



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia De Goiás
Campus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

**METODOLOGIAS ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DE TÓPICOS DE
TEORIA DOS NÚMEROS A NÍVEL MÉDIO**

MARTHUS LOBATO DOS SANTOS

Trabalho de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática

ORIENTADOR: PROF. DR. BRUNO DE PAULA MIRANDA

CO-ORIENTADOR : PROF. DRA. LUCIMEIRE ALVES DE CARVALHO

VALPARAÍSO-GO

2021



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia De Goiás
Campus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

METODOLOGIAS ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DE TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS A NÍVEL MÉDIO

MARTHUS LOBATO DOS SANTOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado
como requisito parcial para a obtenção do
título de Licenciado em Matemática, do
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia, campus Valparaíso-GO

ORIENTADOR: PROF. DR. BRUNO DE PAULA MIRANDA
CO-ORIENTADOR : PROF. DRA. LUCIMEIRE ALVES DE CARVALHO

ANO 2021

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Helio Lino Delfino (CRB-1/3031),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S237m

Santos, Marthus Lobato dos
Metodologias alternativas para o ensino de tópicos de
teoria dos números a nível médio/ Marthus Lobato dos
Santos. - Valparaíso de Goiás, 2021.
54 f. : il.

Orientador: Bruno de Paula Miranda.
Coorientadora: Lucimeire Alves de Carvalho.
TCC (Graduação - Licenciatura em Matemática) -
- Instituto Federal de Goiás - IFG, Campus
Valparaíso de Goiás, 2021.

1. Teoria dos números - matemática. 2. Metodologia
de ensino - matemática. 3. Algoritmo de divisão -
matemática. I. Miranda, Bruno de Paula. II. Carvalho,
Lucimeire Alves de. III. Título.

CDD 510

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor:

Matrícula:

Título do Trabalho:

Autorização - Marque uma das opções

- ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
- ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
- ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Ulp Araújo, 08/05/2014
Local Data

Marthius Lobato dos Santos
Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS VALPARAÍSO

ATA Nº 04/ 2021

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE APRESENTAÇÃO E DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos onze dias do mês de março do ano de dois mil e vinte e um, às 17:00 horas, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Valparaíso de Goiás situado à Avenida Saia Velha, Km 6, BR-040, s/n, Bairro: Parque Esplanada V, da cidade de Valparaíso de Goiás, Estado de Goiás, foi realizada a sessão pública de apresentação e defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do Graduando **MARTHUS LOBATO DOS SANTOS** (matrícula 20171150040126) do curso de Licenciatura em Matemática, no segundo semestre letivo do ano de dois mil e vinte. A banca foi composta pelos seguintes membros: Bruno de Paula Miranda, Lucimeire Alves de Carvalho e Dióscoros Brito Aguiar Júnior, sob a presidência do primeiro. O trabalho de conclusão de curso tem como título "**METODOLOGIAS ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DE TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS A NÍVEL MÉDIO**", da área de Matemática, sob orientação da Prof. Bruno de Paula Miranda. Após arguição da banca avaliadora, levando-se em consideração a relevância científica do trabalho, os resultados e conclusões apresentados, o atendimento às normas de apresentação e formatação, bem como os aspectos éticos e legais, a/o autora/autor obteve nota 9,1 e a banca considerou o trabalho:

(X) aprovado;

() aprovado com ressalvas, necessitando alterações/adequações, conforme sugestões;

() reprovado, conforme justificativa a seguir.

Justificativa e/ou Sugestões de alterações/adequações: (Anexar página extra com justificativa/sugestões, se necessário).

Encerra-se a presente sessão às 18 horas e 03 minutos. Eu, Prof. Bruno de Paula Miranda, dato e assino a presente ata que segue assinada por todos os membros da Banca e pelo graduando.

(assinado eletronicamente)

Orientadora: Prof. Bruno de Paula Miranda

(assinado eletronicamente)

Profa. Lucimeire Alves de Carvalho - IFG - Câmpus Valparaíso

(assinado eletronicamente)

Prof. Dióscoros Brito Aguiar Junior - UNIFESSPA

(assinado eletronicamente)

Marthus Lobato dos Santos

(Graduando)

Documento assinado eletronicamente por:

- Marthus Lobato dos Santos, MARTHUS LOBATO DOS SANTOS - OUTROS - IFG - CÂMPUS VALPARAÍSO DE GOIÁS (10870883001540), em 12/03/2021 22:06:14.
- Lucimeire Alves de Carvalho, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 12/03/2021 18:28:06.
- Dióscoros Brito Aguiar Júnior, DIÓSCOROS BRITO AGUIAR JÚNIOR - OUTROS - IFG - CÂMPUS VALPARAÍSO DE GOIÁS (10870883001540), em 12/03/2021 18:13:11.
- Bruno de Paula Miranda, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 12/03/2021 08:13:49.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 11/03/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 139386

Código de Autenticação: aa6d5116b7



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

BR 040, KM 6, Avenida Saia Velha, S/Nº, Área 8, Parque Esplanada V, VALPARAÍSO DE GOIÁS / GO, CEP 72876-601
(61) 3615-9200 (ramal: 9200)

***Dedico este trabalho e todo empenho
envolvido a meus pais, Marques e Minerva.
Tudo que sou hoje, devo a vocês!***

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que permitiu que chegasse até aqui, e que veio me iluminando neste percurso.

Aos meus avós Irene Ferreira e José Aguiar, por acima de tudo, incentivarem meu empenho nos estudos e depositarem em mim a oportunidade o qual não tiveram.

Aos meus pais, Minerva e Marques, grandes professores, não só de carreira como da vida, agem como meus maiores incentivadores das realizações de meus sonhos. Obrigado por serem quem são, minha inspiração.

Aos queridos familiares e a todos que me rodeiam, que tanto confiaram em mim, compreendendo por várias vezes minha ausência dedicada aos estudos.

Ao meu orientador, Professor Doutor Bruno, por seu apoio incondicional, valiosíssimos apontamentos e uma postura otimista que foi ímpar neste trabalho.

A todos os professores que tive até aqui, desde o primeiro momento em uma escola até este momento, em especial os professores João Bosco, Eloísa e Élide, grandes mentes que me espelhava ser. Vocês são os verdadeiros heróis deste país, professores dedicados ao propósito mudar este país.

A todos os meus amigos que me incentivaram neste processo, em especial aos de caminhada, pelo convívio e paciência e aos que contrário o fizeram, instigando mais minha garra e determinação.

Resumo

Esta monografia consiste de um levantamento bibliográfico de dissertações de Mestrados Profissionais em Matemática que tratam de metodologias alternativas para o ensino de tópicos de Teoria dos Números assim como da elaboração e implementação de uma proposta de metodologia alternativa (realizada na modalidade de ensino remoto) sobre o tópico de algoritmo de divisão para alunos do Ensino Médio do Instituto Federal de Goiás, Campus Valparaíso.

Palavras chave: Divisibilidade, Educação, Teoria dos Números.

Abstract

This dissertation consists of a bibliographic survey of dissertations of Professional Master's Degrees in Mathematics that deal with alternative methodologies for teaching Number Theory topics as well as the elaboration and implementation of an alternative methodology proposal (carried out in the remote teaching modality) about the division algorithm topic for high school students at the Federal Institute of Goiás, Campus Valparaíso.

Key words: Divisibility, Education, Number Theory.

1 Sumário

1. Sumário.....	11
2. Lista De Ilustrações	12
3. Lista de Gráficos.....	13
4. Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos	14
5. Introdução.....	15
6. Marcos Legais.....	17
7. Análise Bibliográfica.....	20
7.1. Teoria dos Números: um estudo com resolução de problemas na Educação Básica	20
7.2. Teorema Chinês Do Resto e sua aplicação no ensino médio	22
7.3. Uma abordagem do ensino de Congruência na Educação Básica	24
7.4. Números Primos e Congruências: Tópicos de Teoria dos Números na Educação Básica.....	26
7.5. Teoria dos Números no Ensino Básico: Um estudo de caso no 2º Ano do Ensino Médio.	29
7.6. Introdução à Teoria dos Números: Uma Nova Proposta para Educação Básica	31
7.7. Dos materiais analisados.....	34
8. Proposta de Metodologia.....	36
9. Estruturação do conteúdo apresentado.	38
10. Resultados.....	42
11. Conclusão	49
12. Bibliografia.....	51
13. Apêndice.....	53

2 Lista De Ilustrações

Figura 1 – Descrição dos componentes de uma divisão	38
Figura 2 – Representação da reta real	39
Figura 3 – Divisão na chave.....	40
Figura 4 – Divisão na chave com parte do dividendo em escrita decimal.....	41
Figura 5 – Pergunta 02 do questionário	45
Figura 6 – Pergunta 03 do questionário	46
Figura 7 – Página 1 do material.	53
Figura 8 – Página 2 do material.	54
Figura 9 – Página 3 do material.	55
Figura 10 – Página 4 do material.	56
Figura 11 – Página 5 do material.	57

3 Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Grau de Afinidade Matemática	42
Gráfico 2 - Questão 01 - Atividade.....	45

4 Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais

EF – Ensino Fundamental

EM – Ensino Médio

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IFG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

MDC - Máximo Divisor Comum

MMC - Mínimo Múltiplo Comum

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica

TCR – Teorema Chinês dos Restos

TN – Teoria dos Números

5 Introdução

A Teoria dos Números é uma área da matemática cujo foco principal é estudar a aritmética dos números inteiros. Veremos a seguir que este tópico é um problema instaurado em nossa Educação Básica visto que por vezes tem seus conceitos e propriedades fundamentais apresentados de maneira superficial e pouco atraente, o que reflete no desenvolvimento do aluno em sua vida acadêmica e aos desafios que são propostos. [16, 20]

Deste modo, o intuito deste trabalho é fazer uma pesquisa bibliográfica sobre metodologias alternativas para a exposição desses conteúdos (nos ateremos ao nível médio) que utilizam ferramentas de TN com uma roupagem mais adequada ao público final, conciliando rigor matemático com as técnicas usualmente expostas num âmbito de mera decoração. Também proporemos uma metodologia alternativa para o ensino de divisão de inteiros, assim como faremos uma intervenção aplicando-a para alunos de nível médio do Instituto Federal de Goiás, Campus Valparaíso.

Primeiramente, realizaremos um levantamento de documentos como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC destacando as devidas habilidades às quais a apresentação deste conteúdo se encaixa, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN visando algumas recomendações de ensino e tudo isto amparado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN, prevendo um planejamento prévio de todo este material.

Com esta pesquisa legislativa do contexto ao qual alguns tópicos desta área podem ser reaplicados no Ensino Médio, avançaremos a uma análise bibliográfica de como está a produção teórica referente a este assunto em nosso país, salientando quais são os principais tópicos postos em pauta, os conteúdos que foram julgados cabíveis a reprodução no Ensino Médio, assim como as respectivas propostas de metodologias apresentadas e os resultados obtidos em cada trabalho. Vale ressaltar que no momento da produção deste trabalho, o país enfrenta uma situação pandêmica de modo que o acesso presencial às escolas foi reduzido drasticamente e que, por conseguinte, minou

algumas estratégias de pesquisa, obrigando os pesquisadores a mudarem suas ferramentas e obterem alguns resultados.

A partir desta análise bibliográfica, segue-se este trabalho com uma reflexão de quais são os principais tópicos que devem ser revistos e aprimorados para uma nova apresentação destes conteúdos no Ensino Médio. Este filtro de conteúdo servirá para última parte deste trabalho, uma intervenção em uma turma de 1º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Goiás – Campus Valparaíso utilizando recursos tecnológicos adotados pelo modelo de ensino síncrono, realizaremos uma pesquisa com os alunos desta turma para definirmos qual seria o conteúdo mais atrativo dado os dados colhidos.

A partir desta escolha, elaboraremos um plano de aula, apresentando a melhor estratégia possível para abordar o conteúdo adotado de maneira eficaz dadas as opções disponíveis.

Vale ressaltar também nossa preocupação na apresentação de todo o conteúdo escolhido, uma vez que a linguagem voltada a este público alvo em específico é crucial para que o aluno absorva o que foi apresentado.

Por fim, será realizado um novo questionário, buscando levantar resultados que nos apontarão o quão proveitoso foi a intervenção deste conteúdo agora no Ensino Médio, de maneira que estes resultados contribuam para a conclusão deste trabalho, e que nos traga alguma reflexão de como a Teoria dos Números pode ser aplicada no Ensino Médio de maneira mais rigorosa e proveitosa.

6 Marcos Legais

Pesquisas como PISA e SAEB indicam que a matemática aplicada nas escolas atualmente, recorrentemente faz uso de um processo de memorização de passos o qual os professores estão acostumados a reproduzir a seus alunos e, por conseguinte, os mesmos reproduzem o que decoraram quando solicitados, como em atividades e avaliações. Segundo o PISA de 2018, no que concerne à área da matemática [7]:

68,1% dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em matemática e não possuem nível básico, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras. Apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes do Pisa apresentou nível máximo de proficiência na área. (“Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil - Artigo - INEP,” 2018)

Um dos fatores que justifica este resultado é a falta de imersão do aluno no conteúdo em questão, de tal maneira que os alunos se privam de ter domínio da ferramenta que a matemática pode ser. Segundo Machado, 2016 p. 223 apud PEREIRA AMADOR; FAJARDO, [s.d.):

A Matemática é um instrumento fundamental para a expressão e compreensão da realidade; nisso reside seu significado, sua serventia. De modo geral, é muito fácil concordar com tal fato, mas a cada novo tema que tenta ensinar, o professor de Matemática é questionado: “Para que serve isto?”. (MACHADO, 2016, p. 223)

Para tal, é necessário que o aluno reconheça o valor agregado que a matemática carrega e para que isto aconteça a ponte mais provável que levará este aluno a tal reconhecimento é o professor. Conforme os Conhecimentos de Matemática postos pelo PCN, temos:

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (MÉDIO et al., [s.d.])

Neste contexto, surge a BNCC, documento de caráter normativo que define quais são as aprendizagens essenciais que todo aluno deve ter acesso em qualquer rede de ensino do país. Por ser referência nacional na elaboração de currículos dos sistemas

educacionais, prevê em quatro áreas, quais serão os conteúdos ministrados dentro de sala de aula.

A BNCC é fundamentada em dez competências gerais, que buscam a partir de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, formar um aluno com plena capacidade de desempenhar suas atividades profissionais e o formar como cidadão. Estas competências encontram-se atreladas a quais habilidades um conteúdo que compõe a BNCC. Na área de Matemática e suas Tecnologias, foco deste trabalho, filtraremos quais conteúdos de Teoria dos Números se fazem presentes no currículo do Ensino Médio.

No que tange às competências específicas da Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio, a Teoria dos Números se encaixa em duas. A primeira nos diz que [3]:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (“Download da BNCC,” 2021)

Assim sendo, utilizaremos da Teoria dos Números, o conteúdo de Divisibilidade, trazendo uma visão mais formalizada, para reiterar um conteúdo supostamente básico para o Ensino Médio, mas que ainda é uma ponta solta em nossa educação, refletindo diretamente no baixo desempenho do aluno em sistemas avaliativos.

Com respeito a outra competência, ela nos diz o seguinte [3]:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (“Download da BNCC,” 2021)

Isto nos abre um leque de possibilidades quanto a aplicação de propriedades matemáticas simples de serem mostradas, mas enriquecedoras com respeito aos conteúdos que os alunos irão ver em provas como OBMEP, ITA, IME, ENEM, concursos, vestibulares, etc.

Logo, ao utilizar a Divisibilidade que usualmente é apresentada no Ensino Fundamental II, agora no Ensino Médio, possibilita ao aluno uma revisão mais consciente do que se trata este conteúdo, haja vista que contam com uma bagagem de conhecimento maior e estão matematicamente amadurecidos, possibilitando ao professor a possibilidade de desenvolver atividades mais interessantes e desafiadoras, atraindo o aluno e reforçando conceitos, que agora estão sendo apresentados com mais rigor.

7 Análise Bibliográfica

A partir da contextualização, realizaremos uma análise bibliográfica de teses de mestrado profissional sobre o que vem sendo produzido no país neste nicho de pesquisa. Assim, apresentaremos por ordem cronológica de publicação alguns trabalhos de PROFMAT, destacando suas diversas propostas e quais são suas respectivas estratégias voltadas para o Ensino Médio.

Esta análise servirá como alicerce para a futura proposta de metodologia deste trabalho. Uma vez que este trabalho foi realizado no período pandêmico, reduziu-se consideravelmente o acesso às pesquisas e levantamentos de campo em escolas, de modo que nos atemos a esta pesquisa bibliográfica e aplicação de uma metodologia de ensino alternativa por meio de ensino remoto.

7.1 Teoria dos Números: um estudo com resolução de problemas na Educação Básica

Para começar, temos o trabalho apresentado por Lucidio de Jesus Junior, em 2013 sob o seguinte tema: *Teoria dos Números: um estudo com resolução de problemas na Educação Básica* [9]. Publicado pela Universidade Estadual de Londrina, Lucidio fundamenta seu trabalho na complexidade que as questões apresentadas em provas, como por exemplo, OBMEP e ITA/IME vem tomando, e quão desafiador está se tornando para os conhecimentos disponíveis ao aluno. Segundo o autor, grande parte destes desafios podem ser solucionados com alguns conceitos vistos em Teoria dos Números, como Teorema do Resto Chinês, Aritmética dos Restos, Congruência, Divisibilidade, Mínimo Múltiplo Comum, Máximo Divisor Comum e Números Primos.

Infelizmente, tais conteúdos são de modo geral pouco vistos superficialmente na Educação Básica. Utilizar a Teoria dos Números para resolver estes problemas traria à tona atividades motivadoras aos alunos, como por exemplo, a resolução de restos de divisão de números exorbitantemente grandes, que até mesmo calculadoras básicas ou científicas não conseguiriam computar.

A partir deste método de ensino adotado pelo autor¹, utilizar questões mais elaboradas desenvolve a capacidade de abstração matemática que o aluno tem, onde ele lê, entende e tenta reproduzir o que entendeu em outros contextos, exercitando também seu raciocínio ao transferir seu conhecimento absorvido para uma expressão com símbolos. Deste modo o professor torna-se uma figura essencial, sendo o responsável por inserir estes conceitos para seus alunos como uma forma de ensino atraente e proveitosa, e não simplesmente uma reprodução do que está apresentado usualmente em livros didáticos adotados.

Com esta proposta, uma ferramenta atrativa seria utilizar destes conceitos introdutórios de TN para a resolução de alguns problemas, como os de Divisibilidade. E para contextualizar este assunto no Ensino Médio, foram propostas quatro situações problemas envolvendo o Teorema Chinês dos Restos e Tópicos Fundamentais de Aritmética, Congruência e Congruência Linear.

Com a apresentação dos enunciados das questões, é colocado um material contendo algumas definições, teoremas fundamentais com suas respectivas Demonstrações, Lemas, Corolários e por fim o processo de Princípio da Indução Finita.

No tópico voltado para revisão, abordou-se a Aritmética em um amplo contexto que, após uma introdução, apresenta-se os seguintes subtópicos: Divisibilidade, algoritmo da divisão de Euclides, Lema dos Restos, Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum, Números Primos, Lema de Euclides, Teorema Fundamental da Aritmética e por fim O Crivo de Eratóstenes.

Com a apresentação destes resultados e respectivamente suas demonstrações, o autor propõe o estudo de novos tópicos que decorrem desta revisão e ressalta que deste ponto em diante, o que está posto é tratado exclusivamente na graduação, mas nada impede o professor de aplicar estes novos tópicos na Educação Básica.

Quanto ao conteúdo, é apresentado a Aritmética dos Restos contendo exemplificações e quais são suas aplicabilidades, seguido por um subtópico abordando Congruências, Sistema Completo de Resíduos e também abordando onde isto pode ser

encontrado em nosso cotidiano, trazendo a criptografia e o código de barras como exemplos. Para finalizar o tópico é apresentado o Pequeno Teorema de Fermat.

No capítulo seguinte é apresentado Congruências lineares, já abordando a resolução de exercícios em uma perspectiva não só numérica, mas agora algébrica. Por fim, o último tópico de revisão apresentado é o Teorema Chinês dos Restos.

Em virtude da apresentação de uma revisão de conceitos básicos e a exposição de novos, temos a resolução comentada de cada uma das quatro questões postas no começo do trabalho bem como a sugestão de novas questões no final, incluindo questões da OBMEP.

Por fim, em sua conclusão, defende que os conteúdos vistos no âmbito de revisão deveriam ser vistos com mais frequência e outros como o Lema dos Restos, o qual foi necessário para responder questões básicas, não se encontram presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática e nem nas Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática. Sugere que estas atividades poderiam ser inicialmente propostas como atividades complementares ou desafios, instigando assim o interesse dos alunos. Reintegra também a necessidade de uma formação continuada do professor, o qual deve continuar participando de congressos e eventos relacionados à matemática, contribuindo para comunidade científica e sempre instigando a atratividade da matéria na vida dos alunos.

7.2 Teorema Chinês Do Resto e sua aplicação no ensino médio

No segundo trabalho, feito por Adriano Sales Nascimento, defendido em 2014 na Universidade Federal do Mato Grosso sobre o *Teorema Chinês Do Resto e sua aplicação no ensino médio* [15], é proposto uma intervenção em turmas do 2º e 3º ano do Ensino Médio.

O intuito principal do trabalho é desenvolver um minicurso abordando o Teorema Chinês do Resto (TCR) e seus conteúdos predecessores nas turmas da Educação básica, uma vez que a para abordarmos este tema, é necessário revisar alguns conteúdos, corroborando para um desenvolvimento em outras áreas de ensino da

matemática básica, como MMC, MDC, números primos entre outros, bem como reconhecer seu peso em provas e vestibulares os quais os alunos são submetidos e não tem domínio destas ferramentas matemáticas.

Nesta dissertação, temos o conteúdo escolhido para esta proposta apresentado de forma contínua em seus respectivos capítulos, mesclando a teoria, a exemplificação e sua resolução, proporcionando uma orientação ao leitor de como proceder caso o aborde com seus alunos.

Ao levantar o domínio dos participantes nas duas unidades escolares o qual tinha acesso para aplicar esta proposta, foi identificado a necessidade de introduzir o conteúdo por meio de uma abordagem de revisão dos conteúdos predecessores do TCR, permitindo um nivelamento dos alunos participantes, e assim, o desenvolvimento coletivo deste projeto.

O primeiro capítulo é voltado para a estratégia adotada neste processo, justificando sua aplicação bem como os conteúdos julgados necessários para lograr o objetivo. Entre outros, um dos fatores diferenciais é a imersão que os exercícios propostos entregam ao aluno, fazendo com que o problema tenha sentido e prenda o foco do mesmo em sua resolução.

No segundo capítulo de seu trabalho, apresenta-se toda a fundamentação teórica considerada necessária para ministrar este conteúdo, abarcando neste processo, a divisibilidade, divisão Euclidiana, MDC, MMC, Números Primos, Congruência Linear, Aritmética dos Restos e Classes Residuais. Neste capítulo é importante ressaltar que toda a explicação dispõe de exemplos e suas soluções comentadas, buscando maior imersão do leitor neste período.

Conforme o comentário feito na introdução do trabalho, esta parte de revisão que é posta como o capítulo 2, foram distribuídos em 4 materiais para o aluno, os quais infelizmente não foram anexados como apêndice para análise. Os outros três materiais finais, abordaram além do Teorema Chinês do Resto, exercícios complementares vinculados.

No terceiro capítulo, vemos uma breve introdução do Teorema Chinês do Resto em si, acompanhado de proposições, corolários e suas devidas demonstrações. Isto posto, são apresentados diversos exercícios que visam explorar não só o TCR como aspectos definidos na BNCC, como o raciocínio, a formalização de resoluções, a identificação de novos símbolos matemáticos bem como suas resoluções comentadas.

No quarto capítulo temos um relatório sobre o minicurso proposto, contendo sua apresentação formal e quais foram os resultados identificados nesta jornada. Neste momento o autor põe os principais pontos que foram cruciais para a elaboração deste projeto. O primeiro seria a dilatação do período predefinido, haja vista que a revisão, apresentação de cada um dos conteúdos citados anteriormente e o exercício dos mesmos durante o mesmo período de encontro diário, não foi condizente.

Associado a este curto intervalo de aplicação, algumas alegações foram realizadas no que diz respeito a abordagem de uma nova linguagem a qual os alunos de Ensino Médio não estavam habituados, haja vista que algum destes assuntos abordados, há a presença de novos símbolos matemáticos, nomenclaturas e definições.

Por fim, foi constatado pelo autor que para uma avaliação concisa da proposta, seria necessária uma participação mais expressiva com relação ao número de participantes, identificando pontos que precisam ser revistos. Entretanto, em sua conclusão foi proposto que o conteúdo apresentado poderia também ser continuado em outros segmentos e tópicos como equações Diofantinas, criptografia, MMC, MDC e suas propriedades e números primos poderiam também ser apresentados/destrinchados.

7.3 Uma abordagem do ensino de Congruência na Educação Básica

No terceiro trabalho analisado, temos a produção de Ataniel Rogério Gonçalves Gomes defendendo seu Mestrado Profissional com o seguinte título: *Uma abordagem do ensino de Congruência na Educação Básica* [6], publicado pela Universidade Federal de Sergipe em 2015.

Em seu trabalho, no primeiro capítulo, Ataniel com a prerrogativa de evitar que o leitor frequentemente busque outras obras para a compreensão, apresenta uma revisão de conceitos de Teoria dos Conjuntos, com exemplos vinculados às definições, subconjuntos e suas respectivas operações. Em um subcapítulo é colocado também como se dá um Produto Cartesiano, com respeito às suas relações e suas funções.

A seguir é apresentado um novo capítulo tratando sobre a Aritmética dos inteiros, contemplando assuntos como a princípio da boa ordem, Princípio da Indução Finita, Divisibilidade, Máximo Divisor Comum, Números Primos, Teorema Fundamental da Aritmética, Mínimo Múltiplo Comum, os ideais em $\mathbf{Z}$ e as equações Diofantinas Lineares.

No terceiro capítulo, é abordado a Congruência e Aritmética Modular, com uma introdução a partir da contribuição de Carl Friedrich Gauss (1777-1885), considerado por alguns autores como precursor da Teoria dos Números. Em seu tempo, a contribuição de Gauss foi fundamental para a resolução de questões voltadas para descrever comportamentos da natureza. Expõe-se os conteúdos de Congruência, Pequeno Teorema de Fermat, Aritmética Modular e suas aplicações, como os critérios de Divisibilidade por 2, 3, 5, 7, 9 e 11, sempre acompanhados de exemplificações.

No quarto capítulo, como justificativa para uma sequência didática, o autor traz alguns conceitos da didática matemática pouco vistos no cotidiano de dentro de sala que corroboram para a estruturação de sua proposta. O primeiro deles é definido como Transposição Matemática, voltado para acessibilidade daquele conteúdo matemático no que concerne qual é a realidade daquele aluno e quais são os melhores resultados que podem ser obtidos. O segundo é o Contrato Matemático, o qual funciona como uma parceria estabelecida entre as partes do processo de ensino, como o objetivo do curso, a realidade escolar e as condições de avaliação, visando a construção e aquisição do conhecimento na relação didática que se estabelece. Por fim, temos a Engenharia Didática, um termo que vem sendo utilizado há algumas décadas e que sob uma perspectiva experimental, propõe realizações didáticas em sala de aula, trabalhando áreas como a concepção, a realização, a observação e a análise de uma sequência de ensino para a construção de uma didática concisa.

A partir da apresentação destes conceitos, foi colocado no quarto capítulo a proposta do autor, a qual se baseava em uma situação-problema em que a sua solução seria o aluno apresentar algumas definições e demonstrações sobre o conteúdo. Esta proposta depois que formulada no trabalho, foi disponibilizada como um material completo para o professor aplicar dentro de sala de aula.

O autor ainda reitera que esta proposta é apenas uma orientação do que deve ser feito com respeito a esta abordagem no ensino médio e que deverá ser feito um acompanhamento prévio e concorrente para mensurar qual é o seu impacto, bem como uma visão crítica para interpretar quais seus reais resultados.

Por fim, na conclusão deste trabalho o autor ressalta que o ensino de matemática precisa melhorar seus resultados, e que para isso, novas estratégias devem ser adotadas, justificando a produção de um material que utiliza a Teoria dos Números para melhorar estes resultados.

7.4 Números Primos e Congruências: Tópicos de Teoria dos Números na Educação Básica

No quarto trabalho analisado, temos a produção de José Simão Oliveira dos Santos defendendo o tema: *Números Primos e Congruências: Tópicos de Teoria dos Números na Educação Básica* [16] publicado pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia também em 2015.

Em sua introdução o autor argumenta que os conceitos voltados à teoria dos números na Educação Básica são usualmente abordados de forma mecânica e superficial, o que reduz a imersão do aluno no conteúdo que ele deveria aprender, refletindo futuramente em todo seu desempenho escolar. Por falta desta imersão, o aluno acaba deixando de associar ao processo geral, quais são suas etapas e o porquê de cada uma delas. Exemplificando esta situação, é posto que em situações de MMC e MDC, alguns alunos desconhecem o porquê de se fazer uma fatoração em números primos e por vezes nem mesmo sabem que todo inteiro maior que um pode ser escrito de maneira única como produto de potências de primos.

Devido a esta carência de fundamentos concisos nos anos iniciais do aluno, acabam sendo refletidos no decorrer de sua vida escolar uma série de problemas de capacidade de raciocínio lógico-matemático, conforme aponta a pesquisa apresentada pela Prova Brasil no portal Qedu (QEDU: APRENDIZADO EM FOCO, 2013), que verificou que os alunos cada vez menos apresentam habilidades matemáticas condizentes com seu nível de ensino.

Com a compreensão destes conteúdos fundamentais, como a Aritmética dos Números Inteiros, resultará na solidificação da base do aluno, o que irá proporcionar o domínio de outras áreas de conhecimento, como Geometria e Álgebra, além de desenvolver suas capacidades de argumentar, conjecturar, generalizar e de investigar, capacidades estas que estão previstas como competências gerais da BNCC.

Assim sendo, a proposta do trabalho seria o estudo de Números Primos e a Divisibilidade, com o destaque em Equações Diofantinas e em Congruências, agindo como alternativas para que o aluno domine por completo cálculos que envolvam o conceito de Divisibilidade. Para tal, a metodologia adotada foi a elaboração de uma oficina com alunos que demonstravam gosto e interesse pela matemática nos três anos do Ensino Médio. No entanto, o autor coloca que esta proposta também pode assumir outras facetas, como sua aplicação dentro de sala de aula, ou como atividade de reforço, estudo complementar ou até mesmo horário extra de aula.

No primeiro capítulo do trabalho, é apresentada uma descrição histórica de como surgiu a Teoria dos Números como um nicho da matemática, destacando os principais nomes que contribuíram para isto. Em uma subdivisão deste capítulo, é apresentado também algumas reflexões do ensino desta área nas escolas.

Embora a Aritmética seja uma parte integrante do nacional, quando avaliamos os Parâmetros Curriculares Nacionais, não encontramos referências por exemplo a Equações Diofantinas, e segundo apresentado pelo autor, dada a coletânea aprovada pelo Plano Nacional do Livro Didático, também não existiam indicações sobre este assunto.

Para alguns autores, o porquê de inserir esta temática na Educação Básica é muito claro: são ferramentas essenciais para desenvolver em alunos as capacidades de argumentação e de promover investigação, além de reforçar habilidades de criação, manipulação, e a escolha de estratégias para a resolução de problemas matemáticos.

O desenvolvimento destas competências em um aluno colabora entre outras questões, para o desenvolvimento do aluno em si, bem como a superação destas dificuldades existentes no aprendizado que são refletidas em sistemas de avaliações de larga escala, como a Prova Brasil.

Feita esta contextualização, o autor apresenta seu segundo capítulo voltado para os conceitos considerados importantes para este contexto de Ensino Médio, sobre Teoria dos Números. Neste capítulo é abordado temas como Divisibilidade, Divisão Euclidiana, Divisão Comum, Máximo Divisor Comum, Algoritmo De Euclides, Divisão Sucessiva, Mínimo Múltiplo Comum, Números Primos, O Pequeno Teorema De Fermat, Equações Diofantinas, Congruências, Sistema Completo De Resíduos, Função, Teorema De Euler, Congruências Lineares e por fim Teorema Chinês Dos Restos, bem como a apresentação de definições, teoremas, demonstrações e exemplos.

Com o conteúdo devidamente apresentado, entramos na intervenção que o professor fez nas turmas do Ensino Médio. A estratégia adotada foi a realização de uma oficina com 15 alunos convidados a participar de 6 encontros fora do horário de aula com duração de duas horas e meia. Estes encontros foram divididos de forma que o professor pudesse fazer um levantamento prévio de qual era o domínio dos alunos antes de começar a oficina, alguns encontros voltados para a apresentação do conteúdo, um teste de sondagem no meio, mais alguma apresentação de conteúdo e um levantamento final de qual foi o aproveitamento dos alunos.

Com o intuito de contribuir para a melhoria da Educação Básica, a proposta de ensino destes conteúdos no Ensino Médio, colaborou para melhorar a aprendizagem dos alunos em momentos que usualmente seriam feitos por métodos repetitivos e exaustivos. Grande parte das questões apresentadas, faziam parte de provas como a OBMEP e, por meio das atividades, foi possível identificar que mesmo os alunos que

detinham os melhores resultados ainda não possuíam ideia de como resolver as questões.

Por fim, o autor põe suas expectativas em que seu trabalho possa motivar professores e alunos a pesquisarem mais a fundo sobre esta temática, objetivando a melhora do processo de ensino e de aprendizagem.

7.5 Teoria dos Números no Ensino Básico: Um estudo de caso no 2º Ano do Ensino Médio.

A seguir, temos o trabalho defendido por Josemar Claudino Barbosa em 2017 pela Universidade Federal Rural de Pernambuco – Recife com o seguinte tema: *Teoria dos Números no Ensino Básico: Um estudo de caso no 2º Ano do Ensino Médio*[2].

Baseado no índice que descreve o desempenho do aluno em matemática em âmbito internacional, o PISA, o autor observa que a discussão a respeito da inclusão da Teoria dos Números no Ensino Médio é algo que já existe, inclusive com a prerrogativa de ser uma ferramenta que auxilia o processo de ensino e também no desenvolvimento do aluno, pois põe o aluno em contato com sistema de códigos que compõem uma linguagem de comunicação, permitindo formalizar ideias e modelar a realidade, a partir de sua interpretação.

Assim, é proposta uma sequência didática voltada para o segundo ano do Ensino Médio abordando tópicos da teoria dos números, em particular a Aritmética Modular e as Equações Diofantinas, em dez encontros. Para conseguir quantificar algum resultado nesta intervenção, foram aplicados dois testes, sendo um no começo e um no final, com intuito de verificar a viabilidade da inserção deste conteúdo no currículo regular da matemática.

Com uma concepção de uma atividade mais prática, vinculada a algumas demonstrações de teoremas, o autor ao resolver questões majoritariamente da OBMEP, espera que, com o fim desta intervenção, o aluno terá a capacidade de compreender tópicos básicos da Teoria dos Números e saber utilizá-los para resolver questões e aplicá-los em seu dia a dia.

Ainda em seu capítulo introdutório, dispõe de como será a divisão das questões que compõem a introdução à Teoria dos Números, conforme proposto. Ao realizar o primeiro levantamento com os alunos envolvidos, utilizando seu “teste 1”, com 14 questões, alternando entre os temas: Congruência Modular, Divisibilidade, Equações Diofantinas, Algoritmo da Divisão, Lema dos Restos, Paridade, Números Primos e MDC.

Dada esta sondagem de como estavam os alunos, em seus dez encontros com duração de 45 minutos e foram abordados, em cada aula individual os temas na seguinte ordem: Divisibilidade, Divisão Euclidiana, Paridade de Inteiros, Números Primos, MDC, MMC, Equações Diofantinas, Congruência Modular, Teorema de Euler, Teorema de Fermat e pôr fim a Criptografia de modelo RSA, sempre se atentando ao nível de ensino compatível com os alunos de Ensino Médio bem como a linguagem adotada, mas sem desprezar o rigor matemático.

Para a apresentação deste volume de conteúdo, além da elaboração de um plano de aula para cada um dos encontros com seus devidos temas a serem trabalhados, é necessário também refletir que será crucial cativar a atenção do aluno, portanto, a utilização de diversas estratégias de ensino é importante. Deste modo, o autor utilizou de recursos como a aplicação de jogos, exibição de vídeos, contextualização histórica dos temas, além da clássica exposição oral e a resolução de exercícios como método de fixação.

Por fim, na espera de poder mensurar o impacto que esta intervenção poderia causar no desempenho escolar destes alunos participantes, foi posto um segundo teste, também com 14 questões de mesmo nível e mesmos assuntos colocados previamente, bem como a correção e a análise dos dados.

Ao decorrer do trabalho, foi apresentado de forma rica em detalhes uma análise pontual de cada uma das questões, já que o professor além da resposta, também tinha acesso às contas feitas pelos alunos. Nesta fase inicial, foi identificado que, embora os alunos consigam resolver algumas questões, muitos ainda preferem “chutar”

a resposta ou até mesmo deixar em branco, devido seu despreparo para lidar com questões que demandam um pouco mais de imersão na Teoria dos Números.

Já no teste 2, realizado após a exposição do conteúdo, também com sua análise pontual, é identificado um desenvolvimento substancial tanto nas questões de mesmo assunto como no desempenho geral, saltando de um aproveitamento de 43,24% para 79,75%. Este sucesso é atribuído, pelo autor, às estratégias de ensino adotadas, as quais foram cruciais para a construção do conhecimento, ao passo que cumpre o que é orientado pelo PCN de matemática. [1, p. 9]

A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos.

Com os dados analisados pontualmente e a identificação de um avanço significativo por parte dos alunos participantes, foi concluído que o trabalho apresentado cumpriu não só com o propósito de aprimoramento da formação profissional do PROFMAT bem como colaborou positivamente à comunidade acadêmica com as aulas e materiais aqui dispostos. Não obstante, em seu apêndice, ainda apresentou alguns jogos, textos, dinâmicas e vídeos como material complementar para o professor interessado.

7.6 Introdução à Teoria dos Números: Uma Nova Proposta para Educação Básica

Por fim, temos o trabalho de Nicholas Ursulino da Silva, da Universidade Federal de Alagoas, defendendo em 2019 o tema: *Introdução à Teoria dos Números: Uma Nova Proposta para Educação Básica* [8].

A partir de uma alusão histórica, o autor justifica a necessidade da matemática em sua origem. Há mais de 30 mil anos o ser humano já apresentava uma primeira ideia de matemática ao estabelecer uma relação rudimentar de comparação para contar e representar quantidades. No decorrer do tempo novas necessidades foram surgindo, como a ideia de precificar algo, ou a necessidade de ordenar o que valia mais

e o que valia menos, utilizando números para essa descrição, hoje identificamos como a primeira noção do que hoje identificamos como Princípio da Boa Ordenação.

Avançando substancialmente na história, com discussões e reflexões a respeito de como poderíamos modelar matematicamente a natureza, começaram a surgir problemas envolvendo áreas, frações, volumes e progressões, o que pode ser comprovado ao analisar o Papiro de Ahmes, por volta de 1650 a.C.

O surgimento da escrita, corroborou para que o conhecimento matemático produzido pudesse ser documentado e a disseminação da leitura ao decorrer do tempo, fez com que a matemática se tornasse uma linguagem universal, conectando povos e incrementando exponencialmente os avanços feitos entre gerações. Tais avanços permitiram que hoje utilizemos a matemática em grande parte de nosso cotidiano, muitas vezes sem perceber, como em nossa lista de compras, o horário desta leitura ou a lógica por trás da programação de um computador por exemplo.

A partir de todo este avanço, o qual atingimos com o passar de milhares de anos, parte deste conhecimento é transmitido hoje em nosso sistema educacional para que crianças e adolescentes desenvolvam capacidades como abstração e raciocínio lógico desde cedo, além de outras competências, colaborando para o aprimoramento do processo de ensino aprendizagem.

Neste contexto, surge este trabalho com intuito de melhorar o desempenho de alunos em vestibulares e minimizar o tempo por questão, garantindo ao participante, uma segurança em um momento crucial, aplicando conteúdos como Divisibilidade e Congruência em turmas do Ensino Médio e utilizando situações problemas do cotidiano como atrativo aos alunos. O autor também esclarece que a intenção deste trabalho não é solucionar o problema da matemática no Ensino Médio, mas sim colaborar para a evolução deste processo de ensino. Aliada a estes objetivos, se valer da Teoria dos Números como uma ferramenta matemática para a formação não apenas de um aluno, mas de um cidadão, colabora também para formação de pensamentos críticos os quais este cidadão desempenhará na sociedade.

Ademais, este trabalho além de seu propósito de intervenção no Ensino Médio, busca também atuar como inspiração para a elaboração de outras atividades e estratégias de ensino capazes de quebrar o paradigma que a matemática é uma matéria árdua e complexa demais para que apenas uma parcela de uma turma consiga entendê-la. A aplicação deste trabalho no âmbito escolar busca agir como facilitador no contexto de ensino aprendizagem.

Indagando-se de que a Aritmética está presente em disciplinas usualmente vistas no Ensino Médio, como artes, física e química, porque não existir uma disciplina dedicada ao estudo de seus fundamentos, o autor visa responder esta pergunta com este trabalho, justificando o quão frutífero seria ao ser abordada neste período escolar.

Para alcançar tal feito, é apresentado no capítulo 1, alguns conceitos preliminares relacionados à Divisibilidade, os quais futuramente serão utilizados como ferramenta de resolução de problemas matemáticos vistos na Educação Básica. Em seus subtópicos temos primeiramente os inteiros, abrangendo temas como o Princípio da Boa Ordenação conforme mencionado e a necessidade do ser humano precisar desenvolver a noção de ordem numérica e por fim, o Princípio de Indução Matemática. Adiante temos tópicos abordando Divisibilidade, MDC, Algoritmo de Euclides e Equações Diofantinas.

No capítulo 2, há uma introdução histórica do que são os Números Primos, passando pelo Teorema Fundamental da Aritmética, a Decomposição do Fatorial em Primos, a Congruência Modular e por fim o Pequeno Teorema de Fermat. É importante ressaltar que todos estes assuntos abordados foram dispostos de suas definições, proposições, demonstrações e exemplificações e quando necessário, de seus respectivos corolários.

No capítulo 3 é apresentado a devida aplicação deste conhecimento em sala de aula. Com intuito de realizar um levantamento, participaram cerca de 20 professores e 70 alunos em uma pesquisa amostral em diferentes instituições da cidade buscando alguma conclusão de qual seria o impacto da Teoria dos Números no Ensino Médio.

No primeiro momento da aplicação da proposta, foram entrevistados os professores e realizado um levantamento de quais questões seriam cruciais para a elaboração de um trabalho deste porte. A seguir, veio a aplicação de Testes aos alunos para que futuramente fosse possível comparar o antes de depois do material proposto.

Com este levantamento, foi aplicado aos alunos participantes, uma atividade nomeada de “oficina dos números” que por duas semanas proporcionou uma imersão aos alunos nestes conceitos bem como o exercício de questões que usualmente são encontradas em vestibulares, uma vez que maioria dos alunos irão passar por isso, já que é o principal meio de ingresso em uma instituição de ensino superior.

Com esta intervenção, foi aplicado um questionário final semelhante ao primeiro, proporcionando uma comparação, à qual trouxe espanto ao autor com respeito ao desempenho dos alunos, alcançando a margem de 58% de acerto, o que é interpretado como alto, por se tratar de um intervalo de tempo tão curto de intervenção. No final do trabalho é disponibilizado em formato de apêndice quais os testes de sondagem aplicados nesta metodologia.

7.7 Dos materiais analisados

Neste contexto de produção de materiais que visam introduzir a Teoria dos Números no Ensino Médio, identificamos em seus referenciais teóricos, pressupostos legislativos e educacionais que amparam a inserção deste conteúdo dentro de sala de aula além de frisar a notoriedade que estes trabalhos veem proporcionando não só ao padrão de qualidade de ensino que os alunos são gratificados, mas como o desenvolvimento de suas capacidades de formalizar resoluções por meio de raciocínios lógicos e reflexões acerca de um problema proposto.

Inspirado nestas prerrogativas, e observando as dificuldades apresentadas pelos autores, identificamos que o percalço mais frequente apontado foi a necessidade de uma revisão de conceitos iniciais, proporcionando um nivelamento dos participantes para dar prosseguimento com as respectivas metodologias adotadas.

Inspirado nas dissertações de mestrado analisadas, e nos resultados que esta metodologia de ensino pode surtir, iremos propor neste trabalho uma metodologia de ensino voltada para a revisão de conceitos de divisibilidade, o qual é usualmente visto no Ensino Fundamental II, agora com uma nova roupagem voltada ao Ensino Médio. Nesta proposta, iremos nos ater ao método de divisão na chave, frisando seus componentes, a logística neste método de divisão bem como conceitos matemáticos relacionados.

Esta revisão além de vir com objetivo de reforçar no aluno conceitos vistos há algum tempo, almejamos também o preparar para possíveis futuras propostas que envolvam o processo de divisibilidade, como por exemplo as adotadas pelos autores aqui citados, além de momentos em que será crucial a ele, realizar uma divisão em que não tenha a disponibilidade de uma calculadora, como é identificado em alguns concursos e vestibulares realizados por muitos estudantes para ingresso em um curso superior.

8 Proposta de Metodologia

A partir do que foi levantado pela análise bibliográfica proposta neste trabalho, buscamos identificar pontos que deixam a desejar no que concerne ao ensino da divisibilidade na Educação Básica. Estes pontos podem ser identificados, por exemplo, na divisão realizada na chave, conteúdo básico que é abordado de forma mecanizada e pouco didática ao aluno, o qual se vê em um processo de memorização e repetição de passos, sem realmente dominar o que está sendo feito.

Este processo de divisão realizado na chave é hoje um dos métodos de divisão mais utilizados pelos alunos dentro de sala de aula quando precisam realizar uma divisão sem o auxílio de calculadora.

Embora o conteúdo seja visto nos anos iniciais da vida do estudante, a intenção desta intervenção é apresentar de forma clara como funciona o processo de divisibilidade na chave para que o aluno entenda como acontece todo o processo de cálculo vinculado ao mesmo, porém, não deixando de lado o rigor matemático envolvido, uma vez que ao ser abordado no Ensino Médio, espera-se que os alunos já apresentem uma bagagem de conhecimento matemático maior em relação ao período dos anos iniciais.

Para realizar esta proposta, buscamos junto aos professores da disciplina de matemática do campus IFG Valparaíso, apresentar a proposta às turmas do primeiro ano do Instituto e, sob um convite, contar com a participação deles no desenrolar da proposta.

Feito isto, organizamos em uma sala de aula virtual [19], devido ao regime de aula síncrono adotado pelo campus, uma apresentação feita em vídeo [17] do que a intervenção propõe e quais os conteúdos que abordados nesta proposta.

No primeiro momento de ingresso dos participantes nesta proposta, utilizamos um formulário online para podermos realizar uma caracterização de qual é o público participante [18], e o que poderíamos concluir a respeito dos resultados futuramente obtidos nesta intervenção.

Neste ambiente virtual, apresentamos a construção do conteúdo de forma gradativa e condizente com a linguagem matemática dos alunos, para que seja formado uma linha de raciocínio até nosso objetivo final, apresentar o processo de divisão na chave. Esta apresentação foi feita utilizando vídeos curtos vinculados a um arquivo de leitura, para que o estudante possa acompanhar o que está sendo feito (vide [11], [12], [13])

Com a devida apresentação assíncrona desses conteúdos, o aluno pode ter acesso quanto for conveniente, aumentando as chances de estudo do material produzido, uma vez que a intervenção é realizada fora do horário de aula, disponibilizando um segundo formulário com questões voltadas ao que foi apresentado para termos noção do grau de absorção do conteúdo por parte dos alunos.

Durante este intervalo, entre a disponibilização do material de estudo aos participantes até a atividade final [14], buscamos também realizar algumas entrevistas com os participantes, levantando relatos de como está a linguagem do material, como está sendo o processo de aprendizagem matemática em um período pandêmico, como se relacionam com a matemática em geral, se já ouviram falar nessa técnica de divisão ou qualquer outro conceito apresentado.

Este material buscou identificar qual foi o aproveitamento do aluno com base no material produzido assim como, em uma segunda etapa do formulário final, colher como foi a experiência do aluno neste processo.

Assim, com as respostas, elaboramos um levantamento e, por conseguinte, um comparativo entre os formulários de sondagem e de *feedback* [14], além das próprias atividades, compondo posteriormente o tópico dos resultados deste trabalho. Vale ressaltar que todo o material produzido nesta proposta está disponibilizado no apêndice, caso o professor demonstre interesse nesta metodologia.

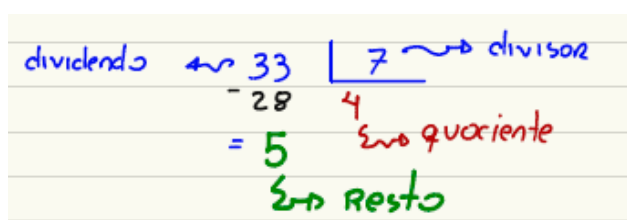
9 Estruturação do conteúdo apresentado.

Findado o levantamento bibliográfico, decidimos colocar em prática algum tipo de metodologia alternativa com nossos alunos do IFG. Procuraremos avaliar a questão sobre o domínio dos alunos de ensino médio sobre um tópico extremamente elementar que é o de divisão com resto.

Atualmente, alguns processos seletivos para instituições de ensino superior, como o ENEM ou vestibulares diversos não admitem a utilização de calculadora, o que é considerado um pânico para alguns alunos quando precisam fazer uma divisão simples.

O método mais utilizado na educação básica para introduzir esse conteúdo é o método da chave. Este processo é introduzido primordialmente no Ensino Fundamental. Todavia, é usualmente apresentado seguindo um algoritmo que faz apelo forte ao decorar sem entender, de modo que os alunos não compreendem o que está realmente acontecendo, muito menos o porquê de o algoritmo funcionar. Assim, iremos a seguir realizar uma revisão acerca da metodologia da divisão na chave, bem como mostrar com auxílio da reta real, a relação entre o resto e o divisor.

De início, propomos um exemplo simples, utilizando de cores e descrições como está disposta uma divisão na chave, assim o aluno ao acompanhar tanto o material de leitura quanto o vídeo explicativo, possa associar com mais facilidade o que é cada fator e como está disposto. A seguir temos o primeiro exemplo adotado:



A handwritten division problem on lined paper. The problem is $33 \div 7 = 4 \text{ R } 5$. The number 33 is written in blue and labeled "dividendo" with a blue arrow. The number 7 is written in blue and labeled "divisor" with a blue arrow. The number 4 is written in red and labeled "é o quociente" in red. The number 5 is written in green and labeled "é o resto" in green. The subtraction $33 - 28 = 5$ is shown, with 28 written below 33 and 5 written below the subtraction line.

Figura 1 – Descrição dos componentes de uma divisão

Podemos observar nesta divisão a presença de cada um dos fatores da divisão, tendo 33 como dividendo, 7 como divisor, 4 como quociente e 5 o resto, já que

a divisão não é exata. Logo, dado um dividendo a e um divisor b , teremos quociente q e resto r únicos que satisfazem a equação.

$$a = bq + r \quad (8.1)$$

Esta analogia nos permite reescrever o número a , como o produto do divisor b com o quociente q adicionado a um resto $r \geq 0$ que necessariamente será menor do que o divisor b , logo, podemos reescrever o número 33 do exemplo da seguinte maneira:

$$33 = 7 \cdot 4 + 5 \quad (8.2)$$

Neste momento, surgem alguns questionamentos, o primeiro deles é: porque o resto necessariamente deverá ser menor que o divisor? Este questionamento pode ser respondido de algumas maneiras. A primeira seria mostrar ao aluno que se o resto fosse maior do que o divisor, o resto seria maior ou igual a um múltiplo do divisor, mostrando que a divisão ainda não teria terminado efetivamente. Caso necessário, podemos utilizar uma reta real como recurso visual para exemplificação.

Para exemplificar, utilizamos o número inteiro a e avaliamos sua divisão por 3. Neste caso mostraremos que dado $q \geq 0$, os possíveis restos 3 são: 0, 1 e 2. Isto é, teremos uma das três possibilidades:

$$a = 3q \quad (8.3)$$

$$a = 3q + 1 \quad (8.4)$$

$$a = 3q + 2 \quad (8.5)$$

Sendo 3 o número que multiplica o quociente q , ao desenharmos uma reta real destacando nela seus números inteiros, destacando dentro do conjunto dos inteiros os múltiplos de 3 obtemos uma representação como na figura abaixo:

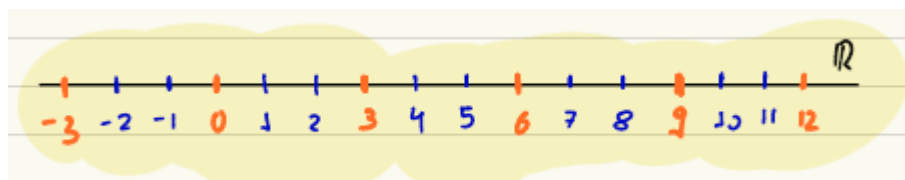


Figura 2 – Representação da reta real

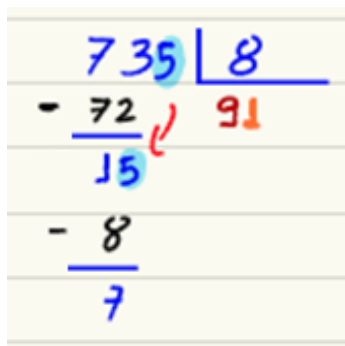
Aqui podemos mostrar ao aluno visualmente que, independentemente do valor a escolhido, ou ele é um múltiplo direto de 3 (um dos números destacados em laranja), ou um número entre dois múltiplos de três (um dos números em azul) e deixaria resto 1 ou 2.

O segundo questionamento que pode surgir neste momento é se este método da chave funciona em qualquer divisão, isto é, por que este método sempre me retornará quociente q e resto r numa divisão qualquer de um inteiro a pelo inteiro $b \neq 0$?

Primeiramente, vamos deixar claro que utilizamos a representação dos números em base 10, logo, podemos reescrevê-los convenientemente em cada divisão. Por exemplo, vamos utilizar o número 735. Em base 10, temos:

$$735 = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \quad (8.6)$$

Ao dividirmos este valor por 8 por exemplo, no método tradicional temos:



$$\begin{array}{r} 735 \overline{) 8} \\ - 72 \\ \hline 15 \\ - 8 \\ \hline 7 \end{array}$$

Figura 3 – Divisão na chave

Agora, reescrevendo o número do exemplo de forma conveniente, podemos trabalhar alternativamente explicitando a centena e a dezena, o quociente em sua escrita em base 10. Sabemos que o valor da centena do número exemplificado é menor que o do divisor, portanto, iremos adotar para a divisão os números da centena e da dezena, conforme ilustrado a. Esta divisão nos mostra o valor 735 sendo reescrito da forma:

$$735 = 8 \cdot (9 \cdot 10 + 1) + 7 \quad (8.7)$$

$$\begin{array}{r}
 73 \cdot 10 + 5 \mid 8 \\
 - 72 \cdot 10 \\
 \hline
 10 + 5 \\
 = 15 \\
 - 8 \\
 \hline
 7
 \end{array}$$

Figura 4 – Divisão na chave com parte do dividendo em escrita decimal

Que ao ser contraída, é exibida da forma.

$$735 = 8 \cdot 91 + 7 \quad (8.8)$$

Esta forma de realizarmos a divisibilidade dentro da chave, agora sob a perspectiva de reescrevermos o número em sua forma decimal, desconstrói a visão do aluno de que números maiores são mais complexos para dividir, pois realizamos o processo de um número grande por partes, utilizando números os quais os alunos estão habituados. Utilizando este apelo visual, atrelado a um ensino que priorize que o aluno domine o processo que está sendo apresentado, viabiliza o interesse do aluno no processo de aprendizagem matemática.

Este material está disponibilizado completamente em formato de apêndice deste trabalho além da sala de aula virtual feita para que os alunos tenham acesso a tudo que foi produzido. A sala se encontra no link: <https://classroom.google.com/c/MjY5NjEzODA3NjM0?cjc=trnxjf6> , para que caso surja dúvida ou até mesmo interesse de aplicação, esta produção sirva de base para o professor.

10 Resultados

Para podermos sondar quais proveitos esta intervenção proporcionou aos alunos, aplicamos dois questionários, um a priori para a sondagem e um a posteriori, para um *feedback*, além da própria atividade. A pesquisa contou com 9 alunos da turma de primeiro ano do IFG, os quais participaram sob convite do professor da disciplina de matemática.

No primeiro questionário, buscamos caracterizar qual é o público participante da proposta, portanto, perguntamos qual seria seu grau de afinidade com a matemática no geral, haja vista que é uma matéria que é considerada a mais difícil por muitos alunos. A seguir, podemos ver a distribuição da resposta:

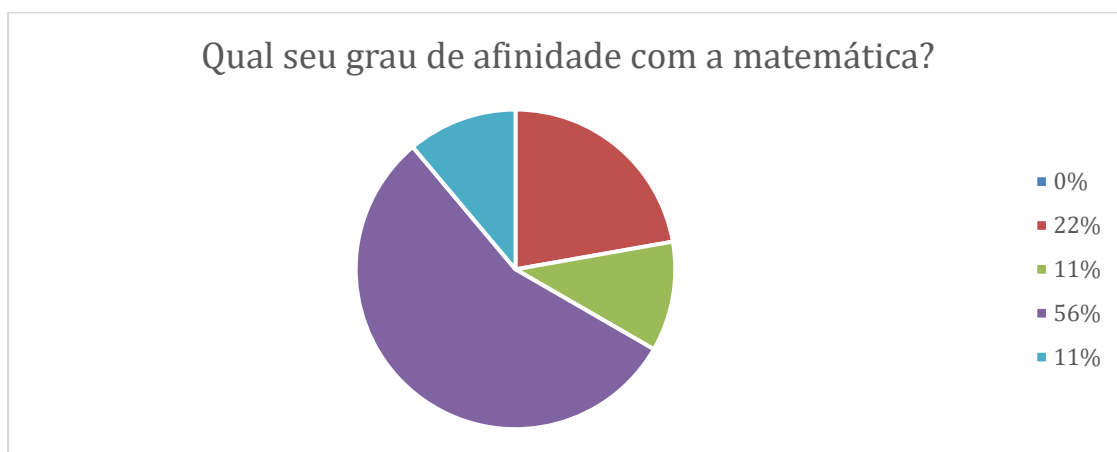


Gráfico 1 - Grau de Afinidade Matemática

A partir disso, podemos identificar que os participantes desta proposta embora não se considerem os mais afins com a matemática, ainda assim se sentem familiares com a matéria. A partir disso, buscamos saber quais são as principais aplicações que os alunos enxergam na disciplina estudada.

Ainda neste formulário, indagamos quais seriam as principais aplicações que viam da matemática em seu cotidiano, sendo concursos e vestibulares os mais mencionados nas respostas. A partir deste parecer, buscamos produzir algum material que viesse a agregar neste aspecto.

Com isto, buscamos construir qual a imagem que estes participantes possuem da matemática. Assim, utilizando a mesma estratégia de pergunta em que o aluno marca o quanto se identifica com a afirmativa, realizamos questionamentos para que pudéssemos tomar a melhor decisão em qual conteúdo abordar, haja vista que este primeiro questionário também serviria para definir qual conteúdo de divisibilidade seria mais atrativo a aqueles participantes dentro deste nicho de pesquisa.

Assim sendo, iniciamos com o questionamento onde o aluno considerava se a matemática é uma disciplina difícil. Neste momento, confirmamos o que era visto comumente em salas de aula: dois terços dos participantes concordaram com esta proposição. Isto nos motivou a apresentar algum material que combatesse esta visão de que a matemática é uma disciplina muito difícil. Logo objetivamos preparar algo com uma roupagem adequada de conceitos matemáticos a este público-alvo, mas sem perda de formalismo e rigor matemático de modo a preencher algumas lacunas provenientes de uma má apresentação de um conteúdo básico.

Por ser considerada uma matéria difícil, como vimos acima, buscamos identificar se esta característica é algo que predestina a matemática a apenas alguns, sendo considerada para poucos. Neste momento, identificamos que os alunos majoritariamente discordam desta proposição, portanto, identificamos que embora acreditem se tratar de uma disciplina difícil, não pensam ser algo impossível de se entender e exclusivo para quem possui afinidade. Dado este posicionamento dos alunos, almejamos realizar uma abordagem diferenciada para poderemos alcançar até mesmo aqueles que não possuem certa facilidade com a disciplina.

Algo que é frequentemente associado à matemática são contas e cálculos mecânicos e cansativos desvinculados de conexões lógicas que os justifiquem. Portanto, questionamos se os alunos acreditavam que a matemática se resumia apenas a contas e manuseio de números. Com aproximadamente 80% das respostas, os alunos não concordam, nos mostrando que reconhecem também a parte lógica e teórica da matemática, abrindo portas para que com o conteúdo escolhido, possamos propor algumas definições sem causar espanto.

Então, para termos base de qual metodologia adotar nesta proposta, buscamos levantar qual a frequência de estudo dos participantes, nos mostrando bem distribuídos em não ter frequência de estudo de matemática e ter uma frequência intermediária, nos propondo um desafio de elaborar um material e uma atividade que cativasse o participante, instigando sua vontade de estudar mais.

Haja vista que este trabalho se baseia em Teoria dos Números, área a qual é majoritariamente estudada em cursos superiores de matemática, ficamos curiosos em saber o que os alunos entendiam por Teoria dos Números. Por ser um momento dedicado à expressão dos alunos, alguns declararam não ter conhecimento sobre Teoria dos Números, o que já era de se esperar. No entanto, a maioria, com suas palavras, respondeu se tratar de um ramo da matemática voltada ao estudo dos números, suas propriedades e como funcionam as suas operações. Este levantamento já nos mostra que os participantes desta atividade já possuem noção do que esta atividade tratará.

Por fim, questionamos alguns pontos que achamos pertinentes para definirmos qual conteúdo adotar. Ao questionar se o participante tem dificuldade em realizar divisões, se já tinha tido a oportunidade de visualizar o processo de divisibilidade com detalhes, se dominava o método de divisão na chave, se saberia dizer o que é um divisor, dividendo, quociente e resto e se teria interesse de aprender ou revisar alguns destes itens supracitados, obtivemos um amplo aceite da proposta, o que nos motivou a realizar este material.

Com a produção do material e a disponibilização com antecedência aos alunos, propomos um formulário com quatro questões a respeito do conteúdo abordado e estipulamos um tempo limite de 25 minutos para a resolução, o que seria mais que o suficiente para as questões abordadas.

Na primeira questão, foi solicitado que o aluno julgasse as assertivas em verdadeiro e falso com base no que viu no material. A seguir, poderemos ver as questões e os resultados obtidos:

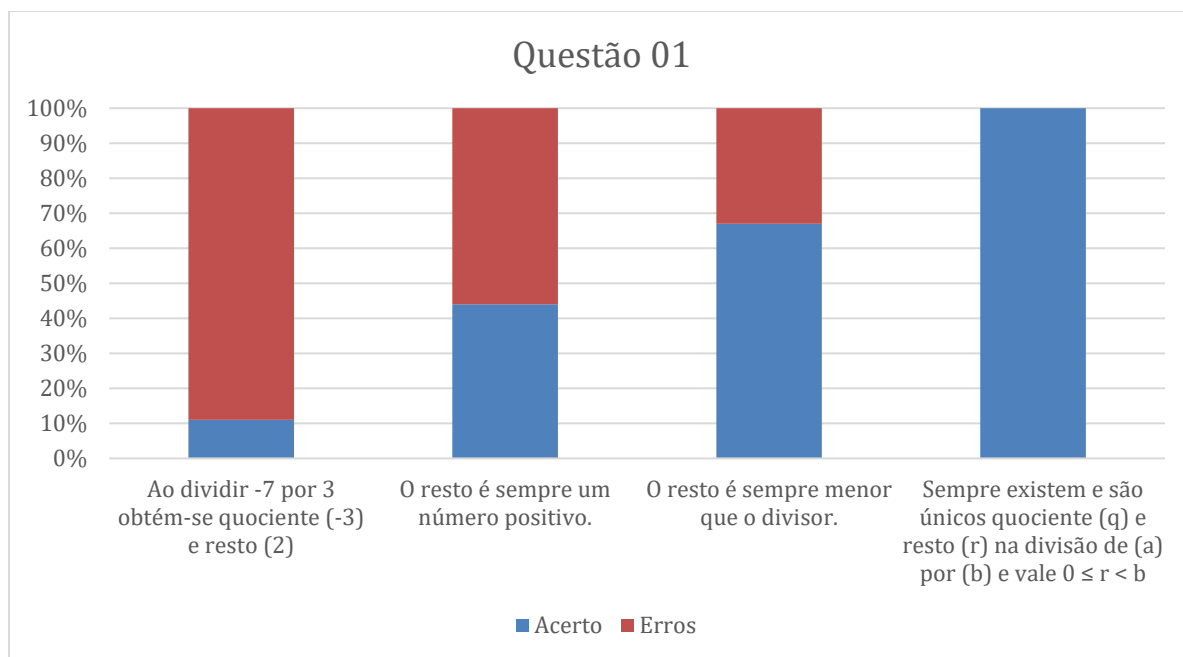


Gráfico 2 - Questão 01 - Atividade

A primeira alternativa nos mostra que o domínio dos alunos sobre divisão com números negativos, mesmo já estando no Ensino Médio e com o material de apoio elaborado, ainda não é satisfatório, algo que deve ser abordado com mais veemência.

Nas duas questões propostas seguintes, buscamos instigar a reflexão do aluno ao pensar em um número qualquer e nos possíveis resultados que ele teria em uma divisão por outro número. Na quarta alternativa, abordamos uma definição vista no material, estabelecendo uma visão que a matemática não está resumida a números, mas também as definições associadas a ela.

2) Na divisão de 323 por 11, temos quociente (q) e resto (r) sendo: *

- ☐ a) $q=29$; $r=5$;
- ☐ b) $q=28$; $r=4$;
- ☐ c) $q=29$; $r=4$;
- ☐ d) $q=28$; $r=5$;

Figura 5 – Pergunta 02 do questionário

3) Na divisão de 379 por 7, temos quociente (q) e resto (r) sendo: *

- ☐ a) $q=54; r=3;$
- ☐ b) $q=54; r=1;$
- ☐ c) $q=53; r=2;$
- ☐ d) $q=53; r=4;$

Figura 6 – Pergunta 03 do questionário

Nestas mesmas questões supracitadas, trouxemos duas divisões com dividendo na casa da centena e o divisor na casa da dezena, para que o aluno apresentasse os respectivos resultados do quociente e do resto. Nestas duas atividades a média dos resultados se aproxima de 95% de acerto.

E na última questão, a partir do resto de duas divisões, é proposto ao aluno a resolução de uma expressão algébrica envolvendo os dois restos supracitados para encontrar o devido resultado. Por se tratar também de outros conceitos matemáticos além da divisão, alguns alunos pecaram nesta etapa, o que nos sugere uma necessidade de trabalhar de maneira mais ampla dentro dos conteúdos de matemática, proporcionando ao aluno ligar os diversos tópicos estudados, não os guardando em “potes” isolados uns dos outros.

Por fim, utilizando um formulário como *feedback* para a proposta, buscamos não só avaliar esta atividade, mas colher a opinião acerca desta metodologia, para que em uma ocasião oportuna, pudéssemos dar continuidade a esta proposta, agora com uma linha de produção de material pré-definida.

Na primeira questão indagamos se a proposta de ensino apresentada é adequada ao ensino deste conteúdo, logo poderíamos saber se videoaulas e atividades online seriam eficazes de acordo com a opinião do aluno. Neste aspecto, as respostas foram unanimemente positivas, haja vista que o aluno detinha a praticidade de ver e rever o conteúdo, haja vista que a aula se manteve gravada e disponível no período do curso.

A seguir, questionamos se o material cumpriu com as expectativas postas no momento de apresentação do curso. Neste momento, por adotarmos vídeos curtos e com linguagem simples e direta, alcançamos um aceite de 88,9% neste quesito, visto que com esta estratégia, conseguimos alcançar não só aqueles alunos que alegaram não ter afinidade com a matemática, como aqueles que não tem frequência de estudo. Para 11,1%, alegou que o material seria melhor aproveitado se fosse em ambiente presencial.

Sob a perspectiva dos alunos, averiguamos se eles consideraram ter aprendido algo com esta proposta, se as dúvidas foram sanadas ou ao menos revisado alguns conceitos previamente vistos. Cerca de 22% alegou não ter aprendido nada de novo, pois devido à frequência de estudo, já dominava o que foi apresentado. Mesmo com este posicionamento, no que compete a avaliação da proposta, classificaram positivamente a metodologia, linguagem e forma de avaliação adotada. Agora sobre os 88% aproximadamente que alegaram ter agregado algum conhecimento, descreveram como uma oportunidade de rever este conteúdo depois de bastante tempo e tirar suas dúvidas, interpretando como uma experiência de revisão de conteúdo.

Com respeito à aplicação desta metodologia, pesquisamos qual seria o melhor contexto para aplicá-la, variando os conteúdos, dentro do cotidiano escolar. Com respostas variando entre gincanas (11%), monitorias (22%), durante a própria aula (56%) e até palestras (11%), a maioria preferiu durante o horário escolar, o que sob perspectiva deste autor, poderia ser abordada como uma estratégia de revisão de conteúdo.

Por fim, perguntamos se o aluno considera que faltou algo no que concerne ao processo de divisibilidade na chave voltada ao Ensino Médio. Embora tenham enfatizado a metodologia adotada bem como a estratégia de ensino adequada para este conteúdo, a falta de um tópico voltado para divisão de números negativos e exercícios contextualizados de nosso cotidiano foram pontuados, o que fica como um *feedback* para atividades futuramente realizadas.

Durante a realização desta atividade, também houve a oportunidade de realizar algumas entrevistas com os participantes, tendo na pauta questões como uma

auto avaliação do rendimento do aluno no regime de aulas online e a qualidade do aprendizado, uma vez que neste período pandêmico, as estratégias de ensino às quais estamos habituados sofreram mudanças, e com isto, precisamos nos reinventar.

Nestas entrevistas, uma parcela dos alunos (88,8%) se descrevia desmotivado com respeito a forma de ensino que está sendo empregada durante o semestre de aula em regime síncrono. A falta de um ambiente de estudo dedicado a isto, a baixa infraestrutura tecnológica vivenciada por alguns e até desmotivação por parte de terceiros nesta metodologia de ensino corroboram para o baixo desenvolvimento do aluno.

Para 77,6% dos participantes, a falta de acompanhamento nas atividades propostas pelos professores associadas ao cronograma condensado de um semestre de aula aplicada em um trimestre faz com que muitos detalhes antes apresentados com mais atenção, deixam a desejar na proposta de ensino virtual, reduzindo assim a qualidade de ensino antes adotadas.

Para os 9 participantes entrevistados, esta modalidade de ensino requer uma demasiada dose de foco com respeito aos estudos, não só da matemática, mas de todas as disciplinas. Este foco era mantido por alguns em aulas práticas antes vivenciadas no campus, onde o aluno se identificava em um contexto que precisaria dominar a parte teórica para exercer a prática com convicção, agora deixa de existir, uma vez que as aulas laboratoriais foram deixadas de lado.

11 Conclusão

Neste trabalho, foi possível a partir de um levantamento bibliográfico, identificar uma nova estratégia de ensino que embora promissora sob o aspecto de solidificar conceitos iniciais que refletirão no desenrolar da vida estudantil, ainda é pouco estudada e menos ainda posta em prática.

Voltado para uma análise baseada em dissertações de mestrados profissionais, este padrão nos proporcionou uma visão do que está sendo produzido e como está sendo apresentado em escala nacional. Esta estratégia foi adotada como base para podermos escolher qual seria a metodologia mais adequada para um ensino remoto, haja vista que devido aos decretos municipais, as escolas deixaram de ter alunos presencialmente devido a pandemia.

Ao realizar este levantamento bibliográfico, dentre os diversos conteúdos abordados e as perspectivas adotadas para dar aplicabilidade ao tema em questão, observamos que a divisibilidade, que é solicitada em provas de concursos e vestibulares como o ENEM, ainda não é dominada por muitos alunos do Ensino Médio.

Sob esta prerrogativa, decidimos adotar uma metodologia voltada para a divisibilidade pelo método da chave, processo que é frequentemente adotado em divisões quando não há calculadora disponível, como por exemplo, no ENEM, principal meio de ingresso em uma instituição de ensino superior no país.

Adotando vídeos gravados e materiais escritos, pudemos verificar por meio de formulários que o material proposto cumpriu com sua expectativa, realizar uma revisão de conceitos matemáticos de divisibilidade, usualmente vistos no Ensino Fundamental, porém agora com um pouco mais de rigor matemático, sem desconsiderar o público-alvo deste material.

Com os seus resultados promissores com respeito a metodologia adotada, identificamos uma opção a qual o professor pode adotar para combater a visão da complexidade usualmente vinculada à matemática bem como colaborar para o aumento dos índices de proficiência matemática, como o identificado no PISA de 2018.

Sobre a entrevista feita com alguns voluntários, nos fez perceber que neste regime de aula síncrona, o desenvolvimento de um material que prenda a atenção do aluno ainda mais do que os professores já estão acostumados se torna indispensável. Isto é, trazer algo bem formulado e apresentado foram os pilares para definir nossa proposta.

12 Bibliografia

- [1] AMADOR, I. P. **A MATEMÁTICA nos anos finais do Ensino Fundamental: um estudo sobre problemas epistemológicos de ensino-aprendizagem em Cachoeira do Sul (RS)**. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_ivonete_amador.pdf. Acesso em: 10 jan. 2020.
- [2] BARBOSA, J. C. **Teoria dos Números no Ensino Básico: Um estudo de caso no 2º ano do Ensino Médio**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional) - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE, [S. l.], 2017.
- [3] BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular: BNCC**. [S. l.], 2014. Disponível em: <http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 11 jan. 2020.
- [4] BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, 1988. Disponível em: https://www.senado.leg.br/atividade/const/con1988/CON1988_05.10.1988/art_205_.asp. Acesso em: 4 jan. 2020.
- [5] FRANCO, T. R. R. **Divisibilidade e Congruências: Aplicações no Ensino Fundamental II**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Goiás, [S. l.], 2016.
- [6] GOMES, A. R. G. **Uma abordagem do ensino de congruência na educação básica**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Sergipe, [S. l.], 2015.
- [7] INEP, PISA. **Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil – Artigo - INEP**. [S. l.], 3 dez. 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206#:~:text=O%20maior%20estudo%20sobre%20educa%C3%A7%C3%A3o,pa%C3%ADses%20que%20participaram%20da%20avalia%C3%A7%C3%A3o.&text=Em%20ci%C3%A4ncias%2C%20o%20n%C3%BAmero%20chega,%2C%20em%20leitura%2C%2050%25. Acesso em: 6 jan. 2020.
- [8] SILVA, N. U. **INTRODUÇÃO à Teoria dos Números: Uma Nova Proposta para Educação Básica**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Alagoas, [S. l.], 2019.
- [9] JUNIOR, L. DE J. **TEORIA DOS NÚMEROS: UM ESTUDO COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Londrina, [S. l.], 2013.
- [10] MIRANDA, B. DE P. **Apresentação - Projeto de TCC - Marthus**. [S. l.], 9 fev. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=0SHGcxhbmh7M&ab_channel=BrunoDePaula. Acesso em: 2 mar. 2021.
- [11] MIRANDA, B. DE P. **Divisão com resto - Aula 1**. [S. l.], 9 fev. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=m92Mj0LZGz4&ab_channel=BrunoDePaula. Acesso em: 3 fev. 2021.

- [12] MIRANDA, B. DE P. **Divisão com resto - Aula 2.** [S. l.], 9 fev. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HgSGkSLHlv0&ab_channel=BrunoDePaula. Acesso em: 3 mar. 2021.
- [13] MIRANDA, B. DE P. **Divisão com resto - Aula 3.** [S. l.], 10 fev. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Q03u5tmgT2w&ab_channel=BrunoDePaula. Acesso em: 3 mar. 2021.
- [14] MIRANDA, B. DE P.; SANTOS, M. L. DOS. **Formulário de Atividade e Feedback.** [S. l.], 20 fev. 2021. Disponível em: <https://extendedforms.io/form/92cbb49b-1fdc-4bf5-9cbe-646884050b53/login>. Acesso em: 3 mar. 2021.
- [15] NASCIMENTO, A. S. **TEOREMA CHINÊS DO RESTO: Sua aplicação no ensino médio.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, [S. l.], 2014.
- [16] SANTOS, J. S. O. DOS. **NÚMEROS PRIMOS E CONGRUÊNCIAS: TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS NA EDUCAÇÃO BÁSICA.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA, [S. l.], 2015.
- [17] SANTOS, M. L. DOS. **Apresentação - Projeto TCC.** [S. l.], 9 fev. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=whFjJdsIfs&ab_channel=MarthusLobato. Acesso em: 3 mar. 2021.
- [18] SANTOS, M. L. DOS. **Formulário de Sondagem.** [S. l.], 12 fev. 2021. Disponível em: <https://forms.gle/vs1HnrhMXvwxyQDJ7>. Acesso em: 3 fev. 2021.
- [19] SANTOS, M. L. DOS; MIRANDA, B. DE P. **Sala de Aula Virtual.** [S. l.], 1 fev. 2021. Disponível em: <https://classroom.google.com/c/MjY5NjEzODA3NjM0?cjc=trnxjf6>. Acesso em: 3 fev. 2021.
- [20] SILVA, N. U. DA. **Introdução à Teoria dos Números: Uma Nova Proposta para Educação Básica.** 2019. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Alagoas, [S. l.], 2019.

13 Apêndice

Esta seção será dedicada a disponibilização do material escrito produzido.

PAG 1

Divisão com resto

Desde muito cedo em nossas vidas aprendemos a usar o método de "divisão na chave". Por exemplo, se dividimos 33 por 7 temos:

$$\begin{array}{r} \text{dividendo } \leftarrow 33 \quad \bigg| \quad 7 \rightarrow \text{divisor} \\ - 28 \quad 4 \\ \hline = 5 \end{array}$$

$\rightarrow$ quociente
 $\rightarrow$ resto

e isto significa que $33 = 7 \cdot 4 + 5$. Abaixo avaliamos mais exemplos.

a) $\begin{array}{r} 82 \bigg| 5 \\ - 5 \quad 16 \\ \hline = 32 \\ - 30 \\ \hline = 2 \end{array}$

e temos $82 = 5 \cdot 16 + 2$,
quociente 16 e resto 2;

b) $\begin{array}{r} 973 \bigg| 11 \\ - 88 \quad 88 \\ \hline = 093 \\ - 88 \\ \hline = 5 \end{array}$

e temos $973 = 11 \cdot 88 + 5$,
quociente 88 e resto 5;

Nos três casos acima percebemos que o resto R é sempre menor que o divisor. De modo geral, se dispomos de um dividendo a e de um divisor b (naturalmente deve ser $b \neq 0$), existirão únicos quociente q e resto R com

$$a = b \cdot q + R$$

com $0 \leq R < b$. Quando $R = 0$ temos que a é divisível por b .

Figura 7 – Página 1 do material.

TREINE PARA A GINCANA

FAÇA AS seguintes divisões explicitando quociente e resto:

- a) 17 por 5; b) 71 por 9;
- c) 83 por 13; d) 169 por 7;
- e) 371 por 12;

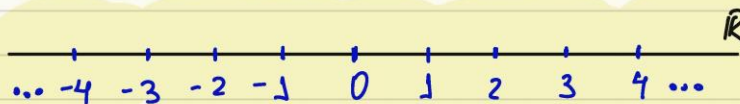
Após praticar um pouco, surgem duas questões naturais:

- ①- Por que sempre existem (e são únicos) o quociente q e o resto R ?
- ②- Por que o método da chave funciona?

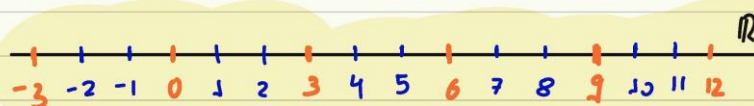
Trabalhemos com a questão ①. Começamos com um exemplo explícito escolhendo o divisor $b=3$. Neste caso os possíveis restos são 0, 1 e 2. Mostraremos que para qualquer inteiro a , existe quociente q e resto $R \in \{0, 1, 2\}$ com

$$a = 3 \cdot q + R.$$

Faremos uso da reta real $\mathbb{R}$:



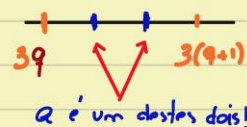
Destacamos na reta real os múltiplos de três:



Perceba que o número a , sendo inteiro ou é um dos múltiplos de três (destacados em laranja) ou está entre dois múltiplos de três. Se a é múltiplo de três, temos

$$a = 3 \cdot q + 0;$$

Se não, temos a entre dois múltiplos de três. Então teremos



$$a = 3q + 1 \quad \text{ou} \quad a = 3q + 2.$$

A demonstração no caso geral do divisor $b \neq 0$ é inteiramente análoga: O dividendo a ou será múltiplo de b ($a = qb$) ou estará entre dois múltiplos de b :

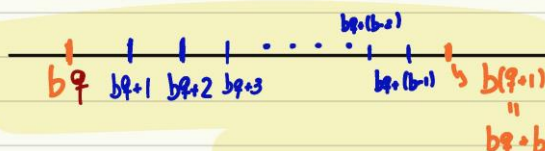


Figura 9 – Página 3 do material.

e concluímos que

$$a = bq + r,$$

com $r \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Agora trabalhamos com a questão ②. Faremos uma análise do que ocorre quando aplicamos a divisão na chave. Expomos a ideia por meio de dois exemplos. Mas antes, lembre-se que trabalhamos com números representados em base 10, então quando representamos um número como 378, estamos dizendo que esta expressão representa

$$\begin{aligned} 378 &= 300 + 70 + 8 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0 \\ &\quad \text{três centenas} \quad \text{sete dezenas} \quad \text{oito unidades} \\ &= 370 + 8 = 37 \cdot 10 + 8 \end{aligned}$$

Agora avaliamos os dois exemplos:

$$\begin{array}{r} a) \quad 735 \overline{) 8} \\ - 72 \quad 91 \\ = 15 \\ - 8 \\ = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \cdot 10 + 5 \overline{) 8} \\ - 72 \cdot 10 \quad 9 \cdot 10 + 1 \\ = 10 + 5 \\ = 15 \\ - 8 \\ = 7 \end{array}$$

$$\therefore 735 = 8 \cdot 91 + 7$$

Figura 10 – Página 4 do material.

$$\begin{array}{r}
 b) \quad 7893 \quad | \quad 11 \\
 - 77 \quad \downarrow \\
 = 193 \\
 - 11 \quad \downarrow \\
 = 83 \\
 - 77 \\
 = 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 78 \cdot 100 + 93 \quad | \quad 11 \\
 - 77 \cdot 100 \quad \quad \quad 7 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 7 \\
 = 100 + 93 \\
 = 193 \\
 = 19 \cdot 10 + 3 \\
 - 11 \cdot 10 \\
 = 83 \\
 - 77 \\
 = 6
 \end{array}$$

$$\therefore 7893 = 11 \cdot 717 + 6$$

Figura 11 – Página 5 do material.