam tendo como base fundamentos de estudo de vigas que trabalham sobre flexão, efeitos axiais e de torção.

A modelagem da estrutura real pode ter inúmeras alternativas em relação ao domínio geométrico. Se tratando de um pórtico espacial, a consideração de um modelo único traz vantagens, pois todos os efeitos tridimensionais dos carregamentos externos (como cargas permanentes, acidentais e variáveis, por exemplo o vento) e ligação entre os elementos são considerados.

A Figura 2.8 ilustra um modelo que simboliza a estrutura real da Figura 2.7. Nela estão representados os elementos de vigas, pilares, e os apoios que são caracterizados por engastes. Nota-se que os carregamentos verticais e horizontais que atuam sobre a estrutura são demonstrados por setas.

Figura 2.8 - Modelo estrutural da Figura 2.7



Adaptado de: MARTHA (2010).

2.1.2.3 Modelo discreto

Após a transformação da estrutura real em um modelo matemático, onde o comportamento estrutural é descrito através de teorias físicas e resultados experimentais, ocorre o processo de discretização, ou seja, a parte da abstração que trata da parametrização da solução matemática contínua em um modelo discreto.

A solução matemática pode ser discretizada utilizando vários métodos. Entre eles se destacam o método das forças, o método dos deslocamentos e o método dos elementos finitos, esse último, comumente utilizado em estruturas contínuas.

Os parâmetros como força e momento são utilizados no método das forças; no método dos deslocamentos, que foi adotado para este trabalho e será explanado na Seção 2.2, utilizam-se de translações e rotações. Por fim, no método dos elementos finitos, o domínio da estrutura é subdividido em uma malha composta por subdomínios que possuem forma simples (modelos planos como triângulos ou quadriláteros) e adotam, como parâmetro de solução discreta, os valores de deslocamentos dos vértices desta malha.

2.1.2.4 Modelo computacional

A implementação do modelo computacional é mais viável quando são utilizados os métodos dos deslocamentos ou o método dos elementos finitos. O método das forças emprega uma metodologia menos propícia para ser implementada computacionalmente.

Os fundamentos apresentados até aqui são para a compreensão do comportamento da estrutura, que é a base para os estudos da implementação computacional. Atualmente, sem o uso do computador e da simulação gráfica seria inviável a obtenção de uma análise estrutural em tempo hábil e com precisão dos resultados.

Vários são os aspectos que estão envolvidos no desenvolvimento de um programa de análise estrutural, como: a estrutura de dados, o procedimento para criação do modelo geométrico, a geração do modelo discreto, as propriedades dos materiais, os carregamentos, as condições de suporte, e a visualização de resultados.

2.1.3 Condições para o modelo matemático

Para que possamos representar adequadamente o comportamento da estrutura real, temos que conhecer as condições matemáticas básicas, já mencionado na Seção 2.1.2.2.

2.1.3.1 Compatibilidade entre deslocamentos e deformações

Para garantir que a estrutura, ao se deformar, permaneça contínua (sem sobreposição de pontos ou vazios) as condições geométricas de compatibilidade devem ser satisfeitas. Nos vínculos externos, quando adotados com restrições em certas direções, as condições de compatibilidade externa devem ser compatíveis com essas imposições (MARTHA, 2010).

Nas condições de compatibilidade interna, quando a estrutura se deforma, as ligações (nós) devem transmitir seus deslocamentos e rotações para todas as barras que estão ligadas (no caso de ligações rígidas). Se houver ligação articulada entre barras, apenas translações seriam transmitidas (GERE E WEAVER, 1987).

2.1.3.2 Comportamento dos materiais

O modelo matemático que descreve o comportamento dos materiais foi desenvolvido com a utilização da teoria da elasticidade. Esse modelo relaciona matematicamente a interação entre

as tensões e deformações aplicadas no material. A teoria se baseia no fato do material estar regime elástico-linear (MARTHA, 2010).

Diz-se que um material está em regime elástico quando ele volta ao estado inicial, antes da deformação, após ser retirada a força que atuava sobre ele. A partir disto, temos a relação de proporcionalidade entre a tensão e deformação que é regida pela linearidade. A lei constitutiva que relaciona tensão e deformação é chamada de Lei de Hooke, que podemos ver abaixo na Equação 2.1:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (2.1)$$

Onde: σ_x corresponde à tensão normal na seção transversal da barra, E representa o módulo de elasticidade e ε_x consiste na deformação normal na direção longitudinal da barra.

2.1.3.3 Condições de equilíbrio

De acordo com Hibbeler (2013), uma estrutura ou um membro que a compõe está em equilíbrio quando ela consegue manter o equilíbrio de força e momento. Gere e Weaver (1987) dizem que os vetores de força e momento, no espaço tridimensional, podem ser decompostos nos eixos x, y e z. Se o vetor resultante for zero, então as componentes deste vetor são nulas. Portanto, podemos obter as Equações 2.2 e 2.3 para o equilíbrio estático:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (2.2)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (2.3)$$

Na Equação 2.2 é representada a soma algébrica das componentes do vetor força em cada eixo. De modo semelhante, na Equação 2.3 a soma algébrica das componentes dos momentos.

2.1.4 Superposição dos efeitos

O princípio da superposição dos efeitos tem grande importância na teoria da análise estrutural. Ela nos diz que o deslocamento total ou as tensões internas em um ponto da estrutura, ocasionadas por esforços externos, podem ser determinadas pela soma algébrica dos deslocamentos ou tensões internas provocadas pelos esforços externos individualmente (HIBBELER, 2013).

Para que o princípio seja válido duas condições precisam ser satisfeitas, que são elas:

- O material tem que se comportar de modo que a lei de Hooke seja válida (Equação 2.1), ou seja, requer estar no regime elástico-linear, desse modo, a carga será proporcional ao deslocamento, como mencionado na seção 2.1.3.2.
- A teoria dos pequenos deslocamentos tem que ser aplicada. Pois, grandes deslocamentos mudam significativamente a posição das cargas e orientações. Essa mudança resultaria em um efeito de segunda ordem, que não vamos abordar nesse trabalho.

Na Figura 2.9 está representado como esse princípio é abordado. Em (a) são representas todas as ações externas aplicadas na estrutura causando reações nos apoios e deslocamentos na barra. Em (b) temos uma das cargas aplicada e seus efeitos como reações e deslocamentos. E em (c) a outra solicitação e os efeitos provocados por ela (GERE E WEAVER, 1987).

Onde, A_1 e A_2 representam as ações de momento no ponto A e carga concentrada na barra, respectivamente; R_A , R_B e M_B correspondem às reações de apoio no ponto A e B, devido a solicitações A_1 e A_2 ; D representa o deslocamento vertical, devido a solicitações A_1 e A_2 ; M'_B , R'_A e R'_B consiste nas reações de apoio no ponto A e B, devido à solicitação A_1 ; D' corresponde ao deslocamento vertical, devido à solicitação A_1 ; M''_B , R''_A e R''_B representam as reações de apoio no ponto A e B, devido à solicitação A_2 ; D'' consiste no deslocamento vertical, devido à solicitação A_2 .

Logo, se tem as Equações 2.4, 2.5, 2.6 e 2.7 para superposição:

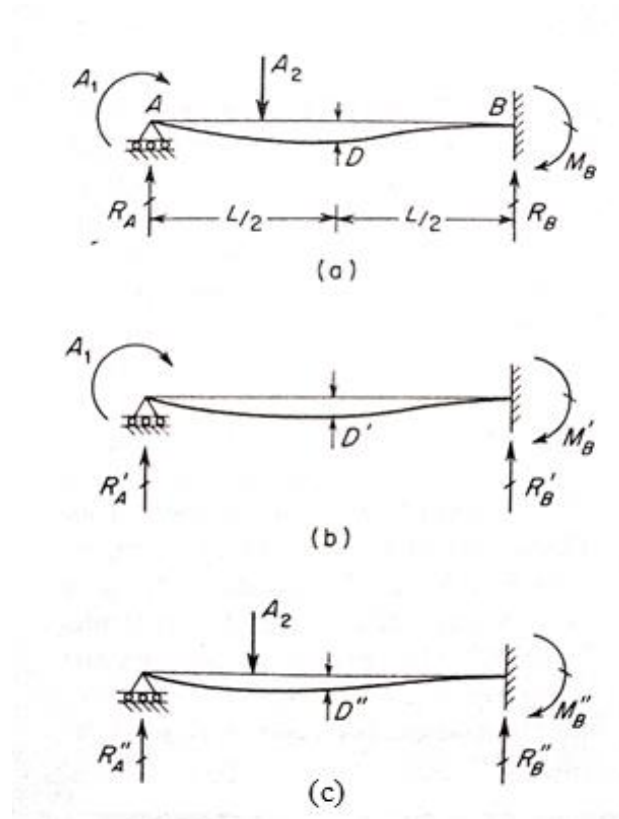
$$R_A = R'_A + R''_A \quad (2.4)$$

$$R_B = R'_B + R''_B \quad (2.5)$$

$$M_B = M'_B + M''_B \quad (2.6)$$

$$D = D' + D'' \quad (2.7)$$

Figura 2.9 - Superposição dos efeitos



Fonte: GERE E WEAVER (1987).

2.2 MÉTODO DA RIGIDEZ

O método da rigidez, juntamente com o método da flexibilidade, tem como objetivo geral resolver estruturas hiperestáticas. Enquanto o método da flexibilidade tem como incógnitas as redundantes estáticas, que são reações adotadas para análise relacionada ao grau de liberdade da estrutura, o método da rigidez possui como incógnitas os deslocamentos dos nós na estrutura (CAVALCANTI, 2006).

Segundo Gere e Weaver (1987) existem três equações que são a base para o método da rigidez, que estão relacionadas aos deslocamentos nodais, ações de extremidade de membro e reações nos apoios. São elas, respectivamente:

$$\mathbf{A}_D = \mathbf{A}_{DL} + \mathbf{S} \mathbf{D} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{A}_M = \mathbf{A}_{ML} + \mathbf{A}_{MD} \mathbf{D} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_{RL} + \mathbf{A}_{RD} \mathbf{D} \quad (2.10)$$

Na Equação 2.8, $\mathbf{A}_D$ representa o vetor de cargas reais correspondentes aos deslocamentos ($\mathbf{D}$) desconhecidos, $\mathbf{A}_{DL}$ consiste no vetor de ações correspondentes às cargas da estrutura restringida, $\mathbf{S}$ é a matriz de rigidez correspondente aos deslocamentos unitários e $\mathbf{D}$ forma o vetor correspondente aos deslocamentos desconhecidos e conhecidos.

Na Equação 2.9, o vetor $\mathbf{A}_M$ corresponde às ações de extremidade de membro na estrutura real, $\mathbf{A}_{ML}$ representa o vetor correspondente às ações (cortante, fletor, torçor) de extremidade de membro devido às cargas que atuam na estrutura restringida e $\mathbf{A}_{MD}$ consiste na matriz de ações de extremidade obtida através dos valores unitários dos deslocamentos nodais.

Compondo a Equação 2.10, $\mathbf{A}_R$ forma o vetor que representa as reações de apoio na estrutura real, o vetor $\mathbf{A}_{RL}$ corresponde às reações de apoio, devido a atuação das cargas na estrutura restringida e a matriz $\mathbf{A}_{RD}$ formada de reações de apoio obtida através dos valores unitários dos deslocamentos nodais.

Nas Equações 2.11a, 2.11b e 2.11c, são demonstrados os passos para a elaboração das matrizes que representam Equações 2.8, 2.9 e 2.10. Foram determinadas a partir do método da superposição dos efeitos como citado da na Seção 2.1.4. As ações da estrutura real são representadas pela letra A, S representa os coeficientes de rigidez obtido de cada deslocamento unitário e o D representa os deslocamentos desconhecidos e conhecidos. Em S, o primeiro índice subscrito representa a rigidez do deslocamento correspondente e o segundo índice representa o deslocamento que atua naquele momento.

Em (2.11a) temos três equações matemáticas referentes a três deslocamentos desconhecidos, em (2.11b) a forma genérica das equações para n deslocamentos e por fim (2.11c) que representa a forma matricial já determinada.

$$\begin{aligned} A_1 &= S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + S_{13}D_3 \\ A_2 &= S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + S_{23}D_3 \\ A_3 &= S_{31}D_1 + S_{32}D_2 + S_{33}D_3 \end{aligned} \tag{2.11a}$$

$$A_1 = S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + \dots + S_{1n}D_n$$

$$A_2 = S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + \dots + S_{2n}D_n$$

$$\dots = \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$A_n = S_{n1}D_1 + S_{n2}D_2 + \dots + S_{nn}D_n$$
(2.11b)

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$
(2.11c)

2.2.1 Etapas do método da rigidez

O processo de análise de uma estrutura reticulada poder ser descrita pelas seguintes etapas:

1. Enunciado do problema: essa etapa consiste na descrição da estrutura, das cargas atuantes, e da definição dos tipos de apoios. São as deformações as quais ela está sujeita, como as deformações por flexão ou axiais, que determinam quais os coeficientes de rigidez que serão empregados.
2. Estrutura restringida: é analisada a estrutura determinando-se as quantidades de deslocamentos desconhecidos, posteriormente vínculos artificiais são criados, impossibilitando estes deslocamentos. Nessa parte do processo é utilizado engastes nos nós, e com isso, vários membros se tornam bi engastados.
3. Estrutura restringida submetida as cargas: após a restrição da estrutura, são obtidas as ações correspondentes aos carregamentos, desprezando as solicitações causadas pelos deslocamentos. Nesse processo obtêm-se os vetores $\mathbf{A}_{DL}$, $\mathbf{A}_{ML}$ e $\mathbf{A}_{RL}$.
4. Estrutura restringida submetida aos deslocamentos unitários: nesse ponto são criadas as equações de rigidez de cada membro da estrutura, determinadas pelas ações pertencentes aos deslocamentos unitários. Com isso obtêm-se as matrizes $\mathbf{S}$, $\mathbf{A}_{MD}$ e $\mathbf{A}_{RD}$.
5. Determinação dos deslocamentos: utiliza-se uma equação de superposição para determinar os deslocamentos, a partir da Equação 2.8 é gerada a Equação 2.12. Esta, é

facilmente estabelecida, pois, o vetor $\mathbf{A}_D$ é concebido anteriormente, na etapa de descrição da estrutura e o vetor $\mathbf{A}_{DL}$ das ações adquiridas na etapa 3, conforme mencionado no item 3.

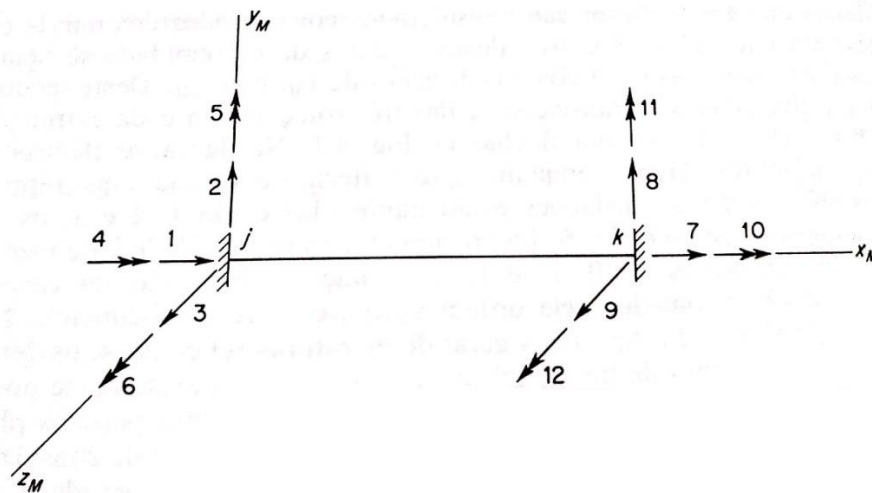
$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{A}_D - \mathbf{A}_{DL}) \quad (2.12)$$

6. Determinação de ações de extremidade e reações: essa parte da análise consiste na obtenção de valores dos esforços internos na extremidade do membro, como cortante, momento fletor e torçor, e as reações nos apoios da estrutura. Essas ações são calculadas a partir das equações 2.9 e 2.10, respectivamente. Logo após, a análise pode ser considerada completa.

2.2.2 Matriz de rigidez de membro de pórtico espacial

Segundo Gere e Weaver (1987), a matriz de rigidez em um nó qualquer da estrutura é obtida através da soma das rigidezes dos membros que a compõe. Como foi explicado na Seção 2.1.1, cada nó de uma estrutura tridimensional pode ter 6 deslocamentos possíveis. Na Figura 2.10 é mostrado a identificação numérica dos deslocamentos nos nós j e k .

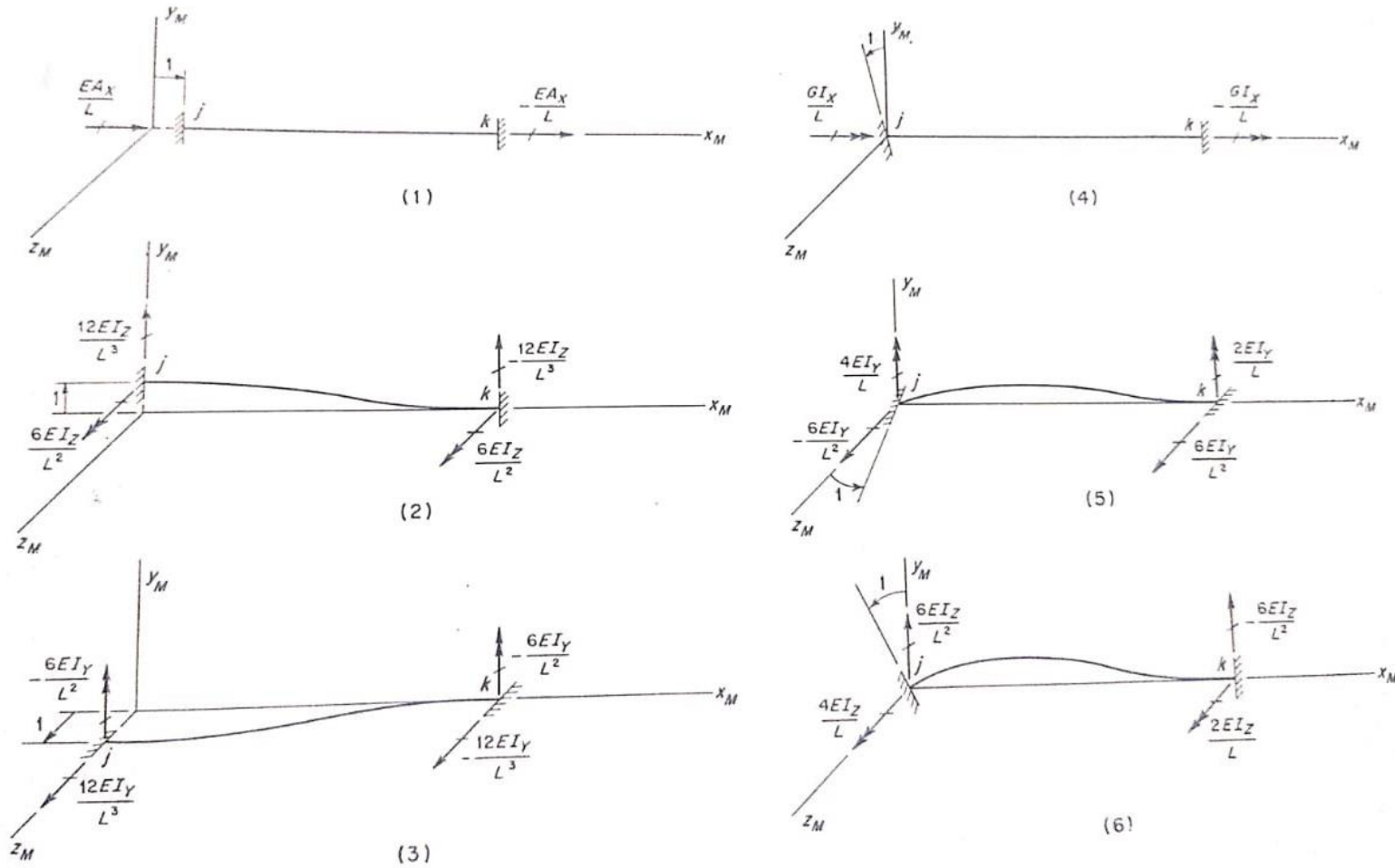
Figura 2.10 - Numeração dos deslocamentos



Fonte: GERE E WEAVER (1987).

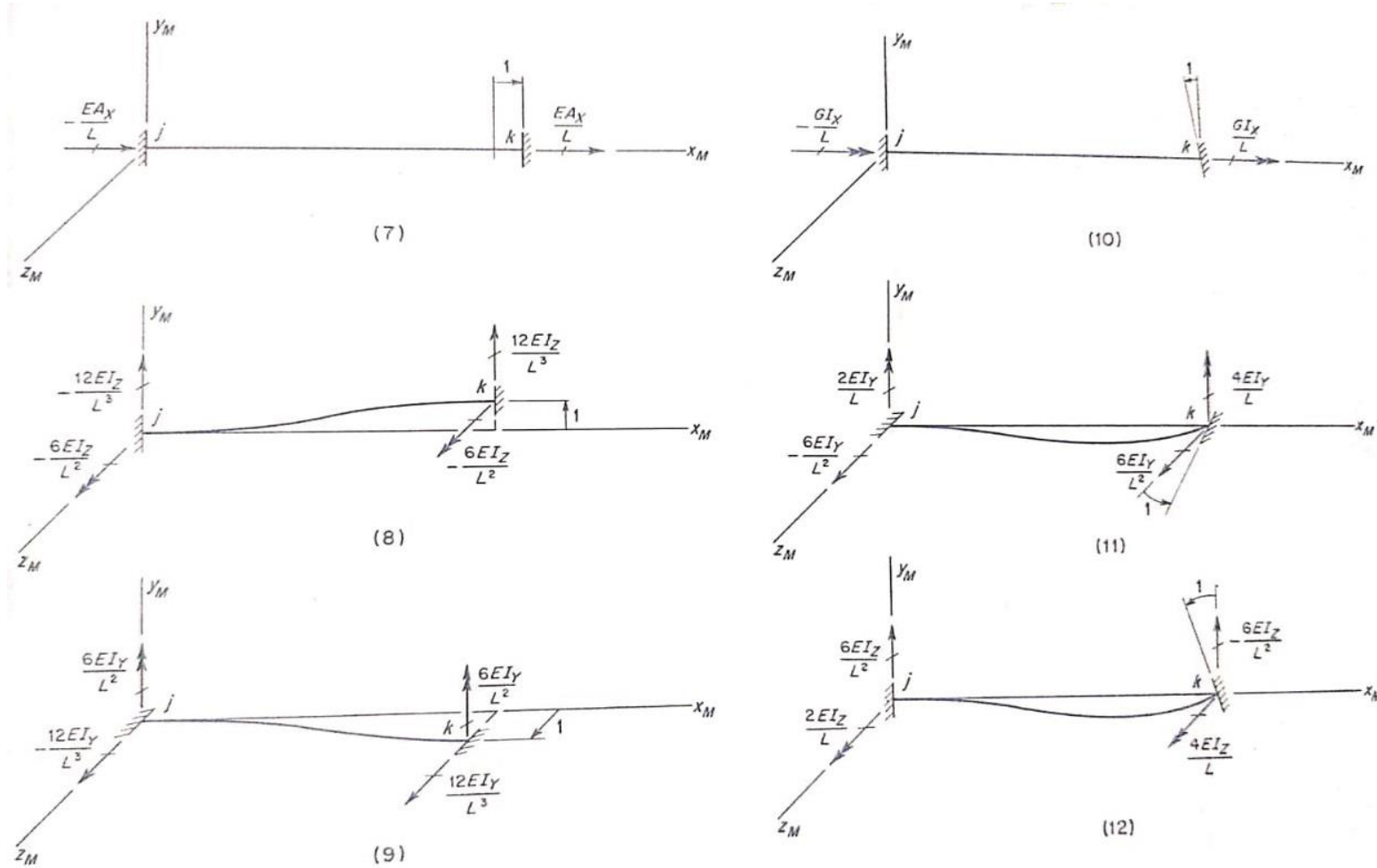
No nó j temos as translações 1, 2 e 3, e momentos 4, 5 e 6, em x , y e z respectivamente. De forma análoga, em k temos 7, 8 e 9 como translações, e 10, 11 e 12 como momentos, em x , y e z respectivamente. Na Figura 2.11 e 2.12 nos é mostrado as várias ações que ocorrem nos nós de uma viga bi engasta. Estas ações são causadas por translações e rotações dos nós em todos os eixos de referência do membro. (Para a verificações das ações consultar a Tabela A.2 do Anexo A).

Figura 2.11 - Deslocamentos no apoio à esquerda



Fonte: GERE E WEAVER (1987).

Figura 2.12 - Deslocamentos no apoio à direita



Fonte: GERE E WEAVER (1987).

Nas Figuras 2.11 e 2.12, temos a identificação dos seguintes dados: I_z representa o momento de inércia do membro em relação ao eixo z ; I_y corresponde ao momento de inércia em relação ao eixo y , temos a constante de torção I_x que também pode ser simbolizada por J ; G é o módulo de elasticidade transversal do membro; L o comprimento da barra; A é a área da seção transversal e E representa o módulo de elasticidade longitudinal.

Se tratando de membros retangulares, as Equações 2.13, 2.14, 2.15 e 2.16 que foi obtida conforme Gere e Weaver (1987, p. 428), podem ser determinadas a partir da base (b) e a altura (h) da seção do membro e o coeficiente de Poisson (ν).

As equações seguem:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (2.13)$$

$$A = bh \quad (2.14)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.15)$$

$$I_x = J = \beta hb^3 \quad \beta = \frac{1}{3} - 0,21 \frac{b}{h} \left(\frac{1}{1} - \frac{b^4}{12h^4} \right) \quad (2.16)$$

Com o resultado da análise da Figura 2.11 e 2.12 é possível determinar a matriz de rigidez de membro (S_M) de um pórtico espacial. Na Tabela 2.1 são apresentadas as ações correspondentes aos deslocamentos unitários. Nas 6 primeiras colunas estão indicados os deslocamentos unitários provocados no nó à esquerda (j), e os 6 restantes correspondem aos deslocamentos provocados no nó à direita (k). As linhas representam a direção dos esforços em cada eixo de referência do membro. As 6 primeiras linhas equivalem as direções no engaste j , e as outras 6 correspondem as direções no engaste k .

Tabela 2.1 - Matriz de rigidez de membro de pórtico tridimensional

$$S_M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{array}{l} \frac{EA_X}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{12EI_Z}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6EI_Z}{L^2} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{12EI_Y}{L^3} \\ 0 \\ -\frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{GI_X}{L} \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 \\ \frac{4EI_Y}{L} \\ \frac{4EI_Z}{L} \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{EA_X}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{12EI_Z}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{6EI_Z}{L^2} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\frac{12EI_Y}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{GI_X}{L} \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 \\ \frac{2EI_Y}{L} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2EI_Z}{L} \end{array} \\ \begin{array}{l} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{EA_X}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{12EI_Z}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6EI_Z}{L^2} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\frac{12EI_Y}{L^3} \\ 0 \\ -\frac{GI_X}{L} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2EI_Y}{L} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2EI_Z}{L} \\ \frac{2EI_Z}{L} \end{array} & \begin{array}{l} \frac{EA_X}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{12EI_Z}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{6EI_Z}{L^2} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{12EI_Y}{L^3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6EI_Y}{L^2} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{GI_X}{L} \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 \\ \frac{4EI_Y}{L} \\ \frac{4EI_Z}{L} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4EI_Z}{L} \end{array} \end{bmatrix}$$

Fonte: GERE E WEAVER (1987)

2.2.3 Rotação de eixos em três dimensões

Todos os estudos até esta etapa foram elaborados tendo como referência, no plano cartesiano, o membro da estrutura. Para que seja possível determinar as várias interações entre os membros e conseguir fazer a estrutura trabalhar de forma monolítica, as matrizes de rigidez de membro e os outros vetores, precisam sofrer alterações que possibilitam o trabalho global da estrutura.

Essas alterações são promovidas pela matriz de rotação (**R**), também conhecida como matriz dos co-senos diretores, fazendo com que a matriz de rigidez se decomponha nos eixos de referência da estrutura. De forma resumida, a matriz de rotação **R**, para estruturas espaciais, foi elaborada fazendo o estudo das diferentes rotações dos planos no espaço tridimensional.

Na Equação 2.17 temos a matriz de rotação para membros espaciais que estejam na vertical. Para membros não verticais é utilizada a Equação 2.18, apresentada por Gere e Weaver (1987).

$$\mathbf{R}_{\text{vert}} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos a & 0 & \sin a \\ C_y \sin a & 0 & \cos a \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y \cos a - C_z \sin a}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cos a & \frac{-C_y C_z \cos a + C_x \sin a}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y \sin a - C_z \cos a}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2} \sin a & \frac{C_y C_z \sin a + C_x \cos a}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

As Equações 2.19, 2.20, 2.21 e 2.22 são as componentes das matrizes citadas anteriormente, e podem ser calculadas a partir das coordenadas dos nós no espaço.

$$C_x = \frac{x_k - x_j}{L} \quad (2.19)$$

$$C_y = \frac{y_k - y_j}{L} \quad (2.20)$$

$$C_Z = \frac{Z_k - Z_j}{L} \quad (2.21)$$

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2} \quad (2.22)$$

As componentes das equações citadas acima podem ser descritas como: C_X é uma componente para decompor vetores no eixo x, C_Y responsável por decompor vetores no eixo y, C_Z componente para decompor vetores no eixo z, L é a distância entre os nós (comprimento da barra) e x_k, x_j, y_k, y_j, z_k e z_j são as coordenadas no espaço tridimensional dos nós j (início) e k (fim). O ângulo (α) representa uma rotação no eixo x do membro no sentido anti-horário, ou seja, no sentido longitudinal da barra.

A equação que transforma a matriz de rigidez de membro (S_M) para a matriz de rigidez de membro para os eixos da estrutura (S_{MD}) é dada pela Equação 2.23. Para a rotação dos vetores de ações, que corresponde às cargas da estrutura restringida, para os eixos da estrutura é utilizado a Equação 2.24. A matriz de transformação de rotação pode ser observada na Equação 2.25.

$$S_{MD} = R'_T S_M R_T \quad (2.23)$$

$$A = R'_T A_L \quad (2.24)$$

$$R_T = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Em que S_{MD} representa a matriz de rigidez de membro com referência aos eixos da estrutura; R'_T corresponde à matriz transposta da matriz de transformação de rotação; S_M consiste na matriz de rigidez de membro com referência aos eixos de membro; R_T representa a matriz de transformação de rotação; R é a matriz de rotação; A_L corresponde ao vetor de ações com referência aos eixos do membro, e o vetor A consiste no vetor de ações com referência aos eixos da estrutura.

2.2.4 Matriz de rigidez global

Martha (2010) descreve a matriz de rigidez global como sendo a soma das matrizes de rigidez de cada membro. Fazendo a superposição destas matrizes, consegue-se obter as interações de

cada membro da estrutura à fim de determinar os seus respectivos deslocamentos e as reações de poio.

Como exemplo, considera-se um pórtico fictício que tenha 8 nós, onde quatro deles são apoios de terceiro gênero. Para a determinação da matriz de rigidez global dessa estrutura, primeiramente calcula-se as rigidezes de cada membro separadamente. Posteriormente, é utilizada a matriz de transformação de rotação para direcionar os esforços em direções específicas, neste caso, no eixo de referência em algum ponto da estrutura.

Em seguida é montada uma matriz de rigidez global com 48 colunas e 48 linhas, devido ao fato de todos os 8 nós poderem sofrer 6 deslocamentos possíveis. Nessa matriz é realizada a sobreposição das matrizes de cada membro, logo, são encontrados os pontos onde algumas delas se encontram, esses pontos são os nós, e esses valores são somados para determinar a rigidez no nó.

2.2.5 Carregamentos

Para que carregamentos possam ser calculados junto à estrutura é necessário compatibiliza-los. O método utilizado consiste em decompor os carregamentos que exercem influência sobre os membros, em forças nos nós. Na Tabela A.1 do Anexo A, encontram-se as reações de extremidade devido a vários tipos de carregamentos.

As forças nodais encontradas fazem parte de vetores que dependem dessas ações, como nos casos dos vetores $\mathbf{A}_{DL}$, $\mathbf{A}_{ML}$ e $\mathbf{A}_{RL}$. E por fim, estes são multiplicados pela matriz de rotação para que se direcionem no sentido de referência da estrutura.

CAPÍTULO 3 METODOLOGIA

O estudo minucioso do método da rigidez aplicado a pórticos espaciais, somado à contemplação de todo o processo que envolve a sua aplicação para análises estruturais, possibilita a geração de um código computacional que melhor o represente.

O *software* Matlab® foi escolhido para o desenvolvimento do programa especialmente pela facilidade de criação e manipulação de variáveis em formatos de matrizes, que é sua especialidade. O código computacional utiliza-se de uma sequência de procedimentos que podem ser observadas a seguir:

1. Reunião de dados da estrutura: primeiramente foi criado um arquivo de entrada e outro de saída, ambos, no formato txt. No arquivo de entrada consta todos os dados da geometria e as propriedades da estrutura, que foram processados pelo programa, como: o número de nós e suas coordenadas, a quantidade de membros que à compõe, assim como seu nó inicial e nó final, base e altura das seções, o módulo de elasticidade longitudinal, o coeficiente de Poisson, e as restrições de cada um dos nós.
2. Processamento de informações: nessa etapa são realizados os cálculos com as informações do estágio anterior, obtendo a área de cada seção, os momentos de inércia, a constante de torção, o módulo de elasticidade transversal e a geração da matriz de transformação de rotação de cada membro.
3. Reunião dos dados de carga: continuando a leitura do arquivo de entrada, é informado a quantidade de cargas, o tipo de carga, em qual membro ela se localiza, suas magnitudes, as distâncias entre seus respectivos nós iniciais e o ângulo de giro que à carga se encontra (na face superior ou lateral do membro).
4. Geração de vetores correspondentes às cargas: nessa fase, foram criados vetores correspondentes aos carregamentos, da etapa anterior, por meio das cargas nodais equivalentes (demonstradas na Tabela A.1 do Anexo A) e multiplicadas pela matriz de transformação de rotação, fazendo o vetor de ações, converter sua referência de membro para os eixos da estrutura.
5. Geração da matriz de rigidez global e vetor de ações global: utilizando-se dos processos nas etapas 1 e 2, foi gerada a matriz de rigidez de membro e submetida à aplicação da matriz de transformação de rotação. Com todas as matrizes de rigidez e vetores dos

membros, se referenciando aos eixos da estrutura, pôde-se construir a matriz de rigidez global e o vetor de carregamento global.

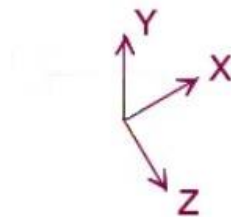
6. Formação do vetor de restrições e seleção de dados: nesse processo, foi gerado e aplicado um vetor das restrições na matriz de rigidez global e no vetor de ações global, para diferenciar os dados dos deslocamentos restringidos e os que sofreram deslocamento.
7. Cálculo dos resultados: nesse estágio final é concebido os resultados de todos os deslocamentos nodais e reações de apoio, juntamente com os processos das etapas, é descrito em arquivo de saída de texto. Posteriormente, os resultados obtidos foram acareados com os resultados encontrados pelo *software* SAP2000 e com outros trabalhos semelhantes.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS

Neste capítulo é apresentado os resultados obtidos pelo programa para o cálculo de estruturas espaciais – de membros de seção retangular – fazendo-se a comparação com o *software* SAP2000, e resolução de estruturas planas de outros trabalhos acadêmicos, como Ribeiro (2019) e Oliveira (2017).

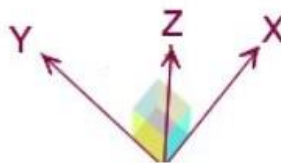
Vale ressaltar, que em relação ao eixo de referência do programa criado e do *software*, que as posições do eixo Y e Z estão trocadas, como podemos observar na Figura 4.1 e Figura 4.2. Logo, os valores obtidos em Y e Z no programa tiveram os valores trocados e o sinal no eixo Z invertido.

Figura 4.1 - Eixo de referência global do programa



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.2 - Eixo de referência global do SAP2000



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

4.1 EXEMPLO 1: PÓRTICO ESPACIAL DE 8 NÓS

Neste primeiro exemplo é apresentado uma estrutura simples de pórtico espacial que está sendo submetida à cargas verticais e horizontais. Como podemos ver na Figura 4.3, temos: uma carga distribuída de 30 kN/m na viga (1-2), uma carga triangular de 30 kN/m na viga (3-4), na viga

(2-4) tem-se uma carga pontual de 25 kN e, por último, na barra (1-3) temos uma carga equivalente a 15 kN na direção paralela ao eixo X.

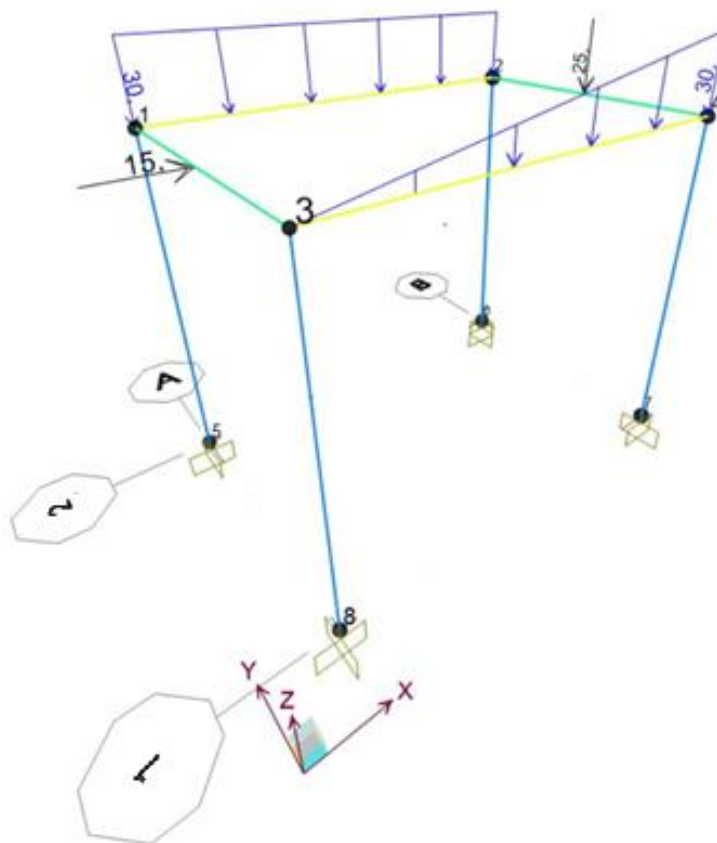
As distâncias de locação são: entre **A** e **B** de 6 metros (m) e entre **2** e **1** é de 4 metros (m), a altura da estrutura é de 5 metros (m). Nos nós 5, 6, 7 e 8 temos restrições de engaste. As propriedades de cada elemento podem ser observadas na Tabela 4.1, que são diferenciadas por cores.

Tabela 4.1 - Propriedades dos materiais - exemplo 1

COR	BASE (m)	ALTURA (m)	E (kPa)	ν	MATERIAL
Amarela	0,20	0,60	25000000	0,2	Concreto
Verde	0,20	0,40	25000000	0,2	Concreto
Azul claro	0,20	0,20	25000000	0,2	Concreto

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.3 - Carregamentos - exemplo 1



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

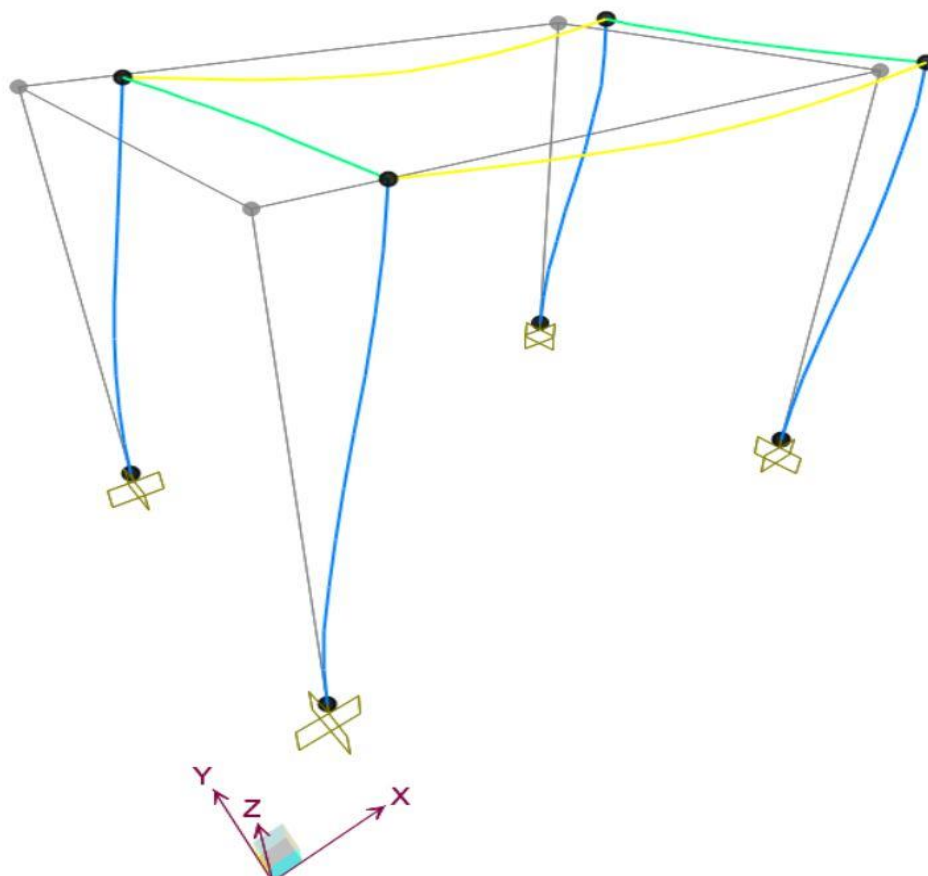
Os resultados referentes aos deslocamentos nodais da estrutura, obtidos pelo programa e do *software* SAP2000, podem ser observados na Tabela 4.2. A maior diferença encontrada entre os resultados foi de 2,27%, em relação ao SAP2000. Na Figura 4.4 a imagem da deformação na estrutura total.

Tabela 4.2 - Deslocamentos nodais - exemplo 1

DESLOCAMENTOS						
PROGRAMA						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
1	0,01198	-0,00043	-0,00020	0,00001	0,00078	-0,00280
2	0,01196	-0,00053	-0,00008	0,00066	-0,00027	0,00257
3	0,01188	-0,00013	-0,00020	-0,00016	-0,00082	-0,00150
4	0,01187	-0,00038	-0,00008	-0,00074	0,00023	0,00140
SAP 2000						
Nós	Δ^x (m)	Δ^z (m)	Δ^y (m)	θ^x (rad)	θ^z (rad)	θ^y (rad)
1	0,01204	-0,00044	0,00020	0,00001	0,00078	0,00280
2	0,01203	-0,00053	0,00008	0,00066	-0,00027	-0,00256
3	0,01194	-0,00013	0,00020	-0,00016	-0,00082	0,00150
4	0,01193	-0,00038	0,00008	-0,00074	0,00023	-0,00140

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.4 - Deformação - exemplo 1



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Na Tabela 4.3 é mostrado os valores das reações de apoio que a estrutura está submetida resultante de todas as solicitações impostas. Em relação ao SAP2000, a maior diferença encontrada entre os valores foi de 1,13%.

Tabela 4.3 - Reações de apoio - exemplo 1

REAÇÕES DE APOIO						
PROGRAMA						
Nós	F_x (kN)	F_y (kN)	F_z (kN)	M_x (kNm)	M_y (kNm)	M_z (kNm)
5	-1,59233	86,90197	0,07232	0,17290	-0,36422	5,84764
6	-5,88172	105,56117	0,55250	0,94202	0,12899	12,99347
7	-4,92116	75,65254	-0,56314	-0,91756	-0,10916	11,36732
8	-2,60479	26,88432	-0,06169	-0,04993	0,38439	7,50932
SAP 2000						
Nós	F_x (kN)	F_z (kN)	F_y (kN)	M_x (kNm)	M_z (kNm)	M_y (kNm)
5	-1,602	86,903	-0,072	0,1721	-0,3645	-5,8734
6	-5,873	105,561	-0,55	0,9362	0,1287	-12,972
7	-4,916	75,652	0,561	-0,9115	-0,1089	-11,3564
8	-2,61	26,885	0,061	-0,0494	0,3847	-7,5239

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

4.2 EXEMPLO 2: PÓRTICO ESPACIAL DE 13 NÓS

Na Figura 4.5 é mostrado um pórtico que simula uma estrutura de galpão – contraventada em uma de suas faces e composta por dois tipos de materiais – que está sujeita a cargas de vento. Na horizontal é aplicado uma sobrepressão de 3 kN/m nos pilares, e nas vigas da cobertura uma sucção de 7 kN/m.

Nos nós 6 e 8 temos restrições de engaste, no nó 5 apenas restrições nos deslocamentos, e no nó 7 apenas restrição no deslocamento vertical. As distâncias no gabarito são: 4 m entre **A** e **B**, e 4 m entre **B** e **C**, entre **1** e **2** é de 5 m e entre **2** e **3** também 5 m. A altura dos pilares é de 7 m e o ponto mais alto da cobertura de 8 m.

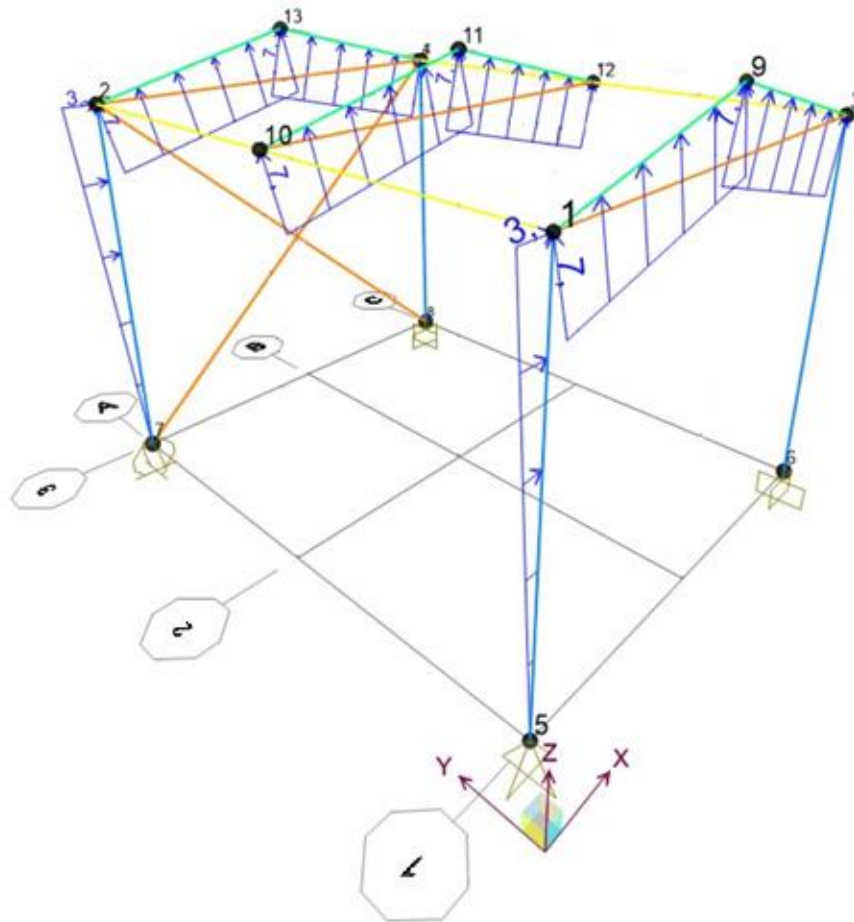
Na Tabela 4.4 apresenta as propriedades de cada elemento, da mesma forma como informado no Exemplo 1.

Tabela 4.4 - Propriedades dos materiais - exemplo 2

COR	BASE (m)	ALTURA (m)	E (kPa)	ν	MATERIAL
Amarela	0,25	0,80	25000000	0,2	Concreto
Verde	0,20	0,40	200000000	0,3	Aço
Azul claro	0,30	0,30	25000000	0,2	Concreto
Laranja	0,05	0,05	200000000	0,3	Aço

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.5 - Carregamentos - exemplo 2



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Na Tabela 4.5 é informado os valores dos deslocamentos encontrados pelo programa e pelo SAP2000. A maior diferença encontrada entre os resultados foi de 2,27%, em relação ao SAP2000. Logo em seguida, na Figura 4.6, a representação gráfica destes deslocamentos.

Tabela 4.5 - Deslocamentos nodais - exemplo 2

(continua)

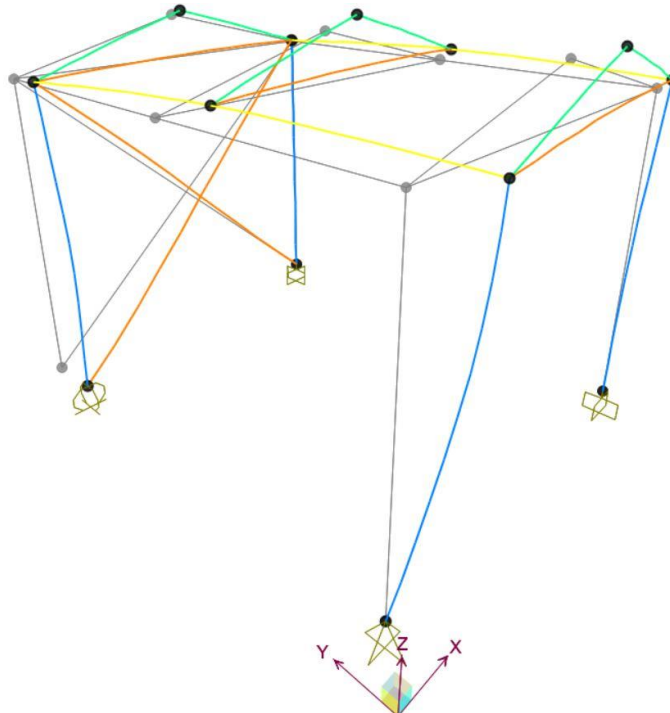
DESLOCAMENTOS						
PROGRAMA						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
1	0,01186	0,00014	0,00812	0,00069	0,00112	0,00044
2	0,00059	0,00016	0,00812	-0,00066	0,00110	0,00044
3	0,01129	0,00012	-0,00043	0,00057	0,00104	-0,00059
4	0,00013	0,00014	-0,00043	-0,00057	0,00104	-0,00039
5	0	0	0	0,00140	0,00112	-0,00327
6	0	0	0	0	0	0
7	0,00035	0	0,01275	-0,00066	0,00110	-0,00078
8	0	0	0	0	0	0
9	0,01158	0,00131	0,00440	0,00063	0,00107	0,00003
10	0,00619	0,00238	0,00812	0	0,00110	0,00039

Tabela 4.5 - Deslocamentos nodais - exemplo 2

DESLOCAMENTOS						
PROGRAMA						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
11	0,00599	0,00323	0,00386	0	0,00105	-0,00004
12	0,00572	0,00210	-0,00043	0	0,00111	-0,00046
13	0,00036	0,00111	0,00317	-0,00062	0,00106	-0,00002
SAP 2000						
Nós	Δ^x (m)	Δ^z (m)	Δ^y (m)	θ^x (rad)	θ^z (rad)	θ^y (rad)
1	0,01190	0,00014	-0,00814	0,00069	0,00112	-0,00044
2	0,00059	0,00016	-0,00814	-0,00066	0,00110	-0,00044
3	0,01133	0,00012	0,00043	0,00057	0,00105	0,00059
4	0,00013	0,00014	0,00044	-0,00057	0,00104	0,00039
5	0	0	0	0,00140	0,00112	0,00328
6	0	0	0	0	0	0
7	0,00035	0	-0,01277	-0,00066	0,00110	0,00078
8	0	0	0	0	0	0
9	0,01162	0,00131	-0,00441	0,00063	0,00108	-0,00003
10	0,00621	0,00242	-0,00814	0	0,00111	-0,00039
11	0,00601	0,00328	-0,00387	0	0,00105	0,00004
12	0,00573	0,00214	0,00043	0	0,00112	0,00046
13	0,00036	0,00111	-0,00318	-0,00062	0,00106	0,00002

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.6 - Deformação - exemplo 2



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

As reações de apoio na estrutura podem ser observadas na Tabela 4.6. A diferença maior encontrada entre os resultados foi de 1,30%, em relação ao SAP2000.

Tabela 4.6 - Reações de apoio - exemplo 2

REAÇÕES DE APOIO						
PROGRAMA						
Nós	F_x (kN)	F_y (kN)	F_z (kN)	M_x (kNm)	M_y (kNm)	M_z (kNm)
5	-4,30486	-44,4686	-0,48938	0	0	0
6	-5,44662	-39,3584	1,42083	3,61021	-1,77165	20,48527
7	0	-49,4187	0	0	0	0
8	-11,24852	-34,7543	-0,93145	-1,8808	-1,79852	-1,58346
SAP 2000						
Nós	F_x (kN)	F_z (kN)	F_y (kN)	M_x (kNm)	M_z (kNm)	M_y (kNm)
5	-4,30800	-44,46700	0,49200	0	0	0
6	-5,44100	-39,35900	-1,41600	3,59420	-1,77730	-20,46350
7	0	-49,42100	0	0	0	0
8	-11,25100	-34,75300	0,92500	-1,85660	-1,80410	1,56930

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

4.3 EXEMPLO 3: PÓRTICO ESPACIAL DE 22 NÓS

O modelo estrutural referenciado na Figura 4.7, faz a representação de um edifício de 3 pavimentos com cargas verticais – que simulam carregamentos de peso próprio e acidental – e cargas horizontais, que equivalem à forças de vento altamente majoradas. Na cobertura e no piso do primeiro pavimento temos cargas distribuídas de 15 kN/m, nos pisos em balanço – do segundo pavimento e terceiro – temos cargas de 10 kN/m e nas demais vigas 30 kN/m. E atuando na horizontal, nas vigas laterais, cargas distribuídas de 10 kN/m.

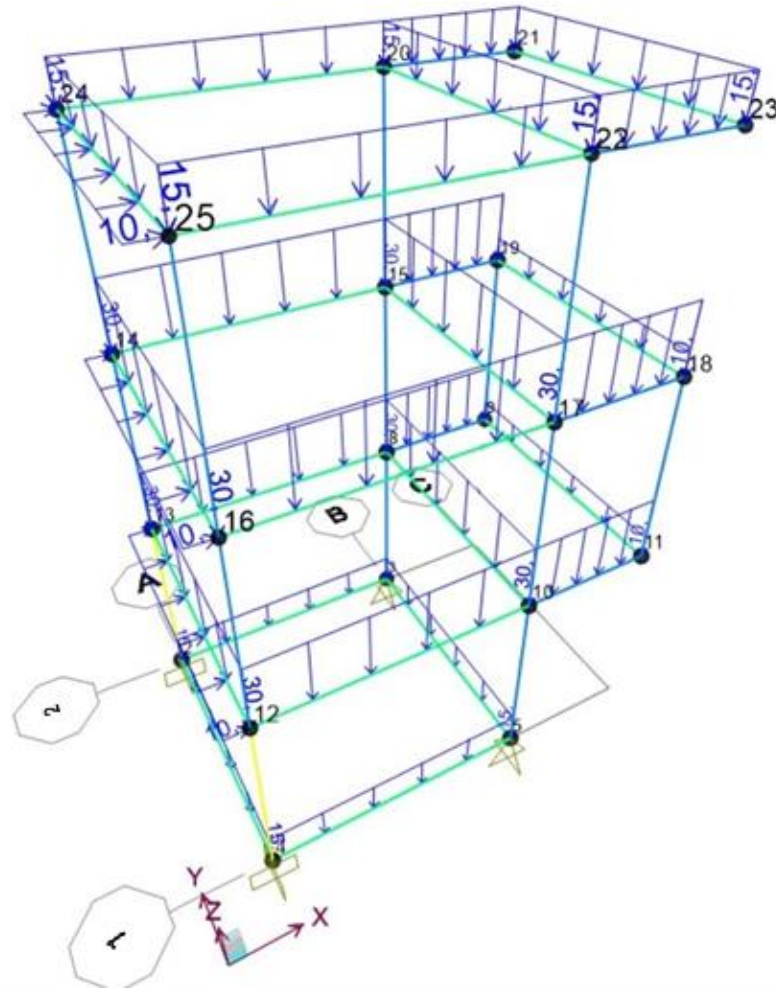
Cada pavimento possui altura de 3 m, as distâncias dos eixos no gabarito são: 4 m entre **A** e **B** e entre **B** e **C** de 2 m, entre **1** e **2** a distância é de 4 m. Os nós da base da estrutura 2 e 4 possuem restrições de engaste, enquanto que os nós 3 e 5, possuem restrições apenas de translações. As características de cada elemento podem ser verificadas na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 - Propriedades dos materiais - exemplo 3

COR	BASE (m)	ALTURA (m)	E (kPa)	ν	MATERIAL
Amarela	0,20	0,35	25000000	0,2	Concreto
Verde	0,20	0,40	25000000	0,2	Concreto
Azul claro	0,20	0,20	25000000	0,2	Concreto

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.7 - Carregamentos - exemplo 3



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Os resultados do programa e os valores encontrados pelo SAP2000, em relação aos deslocamentos, estão na Tabela 4.8. A maior diferença encontrada entre os dados foi de 16,67%, em relação ao SAP2000. Na Figura 4.8 é mostrada a estrutura deformada pelos deslocamentos dos nós.

Tabela 4.8 - Deslocamentos nodais - exemplo 3

(continua)

DESLOCAMENTOS						
PROGRAMA						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
4	0	0	0	0	0	0
12	0,0121	-0,00029	0	-0,00144	-0,00119	-0,00408
16	0,04008	-0,0006	0	-0,00156	-0,00142	-0,00316
25	0,05465	-0,00068	-0,00001	-0,00093	-0,00144	-0,00082
2	0	0	0	0	0	0
13	0,0121	-0,00029	0	0,00144	0,00119	-0,00408
14	0,04008	-0,0006	0	0,00156	0,00142	-0,00316

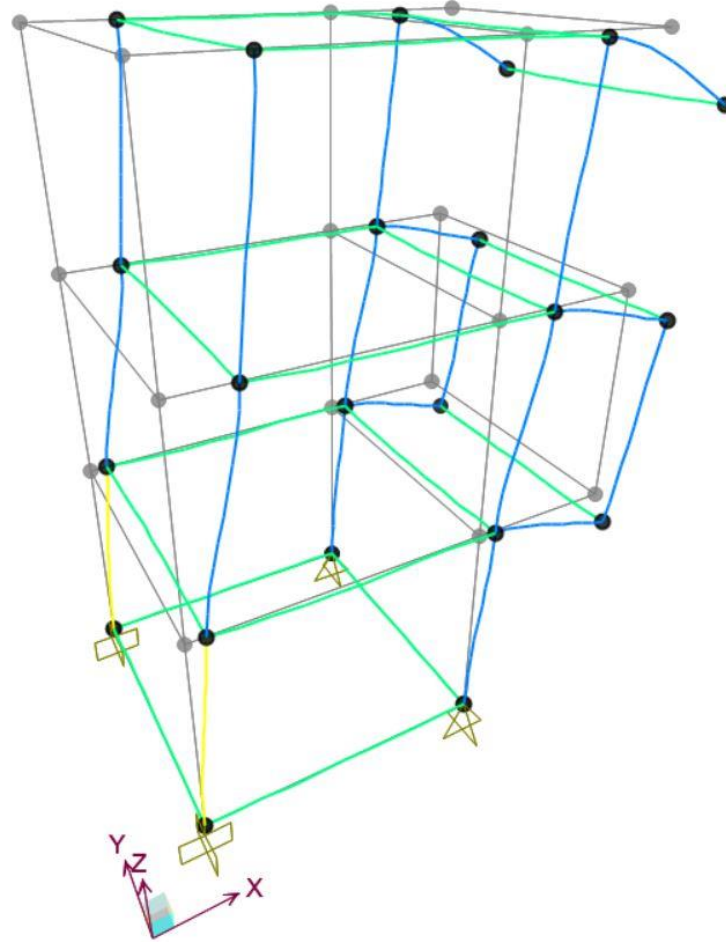
Tabela 4.8 - Deslocamentos nodais - exemplo 3

(conclusão)

DESLOCAMENTOS						
PROGRAMA						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
24	0,05465	-0,00068	0,00001	0,00093	0,00144	-0,00082
5	0	0	0	-0,00084	0,00002	-0,00005
10	0,01211	-0,00196	0	-0,00151	0,00025	-0,00239
17	0,04007	-0,00314	0	-0,00151	0,0003	-0,00277
22	0,05464	-0,0036	0	-0,00097	0,00031	-0,00368
3	0	0	0	0,00084	-0,00002	-0,00005
8	0,01211	-0,00196	0	0,00151	-0,00025	-0,00239
15	0,04007	-0,00314	0	0,00151	-0,0003	-0,00277
20	0,05464	-0,0036	0	0,00097	-0,00031	-0,00368
11	0,01208	-0,02792	0	-0,00071	-0,00008	-0,01319
18	0,0401	-0,02793	0	-0,00071	-0,0001	-0,01239
23	0,05464	-0,04395	0	-0,00146	-0,0001	-0,02768
9	0,01208	-0,02792	0	0,00071	0,00008	-0,01319
19	0,0401	-0,02793	0	0,00071	0,0001	-0,01239
21	0,05464	-0,04395	0	0,00146	0,0001	-0,02768
SAP 2000						
Nós	Δ^x (m)	Δ^z (m)	Δ^y (m)	θ^x (rad)	θ^z (rad)	θ^y (rad)
4	0	0	0	0	0	0
12	0,01242	-0,00029	0	-0,00144	-0,00119	0,00414
16	0,04082	-0,00060	0	-0,00157	-0,00142	0,00322
25	0,05564	-0,00068	0,00001	-0,00094	-0,00144	0,00086
2	0	0	0	0	0	0
13	0,01242	-0,00029	0	0,00144	0,00119	0,00414
14	0,04082	-0,00060	0	0,00157	0,00142	0,00322
24	0,05564	-0,00068	-0,00001	0,00094	0,00144	0,00086
5	0	0	0	-0,00085	0,00002	0,00006
10	0,01242	-0,00196	0	-0,00152	0,00025	0,00248
17	0,04080	-0,00315	0	-0,00152	0,00030	0,00284
22	0,05563	-0,00360	0	-0,00097	0,00031	0,00373
3	0	0	0	0,00085	-0,00002	0,00006
8	0,01242	-0,00196	0	0,00152	-0,00025	0,00248
15	0,04080	-0,00315	0	0,00152	-0,00030	0,00284
20	0,05563	-0,00360	0	0,00097	-0,00031	0,00373
11	0,01239	-0,02845	0	-0,00072	-0,00008	0,01335
18	0,04083	-0,02846	0	-0,00072	-0,00009	0,01256
23	0,05563	-0,04431	0	-0,00146	-0,00010	0,02773
9	0,01239	-0,02845	0	0,00072	0,00008	0,01335
19	0,04083	-0,02846	0	0,00072	0,00009	0,01256
21	0,05563	-0,04431	0	0,00146	0,00010	0,02773

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.8 - Deformação - exemplo 3



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Na Tabela 4.9 mostra a comparação dos valores, das reações de apoio, dos dois programas. Em relação ao SAP2000, a maior diferença encontrada entre os resultados foi de 0,74%.

Tabela 4.9 - Reações de apoio - exemplo 3

REAÇÕES DE APOIO						
PROGRAMA						
Nós	F_x (kN)	F_y (kN)	F_z (kN)	M_x (kNm)	M_y (kNm)	M_z (kNm)
2	-47,489	226,2	5,62528	-16,0316	-2,53422	114,853
3	-12,511	713,8	5,20518	0	0	0
4	-47,489	226,2	-5,6253	16,0316	2,53422	114,853
5	-12,511	713,8	-5,2052	0	0	0
SAP 2000						
Nós	F_x (kN)	F_z (kN)	F_y (kN)	M_x (kNm)	M_z (kNm)	M_y (kNm)
2	-47,402	226,2	-5,587	-16,1133	-2,5392	-114,991
3	-12,598	713,8	-5,167	0	0	0
4	-47,402	226,2	5,587	16,1133	2,5392	-114,991
5	-12,598	713,8	5,167	0	0	0

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

4.4 EXEMPLO 4: PÓRTICO PLANO DE 6 NÓS

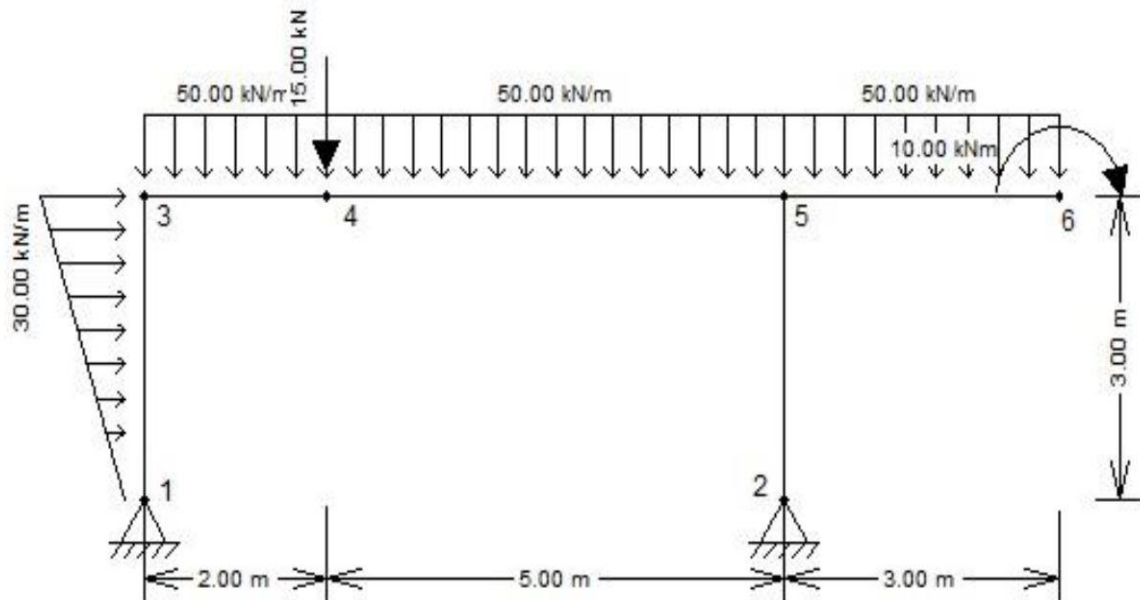
Este exemplo foi retirado do trabalho desenvolvido por Ribeiro (2019), e retrata um pórtico plano que está submetido à diversas cargas. Na Figura 4.9 podemos ver claramente como essas cargas estão atuando na estrutura. As propriedades dos membros estão na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 - Propriedades dos materiais - exemplo 4

BARRAS	BASE (m)	ALTURA (m)	E (kPa)	ν	MATERIAL
Todas as barras	0,20	0,20	25000000	0,2	-

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.9 - Carregamentos - exemplo 4



Fonte: RIBEIRO (2019)

Na Tabela 4.11 temos os valores dos deslocamentos gerados pelo programa e os resultados obtidos pelo trabalho de Ribeiro (2019).

Tabela 4.11 - Deslocamentos nodais - exemplo 4

(continua)

DESLOCAMENTOS						
PROGRAMA						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
1	0	0	0	0	0	-0,07465
2	0	0	0	0	0	-0,09314
3	0,22449	-0,00042	0	0	0	-0,07924
4	0,22441	-0,13281	0	0	0	-0,03529

Tabela 4.11 - Deslocamentos nodais - exemplo 4

(conclusão)

DESLOCAMENTOS						
PROGRAMA						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
5	0,22421	-0,00113	0	0	0	-0,03792
6	0,22421	-0,28027	0	0	0	-0,11442
Ribeiro (2019)						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
1	0	0	-	-	-	0,07465
2	0	0	-	-	-	0,09314
3	-0,22449	0,00042	-	-	-	0,07924
4	-0,22441	0,13281	-	-	-	0,03529
5	-0,22421	0,00113	-	-	-	0,03792
6	-0,22421	0,28027	-	-	-	0,11442

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

As reações de apoio na estrutura podem ser analisadas na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 - Reações de apoio - exemplo 4

REAÇÕES DE APOIO						
PROGRAMA						
Nós	F_x (kN)	F_y (kN)	F_z (kN)	M_x (kNm)	M_y (kNm)	M_z (kNm)
1	-4,09820	139,28571	0	0	0	0
2	-40,90180	375,71429	0	0	0	0
Ribeiro (2019)						
Nós	F_x (kN)	F_y (kN)	F_z (kN)	M_x (kNm)	M_y (kNm)	M_z (kNm)
1	4,09820	-139,28571	-	-	-	0
2	40,90180	-375,71429	-	-	-	0

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Pode se notar que os valores dos deslocamentos e das reações de apoio são exatamente iguais, mas os sinais invertidos. Isso se deve ao fato que a autora adotou sentidos diferentes, dos aderidos neste trabalho, como podemos ver na figura 4.10.

Figura 4.10 - Referência de sinais



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

4.5 EXEMPLO 5: GRELHA DE 4 NÓS

Na Figura 4.11 exemplifica uma grelha simples que está sendo solicitada por diversas ações. Temos uma carga vertical de 30 kN/m e dois momentos de torção, de 8 kNm em um direção e outro de 10 kNm na outra direção.

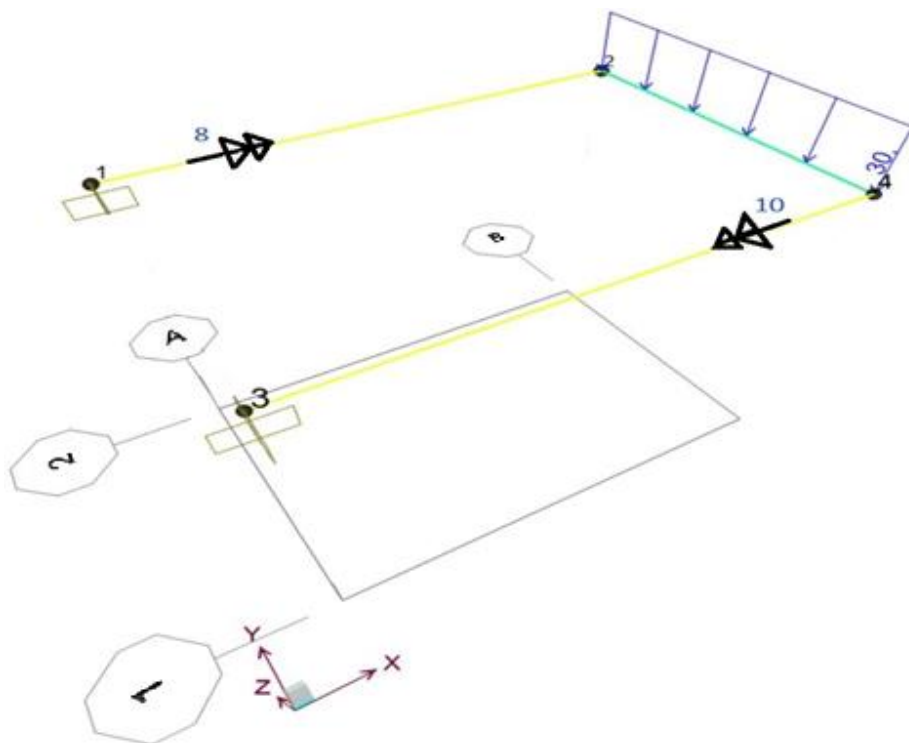
As distâncias de locação da estrutura são: 6 m entre **A** e **B**, e entre **1** e **2** de 4 m. A altura que a grelha está localizada é de 5 m. A Tabela 4.13 representa as propriedades das barras.

Tabela 4.13 - Propriedades dos materiais - exemplo 5

COR	BASE (m)	ALTURA (m)	E (kPa)	ν	MATERIAL
Amarela	0,20	0,60	25000000	0,2	Concreto
Verde	0,20	0,40	25000000	0,2	Concreto

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.11 - Carregamentos - exemplo 5



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

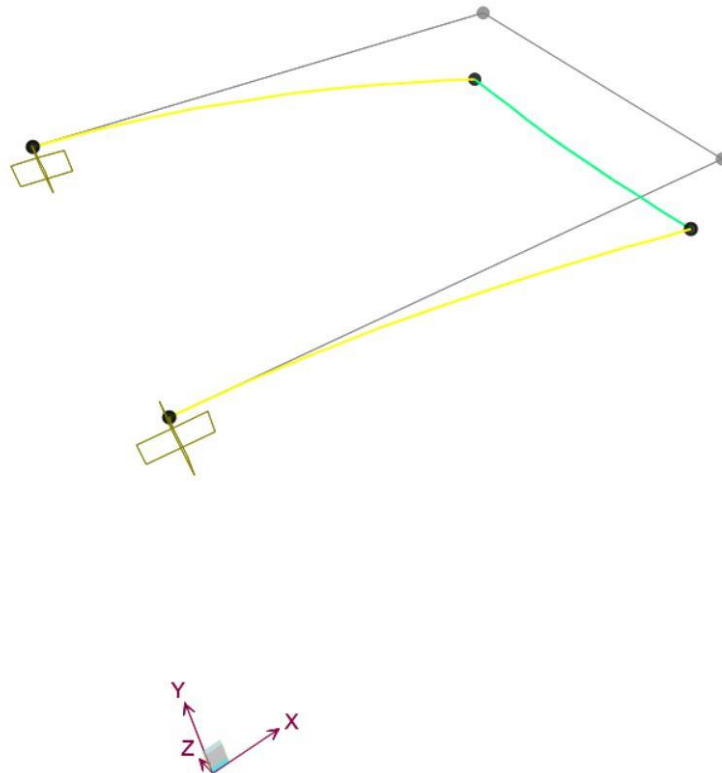
Os deslocamentos nodais processados pelo programa e pelo *software* SAP2000 são mostrados na Tabela 4.14 e a deformação da estrutura na Figura 4.12. A maior diferença encontrada entre os resultados foi de 0,73%, em relação ao SAP2000.

Tabela 4.14 - Deslocamentos nodais - exemplo 5

DESLOCAMENTOS						
PROGRAMA						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
1	0	0	0	0	0	0
2	0	-0,04848	0	0,00260	0	-0,01211
3	0	0	0	0	0	0
4	0	-0,04752	0	-0,00315	0	-0,01189
SAP 2000						
Nós	Δ^x (m)	Δ^z (m)	Δ^y (m)	θ^x (rad)	θ^z (rad)	θ^y (rad)
1	0	0	0	0	0	0
2	0	-0,04882	0	0,00260	0	0,01211
3	0	0	0	0	0	0
4	0	-0,04787	0	-0,00315	0	0,01189

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.12 - Deformação - exemplo 5



Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

As reações de apoio podem ser analisadas na Tabela 4.15. A maior diferença encontrada entre os valores foi de 0,05%, em relação ao SAP2000.

Tabela 4.15 - Reações de apoio - exemplo 5

REAÇÕES DE APOIO						
PROGRAMA						
Nós	F_x (kN)	F_y (kN)	F_z (kN)	M_x (kNm)	M_y (kNm)	M_z (kNm)
1	0	60,70071	0	-11,04869	0	363,77804
3	0	59,29929	0	10,24586	0	356,22196
SAP 2000						
Nós	F_x (kN)	F_z (kN)	F_y (kN)	M_x (kNm)	M_z (kNm)	M_y (kNm)
1	0	60,698	0	-11,0441	0	-363,7655
3	0	59,302	0	10,2505	0	-356,2345

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

4.6 EXEMPLO 6: VIGA DE 5 NÓS

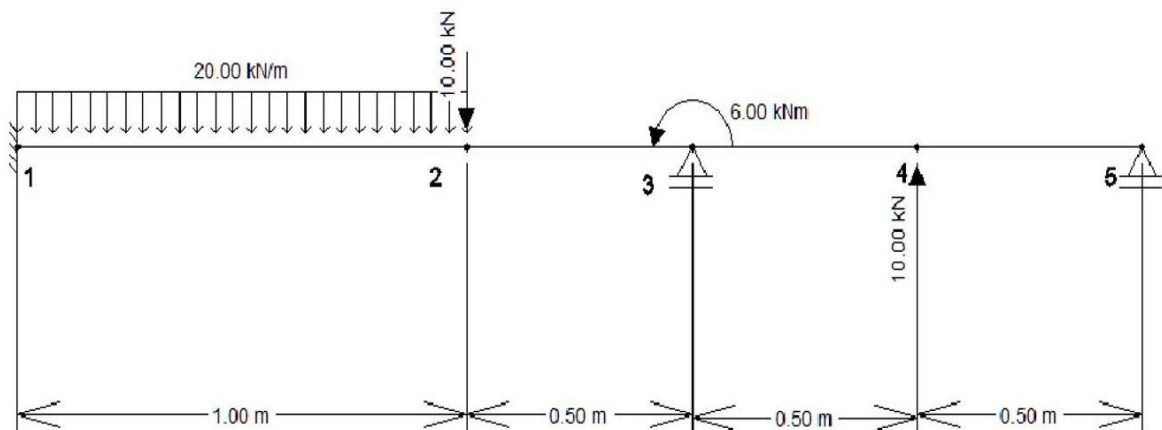
Assim como o exemplar trabalhado na Seção 4.4, este exemplo foi extraído do trabalho elaborado por Oliveira (2017), que ilustra uma viga com várias cargas sendo aplicadas em diferentes pontos, como notadamente, podemos ver na Figura 4.13. Logo em seguida na Tabela 4.16 as características dos elementos.

Tabela 4.16 - Propriedades dos materiais - exemplo 6

BARRAS	BASE (m)	ALTURA (m)	E (kPa)	ν	MATERIAL
Todas as barras	0,15	0,30	100000	0,2	-

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Figura 4.13 - Carregamentos - exemplo 6



Fonte: OLIVEIRA (2017)

Na Tabela 4.17 temos os deslocamentos nodais gerados pelo programa, afim de complementar a análise feita por Oliveira (2017).

Tabela 4.17 - Deslocamentos nodais - exemplo 6

Deslocamentos						
Programa						
Nós	Δ^x (m)	Δ^y (m)	Δ^z (m)	θ^x (rad)	θ^y (rad)	θ^z (rad)
1	0	0	0	0	0	0
2	0	-0,02254	0	0	0	0,01646
3	0	0	0	0	0	0,06442
4	0	0,01478	0	0	0	-0,00574
5	0	0	0	0	0	-0,04147

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

As reações solicitantes nos apoios podem ser verificadas na Tabela 4.18, onde temos os resultados obtidos pelo programa e pelo Oliveira (2017). A diferença maior encontrada entre os dados foi de 1,86%, em relação ao trabalho de Oliveira (2017).

Tabela 4.18 - Reações de apoio - exemplo 6

REAÇÕES DE APOIO						
PROGRAMA						
Nós	F_x (kN)	F_y (kN)	F_z (kN)	M_x (kNm)	M_y (kNm)	M_z (kNm)
1	0	22,46405	0	0	0	7,34314
3	0	7,18301	0	0	0	0
5	0	-9,4706	0	0	0	0
Oliveira (2017)						
Nós	F_x (kN)	F_y (kN)	F_z (kN)	M_x (kNm)	M_y (kNm)	M_z (kNm)
1	0	22,46	-	-	-	7,34
3	0	7,18	-	-	-	0
5	0	-9,65	-	-	-	0

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

CAPÍTULO 5 CONCLUSÃO

A forma de como o método da rigidez é concebida e constituída, matricialmente, se mostrou uma ferramenta excepcional para o uso na programação, em que, se utiliza da interação sistemática entre as ações e as propriedades dos elementos, para obter os deslocamentos de cada nó da estrutura. A partir disso, faz-se todos os arranjos matriciais para determinação das reações de apoio.

O programa gerado no Matlab®, se mostrou bem eficaz para o cálculo de pórticos espaciais, pórticos planos, grelhas e vigas. Com relação precisão dos dados, os valores foram satisfatórios em comparação com SAP2000 – que utiliza o método dos elementos finitos – e com os outros trabalhos da mesma linha de pesquisa, mesmo apresentando diferenças, em alguns casos, a partir da terceira ou segunda casa após a vírgula.

O tempo de processamento do programa se demonstrou aceitável, em aferição com o *software* SAP2000, apresentando uma rapidez maior. Isso se deve ao fato, de que além do SAP2000 ter um método de cálculo diferente, ele processa várias outras informações simultaneamente. Em quanto que no programa, ele é direto e objetivo.

Várias são as melhorias que podem ser implementadas no programa. A começar com implementação visual e a interatividade do usuário na inserção de dados. Pois, para estruturas cada vez mais complexas, o trabalho de inclusão de dados se torna inviável e improdutivo da forma que se apresenta agora.

Outras funções podem ser implementadas no programa, como: os efeitos devido às ações de temperatura, deformações iniciais dos membros, recalque dos apoios. Ainda pode ser incorporado os cálculos de esforço normal, cortante, momento fletor e momento torçor nas barras.

Ainda se tratando da questão visual, seria indispensável o implemento da saída de todas as informações graficamente, para se tornar mais didático e atrativo para os usuários.

REFERÊNCIAS

CAVALCANTI, M. V. S. **Análise Matricial de Estruturas Reticuladas**: Um curso para acadêmicos de Engenharia Civil. Anápolis, 2006.

FERREIRA, L. A. **Análise Matricial De Grelhas Pelo Método Da Rigidez**. 2019. 31 f. TCC(Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Instituto Federal de Goiás, Jataí. 2019.

GERE, J. M; WEAVER, W. **Análise de Estruturas Reticuladas**. RIO DE JANEIRO: Guanabara, 1987. 443p.

HIBBELER, R. C. **Análise das Estruturas**. 8. ed. SÃO PAULO: Pearson Education do Brasil, 2013. 522p.

KUMMER, F. D. **Análise de Pórticos Espaciais pelo Método da Rigidez**: consideração dos efeitos da deformação por cortes. 2014. 7 f. TCC (Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas**: Conceitos e métodos básicos. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. 524p.

OLIVEIRA, P. L. **Análise Matricial De Estruturas Pelo Método Da Rigidez**. 2017. 57 f. TCC(Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Instituto Federal de Goiás, Jataí. 2017.

RIBEIRO, K. S. **Análise matricial de estruturas pelo método da rigidez – pórtico plano**. 2019. 26 f. TCC(Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Instituto Federal de Goiás, Jataí. 2019.

SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas**: formulação matricial e implementação computacional. 1. ed. RIO DE JANEIRO: Editora Ciência Moderna Ltda., 2005. 346p.

APÊNDICE A – MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA

Para utilização do programa, segue nessa seção, uma guia contendo às informações necessárias para que o programa faça a análise da estrutura. Obtendo os resultados dos deslocamentos nodais e das reações de apoio.

Para o seu funcionamento é necessário que seja criado um arquivo de texto no formato .txt chamado “Entrada”. Outro arquivo, chamado de “Relatorio”, é gerado pelo programa. Ambos, são respectivamente, a entrada dos dados e a saída das informações. Esses dois arquivos devem constar na mesma pasta que o arquivo executável do programa.

No Apêndice B são apresentados os arquivos de entrada que foram desenvolvidos neste trabalho. Na Tabela 5.1 mostra como os termos estão organizados, e logo abaixo, temos as especificações de cada termo que compõem o arquivo e alguns aspectos que devem ser observados.

Tabela 5.1- Referência de dados

1)	3					
2)	a	b	c			
	01.00	05.00	05.00			
	07.00	05.00	05.00			
	01.00	05.00	01.00			
3)	3					
4)	a	b	c	d	e	f
	1	2	0.20	0.60	25e6	0.2
	2	3	0.20	0.60	25e6	0.2
	3	1	0.20	0.40	25e6	0.2
5)	a	b	c	d	e	f
	1	0	1	1	0	1
	1	1	0	1	1	1
	1	1	1	0	1	1
6)	4					
7)	1					
8)	a	b	c	d		
	3	15	2	0		

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

- 1) Número de nós (qualquer número inteiro) ;
- 2) Coordenadas dos nós (qualquer número inteiro, ou decimal – desde que – separado por ponto);
 - a. Coordenada em X.

- b. Coordenada em Y.
 - c. Coordenada em Z.
- 3) Número de barras (qualquer número inteiro);
- 4) Propriedades das barras;
- a. Nó inicial (qualquer número inteiro).
 - b. Nó final (qualquer número inteiro).
 - c. Base da seção do elemento (qualquer número inteiro, ou decimal – desde que – separado por ponto).
 - d. Altura da seção do elemento (qualquer número inteiro, ou decimal – desde que – separado por ponto).
- A altura será referida no eixo Y para vigas e X para pilares.
- e. Módulo de elasticidade longitudinal (qualquer número inteiro, ou decimal – desde que – separado por ponto).
 - f. Coeficiente de Poisson (qualquer número inteiro, ou decimal – desde que – separado por ponto).
- 5) Restrições para os nós, apenas 1 ou 0 (1 para livre e 0 restringido);
- a. Translação em X.
 - b. Translação em Y.
 - c. Translação em Z.
 - d. Momento em X.
 - e. Momento em Y.
 - f. Momento em Z.
- 6) Número de Cargas (qualquer número inteiro);
- 7) Tipo de carga, apenas 1, 2, 3, 4 ou 5);
- 1 para carga concentrada.
 - 2 para carga distribuída.
 - 3 para momento fletor.

4 para carga distribuída triangular.

5 para momento torçor.

8) Propriedades das cargas.

a. Número da barra que a carga está (qualquer número inteiro).

b. Valor da carga (qualquer número inteiro, ou decimal – desde que – separado por ponto).

Para as cargas no sentido vertical atuantes nos elementos, positivo para baixo e negativo par cima.

Para as cargas no sentido horizontal, dependerá das posições dos nós, inicial e final, informados.

c. Distância do nó inicial (qualquer número inteiro, ou decimal – desde que – separado por ponto).

Não é necessário informar a distância para às cargas do tipo 2 e 4.

d. Ângulo de rotação da carga na barra, apenas 0 ou 90.

0 para carga atuando perpendicular ao eixo longitudinal da barra, e 90 para rotação desta carga – no eixo longitudinal da barra – de 90° no sentido anti-horário. Não é necessário informar o ângulo para à carga do tipo 5.

APÊNDICE B – ENTRADA DOS EXEMPLOS

Os exemplos 2 e 3, por terem uma grande quantidade de dados, não foram acrescentados por praticidade. Mas seguem o mesmo roteiro de entrada que os demais.

Tabela 5.2 - Entrada - exemplo1

8
01.00 05.00 -05.00
07.00 05.00 -05.00
01.00 05.00 -01.00
07.00 05.00 -01.00
01.00 00.00 -05.00
07.00 00.00 -05.00
07.00 00.00 -01.00
01.00 00.00 -01.00
8
1 2 0.20 0.60 25e6 0.2
3 4 0.20 0.60 25e6 0.2
1 3 0.20 0.40 25e6 0.2
2 4 0.20 0.40 25e6 0.2
5 1 0.20 0.20 25e6 0.2
8 3 0.20 0.20 25e6 0.2
7 4 0.20 0.20 25e6 0.2
6 2 0.20 0.20 25e6 0.2
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
4
2
1 30 0
1
4 25 2 0
4
2 30 0
1
3 15 2 90

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Tabela 5.3 - Entrada - exemplo 4

6
00.0 000.0 0.0
07.0 000.0 0.0
00.0 003.0 0.0
02.0 003.0 0.0
07.0 003.0 0.0
10.0 003.0 0.0
5
1 3 0.20 0.20 25e6 0.2
2 5 0.20 0.20 25e6 0.2
3 4 0.20 0.20 25e6 0.2
4 5 0.20 0.20 25e6 0.2
5 6 0.20 0.20 25e6 0.2
0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 1
1 1 0 0 0 1
1 1 0 0 0 1
1 1 0 0 0 1
6
2
3 50.0 0
2
4 50.0 0
2
5 50.0 0
4
1 30.0 0
1
3 15.0 2.0 0
3
5 -10.0 3.0 0

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Tabela 5.4 - Entrada - exemplo 5

4
01 05 -05
07 05 -05
01 05 -01
07 05 -01
3
1 2 0.20 0.60 25e6 0.2
3 4 0.20 0.60 25e6 0.2
4 2 0.20 0.40 25e6 0.2
0 0 0 0 0 0
0 1 0 1 0 1
0 0 0 0 0 0
0 1 0 1 0 1
3
2
3 30 0
5
1 8 2 0
5
2 -10 4 0

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

Tabela 5.5 - Entrada - exemplo 6

5
0.0 0 0
1.0 0 0
1.5 0 0
2.0 0 0
2.5 0 0
4
1 2 0.15 0.30 100000 0.2
2 3 0.15 0.30 100000 0.2
3 4 0.15 0.30 100000 0.2
4 5 0.15 0.30 100000 0.2
0 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 1
1 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 1
1 0 0 0 0 1
4
2
1 20 0
1
1 10 1 0
3
2 6 0.5 0
1
3 -10 0.5 0

Fonte: AUTORIA PRÓPRIA

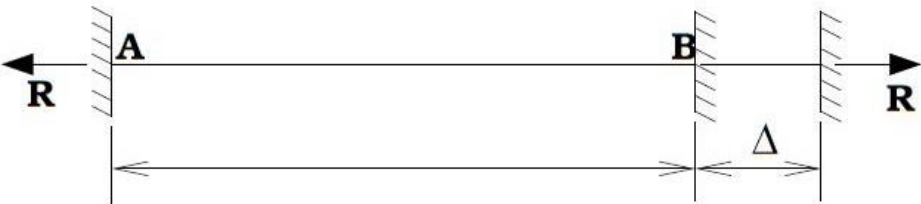
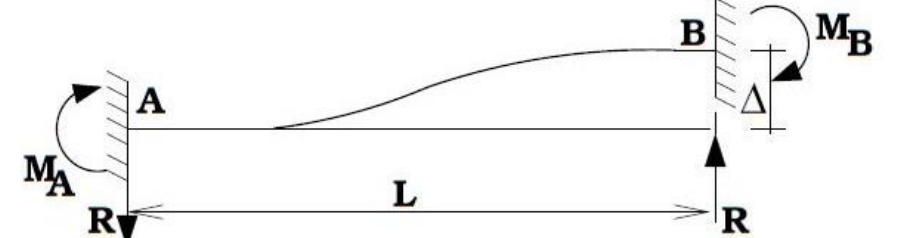
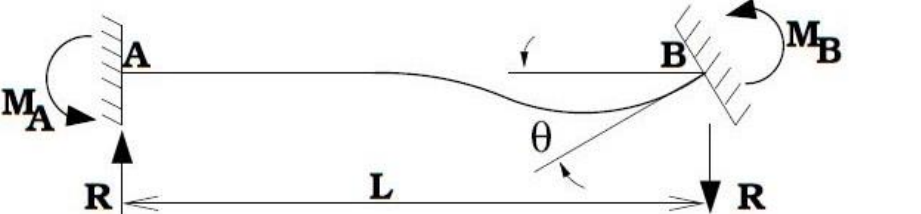
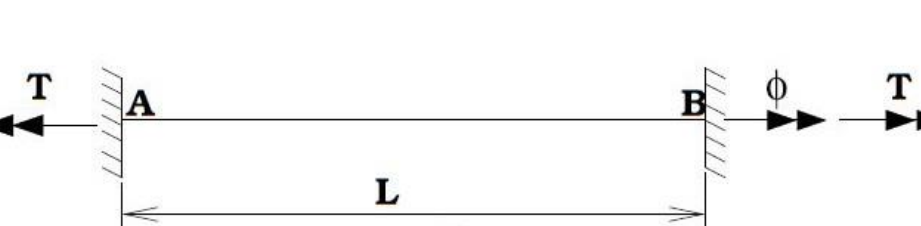
ANEXO A – AÇÕES DE EXTREMIDADE PARA MEMBROS RESTRINGIDOS

Tabela A. 1 - Ações correspondentes aos carregamentos

1 $M_A = \frac{Pab^2}{L^2} \quad M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$ $R_A = \frac{Pb^2}{L}(3a+b) \quad R_B = \frac{Pa^2}{L}(a+3b)$	2 $M_A = -M_B = \frac{Pa}{L}(L-a)$ $R_A = R_B = P$
3 $M_A = \frac{Mb}{L^2}(2a-b) \quad M_B = \frac{Ma}{L^2}(2b-a)$ $R_A = -R_B = \frac{6Mab}{L^3}$	4 $M_A = -M_B = \frac{wL^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{wL}{2}$
5 $R_A = \frac{Pb}{L} \quad R_B = \frac{Pa}{L}$	6 $M_A = \frac{wa^2}{12L^2}(6L^2 - 8aL + 3a^2) \quad M_B = -\frac{wa^3}{12L^2}(4L - 3a)$ $R_A = \frac{wa}{2L^3}(2L^3 - 2a^2L + a^3) \quad R_B = \frac{wa^3}{2L^3}(2L - a)$
7 $T_A = \frac{Tb}{L} \quad T_B = \frac{Ta}{L}$	8 $M_A = \frac{wL^2}{30} \quad M_B = -\frac{wL^2}{20}$ $R_A = \frac{3wL}{20} \quad R_B = \frac{7wL}{20}$

Fonte: GERE E WEAVER (1987, adaptado CALVALCANTE, 2006)

Tabela A. 2 - Ações correspondentes aos deslocamentos

1	 $R = \frac{EA\Delta}{L}$
2	 $M_A = M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad R = \frac{12EI\Delta}{L^3}$
3	 $M_A = \frac{2EI\theta}{L} \quad M_B = \frac{4EI\theta}{L} \quad R = \frac{6EI\theta}{L^2}$
4	 $T = \frac{GJ\phi}{L}$ G = módulo de elasticidade transversal J = momento de inércia polar da seção transversal

Fonte: GERE E WEAVER (1987, adaptado CALVALCANTE, 2006)