

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS JATAÍ
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

MÁRCIA FRANCO DE ASSIS

VIBRAÇÕES NÃO LINEARES E ESTABILIDADE DE TORRES ESTAIADAS

JATAÍ
2018

MÁRCIA FRANCO DE ASSIS

VIBRAÇÕES NÃO LINEARES E ESTABILIDADE DE TORRES ESTAIADAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Bacharelado em
Engenharia Civil do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás –
Câmpus Jataí, como parte dos requisitos
necessários para a obtenção do Grau de
Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador (a): Dr. Eulher Chaves Carvalho.

JATAÍ

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

ASS/vib	Assis, Márcia Franco de. Vibrações não lineares e estabilidade de torres estaiadas / Márcia Franco de Assis. -- Jataí: IFG, Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil, 2018. 89 f.; il. Orientador: Prof. Dr. Eulher Chaves Carvalho. Bibliografias. Apêndices. 1. Torres estaiadas. 2. Dinâmica não linear. 3. Vibração não linear. I. Carvalho, Eulher Chaves. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título. CDD 690.5
---------	--

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária ĩ Rosy Cristina Oliveira Barbosa ĩ CRB 1/2380 ĩ Câmpus Jataí. Cód. F022/18.

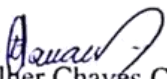
MÁRCIA FRANCO DE ASSIS

VIBRAÇÕES NÃO LINEARES E ESTABILIDADE DE TORRES ESTAIADAS

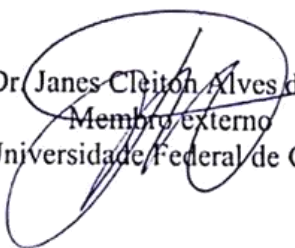
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Campus Jataí, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Este trabalho foi defendido e aprovado, em 20 de fevereiro de 2018, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Eulher Chaves Carvalho.
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás


Prof. Dr. Fabrício Ribeiro Bueno
Membro interno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás


Prof. Dr. Janes Cleiton Alves de Oliveira
Membro externo
Universidade Federal de Goiás

Profª. Dra. Mônica Maria Emerenciano Bueno
Suplente da Banca
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

À Deus, aos meus pais, familiares e aos
que estão sempre ao meu lado,
pela confiança, apoio, carinho e amor.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

À esta instituição e seus professores que colaboraram para minha formação acadêmica e enriquecimento pessoal.

Ao meu orientador, por toda a dedicação e incentivo prestado.

Aos meus pais pelo amor e apoio incondicional.

À minha vó pelo carinho, afeto e atenção.

Ao meu irmão, que foi sempre meu exemplo de inteligência e sabedoria.

Aos meus amigos e colegas pelo companheirismo e parceria.

Ao meu anjo da guarda que sempre esteve ao meu lado me guiando, me acalmando nos momentos de angústia e me incentivando nos momentos de insegurança.

A verdade é uma coisa bela e terrível, por isso
deve ser tratada com grande cautela.
(J. K. Rowling)

RESUMO

Este trabalho contém um estudo e o desenvolvimento de um modelo matemático, em uma direção, que descreve o comportamento dinâmico não linear de torres estaiadas submetidas à ação de carregamentos laterais, uniformemente distribuídas ao longo do comprimento do mastro, e à cargas concentradas axiais. Inicialmente é feito um estudo das equações integro-diferenciais de movimento relativas ao mastro das torres, obtidas através do princípio de Hamilton estendido e do procedimento de Galerkin. Posteriormente, é mostrado o desenvolvimento das equações referentes às tensões exercidas nos cabos, considerando-se o efeito da protensão na catenária incompleta. Por fim, é executada a compatibilização das equações que descrevem o movimento dinâmico dos mastros das torres estaiadas com as equações referentes às forças atuantes nos cabos. Em toda a pesquisa são apresentados exemplos numéricos de possíveis situações envolvendo os mastros, os cabos e o conjunto torre-cabos. Para solucionar os problemas relacionados à vibração e estabilidade estrutural do sistema de dinâmica não linear, são realizadas análises numéricas utilizando como principal ferramenta o método de Runge-Kutta. A importância deste trabalho se encontra na reduzida quantidade de pesquisas voltadas para o comportamento de torres estaiadas, além disto, poucas instituições no Brasil dedicam-se a este estudo.

Palavras-chave: Torres estaiadas. Dinâmica não linear. Vibração não linear.

ABSTRACT

This work presents a study and a mathematical model development, in one direction, that describes the non-linear dynamic behavior of cable-stayed towers subjected to the action of both uniformly distributed lateral loads along the length of the mast and concentrated axial loads. Initially a study of the integral-differential equations of motion related to the mast towers, obtained by the extended Hamilton principle and the Galerkin procedure, is made. After, the development of the equations related to the stresses applied on the cables, considering the effect of the protension in the incomplete catenary, is shown. Finally, the compatibilization between the equations that describe the mast towers dynamic motion and the equations associated with the cable forces, is performed. The work present numerical examples of possible situations involving mast, cables and the tower-cable assembly. In order to solve the problems related to the vibration and structural stability of the nonlinear dynamic system, numerical analyzes are performed by using, as the main tool, the Runge-Kutta method. The importance of this work is found in the small amount of research focused on the behavior of cable-stayed towers, in addition, few Brazilian Institutions dedicate to this study.

Keywords: Cable-stayed towers. Nonlinear dynamic. Nonlinear vibration.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Torre estaiada localizada na cidade de Jataí-GO	18
Figura 2 – Nova Xavantina (MT)	20
Figura 3 – São Gonçalo do Pará (MG)	20
Figura 4 – Ilhéus (BA).....	20
Figura 5 – Fluxograma dos procedimentos de cálculo do sistema 3D	24
Figura 6 – Sistema dinâmico	25
Figura 7 – Seção transversal quadrada	38
Figura 8 – Seção transversal em forma de cruz.....	44
Figura 9 – Catenária completa.....	49
Figura 10 – Catenária incompleta.....	52
Figura 11 – Mudança nas coordenadas materiais no ponto de amarração	54
Figura 12 – Características geométricas do sistema cabo-torre	56
Figura 13 – Sistema de coordenadas para a catenária elástica	57
Figura 14 – Deslocamento em um ponto arbitrário da catenária.....	58
Figura 15 – Forças atuantes em um segmento da catenária	58
Figura 16 – Definições geométricas do cluster simétrico.....	62
Figura 17 – Características geométricas do cluster	65
Figura 18 – Fluxograma com os dados de cada exemplo.....	71
Gráfico 1 – Resposta no tempo (v vs. t): sistema de equações tridimensionais	41
Gráfico 2 – Resposta no tempo (w vs. t): sistema de equações tridimensionais.....	41
Gráfico 3 – Resposta no tempo (γ vs. t): sistema de equações tridimensionais.....	42
Gráfico 4 – Resposta no tempo (v vs. t): sistema de equações bidimensionais.....	46
Gráfico 5 – Resposta no tempo (w vs. t): sistema de equações bidimensionais	46
Gráfico 6 – Respostas no tempo (v vs. t): sistema de equações.....	47
Gráfico 7 – Respostas no tempo (w vs. t): sistema de equações.....	47
Gráfico 8 – Relação entre a força horizontal e sua projeção horizontal.....	57
Gráfico 9 – Relação entre a força horizontal e a projeção horizontal do cabo.....	61
Gráfico 10 – Relação entre a força horizontal e o deslocamento transversal do cluster (desconsiderando o peso próprio).....	66
Gráfico 11 – Relação entre a força horizontal e o deslocamento transversal do cluster (considerando o peso próprio)	66
Gráfico 12 – Relação entre a força horizontal e a força de tração do cabo	67

Gráfico 13 – Resposta no tempo (v vs. t).....	71
Gráfico 14 – Respostas no tempo (v vs. t): sistema de equações.....	73
Gráfico 15 – Respostas no tempo para diferentes valores de amortecimento (c_v)	73
Gráfico 16 – Respostas no tempo para diferentes valores de carga distribuída (Q_v)	75
Gráfico 17 – Respostas no tempo para diferentes valores de tensão vertical (V_c).....	77
Gráfico 18 – Planos de fase para diferentes valores de tensão vertical (V_c).....	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frequência natural (v e w).....	42
Tabela 2 – Frequência natural (γ)	43
Tabela 3 – Seções em forma de cruz	44
Tabela 4 – Resposta da catenária elástica.....	60
Tabela 5 – Frequência natural (v)	72

LISTA DE SÍMBOLOS

(X, Y, Z)	Eixos materiais de referência da barra
(ξ, η, ζ)	Eixos principais de referência da barra
s	Comprimento de arco
C	Centroide da seção transversal
t	Tempo
$u = u(s, t)$	Deslocamento elástico ao longo do eixo material X
$v = v(s, t)$	Deslocamento elástico ao longo do eixo material Y
$w = w(s, t)$	Deslocamento elástico ao longo do eixo material Z
$\psi = \psi(s, t)$	Primeiro ângulo de Euler
$\theta = \theta(s, t)$	Segundo ângulo de Euler
$\phi = \phi(s, t)$	Terceiro ângulo de Euler
$\omega(s, t)$	Velocidade angular
ω_ξ	Velocidade angular em torno do eixo referencial ξ
ω_η	Velocidade angular em torno do eixo referencial η
ω_ζ	Velocidade angular em torno do eixo referencial ζ
$\rho(s, t)$	Curvatura
ρ_ξ	Mudança de curvatura por torção
ρ_η	Mudança de curvatura por flexão em torno do eixo referencial η
ρ_ζ	Mudança de curvatura por flexão em torno do eixo referencial ζ
$V(t)$	Energia potencial total
$T(t)$	Energia cinética
$\ell(s, t)$	Densidade do Lagrangeano
L	Comprimento da barra
J	Matriz de inércia
J_ξ	Momento de inércia da barra em torno do eixo referencial ξ
J_η	Momento de inércia da barra em torno do eixo referencial η
J_ζ	Momento de inércia da barra em torno do eixo referencial ζ
ρ_b	Massa específica da barra
A_s	Área da seção transversal

$U(t)$	Energia interna de deformação
D_{ξ}	Rigidez à torção da barra em torno do eixo referencial ξ
D_{η}	Rigidez à torção da barra em torno do eixo referencial η
D_{ζ}	Rigidez à torção da barra em torno do eixo referencial ζ
E	Módulo de Young
G	Módulo de cisalhamento
$L(t)$	Lagrangeano
$\lambda(t)$	Multiplicador de Lagrange
W_{NC}	Trabalho realizado pelas forças não conservativas
$Q_{\alpha}^*(\alpha = u, v, w, \phi)$	Forças generalizadas
$\delta_{\alpha}(\alpha = u, v, w, \phi)$	Deslocamentos generalizados
$c_{\alpha}(\alpha = u, v, w, \phi, \gamma)$	Coeficientes de amortecimento viscoso
$\gamma = \gamma(s, t)$	Ângulo de torção da barra
$Q_v(t)$	Carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento da barra, aplicada na direção v
$Q_w(t)$	Carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento da barra, aplicada na direção w
$Q_u(t)$	Carga concentrada axialmente aplicada na direção u
g	Aceleração da gravidade
M_{γ}	Momento torsor distribuído aplicado ao longo da barra
Ω_u	Frequência de vibração da excitação, na direção u
Ω_v	Frequência de vibração da excitação, na direção v
Ω_w	Frequência de vibração da excitação, na direção w
q_u	Amplitude da excitação dinâmica aplicada em u
q_v	Amplitude da excitação dinâmica aplicada em v
q_w	Amplitude da excitação dinâmica aplicada em w
P_s	Parcela estática do carregamento axial
m	Massa por unidade de comprimento da barra
$v_0 = v_0(t)$	Curvatura inicial da barra (imperfeição geométrica) na direção de v
$w_0 = w_0(t)$	Curvatura inicial da barra (imperfeição geométrica) na direção de w
$\phi_0 = \phi_0(t)$	Rotação inicial do eixo neutro da barra (imperfeição geométrica)

$\gamma_0 = \gamma_0(t)$	Ângulo de torção inicial da barra (imperfeição geométrica) em torno do eixo neutro
$F_v(s)$	Autofunção associada à parte linearizada de v
$F_w(s)$	Autofunção associada à parte linearizada de w
$F_\gamma(s)$	Autofunção associada à parte linearizada de γ
$\alpha_{vi}, \alpha_{wi}, \alpha_{\gamma i}$	Coeficientes de Galerkin
a	Altura da seção transversal da barra, quando quadrada
f_v	Frequência natural na direção v
f_w	Frequência natural na direção w
f_γ	Frequência natural na direção γ
A_v	Amplitude na direção v
A_w	Amplitude na direção w
A_γ	Amplitude na direção γ
b	Base da seção transversal da barra
h	Altura da seção transversal da barra, quando cruciforme
e	Espessura da seção transversal da barra
C_v	Fator de amplificação do deslocamento v
C_w	Fator de amplificação do deslocamento w
C_γ	Fator de amplificação do ângulo de torção γ
Sobrescrito $\wedge$	Vetores unitários
Sobrescrito $\bullet$	Derivada parcial com relação ao tempo t
Sobrescrito $'$	Derivada parcial com relação ao comprimento de arco s
A	Ponto de ancoragem do cabo
B	Ponto de amarração
hc	Altura do cabo
St	Comprimento total do cabo
Sc	Comprimento da parcela suspensa do cabo
δc	Projeção horizontal da parcela suspensa do cabo
δt	Projeção horizontal de todo o cabo
qc	Peso por unidade de comprimento
Tc	Força de tração no ponto de amarração

H_c	Projeção horizontal da força de tração do cabo
V_c	Projeção vertical da força de tração do cabo
β_o	Ângulo de ancoragem da catenária completa
β	Ângulo que a força de tração do cabo faz com a horizontal
ds	Elemento de arco infinitesimal
T_o	Protensão
H_{lim}	Força horizontal limite do cabo
δ_{lim}	Projeção horizontal limite do cabo
p	Ponto arbitrário ao longo do cabo
s_l	Coordenada Lagrangiana
T	Tensão
W_c	Peso próprio do cabo
A_o	Área inicial da seção transversal do cabo
S_o	Comprimento inicial do cabo
u	Movimento longitudinal
v	Movimento transversal
EA	Rigidez axial de um cabo
n	Número de cabos distribuídos simetricamente em torno da torre

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	18
1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	19
1.1 Motivações.....	19
1.2 Referencial teórico.....	21
1.3 Objetivos.....	22
1.3.1 <i>Objetivo Geral</i>	22
1.3.2 <i>Objetivos Específicos</i>	22
1.4 Escopo do trabalho	23
2 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	24
2.1 Sistema dinâmico tridimensional (3D).....	24
2.1.1 <i>O sistema dinâmico</i>	25
2.1.2 <i>Os ângulos de Euler</i>	26
2.1.3 <i>Barra inextensível</i>	27
2.1.4 <i>Equação de Lagrange</i>	27
2.1.5 <i>O princípio de Hamilton</i>	29
2.1.6 <i>Equação de movimento com não linearidades cúbicas</i>	31
2.1.7 <i>Expansão das equações de movimento</i>	33
2.1.8 <i>Autofunções</i>	35
2.1.9 <i>Discretização das equações de movimento pelo método de Galerkin</i>	37
2.1.10 <i>Aplicação das equações tridimensionais de movimento</i>	38
2.2 Sistema dinâmico bidimensional (2D)	44
2.2.1 <i>Variável Escrava</i>	44
2.2.2 <i>Aplicação das equações bidimensionais</i>	45
2.3 Comparação entre o sistema tridimensional e bidimensional.....	46
3 ESTUDO DOS CABOS.....	49
3.1 Catenárias	49
3.1.1 <i>Catenária completa</i>	49
3.1.2 <i>Catenária incompleta</i>	52
3.1.2.1 <i>Aplicação</i>	56
3.1.3 <i>Consideração da protensão</i>	57
3.1.3.1 <i>Aplicação</i>	60
3.2 Cluster de cabos.....	61
3.2.1 <i>Resposta estática de um cluster de cabos</i>	62

3.2.2	<i>Aplicação.....</i>	64
4	ESTUDO DO CONJUNTO TORRE-CABOS.....	68
4.1	Compatibilização das equações	68
4.2	Aplicação	70
4.2.1	<i>Sistema livre de forças e não amortecido</i>	71
4.2.2	<i>Sistema livre de forças e amortecido.....</i>	73
4.2.3	<i>Sistema com carga distribuída ao longo do mastro e amortecido</i>	75
4.2.4	<i>Sistema com carga distribuída ao longo do mastro, tensão vertical nos cabos e amortecimento</i>	77
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	80
	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	81
	REFERÊNCIAS	82
	APÊNDICE	87

INTRODUÇÃO

As torres estaiadas são elementos estruturais verticais, normalmente esbeltos, ancorados por cabos (estais), comumente empregados pela sociedade, devido à possibilidade de atingir grandes alturas e ainda suportar elevadas cargas. Atualmente, as estruturas estaiadas estão frequentemente presentes em torres (Figura 1), linhas de transmissão de energia elétrica, linhas de telecomunicação, estruturas *off-shore*, guindastes, tabuleiros de pontes, coberturas de grandes áreas, suporte para coletores de energia solar e turbinas eólicas.

Como uma parcela grande destas estruturas possuem um alto nível de esbeltez ($\lambda > 200$), seus projetos são baseados em critérios de estabilidade. Em geral, são utilizados cabos de aço nos estais das torres, os quais impõem fortes não linearidades inerciais e geométricas ao sistema. Dessa forma, ao analisá-lo, faz-se necessário conhecer seu comportamento durante a aplicação de cargas estáticas e, principalmente, dinâmicas, tais como, a ação do vento, ocupação humana e atuação de cargas de chuva (CARVALHO, 2013).

O estudo da estabilidade e não linearidade das torres estaiadas neste trabalho é feito por meio do desenvolvimento de ensaios numéricos. Com os resultados adquiridos, espera-se determinar situações críticas e pretende-se discutir como a não linearidade geométrica afeta a segurança da estrutura.

Figura 1 – Torre estaiada localizada na cidade de Jataí-GO



Fonte: Autora, 2017.

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As torres estaiadas possuem comportamento essencialmente não linear, devido, principalmente, à presença dos cabos. Ao conferir à estrutura elevada rigidez, os cabos permitem que o mastro desenvolva grandes deslocamentos, mesmo este sofrendo pequenas deformações, havendo, dessa forma, forte não linearidade geométrica. Deve-se atentar também para a não linearidade devido ao carregamento, haja visto que a própria mudança na geometria da torre estaiada produz uma variação não linear na força que o cabo exerce sobre o mastro.

1.1 Motivações

A motivação deste trabalho originou-se na reduzida quantidade de trabalhos produzidos relacionados ao estudo do comportamento dinâmico das torres estaiadas. No Brasil, o número de pesquisas relacionadas a este tema é ainda menor, os poucos trabalhos que foram encontrados não abordam o assunto de maneira abrangente, estão focados em aplicações específicas dessas estruturas, principalmente no emprego de linhas de transmissão.

A dificuldade de cálculo dessas estruturas é outro incentivo a esta pesquisa, já que por envolver um comportamento dinâmico não linear, há certo desconhecimento da forma como esse sistema atua quando solicitado por carregamentos estáticos e dinâmicos. Outra motivação adveio dos problemas enfrentados por excesso de vibrações e alto número de acidentes ocasionados pela perda de estabilidade das torres estaiadas de grande porte, levando muitas à situação de colapso, como mostram as Figuras 2, 3 e 4. O presente trabalho foi desenvolvido no sentido de contribuir com o conhecimento do comportamento destas estruturas, por meio de equações e métodos de vasta aplicação nas engenharias, porém pouco utilizados no estudo de torres estaiadas.

Figura 2 – Nova Xavantina (MT)



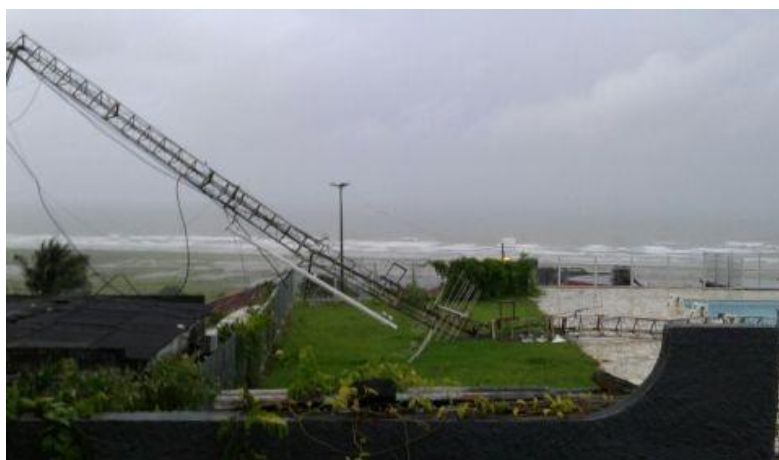
Fonte: <https://i.ytimg.com/vi/Ka2LJLAfaDk/maxresdefault.jpg>. Acesso: ago. 2017.

Figura 3 – São Gonçalo do Pará (MG)



Fonte: <http://g1.globo.com/mg/centro-oeste/noticia/2013/09/cabos-de-alta-tensao-provocam-morte-apos-queda-de-torre-em-mg.html>. Acesso: ago. 2017.

Figura 4 – Ilhéus (BA)



Fonte: <http://www.blogdogusmao.com.br/v1/2016/11/16/torre-da-prefeitura-cai-no-convento-da-piedade/>. Acesso: ago. 2017.

1.2 Referencial teórico

Os primeiros trabalhos publicados sobre o estudo da estabilidade de torres estaiadas preocupavam-se com o desenvolvimento de metodologias capazes de determinar os esforços atuantes na estrutura. Madugula (2002) compilou vários destes trabalhos em uma única fonte, explicando as várias metodologias de análise. No entanto, nota-se que muitas simplificações são feitas a fim de compensar o desconhecimento a respeito do comportamento não linear.

Na literatura, o estudo do comportamento dinâmico não linear das torres estaiadas, em grande parte, deriva do interesse da comunidade científica e de engenheiros projetistas no comportamento das pontes estaiadas. Em seu trabalho, Mazarim (2011), por exemplo, apresenta um histórico das pontes estaiadas e suas aplicações no Brasil.

Dentre os trabalhos encontrados, verifica-se que o método dos elementos finitos é comumente aplicado na grande maioria, geralmente com a utilização de elementos de viga coluna para modelar a torre e elementos de treliça ou catenária para modelar os cabos, a saber: Xu et. al. (1997 e 2010), Kahla (1997 e 2000), Wahba et. al. (1998), Madugula et. al. (1998), Karoumi (1999), Cheng et. al. (2002) e Freire et. al. (2006). Pesquisas recentes brasileiras em que são feitas análises dinâmicas de torres estaiadas são provenientes de estudos relativos a torres de linhas de transmissão. Exemplos destes trabalhos podem ser encontrados em Bentes (2013), Costa (2014), Carlos (2015). Esses autores também utilizam o método dos elementos finitos em seus estudos.

Tratando especificamente das torres estaiadas, Chan et. al. (2002) apresentaram uma análise de segunda ordem da estabilidade de colunas estaiadas protendidas com imperfeições iniciais, Yan-Li et. al. (2003) estudaram a resposta tridimensional de uma torre estaiada sob ação de vento e Harikrishna et. al. (2003) descreveram com maior profundidade as características do vento, medindo em escala real a resposta estrutural de uma torre estaiada com 50 m de altura na presença de vento.

Para estudar a estabilidade estática e dinâmica de torres estaiadas, Pasquetti (2003) apresentou uma formulação discreta para um modelo plano de torre estaiada, onde os cabos foram modelados com elementos de mola lineares, elementos de mola não lineares e como cabos inextensíveis. O comportamento pós-crítico de torres estaiadas foi estudado em detalhe por Saito e Wadee (2008) e Carvalho (2008), usando o método dos elementos finitos. Eles mostraram que o comportamento pós-crítico do sistema é fortemente influenciado pela presença dos cabos e sua tensão inicial. Exemplos mais recentes de estudos nesta linha de pesquisa podem ser encontrados em Carvalho et. al. (2012a, 2012b, 2013a, 2013b, 2013c,

2013d, 2013e, 2013f, 2013g, 2014, 2015), Mancilla et. al. (2014a, 2014b, 2015) e Coaquira et. al. (2015).

O desenvolvimento de várias pesquisas e artigos por Crespo da Silva e colaboradores permitiram vários estudos em diferentes áreas envolvendo não linearidades geométricas e inerciais. Desta forma, foram citados por inúmeros estudiosos como Zavodney e Nayfeh (1988,1989), Pai e Nayfeh (1990a, 1990b, 1991a, 1991b), Malatkar (2003), Barros (2004), Zhang (2005), Di Egidio et. al. (2015). As equações que descrevem o movimento não linear de uma viga foram desenvolvidas por Crespo da Silva e Glynn (1978a, 1978b), sendo essas derivadas do princípio de Hamilton e foram desenvolvidas considerando contribuições não lineares dos termos relacionados à curvatura e à inércia da viga. Malatkar (2003), também utilizando a formulação de Crespo da Silva e Glynn (1978a, 1978b), derivou as equações diferenciais de movimento não planar não linear de vigas metálicas. Crespo da Silva e Hodges (1986a, 1986b) formularam equações diferenciais para uma viga rotativa e estudaram as influências no movimento de uma pá de helicóptero. O amplo uso das equações, demonstradas por Crespo da Silva em diversas áreas das engenharias, justifica a adoção dessas no desenvolvimento do trabalho proposto.

1.3 Objetivos

Os objetivos do presente trabalho estão divididos em objetivo geral e específicos.

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é o estudo de vibrações não lineares de torres estaiadas.

1.3.2 Objetivos Específicos

Desenvolver um modelo matemático para descrever o comportamento do conjunto torre-cabos e a partir deste modelo, desenvolver uma modelagem numérica que permita uma análise eficiente do comportamento dinâmico não linear das torres estaiadas. Deseja-se, portanto, estudar a influência dos cabos no comportamento dinâmico não linear deste sistema estrutural. Com os resultados adquiridos mediante a realização de ensaios numéricos, pretende-se discutir como a não linearidade geométrica afeta a segurança da estrutura e a sua

capacidade de carga, permitindo assim o desenvolvimento futuro de prescrições para o projeto destas estruturas.

1.4 Escopo do trabalho

O segundo capítulo deste trabalho contém o conjunto de equações integro-diferenciais que governam o movimento dinâmico tridimensional e também bidimensional, não linear, de barras inextensíveis, correspondentes aos mastros de torres estaiadas. São utilizadas as equações de Crespo da Silva, com aplicação do método de Galerkin, desenvolvidas por Carvalho (2013). Posteriormente são aplicados exemplos numéricos às equações de movimento no espaço e no plano.

O terceiro capítulo introduz as equações utilizadas para o cálculo das forças atuantes nos cabos das torres estaiadas. Nele são apresentadas as equações desenvolvidas por Irvine (1992), referentes ao estudo da catenária, da protensão e da existência do cluster de cabos. Além disso, são mostrados exemplos numéricos com aplicações dessas equações.

O quarto capítulo, presente nesta pesquisa, apresenta as equações integro-diferenciais que regem o movimento dinâmico não linear do conjunto torre-cabos. É realizada a compatibilização das equações que descrevem o movimento dinâmico dos mastros das torres estaiadas com as equações referentes às forças atuantes nos cabos, considerando a existência de protensão. Em seguida são apresentados exemplos numéricos de possíveis situações envolvendo o conjunto torre-cabos.

Por fim, são descritas as considerações finais desta pesquisa e posteriormente são expostas sugestões para trabalhos futuros.

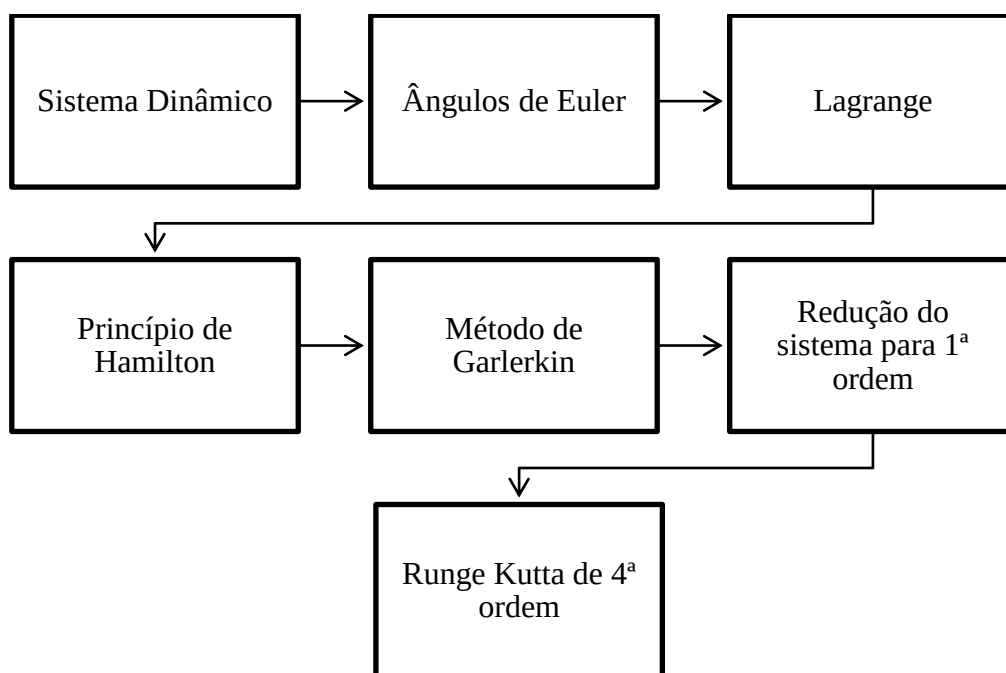
2 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Neste capítulo utilizou-se as equações integro-diferenciais que regem o movimento dinâmico não linear, tridimensional e bidimensional dos mastros das torres estaiadas, desenvolvidas por Crespo da Silva e colaboradores.

2.1 Sistema dinâmico tridimensional (3D)

A seguir, apresenta-se uma síntese das equações tridimensionais de movimento dinâmico, não linear, desenvolvidas por Crespo da Silva e colaboradores, trabalhadas por Carvalho (2013). No fluxograma apresentado na Figura 5 têm-se um breve resumo da metodologia aplicada nesta seção, citando os principais procedimentos de cálculo realizados.

Figura 5 – Fluxograma dos procedimentos de cálculo do sistema 3D



Fonte: elaboração da autora, 2018.

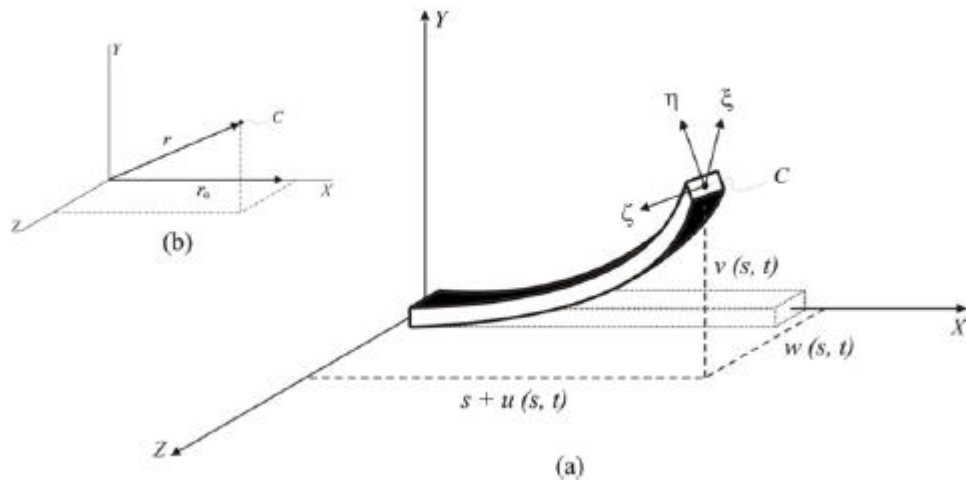
Inicialmente definiu-se o sistema dinâmico para a dedução das equações de movimento do mastro (Item 2.1.1). Em seguida, utilizou-se os ângulos de Euler para realizar a mudança de referencial entre os eixos globais e principais de uma seção arbitrária do mastro (Item 2.1.2). Posteriormente aplicou-se o funcional de Lagrange relacionando a energia cinética e a energia interna de deformação da barra (Item 2.1.4). Após esse procedimento, aplicou-se o Princípio de Hamilton considerando o trabalho das forças não conservativas (Item 2.1.5). Com o emprego dos modos de vibração da viga engastada-livre, utilizou-se o

Método de Galerkin para realizar a discretização das equações de movimento, obtendo-se assim um sistema com três equações diferenciais, homogêneas não lineares de segunda ordem (Item 2.1.9). Como forma de simplificar essas equações, após a aplicação de exemplos numéricos reduziu-se a ordem desse sistema, obtendo-se, dessa forma, seis equações diferenciais, homogêneas não lineares de primeira ordem (Item 2.1.10).

2.1.1 O sistema dinâmico

Considera-se as hipóteses clássicas da teoria de vigas de Euler-Bernouille para a dedução das equações de movimento referentes a um elemento unidimensional (barra), inicialmente reto, de seção transversal constante, material elástico-linear e isótropo, de comprimento L e massa por unidade de comprimento m . Os eixos (X, Y, Z) formam o sistema de referência global, e os eixos (ξ, η, ζ) são os eixos principais da seção transversal arbitrária s , como pode-se observar na Figura 6.

Figura 6 – Sistema dinâmico: (a) Referencial adotado; (b) Vetor posição



Fonte: Carvalho (2013).

As componentes do vetor de deslocamentos ao longo dos eixos globais X, Y e Z , a partir do centroide de uma seção transversal arbitrária, são denominadas, respectivamente, $u(s, t)$, $v(s, t)$, e $w(s, t)$. A orientação dos eixos principais (ξ, η, ζ) da seção, com relação os eixos materiais (X, Y, Z) é descrita por três ângulos, conhecidos por ângulos de Euler, $\psi(s, t)$, $\theta(s, t)$ e $\phi(s, t)$.

2.1.2 Os ângulos de Euler

Por meio de um processo sequencial de três rotações, os ângulos de Euler são três quantidades independentes que descrevem no espaço tridimensional a mudança do referencial (X, Y, Z) até o referencial (ξ, η, ζ) . Considera-se que o sistema parte de uma configuração de equilíbrio indeformada, e que, posteriormente, os eixos materiais X e Y giram em torno do eixo material Z de um ângulo $\psi(s, t)$, de forma a atingir a posição (ξ_1, η_1, ζ_1) . Na sequência, girando-se os eixos ξ_1 e ζ_1 em torno do eixo η_1 de um ângulo $\theta(s, t)$, têm-se a posição (ξ_2, η_2, ζ_2) . Por último, chegando-se à posição final da seção (ξ, η, ζ) , tem-se que os eixos η_2 e ζ_2 giram em torno do eixo ξ_2 de um ângulo $\theta(s, t) = \phi$. Nascendo desse processo sequencial dois conjuntos de eixos auxiliares: (ξ_1, η_1, ζ_1) , (ξ_2, η_2, ζ_2) além dos eixos (ξ, η, ζ) e (X, Y, Z) .

O vetor velocidade angular $\omega(s, t)$ do sistema principal (ξ, η, ζ) com relação ao sistema material (X, Y, Z) , é dado por:

$$\omega(s, t) = \dot{\psi} Z + \dot{\theta} \eta_1 + \dot{\phi} \xi. \quad (2.1)$$

No entanto, sabendo-se as expressões de η_1 e Z ,

$$\eta_1 = \cos(\phi) \eta - \sin(\phi) \zeta, \quad (2.2)$$

$$Z = -\sin(\theta) \xi + \cos(\theta) \sin(\phi) \eta + \cos(\theta) \cos(\phi) \zeta, \quad (2.3)$$

a velocidade angular também pode ser encontrada em termos dos eixos (ξ, η, ζ) ,

$$\begin{aligned} \omega(s, t) &= [\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)] \xi + [\dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi)] \eta + [\dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\theta} \sin(\phi)] \zeta, \\ \omega(s, t) &= \omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

É possível se obter as componentes do vetor curvatura, utilizando-se da analogia cinemática de Kirchhoff (Love, 1944; Crespo da Silva e Glynn, 1978.a e 1978.b), sendo as derivadas no tempo substituídas por derivadas espaciais e $\omega(s, t)$ substituído por $\rho(s, t)$. Tendo-se:

$$\begin{aligned} \rho(s, t) &= [\phi' - \psi' \sin(\theta)] \xi + [\psi' \cos(\theta) \sin(\phi) + \theta' \cos(\phi)] \eta + [\psi' \cos(\theta) \cos(\phi) - \theta' \sin(\phi)] \zeta, \\ \rho(s, t) &= \rho_\xi \xi + \rho_\eta \eta + \rho_\zeta \zeta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que ρ_ξ representa a mudança de curvatura por torção, enquanto ρ_η e ρ_ζ representam a mudança de curvatura por flexão da barra na posição s .

Mesmo com tantas variáveis, o problema pode ser simplificado considerando as hipóteses clássicas da teoria de vigas de Euler- Bernoulli.

2.1.3 Barra inextensível

A deformação ao longo do eixo de um elemento diferencial é definida como:

$$e = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1. \quad (2.6)$$

No caso de barras inextensíveis, a deformação axial e é nula, dessa forma

$$\sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1 = 0, \quad (1+u')^2 + v'^2 + w'^2 = 1. \quad (2.7)$$

Os ângulos ψ e θ podem ser relacionados com as derivadas espaciais u' , v' e w' :

$$\tan(\psi) = \frac{v'}{(1+u')}, \quad (2.8)$$

$$\tan(\theta) = \frac{-w'}{\left((1+u')^2 + v'^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.9)$$

Nota-se que apenas v , w , ϕ são as variáveis independentes.

2.1.4 Equação de Lagrange

Seguindo Crespo da Silva e Glynn (1978.a e 1978.b), define-se o funcional de Lagrange:

$$L(t) = T(t) - U(t) = \int_0^L \ell(s, t) ds, \quad (2.10)$$

em que $U(t)$ é a energia interna de deformação, $T(t)$ a energia cinética e $\ell(s, t)$ a densidade do Lagrangiano associada ao movimento de uma barra de comprimento L .

A energia cinética possui duas componentes devido à translação e à rotação:

$$T_T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds, \quad (2.11)$$

$$T_R(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\omega_\xi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta] J [\omega_\xi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta]^T ds, \quad (2.12)$$

em que J é a matriz de inércia.

Os momentos de inércia por unidade de comprimento da barra são J_ξ, J_η, J_ζ , definidos por:

$$J_\xi = \int \int_{A_s} \rho_b (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta, \quad (2.13)$$

$$J_\eta = \int \int_{A_s} \rho_b \zeta^2 d\eta d\zeta, \quad (2.14)$$

$$J_\zeta = \int \int_{A_s} \rho_b \eta^2 d\eta d\zeta, \quad (2.15)$$

em que ρ_b é a massa específica da barra e A_s refere-se a área da seção transversal.

Chega-se à expressão para energia cinética:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds + \frac{1}{2} \int_0^L [\omega_\xi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta] J [\omega_\xi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta]^T ds. \quad (2.16)$$

A energia interna de deformação para o material elástico linear é:

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (D_\xi \rho_\xi^2 + D_\eta \rho_\eta^2 + D_\zeta \rho_\zeta^2) ds, \quad (2.17)$$

em que D_ξ é referente a rigidez à torção e D_η e D_ζ são as parcelas de rigidez à flexão da barra, dadas por:

$$D_\xi = \int \int_{A_s} G(\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta, \quad (2.18)$$

$$D_\eta = \int \int_{A_s} E\zeta^2 d\eta d\zeta, \quad (2.19)$$

$$D_\zeta = \int \int_{A_s} E\eta^2 d\eta d\zeta, \quad (2.20)$$

onde E é o módulo de Young e G o módulo de cisalhamento.

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \ell(s, t) = & \left[\frac{1}{2} m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (D_\xi \omega_\xi^2 + D_\eta \omega_\eta^2 + D_\zeta \omega_\zeta^2) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

Acrescenta-se ao Lagrangiano $L(t)$ a restrição de inextensionalidade, multiplicada pelo multiplicador de Lagrange $\lambda(s, t)$, obtendo-se:

$$L(t) = \int_0^L \left\{ \ell(s, t) + \frac{1}{2} \lambda(s, t) [1 - (1 + u')^2 - v'^2 - w'^2] \right\} ds. \quad (2.22)$$

2.1.5 O princípio de Hamilton

Entre dois pontos fixos existem infinitos caminhos a serem percorridos, de acordo com princípio variacional de Hamilton (Meirovitch, 1967), o sistema assumirá a trajetória que torna o funcional, a seguir, estacionário:

$$I = \int_{t_2}^{t_1} L(t) dt. \quad (2.23)$$

O que define o princípio de Hamilton na sua forma estendida é o acréscimo do trabalho W_{NC} realizado pelas forças não conservativas, obtendo-se:

$$\delta I = \int_{t_2}^{t_1} [\delta L(t) + \delta W_{NC}(t)] dt = 0. \quad (2.24)$$

Em sua pesquisa, Carvalho (2013) considerou que a barra era solicitada por cargas concentradas aplicadas nas suas extremidades e por cargas distribuídas aplicadas ao longo de seu comprimento. Levando-se em consideração a deformação da estrutura e as forças de amortecimento, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{NC} = & \int_0^L \{ [Q_u(t) - c_u \dot{u}] \delta u + [Q_v(t) - c_v \dot{v}] \delta v \\ & + [Q_w(t) - c_w \dot{w}] \delta w + [Q_\phi(t) - c_\phi \dot{\phi}] \delta \phi \} ds, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\delta W_{NC} = \int_0^L (Q_u^* \delta u + Q_v^* \delta v + Q_w^* \delta w + Q_\phi^* \delta \phi) ds, \quad (2.26)$$

em que Q_α^* ($\alpha = u, v, w, \phi$) são referentes as forças generalizadas associadas com os deslocamentos virtuais δ_α ($\alpha = u, v, w, \phi$) e as quantidades c_α ($\alpha = u, v, w, \phi$) são os coeficientes de amortecimento viscoso. É possível chegar nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \delta I(t) = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\ell(s, t) + \frac{1}{2} \lambda(s, t) [1 - (1 + u')^2 - v'^2 - w'^2] \right) ds dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta (Q_u^* \delta u + Q_v^* \delta v + Q_w^* \delta w + Q_\phi^* \delta \phi) ds dt = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \mathfrak{R} \, ds \, dt = 0. \quad (2.28)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = & \left(\ell(s, t) + \frac{1}{2} \lambda(s, t) [1 - (1 + u')^2 - v'^2 - w'^2] \right) \\ & + \left(\int_0^L (Q_u^* \delta u + Q_v^* \delta v + Q_w^* \delta w + Q_\phi^* \delta \phi) \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

Como $\mathfrak{R}$ é função de 16 variáveis, é necessário calcular as seguintes derivadas parciais:

$$\delta \mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{16} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} \alpha_i, \quad (2.30)$$

Expandindo a Equação (2.31) por meio das derivadas parciais requeridas na Equação (2.33), tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L (G'_u - m\ddot{w} + Q_u^*) \delta u \, ds + \int_0^L (G'_v - m\ddot{v} + Q_v^*) \delta v \, ds \right. \\ & + \int_0^L (G'_w - m\ddot{w} + Q_w^*) \delta w \, ds + \int_0^L (Q_\phi^* - A_\phi) \delta \phi \, ds \\ & + \left[\frac{\partial \ell}{\partial \phi'} \delta \phi - G_u \partial u - G_v \partial v - G_w \partial w + \left(H_v - \frac{H_u}{(1+u')} v' \right) \partial v' \right. \\ & \left. \left. + \left(H_w - \frac{H_u}{(1+u')} w' \right) \partial w' \right]_{s=0}^{s=L} \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

A Equação (2.34) é válida para qualquer δu , δv , δw e $\delta \phi$, e os integrandos contidos nas integrais são iguais à zero (Török, 2000). Assim, obtêm-se:

$$G'_u = \left[A_\psi \frac{\partial \psi}{\partial u'} + A_\theta \frac{\partial \theta}{\partial u'} + \lambda(1+u') \right]' = m\ddot{u} - Q_u^*, \quad (2.32)$$

$$G'_v = \left[A_\psi \frac{\partial \psi}{\partial v'} + A_\theta \frac{\partial \theta}{\partial v'} + \lambda v' \right]' = m\ddot{v} - Q_v^*, \quad (2.33)$$

$$G'_w = \left[A_\psi \frac{\partial \psi}{\partial w'} + A_\theta \frac{\partial \theta}{\partial w'} + \lambda w' \right]' = m\ddot{w} - Q_w^*, \quad (2.34)$$

$$A_\phi = Q_\phi^*, \quad (2.35)$$

$$\left\{ \frac{\partial \ell}{\partial \phi'} \delta \phi - G_u \partial u - G_v \partial v - G_w \partial w + \left[H_v - \frac{H_u}{(1+u')} v' \right] \partial v' + \left[H_w - \frac{H_u}{(1+u')} w' \right] \partial w' \right\} \Big|_{s=0}^{s=L} = 0. \quad (2.36)$$

Para manter a condição de inextensibilidade, o multiplicador de Lagrange $\lambda = \lambda(s, t)$ é interpretado como uma força tangente ao eixo neutro da barra. As funções $A_\alpha = (\alpha = \psi, \theta, \phi)$ e $H_\alpha (\alpha = u, v, w)$ são dadas por:

$$A_\alpha = \frac{\partial \ell^2}{\partial t \partial \dot{\alpha}} + \frac{\partial \ell^2}{\partial s \partial \alpha'} + \frac{\partial \ell}{\partial \alpha}, \quad (\alpha = \psi, \theta, \phi), \quad (2.37)$$

$$H_\alpha = \frac{\partial \ell}{\partial \psi'} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \ell}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha'}, \quad (\alpha = u, v, w). \quad (2.38)$$

2.1.6 Equação de movimento com não linearidades cúbicas

Todos os termos transcendentais presentes nas equações anteriores são expandidos em séries de Taylor, com o intuito de analisar o comportamento não linear da barra com não linearidades cúbicas. Tendo-se:

$$\psi \approx v' \left(1 + \frac{1}{6} v' + \frac{1}{2} w'^2 \right), \quad (2.39)$$

$$\theta \approx -w' \left(1 + \frac{1}{6} w'^2 \right). \quad (2.40)$$

Obtendo-se:

$$\sin(\alpha) \approx \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \frac{1}{120} \alpha^5 + O(\varepsilon^6) \approx \alpha, \quad (2.41)$$

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{24} \alpha^4 + O(\varepsilon^6) \approx 1. \quad (2.42)$$

Chegando-se as equações finais que descrevem o movimento acoplado de flexão-flexão-torção de uma barra:

$$\begin{aligned}
G'_u = & \left\{ D_\xi \phi' (w'' v' - v'' w') - v' [(D_\eta - D_\zeta) \phi w'']' - w' [(D_\eta - D_\zeta) \phi v'']' \right. \\
& + v' (D_\zeta v'')' + w' (D_\zeta w'')' - J_\xi \dot{\phi} (\dot{w}' v' - \dot{v}' w') + (J_\eta - J_\zeta) [(\dot{w}' \phi)' v' \\
& \left. + (\dot{v}' \phi)' w'] - J_\zeta \ddot{v}' - J_\eta \ddot{w}' w' + \lambda(1 + u') - v' w' Q_\phi^* \right\}' = m\ddot{u} - Q_u^*,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
G'_v = & \left\{ -D_\xi (\phi' + v'' w') w'' - [(D_\eta - D_\zeta) (\phi^2 v'' - \phi w'' - v' w' w'') + D_\zeta v'']' \right. \\
& - v' (D_\zeta v''^2 + D_\eta w''^2) + J_\xi (\dot{\phi} + \dot{v}' w') \dot{w}' + (J_\eta - J_\zeta) [\phi^2 \dot{v}' - \phi \dot{w}' \\
& \left. - v' w' \dot{w}'] + J_\zeta \dot{v}' \right\}' + v (J_\zeta \dot{v}'^2 + J_\eta \dot{w}'^2) + \lambda v' + w' Q_\phi^* \Big\}' = m\ddot{v} - Q_v^*,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
G'_w = & \left\{ D_\xi (\phi' + v'' w') v'' + [(D_\eta - D_\zeta) (\phi v'' - \phi^2 w'') - D_\eta w'']' \right. \\
& - w' (D_\eta w''^2 + D_\zeta v''^2) - J_\xi (\dot{\phi} + \dot{v}' w') \dot{v}' - [(J_\eta - J_\zeta) (\phi \dot{v}' + \phi^2 \dot{w}') - J_\eta \dot{w}']' \\
& \left. + w' (J_\eta \dot{w}'^2 + J_\zeta \dot{v}'^2) + \lambda w' \right\}' = m\ddot{w} - Q_w^*,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
& -[D_\xi (\phi' + v'' w')] + (D_\eta - D_\zeta) [(v''^2 - w''^2) \phi - v'' w'']' \\
& + J_\xi (\dot{\phi} + \dot{v}' w')' - (J_\eta - J_\zeta) [(\dot{v}'^2 + \dot{w}'^2) \phi - \dot{v}' \dot{w}'] = Q_\phi^*,
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$u' = -\left(\frac{1}{2}\right)(v'^2 + w'^2). \tag{2.47}$$

Para uma barra engastada-livre as condições de contorno são:

$$u(0, t) = v(0, t) = v'(0, t) = w(0, t) = w'(0, t) = \gamma(0, t) = 0, \tag{2.48}$$

$$v''(L, t) = v'''(L, t) = w''(L, t) = w'''(L, t) = \gamma'(L, t) = 0, \tag{2.49}$$

$$G_u(L, t) = G_v(L, t) = G_w(L, t) = 0. \tag{2.50}$$

Em que $\gamma = \gamma(s, t)$ representa o ângulo de torção da barra:

$$\gamma = \phi + \int_0^s (v'' w') ds = \phi + v' w' - \int_0^s (v' w'') ds, \tag{2.51}$$

$$\gamma' = \phi' + v'' w', \tag{2.52}$$

$$\gamma'' = \phi'' + v'''w' + v''w', \quad (2.53)$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\phi} + \int_0^s (v''w')^\bullet ds = \dot{\phi} + (v'w')^\bullet - \int_0^s (v'w'')^\bullet ds, \quad (2.54)$$

$$\ddot{\gamma} = \ddot{\phi} + \int_0^s (v''w')^{\bullet\bullet} ds = \ddot{\phi} + (v'w')^{\bullet\bullet} - \int_0^s (v'w'')^{\bullet\bullet} ds. \quad (2.55)$$

Assim é possível se obter γ , u e λ :

$$\gamma = -\frac{1}{D_\xi} \int_0^s \int_L^s \left[Q_\phi + (D_\eta - D_\zeta) v''w'' \right] ds ds, \quad (2.56)$$

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds, \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \lambda = J_\eta (w' \ddot{w}') + J_\zeta (v' \ddot{v}') - D_\eta (w' w''') - D_\zeta (v' v''') \\ - \frac{1}{2} \int_L^s m \left[\int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right]^{\bullet\bullet} ds - \int_L^s (Q_u^*). \end{aligned} \quad (2.58)$$

2.1.7 Expansão das equações de movimento

Tendo-se cargas $Q_v(t)$ e $Q_w(t)$ uniformemente distribuídas ao longo da barra, e uma carga concentrada $Q_u(t)$ aplicada em sua extremidade, tem-se que:

$$Q_\phi^* = M_\phi - c_\phi \dot{\phi} \approx M_\phi - J_\xi c_\gamma \dot{\phi} \approx M_\gamma - J_\xi c_\gamma \dot{\gamma} = -J_\xi c_\gamma \dot{\gamma}, \quad (2.59)$$

$$Q_u^* = mg + Q_u(t) = mg + (1 + 2u') [P_s + q_u \cos(\Omega_u t)], \quad (2.60)$$

$$Q_v^* = Q_v(s, t) - c_v \dot{v} = q_v \cos(\Omega_u t) - c_v \dot{v}, \quad (2.61)$$

$$Q_w^* = Q_w(s, t) - c_w \dot{w} = q_w \cos(\Omega_w t) - c_w \dot{w}. \quad (2.62)$$

Obtêm-se as três equações não lineares de movimento, adimensionalizadas, em função dos deslocamentos transversais v e w do ângulo γ de torção:

$$\begin{aligned}
& \ddot{v} + c_v \dot{v} + (\beta_y v'')'' + [Ps + q_u \cos(\Omega t)] v'' = \left\{ -\beta_\gamma \gamma' w'' + (1 - \beta_y) \right. \\
& \left[(w'' \gamma)' - (\gamma^2 v'')' + w''' \int_0^s (v' w'') ds \right] - v' (\beta_y v'^2 + \beta_y w'^2) + v' (J_\zeta \dot{v}^2 + J_\eta \dot{w}^2) \\
& + v' \left[-\beta_y v' v''' - w' w''' + J_\zeta \ddot{v} v' + J_\eta \ddot{w} w' - \frac{1}{2} \int_L^s \left(m \left[\int_0^s (v'^2 + w'^2) \right]'' ds \right) \right] ds \\
& + J_\xi \left[\dot{\gamma} + \int_0^s (v' w'')^\bullet ds - \dot{w}' v' \right] \dot{w}' + \left[(J_\eta - J_\zeta) \left(\dot{v}' \gamma^2 - \dot{w}' \gamma - \dot{w}' \int_0^s (v' w'') ds \right) \right. \\
& \left. + J_\zeta \dot{v}' \right]^\bullet - (J_\xi c_\gamma \dot{\gamma}) w' \Big\} + q_v(s) \cos(\Omega t) \\
& - mg [v''(s - L) + v'] - [P_s + q_u \cos(\Omega t)] [v'(v'^2 + w'^2)]',
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{w} + c_w \dot{w} + (w'')'' + [Ps + q_u \cos(\Omega t)] w'' = \left\{ -\beta_\gamma \gamma' v'' + (1 - \beta_y) \right. \\
& \left[(v'' \gamma)' + (\gamma^2 w'')' - v''' \int_0^s (v'' w') ds \right] - w' (v''^2 + w''^2) + w' (J_\zeta \dot{v}^2 + J_\eta \dot{w}^2) \\
& + w' \left[-\beta_y v' v''' - w' w''' + J_\zeta \ddot{v} v' + J_\eta \ddot{w} w' - \frac{1}{2} \int_L^s \left(m \left[\int_0^s (v'^2 + w'^2) \right]'' ds \right) \right] ds \\
& - J_\xi \left[\dot{\gamma} + \int_0^s (v' w'')^\bullet ds - \dot{w}' v' \right] \dot{v}' + \left[(J_\eta - J_\zeta) \left(\dot{w}' \gamma^2 - \dot{v}' \gamma - \dot{v}' \int_0^s (v' w'') ds \right) \right. \\
& \left. - J_\eta \dot{w}' \right]^\bullet \Big\} + q_w(s) \cos(\Omega t) \\
& - mg [w''(s - L) + w'] - [P_s + q_u \cos(\Omega t)] [w'(v'^2 + w'^2)]',
\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
& J_\xi \ddot{\gamma} + J_\xi c_\gamma \dot{\gamma} - \beta_\gamma \gamma'' = -(1 - \beta_y) [(v''^2 - w''^2) \gamma - v'' w''] \\
& - J_\xi \left[\int_0^s (v' w'')^\bullet ds - v' \dot{w}' \right]^\bullet + (J_\eta - J_\zeta) [(\dot{v}'^2 - \dot{w}'^2) \gamma - \dot{v}' \dot{w}'],
\end{aligned} \tag{2.65}$$

em que $B_y = D_\zeta / D_\eta$, $B_\gamma = D_\xi / D_\eta$.

2.1.8 Autofunções

As equações de movimento podem ser solucionadas pelo método de Galerkin, com a aplicação dos modos de vibração da viga engastada-livre:

$$v(s,t) = F_v(s)v(t) = F_v(s) \cos(\omega_v t), \quad (2.66)$$

$$w(s,t) = F_w(s)w(t) = F_w(s) \cos(\omega_w t), \quad (2.67)$$

$$\gamma(s,t) = F_\gamma(s)v(t) = F_\gamma(s) \cos(\omega_\gamma t). \quad (2.68)$$

Considerando uma barra com propriedades constantes, as autofunções $F_v(s)$ e $F_\gamma(s)$ devem satisfazer às seguintes equações diferenciais:

$$\beta_y F_v^{IV} - \omega_v^2 F_v + J_\xi \omega_v^2 F_v'' = 0, \quad (2.69)$$

$$\beta_\gamma F_\gamma'' + J_\zeta \omega_\gamma^2 F_\gamma = 0. \quad (2.70)$$

As autofunções também devem atender as seguintes condições de contorno:

$$F_v(0) = F_v'(0) = F_\gamma(0) = 0, \quad (2.71)$$

$$F_v''(1) = F_\gamma'(1) = 0. \quad (2.72)$$

A autofunção $F_w(s)$ associada com a parte linearizada de w é obtida fazendo-se $\beta_y = 1$, $\omega_v = \omega_w$ e $J_\zeta = J_\eta$:

$$F_w^{IV} - \omega_w^2 F_w + J_\eta \omega_\eta^2 F_w'' = 0. \quad (2.73)$$

As soluções das Equações (2.69) e (2.70) são:

$$F_v = C_v \left\{ \cosh(r_1 s) - \cos(r_2 s) - K_v \left[\sinh(r_1 s) - \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \sin(r_2 s) \right] \right\}, \quad (2.74)$$

$$F_\gamma = C_\gamma \sin \left[(2n-1) \left(\frac{\pi}{2} \right) s \right] \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.75)$$

onde,

$$K_v = \frac{r_1^2 \cosh(r_1) + r_2^2 \cos(r_2)}{r_1^2 \sinh(r_1) + r_1 r_2 \sin(r_2)}, \quad (2.76)$$

$$r_1 = \left(-\frac{J_\zeta \omega_v^2}{2\beta_y} + \left(\left(\frac{J_\zeta \omega_v^2}{2\beta_y} \right)^2 + \frac{\omega_v^2}{\beta_y} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.77)$$

$$\omega_\gamma = (2n-1) \left(\frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\frac{\beta_\gamma}{\beta_\xi}} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2.78)$$

A solução da Equação (2.73) é:

$$F_w = C_w \left\{ \cosh(r_3 s) - \cos(r_4 s) - K_w \left[\sinh(r_3 s) - \left(\frac{r_3}{r_4} \right) \sin(r_4 s) \right] \right\}, \quad (2.79)$$

em que,

$$K_w = \frac{r_3^2 \cosh(r_3) + r_4^2 \cos(r_4)}{r_3^2 \sinh(r_3) + r_3 r_4^2 \cos(r_4)}, \quad (2.80)$$

$$r_3 = \left(-\frac{J_\eta \omega_w^2}{2} + \left(\left(\frac{J_\eta \omega_w^2}{2} \right)^2 + \omega_w^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.81)$$

$$r_4 = \left(\frac{J_\eta \omega_w^2}{2} + \left(\left(\frac{J_\eta \omega_w^2}{2} \right)^2 + \omega_w^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.82)$$

As quantidades r_1 e r_2 satisfazem a equação característica obtida impondo a condição $F_v''' = 1$. Similarmente, as quantidades r_3 e r_4 satisfazem a equação característica obtida impondo a restrição $F_w''' = 1$.

As amplitudes C_v , C_w e C_γ que aparecem respectivamente nas autofunções são arbitrárias. Crespo da Silva e Zaretzky (1994) atribuem valores a essas constantes de modo a normalizar as amplitudes dos modos de vibração, o que também se faz neste trabalho. Assim:

Atribui-se valores às amplitudes C_v , C_w e C_γ com o objetivo de normalizar as amplitudes dos modos de vibração, assim como Crespo da Silva e Zaretzky (1994). Dessa forma, têm-se:

$$\int_0^1 [F_v^2(s) - J_\zeta F_v(s) F_v''(s)] ds = 1, \quad (2.83)$$

$$\int_0^1 [F_w^2(s) - J_\eta F_w(s) F_w''(s)] ds = 1, \quad (2.84)$$

$$\int_0^1 [F_\gamma^2(s)] ds = 1. \quad (2.85)$$

2.1.9 Discretização das equações de movimento pelo método de Galerkin

As equações finais que governam o movimento acoplado flexão-flexão-torção de barras engasta-livres são:

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^1 F_v^2 ds - J_\zeta \int_0^1 F_v'' F_v ds \right] \ddot{v} + \left[c_v \int_0^1 F_v^2 ds \right] \dot{v} + \left[\beta_y \int_0^1 F_v^{IV} F_v ds + \right. \\
 & \left. \int_0^1 [P_s + q_u \cos(\Omega t)] F_v F_v'' ds + mg \int_0^1 (F_v F_v''(s-1) + F_v F_v') ds \right] v = \\
 & \alpha_{v1} \gamma w + \alpha_{v2} v \gamma^2 + \alpha_{v3} v w^2 + \alpha_{v4} v^3 + \alpha_{v5} (v^2)^{\bullet\bullet} v + \alpha_{v6} (w^2)^{\bullet\bullet} v + \\
 & \alpha_{v7} v^2 \ddot{v} + \alpha_{v8} v w \ddot{w} + \alpha_{v9} \dot{w} \dot{\gamma} + \alpha_{v10} w \dot{v} \dot{w} + \alpha_{v11} v \dot{w}^2 + \\
 & \alpha_{v12} (\dot{v} \gamma^2)^{\bullet} + \alpha_{v13} \gamma \ddot{w} + \alpha_{v14} v \ddot{v}^2 + \alpha_{v15} w \dot{\gamma} + \int_0^1 F_v q_v \cos(\Omega_v t) ds,
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^1 F_w^2 ds - J_\eta \int_0^1 F_w'' F_w ds \right] \ddot{w} + \left[c_w \int_0^1 F_w^2 ds \right] \dot{w} + \left[\int_0^1 F_w^{IV} F_w ds + \right. \\
 & \left. \int_0^1 [P_s + q_u \cos(\Omega t)] F_w F_w'' ds + mg \int_0^1 (F_w F_w''(s-1) + F_w F_w') ds \right] w = \\
 & \alpha_{w1} \gamma v + \alpha_{w2} w \gamma^2 + \alpha_{w3} w v^2 + \alpha_{w4} w^3 + \alpha_{w5} (w^2)^{\bullet\bullet} w + \alpha_{w6} (v^2)^{\bullet\bullet} w + \\
 & \alpha_{w7} w^2 \ddot{w} + \alpha_{w8} w v \ddot{v} + \alpha_{w9} \dot{v} \dot{\gamma} + \alpha_{w10} v \dot{w} \dot{v} + \alpha_{w11} w \dot{v}^2 + \\
 & \alpha_{w12} (\dot{w} \gamma^2)^{\bullet} + \alpha_{w13} \gamma \ddot{v} + \alpha_{w14} w \ddot{w}^2 + \int_0^1 F_w q_w \cos(\Omega_w t) ds,
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^1 F_\gamma^2 ds \right] \ddot{\gamma} + \left[c_\gamma \int_0^1 F_\gamma^2 ds \right] \dot{\gamma} - \left[\beta_\gamma \int_0^1 F_\gamma'' F_\gamma ds \right] \gamma = \\
 & \alpha_{\gamma1} \gamma v^2 + \alpha_{\gamma2} \gamma w^2 + \alpha_{\gamma3} v w + \left[\alpha_{\gamma4} (v w)^{\bullet} + \alpha_{\gamma5} v \dot{w} \right]^{\bullet} + \\
 & \alpha_{\gamma6} \gamma \dot{v}^2 + \alpha_{\gamma7} \gamma \dot{w}^2 + \alpha_{\gamma8} \dot{v} \dot{w} ds.
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

No Apêndice deste trabalho estão presentes os coeficientes α_{vi} , α_{wi} e $\alpha_{\gamma i}$ para $(i=1,2,\dots)$.

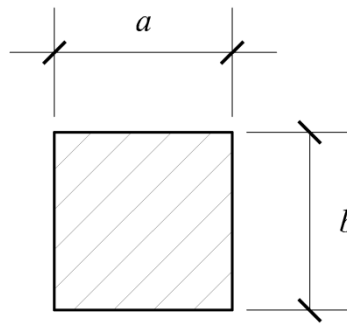
Quando a frequência ω_γ das oscilações por torção da barra não equivalem às frequências ω_v e ω_w das oscilações de flexão, pode-se considerar a hipótese de que o valor

de vários termos associados com o momento de inércia da barra são desprezíveis (CRESPO DA SILVA; ZARETZKY, 1994). Nos casos em que isso ocorre, os coeficientes α_{v7} a α_{v15} , α_{w7} a α_{w14} e $\alpha_{\gamma6}$ a $\alpha_{\gamma8}$ são desconsiderados das equações de movimento.

2.1.10 Aplicação das equações tridimensionais de movimento

A partir das equações tridimensionais de movimento é possível realizar a aplicação de exemplos numéricos. Para os cálculos a seguir, considera-se uma barra uniforme, de material elástico linear isotrópico, comprimento L , seção transversal quadrada como mostra a Figura 7, de lado $a = b = L/25$, $b = 1$, $G = 80.0 E9$, $E = 210.0 E9$.

Figura 7 – Seção transversal quadrada



Fonte: elaboração da autora, 2018.

Pela teoria da elasticidade tem-se que:

$$D_{\xi} = k_1 b a^3 G ,$$

$$D_{\eta} = \frac{a b^3}{12} E ,$$

$$D_{\zeta} = \frac{a^3 b}{12} E .$$

Sendo, G o módulo de elasticidade transversal, E o módulo de Young. Segundo Carvalho (2013) a variável k_1 é calculada usando as Equações (168) e (171) de Timoshenko e Goodier (1970).

Através das rigidezes à torção, D_{ξ} , e à flexão, D_{η} e D_{ζ} , é possível determinar:

$$\beta_y = \frac{D_{\zeta}}{D_{\eta}} = \frac{a^3 b E}{12} \frac{12}{a b^3 E} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 = 1,$$

$$\begin{aligned}
\beta_\gamma &= \frac{D_\xi}{D_\eta} = k_1 \frac{12ba^3G}{ab^3E} = 12k_1 \frac{G}{E} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\
&= 12 \frac{G}{E} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left[\frac{1}{3} - 0,21 \frac{a}{b} \left(1 - \frac{1}{12} \left(\frac{a}{b}\right)^4\right) \right] = 0.64381, \\
J_\eta &= \frac{(b/L)^2}{12} = 0,00013, \\
J_\zeta &= \frac{(a/L)^2}{12} = 0,00013, \\
J_\xi &= J_\eta + J_\zeta = 0,00026.
\end{aligned}$$

Onde, J_ξ , J_η e J_ζ são os momentos de inércia da barra. As constantes $C_v = 1$, $C_w = 1$ e $C_\gamma = \sqrt{2}$ podem ser determinadas pelas Equações (2.88) a (2.90).

Considerando-se $P_s = q_u = mg = 0$ e eliminando os coeficientes de Galerkin α_{v7} a α_{v15} , α_{w7} a α_{w14} e $\alpha_{\gamma6}$ a $\alpha_{\gamma8}$, o sistema de equações que governam o movimento acoplado flexão-flexão-torção (Equações 2.91 a 2.93), pode ser expresso por:

$$\begin{cases}
1,0002\ddot{v} + 1,0002c_v\dot{v} + 12,366v - 6,5994\gamma w + 40,472(vw^2 + v^3) \\
\quad + 4,599(\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v\ddot{v} + w\ddot{w})v - 0,783q_v \cos(\Omega t) = 0 \\
1,0002\ddot{w} + 1,0002c_w\dot{w} + 12,366w + 6,5994\gamma v + 40,472(wv^2 + w^3) \\
\quad + 4,599(\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w\ddot{w} + v\ddot{v})w - 0,783q_w \cos(\Omega t) = 0 \\
\ddot{\gamma} + c_\gamma\dot{\gamma} + 5957,0\gamma + 2,6746(\ddot{v}w - v\ddot{w}) - 0,0001\dot{v}\dot{w} = 0
\end{cases} \quad (2.89)$$

Através da linearização do sistema dado na Equação (2.94), chega-se às menores frequências naturais angulares de vibração da barra associadas a cada um dos modos,

$$\omega_v = \omega_w = \sqrt{\frac{12,388}{1,002}} = 3,51618, \quad (2.90)$$

$$\omega_\gamma = \sqrt{\frac{320,219}{1,0}} = 77,19160. \quad (2.91)$$

Através da realização de mudança de variáveis, é possível tornar o sistema de três equações diferenciais, homogêneas não lineares de segunda ordem, em um sistema de seis equações diferenciais, homogêneas não lineares de primeira ordem no tempo. Dessa forma:

$$\begin{cases} 1,0002\ddot{v} + 12,366v - 6,5994\gamma w + 40,472(vw^2 + v^3) \\ \quad + 4,599(\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v\ddot{v} + w\ddot{w})v = 0 \\ 1,0002\ddot{w} + 12,366w + 6,5994\gamma v + 40,472(wv^2 + w^3) \\ \quad + 4,599(\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w\ddot{w} + v\ddot{v})w = 0 \\ \ddot{\gamma} + 5957,0\gamma + 2,646(\ddot{v}w - v\ddot{w}) - 0,0001\dot{v}\dot{w} = 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} y1 &= v; \\ y2 &= \dot{v}; \\ y3 &= w; \\ y4 &= \dot{w}; \\ y5 &= \gamma; \\ y6 &= \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

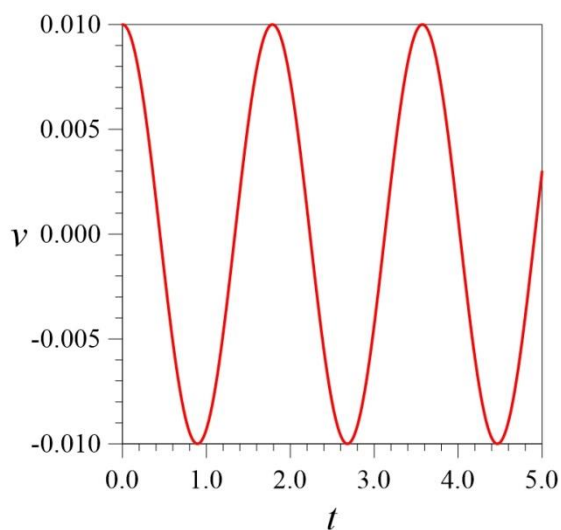
$$\begin{cases} \dot{y}1 = \dot{v} = y2 \\ \dot{y}3 = \dot{w} = y4 \\ \dot{y}5 = \dot{\gamma} = y6 \\ \dot{y}2 = \ddot{v} = \frac{1}{vw}[-0,2175\ddot{w} - 2,6888w - 1,435\gamma v - 8,8002(wv^2 + w^3) \\ \quad - (\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w\ddot{w})w] \\ \dot{y}4 = \ddot{w} = \frac{1}{vw}[-0,2175\ddot{v} - 2,6888v - 1,435\gamma w - 8,8002(vw^2 + v^3) \\ \quad - (\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v\ddot{v})v] \\ \dot{y}6 = \ddot{\gamma} = -5957,0\gamma - 2,6746(\ddot{v}w + v\ddot{w}) - 0,0001\dot{v}\dot{w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}1 = y2 \\ \dot{y}2 = \frac{1}{vw}[-0,2175\dot{y}4 - 2,6888y3 - 1,435y5y1 \\ \quad - 8,8002(y3y1^2 + y3^3) - (y2^2 + y4^2 + y3\dot{y}4)y3] \\ \dot{y}3 = y4 \\ \dot{y}4 = \frac{1}{vw}[-0,2175\dot{y}2 - 2,6888y1 - 1,435y5y3 \\ \quad - 8,8002(y1y3^2 + y1^3) - (y2^2 + y4^2 + y1\dot{y}2)y1] \\ \dot{y}5 = y6 \\ \dot{y}6 = -5957,0y5 - 2,6746(\dot{y}2y3 + y1\dot{y}4) - 0,0001y2y4 \end{cases} \quad (2.94)$$

As equações de movimento foram trabalhadas no software Maple 18. Utilizando-se o método numérico de Runge Kutta de quarta ordem, obteve-se uma planilha numérica com os resultados dos deslocamentos, velocidades e acelerações ao longo do tempo. A partir desses

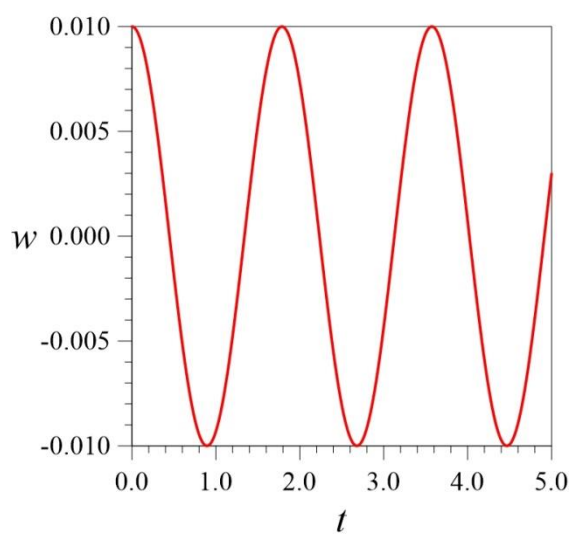
valores, os gráficos das respostas no tempo do deslocamento em cada direção, v (Gráfico 1), w (Gráfico 2) e γ (Gráfico 3), foram traçados por meio do programa Grapher 9.

Gráfico 1 – Resposta no tempo (v vs. t): sistema de equações tridimensionais



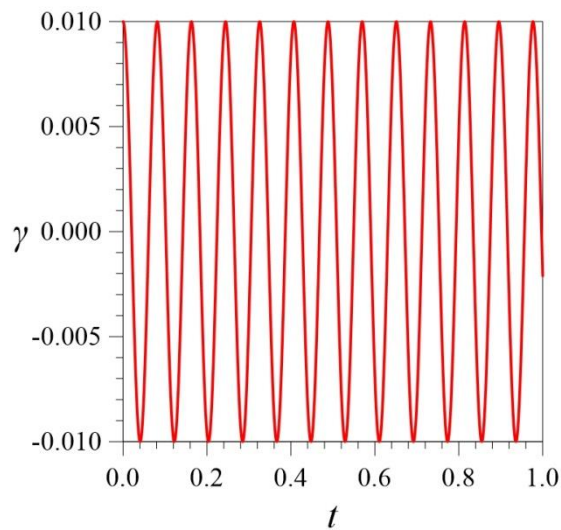
Fonte: elaboração da autora, 2017.

Gráfico 2 – Resposta no tempo (w vs. t): sistema de equações tridimensionais



Fonte: elaboração da autora, 2017.

Gráfico 3 – Resposta no tempo (γ vs. t): sistema de equações tridimensionais



Fonte: elaboração da autora, 2017.

A frequência natural de f_v , f_w , f_γ foi obtida através da frequência média envolvendo a quantidade de tempo gasta para a realização de cada uma das primeiras 20 oscilações.

Tabela 1 – Frequência natural (v e w)

Nº de Oscilações Acumulado	Tempo	Oscilações	Frequência
1	1,79	1	0,558659218
2	1,78	1	0,561797753
3	1,79	1	0,558659218
4	1,79	1	0,558659218
5	1,78	1	0,561797753
6	1,79	1	0,558659218
7	1,79	1	0,558659218
8	1,79	1	0,558659218
9	1,78	1	0,561797753
10	1,79	1	0,558659218
11	1,79	1	0,558659218
12	1,78	1	0,561797753
13	1,79	1	0,558659218
14	1,79	1	0,558659218
15	1,78	1	0,561797753
16	1,79	1	0,558659218
17	1,79	1	0,558659218
18	1,78	1	0,561797753
19	1,79	1	0,558659218
20	1,79	1	0,558659218

Fonte: elaboração da autora, 2017.

A partir dos valores observados na Tabela 1, obteve-se

$$f_v = f_w = 0,5596.$$

Tabela 2 – Frequência natural (γ)

Nº de Oscilações Acumulado	Tempo	Oscilações	Frequência
1	0,081	1	12,345679012
2	0,082	1	12,195121951
3	0,081	1	12,345679012
4	0,082	1	12,195121951
5	0,081	1	12,345679012
6	0,081	1	12,345679012
7	0,082	1	12,195121951
8	0,081	1	12,345679012
9	0,082	1	12,195121951
10	0,081	1	12,345679012
11	0,08	1	12,500000000
12	0,083	1	12,048192771
13	0,081	1	12,345679012
14	0,082	1	12,195121951
15	0,081	1	12,345679012
16	0,082	1	12,195121951
17	0,081	1	12,345679012
18	0,081	1	12,345679012
19	0,082	1	12,195121951
20	0,081	1	12,345679012

Fonte: elaboração da autora, 2017.

Analogamente, a partir dos valores observados na Tabela 2, obteve-se

$$f_\gamma = 12,2858.$$

De posse da frequência natural é possível realizar o cálculo da frequência angular nas direções de v , w , γ , através da Equação (2.95),

$$\omega_n = f_n \cdot 2\pi. \quad (2.95)$$

Assim, tem-se que nas direções de v e w os respectivos valores de frequência angular são:

$$\omega_v = \omega_w = 0,5596 \cdot 2\pi,$$

$$\omega_v = \omega_w = 3,516.$$

Do mesmo modo, na direção de γ , têm-se que o valor da frequência angular é dado por:

$$\omega_\gamma = 12,2858 \cdot 2\pi,$$

$$\omega_\gamma = 77,194.$$

Diferentemente das frequências, os valores de amplitude podem ser verificados através de análise gráfica, sem a necessidade de cálculos. Desta forma têm-se:

$$A_v = A_w = 0,010,$$

$$A_\gamma = 0,010.$$

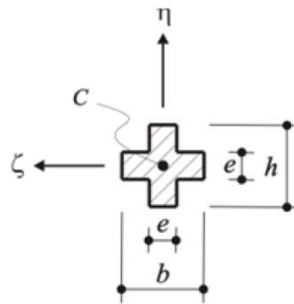
2.2 Sistema dinâmico bidimensional (2D)

Os processos para realizar a redução das equações de movimento no espaço para o plano estão descritos a seguir. Para mais informações vide Carvalho (2013).

2.2.1 Variável Escrava

Para a realização da redução do sistema tridimensional para o bidimensional, utilizou-se o exemplo de uma seção em forma de cruz, representado pela Figura 8.

Figura 8 – Seção transversal em forma de cruz



Fonte: Carvalho (2013).

Aplicando-se os dados do exemplo numérico da Tabela 3, às equações de movimento tridimensionais, obtêm-se:

Tabela 3 – Dados da seção em forma de cruz

Dimensões				Frequência natural		
b	h	L	e	ω_v	ω_w	ω_γ
4	b	$25b$	$b/14,55$	3,516	ω_v	4,267

Fonte: adaptado de Carvalho (2013).

$$\ddot{v} + c_\gamma \dot{v} + 12,3610v - 6,5976\gamma w + 40,4350(vw^2 + v^3) + 4,5968(\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v\ddot{v} + w\ddot{w})v - 0,7830q_v \cos(\Omega_v t) = 0, \quad (2.96)$$

$$\ddot{w} + c_\gamma \dot{w} + 12,3610w + 6,5976\gamma v + 40,4350(wv^2 + w^3) + 4,5968(\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w\ddot{w} + v\ddot{v})w - 0,7830q_w \cos(\Omega_w t) = 0, \quad (2.97)$$

$$\ddot{\gamma} + c_\gamma \dot{\gamma} + 18,2070\gamma + 2,6739(\ddot{v}w - v\ddot{w}) = 0. \quad (2.98)$$

Nos casos em que as rotações devidas à torção são valores muito pequenos, pode-se considerar que a velocidade $\dot{\gamma}$ e a aceleração $\ddot{\gamma}$ são iguais à zero. Logo, isolando-se γ em função de v e w , têm-se que:

$$\gamma = 0,146861(v\ddot{w} - \ddot{v}w). \quad (2.99)$$

Dessa forma, o sistema de equações bidimensionais em função de (v, w) que rege o movimento não linear da barra engastada-livre é obtido ao se substituir a Equação (2.99) nas Equações (2.96) e (2.97). Tendo-se portanto:

$$\ddot{v} + c_\gamma \dot{v} + 12,3610v - 6,5976[0,146861(v\ddot{w} - \ddot{v}w)]w + 40,4350(vw^2 + v^3) + 4,5968(\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v\ddot{v} + w\ddot{w})v - 0,7830q_v \cos(\Omega_v t) = 0, \quad (2.100)$$

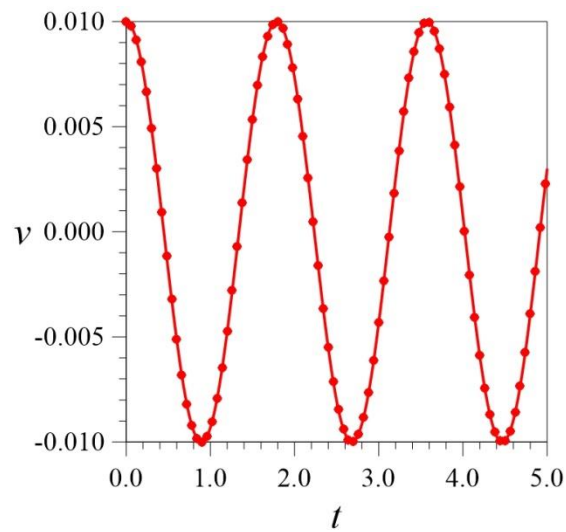
$$\ddot{w} + c_\gamma \dot{w} + 12,3610w + 6,5976[0,146861(v\ddot{w} - \ddot{v}w)]v + 40,4350(wv^2 + w^3) + 4,5968(\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w\ddot{w} + v\ddot{v})w - 0,7830q_w \cos(\Omega_w t) = 0, \quad (2.101)$$

em que γ é agora uma variável escrava.

2.2.2 Aplicação das equações bidimensionais

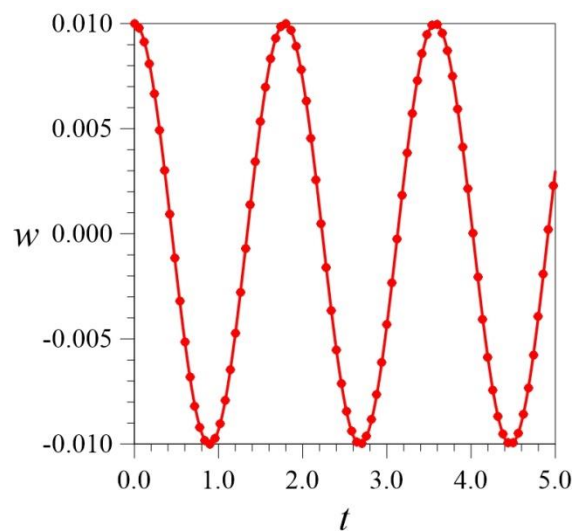
Por meio da mudança de variáveis, é possível tornar o sistema de duas equações diferenciais, homogêneas não lineares de segunda ordem (Equações 2.100 e 2.101), em um sistema de quatro equações diferenciais, homogêneas não lineares de primeira ordem no tempo. Aplicando-se o método numérico de Runge Kutta de quarta ordem e utilizando-se o software Maple 18, obteve-se uma planilha com os resultados dos deslocamentos, velocidades, acelerações em cada direção. A partir desses valores, novos gráficos de respostas no tempo dos deslocamentos em v e w foram traçados, gerando os Gráficos 4 e 5, respectivamente.

Gráfico 4 – Resposta no tempo (v vs. t): sistema de equações bidimensionais



Fonte: elaboração da autora, 2017.

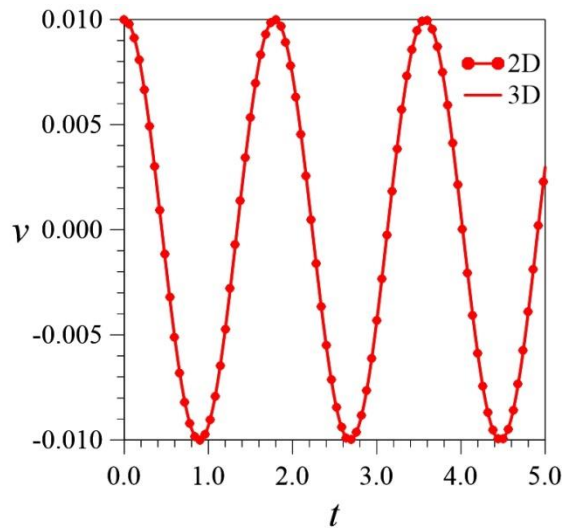
Gráfico 5 – Resposta no tempo (w vs. t): sistema de equações bidimensionais



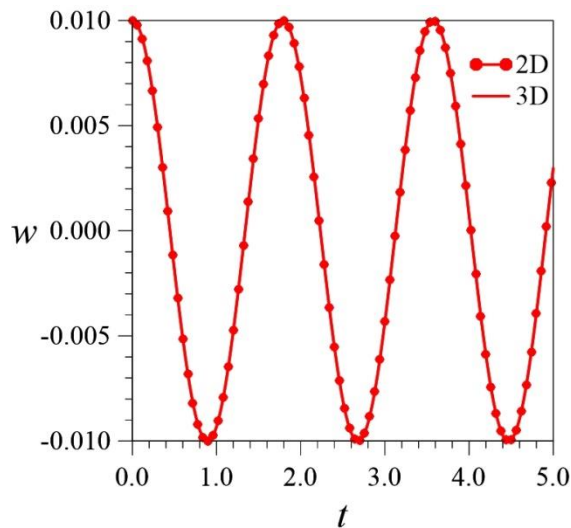
Fonte: elaboração da autora, 2017.

2.3 Comparação entre o sistema tridimensional e bidimensional

Ao realizar-se a sobreposição das respostas no tempo dos deslocamentos nas direções v e w , obtidos no sistema bidimensional, sobre as respostas obtidas no tridimensional, obtêm-se os Gráficos 6 e 7.

Gráfico 6 – Respostas no tempo (v vs. t): sistema de equações

Fonte: elaboração da autora, 2017.

Gráfico 7 – Respostas no tempo (w vs. t): sistema de equações

Fonte: elaboração da autora, 2017.

Como se pode verificar graficamente, as novas curvas nas direções de v e w do sistema bidimensional são iguais às do sistema tridimensional. Dessa forma, pode-se concluir que as frequências naturais de vibração nessas respectivas direções possuem os mesmos valores,

$$f_v = f_w = 0,5596,$$

$$\omega_v = \omega_w = 3,516.$$

A mesma análise pode ser feita para os valores correspondentes às amplitudes, assim têm-se:

$$A_v = A_w = 0,010.$$

Analisando-se as respostas obtidas para os dois sistemas, verifica-se que elas apresentaram o mesmo comportamento ao longo do tempo. Percebe-se com isso que a redução do sistema 3D para o 2D ocorreu como o esperado para os exemplos aplicados.

3 ESTUDO DOS CABOS

Com o objetivo de estudar a dinâmica não linear de vigas espaciais estabilizadas por cabos, o presente capítulo contém as equações utilizadas para o cálculo das forças atuantes nos cabos das torres estaiadas. A seguir serão mostradas as equações desenvolvidas por Irvine (1992), que tratam do estudo da catenária, da protensão e da existência do cluster de cabos.

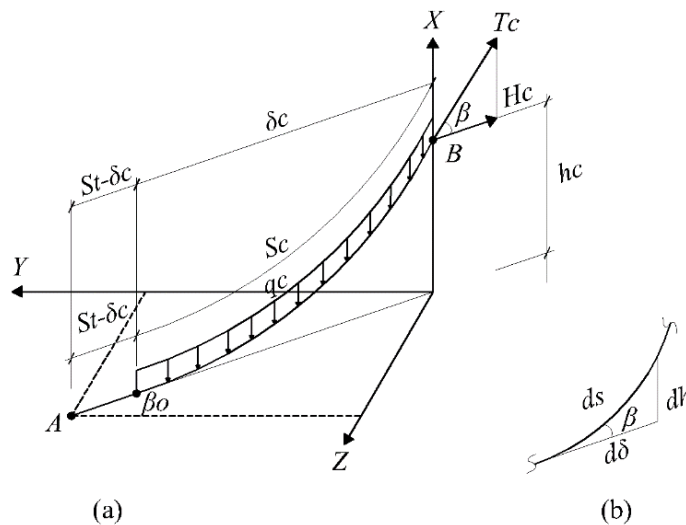
3.1 Catenárias

Nesta pesquisa, há o estudo da forma assumida pelo cabo tensionado, para isso, são analisados os casos da catenária completa, da catenária incompleta e também a presença da protensão. As equações de cada uma dessas situações, presentes nesta seção, tornam possível a determinação da força atuante no ponto de amarração do cabo com o mastro da torre estaiada.

3.1.1 Catenária completa

Os cabos são elementos estruturais resistentes a esforços axiais de tração e quando não possuem inclinação com o ponto de ancoragem A , situação em que $\beta_o = 0$, assumem a forma de catenária completa, como pode-se observar na Figura 9.

Figura 9 – Catenária completa: (a) Configuração esquemática; (b) Elemento de arco infinitesimal



Fonte: adaptado de Irvine (1992).

Na Figura 9, tem-se que hc representa a altura do cabo, St o comprimento total do cabo, Sc o comprimento da parcela suspensa do cabo, δc a projeção horizontal da parcela suspensa do cabo, δt a projeção horizontal de todo o cabo, qc o peso por unidade de comprimento, Tc a força de tração no ponto de amarração, Hc a projeção horizontal da força de tração do cabo, β_o o ângulo de ancoragem da catenária completa e β o ângulo que a força de tração do cabo faz com a horizontal. Por meio do equilíbrio estático das forças, no plano do cabo, nas direções δ e h tem-se que,

$$Tc \cos(\beta) = Hc, \quad (3.1)$$

$$Tc \sin(\beta) = qc Sc. \quad (3.2)$$

A partir das Equações (3.1) e (3.2) de equilíbrio estático, aliadas ao elemento infinitesimal de arco ds , mostrado na Figura 9 (b), é possível chegar nas seguintes relações geométricas:

$$ds^2 = dh^2 + d\delta^2, \quad (3.3)$$

$$\tan(\beta) = \frac{dh}{d\delta} = \frac{qc Sc}{Hc}. \quad (3.4)$$

Trabalhando as Equações (3.3) e (3.4), obtém-se que,

$$ds^2 = \left(\frac{qc Sc}{Hc} \right)^2 d\delta^2 + d\delta^2 = \left[1 + \left(\frac{qc Sc}{Hc} \right)^2 \right] d\delta^2,$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{qc Sc}{Hc} \right)^2} d\delta,$$

$$d\delta = \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{qc Sc}{Hc} \right)^2}}. \quad (3.5)$$

De forma análoga tem-se que

$$dh = \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{Hc}{qc Sc} \right)^2}}. \quad (3.6)$$

Integrando a Equação (3.5), obtém-se a projeção horizontal do cabo suspenso,

$$\delta c = \frac{Hc}{qc} \ln \left[\frac{qc Sc}{Hc} + 1 + \sqrt{\left(\frac{qc Sc}{Hc} + 1 \right)^2 - 1} \right]. \quad (3.7)$$

De modo similar, integrando a Equação (3.6), obtém-se a altura do cabo

$$hc = \frac{Hc}{qc} \left[\sqrt{\left(\frac{qc Sc}{Hc} \right) + 1} - 1 \right]. \quad (3.8)$$

Manipulando a Equação (3.8), é possível obter a relação entre a projeção horizontal da força de tração e o peso por unidade de comprimento do cabo,

$$\begin{aligned} \frac{hc qc}{Hc} &= \sqrt{\left(\frac{qc Sc}{Hc} \right) + 1}, \\ \left(\frac{hc qc}{Hc} \right)^2 + \frac{2 hc qc}{Hc} + 1 &= \left(\frac{qc Sc}{Hc} \right)^2 + 1, \\ \frac{hc^2 qc^2}{Hc^2} + \frac{2 hc qc}{Hc} + 1 &= \frac{qc^2 Sc^2}{Hc^2}, \\ \frac{qc^2}{Hc^2} \left(hc^2 + 2 hc \frac{Hc}{qc} - Sc^2 \right) &= 0, \\ hc^2 + 2 hc \frac{Hc}{qc} - Sc^2 &= 0, \\ hc \left(hc + 2 \frac{Hc}{qc} - \frac{Sc^2}{hc} \right) &= 0, \\ hc + 2 \frac{Hc}{qc} - \frac{Sc^2}{hc} &= 0, \\ 2 \frac{Hc}{qc} &= \frac{Sc^2}{hc} - hc, \\ \frac{Hc}{qc} &= \frac{Sc^2}{2hc} - \frac{hc}{2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por meio da Equação (3.9), chega-se à expressão para o comprimento do cabo suspenso

$$S_c = \sqrt{\frac{2H_c h_c}{q_c} + h_c^2}. \quad (3.10)$$

De acordo com as características do cabo e do projeto, têm-se os valores do peso do cabo q_c por unidade de comprimento e também da profundidade h_c do cabo. Assim, para um dado valor da força horizontal H_c , obtém-se a projeção do comprimento do cabo suspenso, através da Equação (3.7), e determina-se o comprimento da parcela do cabo que está suspensa, por meio da Equação (3.10).

Analizando-se a catenária completa, tem-se que a parcela suspensa do cabo S_c é menor ou igual ao comprimento total do cabo S_t , ou seja, $S_c \leq S_t$. Através da Figura 9, é possível chegar-se a uma última equação para catenária completa,

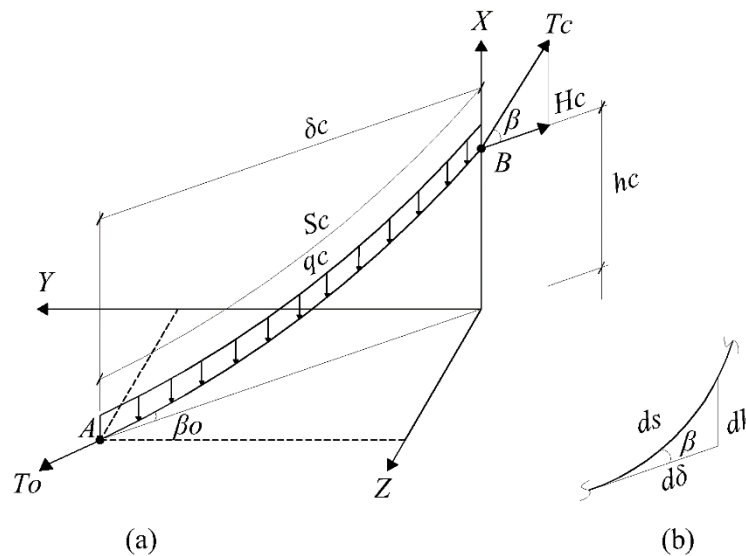
$$S_t - s_c = \delta t - \delta c. \quad (3.11)$$

Para resolver o sistema de equações não lineares, formado pelas Equações (3.7), (3.10) e (3.11), de incógnitas δc , S_c e H_c , deve-se aplicar um processo iterativo.

3.1.2 Catenária incompleta

A forma assumida pelo cabo é o da catenária incompleta, como mostra a Figura 10, quando a inclinação dele com o ponto de ancoragem A não é nula, ou seja, $\beta_o > 0$.

Figura 10 – Catenária incompleta: (a) Configuração esquemática; (b) Elemento de arco infinitesimal



Fonte: adaptado de Irvine (1992).

Na Figura 10 (a), a variável To representa a força de tração no ponto de ancoragem A . Fazendo o equilíbrio estático das forças, obtém-se que:

$$Tc (\cos \beta) = Hc = To \cos(\beta o), \quad (3.12)$$

$$Tc \sin(\beta) = qc Sc + To \sin(\beta o). \quad (3.13)$$

Considerando o elemento infinitesimal de arco ds , mostrado na Figura 10 (b), e também as Equações (3.12) e (3.13), tem-se que:

$$\tan(\beta) = \frac{qc Sc}{Hc} + \tan(\beta o). \quad (3.14)$$

Para chegar-se à projeção horizontal do comprimento do cabo deve-se substituir a Equação (3.14) na Equação (3.12) e posteriormente integrar a expressão resultante com relação à δ , obtendo-se:

$$\delta c = \frac{Hc}{qc} \left\{ \ln \left[\tan(\beta o) + \frac{qc Sc}{Hc} + \sqrt{\left(\frac{qc Sc}{Hc} + \tan(\beta o) \right)^2 + 1} \right] - \ln \left[\tan(\beta o) + \sqrt{\tan^2(\beta o) + 1} \right] \right\}. \quad (3.15)$$

Substituindo-se a Equação (3.14) na Equação (3.15) e integrando-se a expressão resultante em h , chega-se à relação entre a força horizontal Hc e o peso próprio qc por unidade de comprimento do cabo,

$$\frac{Hc}{qc} = \frac{(Sc^2 - hc^2) \cos(\beta o)}{2[hc - Sc \sin(\beta o)]}. \quad (3.16)$$

A resolução da catenária incompleta é possível conhecendo-se os valores do comprimento Sc da parcela suspensa do cabo, da altura hc e do peso qc por unidade de comprimento. Através de um dado valor de força horizontal Hc , utiliza-se a Equação (3.16) para determinar o ângulo de ancoragem βo e, em seguida, calcula-se a projeção horizontal δc pela Equação (3.15). Vale ressaltar que quando $\beta o = 0$, a forma assumida pelo cabo é o da catenária completa e corresponde a situação limite da catenária incompleta. Desse modo, percebe-se que existe um limite para a força horizontal que separa os casos da catenária completa e incompleta. Este valor limite é obtido fazendo $\beta o = 0$ na Equação (3.16),

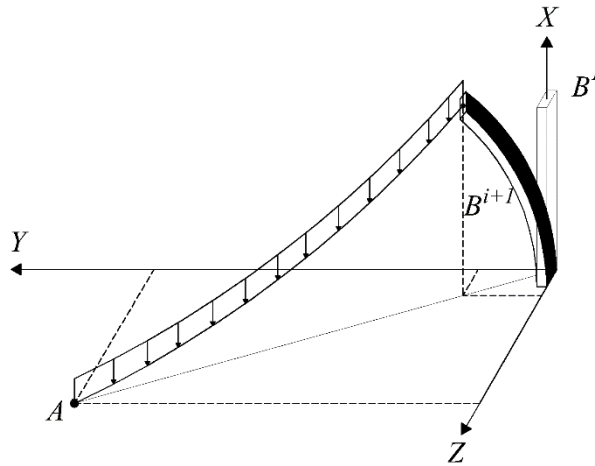
$$H_{\lim} = qc \left(\frac{Sc^2}{2hc} - \frac{hc}{2} \right). \quad (3.17)$$

Portanto, se $Hc > H_{\lim}$ pode-se concluir que a catenária é incompleta, se a situação for contrária, ou seja, se $H_{\lim} > Hc$, pode-se dizer então que a catenária é completa.

Analogamente ao caso da catenária completa, as Equações (3.15) e (3.16) formam um sistema de equações não lineares de incógnitas δc e Hc , cuja solução deve ser obtida por um processo iterativo.

Na Figura 11, A representa o ponto de ancoragem do cabo, B^i é o ponto de amarração do cabo na iteração i e B^{i+1} é o ponto de amarração do cabo na iteração seguinte $i+1$. Conhecidas as posições dos pontos de ancoragem A e de amarração B nas iterações i , $i+1$ e subsequentes, pode-se a qualquer instante, obter a força de tração Tc na ligação cabo-torre resolvendo a equação da catenária.

Figura 11 – Mudança nas coordenadas materiais no ponto de amarração



Fonte: adaptado de Irvine (1992).

Por meio do método de Newton é possível obter as soluções para o sistema de equações não lineares da catenária incompleta, formado pelas Equações (3.15) e (3.16).

Primeiramente, substitui-se a relação Hc / qc da Equação (3.16) na Equação (3.15),

$$\delta c = \left[\frac{(Sc^2 - hc^2) \cos(\beta_0)}{2[hc - Sc \sin(\beta_0)]} \right] \left\{ \ln \left[\tan(\beta_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\left(\frac{2Sc[hc - Sc \sin(\beta_0)]}{(Sc^2 - hc^2) \cos(\beta_0)} + \tan(\beta_0) \right)^2 + 1} \right] - \ln \left[\tan(\beta_0) + \sqrt{\tan^2(\beta_0) + 1} \right] \right\}. \quad (3.18)$$

Posteriormente, forma-se uma função variável de βo que deve ser igual à zero,

$$f(\beta o) = \left[\frac{(Sc^2 - hc^2) \cos(\beta o)}{2[hc - Sc \sin(\beta o)]} \right] \left\{ \ln \left[\tan(\beta o) + \frac{2Sc[hc - Sc \sin(\beta o)]}{(Sc^2 - hc^2) \cos(\beta o)} \right] \right. \\ \left. + \sqrt{\left(\frac{2Sc[hc - Sc \sin(\beta o)]}{(Sc^2 - hc^2) \cos(\beta o)} + \tan(\beta o) \right)^2 + 1} \right\} - \ln \left[\tan(\beta o) + \sqrt{\tan^2(\beta o) + 1} \right] - \delta c. \quad (3.19)$$

Por fim, têm-se pelo método de Newton,

$$\beta o_{n+1} = \beta o_n - \frac{g(\beta o)}{dg / d\beta o}. \quad (3.20)$$

Calculando o valor da variável βo na Equação (3.20), determina-se o valor da força horizontal Hc na Equação (3.16). Comparando a força horizontal Hc com seu valor limite $H_{\lim}$ dado na Equação (3.17), verifica-se se a catenária é realmente incompleta, ou seja, $Hc > H_{\lim}$;

O valor da força horizontal Hc na Equação (3.16) pode ser obtido calculando-se o valor da variável βo na Equação (3.20). Ao conhecer o valor da força horizontal é possível verificar se a catenária é realmente incompleta.

Através das Equações (3.12) e (3.14), determina-se força de tração To no ponto de ancoragem A e o ângulo que a força de tração Tc , atuante no ponto de amarração B , faz com a horizontal,

$$To = \frac{\cos(\beta o)}{Hc}, \quad (3.21)$$

$$\beta = \arctan \left[\frac{qc Sc}{Hc} + \tan(\beta o) \right] + \tan(\beta o). \quad (3.22)$$

Por meio da Equação (3.12), obtém-se a força de tração Tc , atuante no ponto B de amarração.

$$Tc = \frac{Hc}{\cos(\beta o)}. \quad (3.23)$$

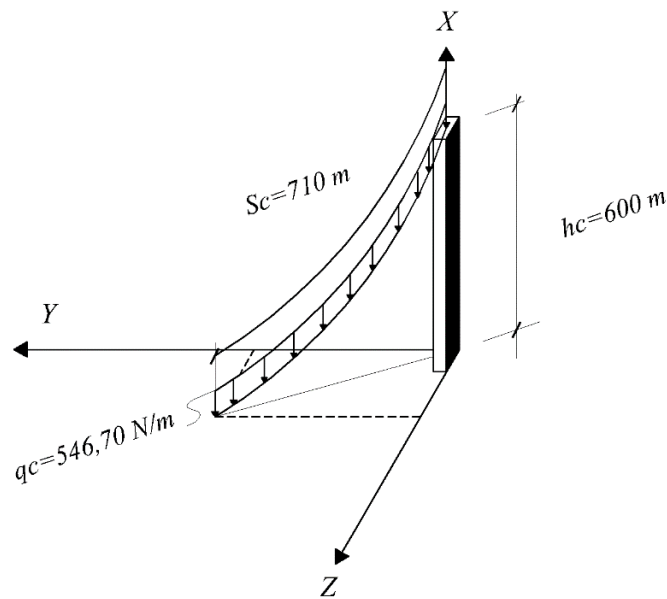
O sistema de equações não lineares transforma-se, dessa maneira, em uma única equação não linear em função do ângulo βo de ancoragem. Esta equação é resolvida pelo

método iterativo de Newton, chegando-se ao valor da força de tração T_c na ligação cabo-torre.

3.1.2.1 Aplicação

Para exemplificar as equações que envolvem a catenária incompleta, considera-se, na configuração de equilíbrio estático, o sistema cabo-torre mostrado na Figura 12.

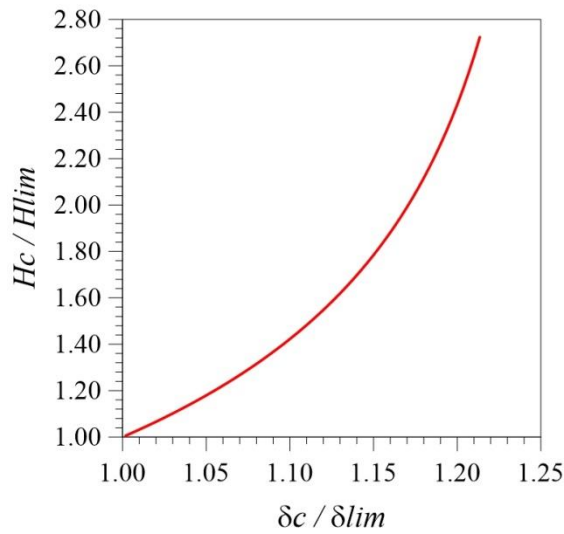
Figura 12 – Características geométricas do sistema cabo-torre



Fonte: adaptado de Irvine (1992).

Por meio das Equações (3.15) e (3.16) é possível obter-se os valores de H_{lim} e δ_{lim} . Sendo δ_{lim} a projeção horizontal do cabo correspondente ao limite da força horizontal e H_{lim} a fronteira entre as catenárias completa e incompleta.

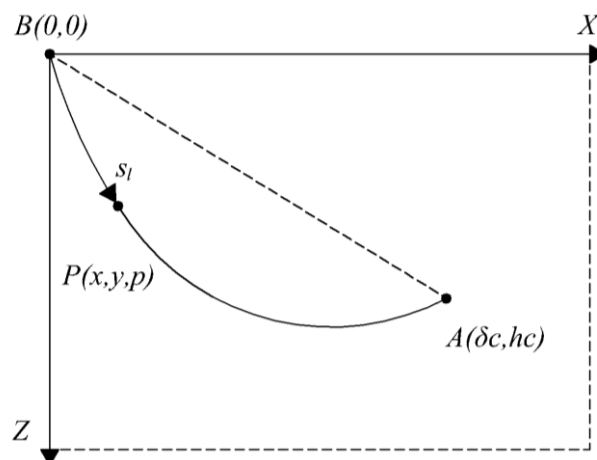
Solucionando a Equação (3.19) por meio do método de Newton, utilizando o software Maple 18, obteve-se o Gráfico 8. Analisando a resposta obtida, percebe-se que a força horizontal H_c , exercida pelo cabo no ponto de amarração, cresce exponencialmente com a projeção horizontal δ_c do cabo a partir dos valores $\delta_c = \delta_{lim} = 297,48m$ e $H_c = H_{lim} = 65,65kN$.

Gráfico 8 – Relação entre a força horizontal e sua projeção horizontal

Fonte: elaboração da autora, 2017.

3.1.3 Consideração da protensão

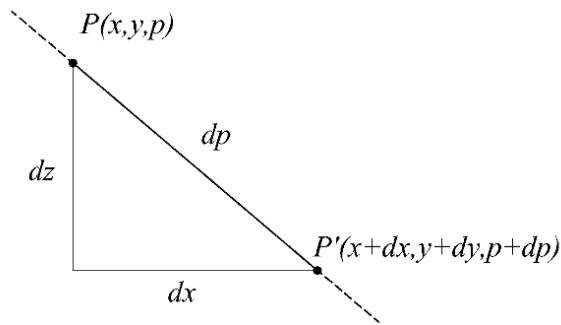
A Figura 13 mostra um cabo suspenso entre dois pontos fixos A e B , os quais possuem coordenadas cartesianas $(\delta c, hc)$ e $(0, 0)$. Logo, pode-se observar que o cabo possui um vão δc e uma distância vertical relativa entre as extremidades hc . O comprimento inicial do cabo é S_0 . De acordo com Irvine (1992), quando o cabo não está tensionado, um ponto p arbitrário ao longo do cabo possui coordenada Lagrangiana s_l . A coordenada s_l é, portanto, o comprimento do cabo não tensionado desde a origem até este ponto.

Figura 13 – Sistema de coordenadas para a catenária elástica

Fonte: adaptado de Irvine (1992).

Considerando o efeito do peso próprio W_c , o cabo deforma-se e o ponto p passa a ocupar uma nova posição descrita pelas coordenadas cartesianas x e z e Lagrangiana p' . Pela geometria deste movimento, mostrado na Figura 14, tem-se que

Figura 14 – Deslocamento em um ponto arbitrário da catenária



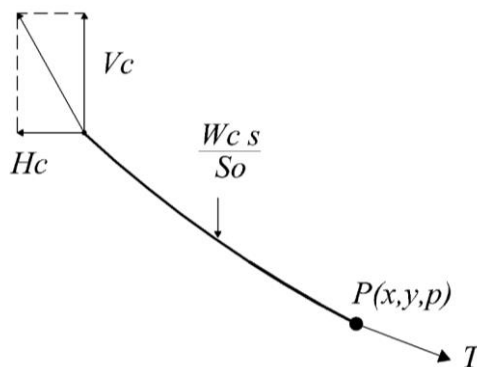
Fonte: adaptado de Irvine (1992).

$$dx^2 + dz^2 = dp^2,$$

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1 \quad (3.24)$$

Ao analisar-se a Figura 15, tem-se que o balanço das forças horizontais e verticais fornece as seguintes equações

Figura 15 – Forças atuantes em um segmento da catenária



Fonte: adaptado de Irvine (1992).

$$H_c = T \frac{dx}{dp}, \quad (3.25)$$

$$V_c - \frac{W_c s_l}{S_o} = T \frac{dz}{dp}, \quad (3.26)$$

em que $(Wc s_l / So)$ é o peso da porção deformada, Vc é a componente vertical e Hc a componente horizontal da tensão no cabo.

Considerando-se um cabo de material elástico linear, tem-se que a relação constitutiva do material é dada pela lei de Hooke, assim

$$T = E Ao \left[\frac{dp}{ds} - 1 \right]. \quad (3.27)$$

Onde E é o módulo de Young e Ao é a área inicial da seção transversal do cabo.

As condições de contorno para o cabo, mostrado anteriormente, na Figura 13, são:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad \text{para } s_l = 0. \\ x = \delta c, \quad z = hc, \quad p = Sc, \quad \text{para } s_l = So. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Em que Sc é o comprimento do cabo tensionado.

Elevando as Equações (3.25) e (3.26) ao quadrado, somando-as e substituindo o resultado na Equação (3.24), obtém-se que:

$$\begin{aligned} Hc^2 + \left[Vc - \frac{Wc s}{So} \right]^2 = T^2 \left[\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp} \right)^2 \right], \\ T = \sqrt{Hc^2 + \left[Vc - \frac{Wc s}{So} \right]^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Sabendo-se que $(dx/ds) = (dx/dp)(dp/ds)$ e que (dx/dp) é uma função de T na Equação (3.25), enquanto (dp/ds) é uma função de T na Equação (4.27), sendo T dado pela Equação (3.29). Obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} = \frac{Hc}{E Ao} + \frac{Hc}{T}, \\ \frac{dx}{ds} = \frac{Hc}{E Ao} + \frac{Hc}{\sqrt{Hc^2 + \left[Vc - (Wc s_l / So) \right]^2}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Integrando a Equação (3.30), tem-se que

$$x(s) = \frac{Hc s}{E Ao} + \frac{Hc So}{Wc} \left[\operatorname{arcsinh} \left(\frac{Vc}{Hc} \right) - \operatorname{arcsinh} \left(\frac{Vc - (Wc s_l / So)}{Hc} \right) \right]. \quad (3.31)$$

Analogamente, sabendo-se que $(dz/ds) = (dz/dp)(dp/ds)$ e que (dz/dp) é uma função de T , como mostra a Equação (3.26). Obtém-se que:

$$z(s) = \frac{Wc s_l}{E Ao} \left[\frac{Vc}{Wc} - \frac{s_l}{2 So} \right] + \frac{Hc So}{Wc} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{Vc}{Hc} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{Vc - (Wc s_l / So)}{Hc} \right)^2} \right]. \quad (3.32)$$

Quando $s_l = So$, as Equações (3.31) e (3.32), que descrevem o perfil do cabo tensionado, resultam em

$$\delta c = \frac{Hc So}{E Ao} + \frac{Hc So}{Wc} \left[\operatorname{arcsinh} \left(\frac{Vc}{Hc} \right) - \operatorname{arcsinh} \left(\frac{Vc - Wc}{Hc} \right) \right], \quad (3.33)$$

$$hc = \frac{Wc So}{E Ao} \left[\frac{Vc}{Wc} - \frac{1}{2} \right] + \frac{Hc So}{Wc} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{Vc}{Hc} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{Vc - Wc}{Hc} \right)^2} \right]. \quad (3.34)$$

Vale frisar que na prática, na configuração de equilíbrio estática, as coordenadas δc e hc são conhecidas em função das características geométricas da estrutura, assim como a tensão T é conhecida nesta configuração por meio da protensão To definida em projeto.

3.1.3.1 Aplicação

Como forma de exemplificar as equações em que há a presença da protensão, considera-se uma cordoalha especial para pontes estaiadas com peso próprio $Wc = 0.3568 \text{ kN}$, módulo de Young $E = 1.999 \text{ E}8 \text{ kN} / \text{m}^2$, área inicial da seção transversal $Ao = 6.6452 \text{ cm}^2$ e coordenadas cartesianas $B(0,0)$ e $A(5.08, 5.08)$ dadas em metros.

Por meio das Equações (3.29), (3.33) e (3.34), utilizando-se o software Maple 18, é possível obter o conjunto de valores dados na Tabela 4, os quais ilustram a amplitude do comprimento inicial do cabo devido a diferentes protensões.

Tabela 4 – Resposta da catenária elástica

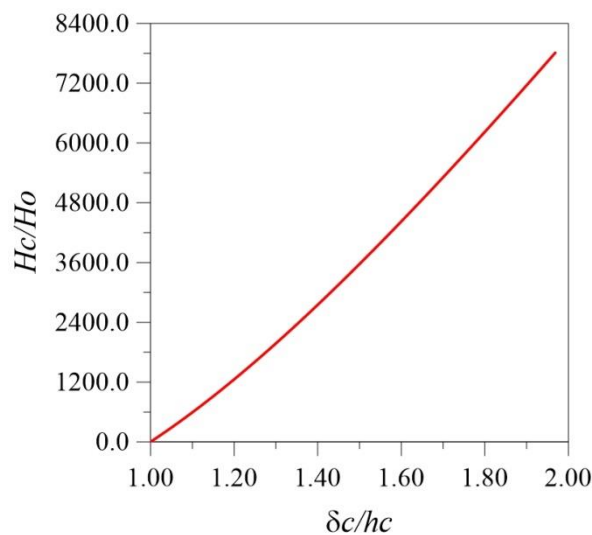
Hc [kN]	So [m]	Vc [kN]	Tc [kN]
2.2631	7.1859	2.4438	3.0784
5.2631	7.1841	5.4425	7.3187
8.2631	7.1837	8.4421	11.5607
707.2631	7.1289	707.4415	1000.0950

Fonte: elaboração da autora, 2017.

Percebe-se por essas soluções, dadas na Tabela 4, que para uma protensão de $T_o = T_c = 7.3187 \text{ kN}$ o comprimento inicial do cabo S_o tensionado é praticamente igual a $\sqrt{\delta c^2 + h c^2}$, isto é, a distância entre os pontos A e B . No entanto, para $T_o = T_c = 3.0784 \text{ kN}$ observa-se que $S_o > \sqrt{\delta c^2 + h c^2}$, ou seja, o cabo apresenta uma curvatura inicial. Na situação em que $T_o = T_c = 11.5607 \text{ kN}$, nota-se que $S_o < \sqrt{\delta c^2 + h c^2}$, o cabo, portanto, sofre uma deformação inicial para ser posicionado entre os pontos fixos B e A , necessitando de uma tensão maior no cabo. No último caso, em que $T_o = T_c = 1000.0950 \text{ kN}$, o comprimento inicial do cabo S_o leva em conta, ao longo da história de deslocamentos do cabo, o efeito da protensão inicial T_o .

Dessa forma, podem-se encontrar as componentes de força horizontal H_c e vertical V_c para qualquer translação dos pontos B e A , desde que seja conhecido o valor do o comprimento inicial do cabo S_o na configuração de equilíbrio estático. Considerando $h c = 5.08 \text{ m}$, $H_o = 8.2631 \text{ kN}$ e $S_o = 7.1837 \text{ m}$, obtém-se através das Equações (3.29), (3.33) e (3.34) a variação da projeção da força horizontal H_c / H_o do cabo com relação à projeção horizontal $\delta c / h c$, como mostra o Gráfico 9.

Gráfico 9 – Relação entre a força horizontal e a projeção horizontal do cabo



Fonte: elaboração da autora, 2017.

3.2 Cluster de cabos

Esta seção contém as equações utilizadas para o cálculo das forças horizontais e verticais atuantes em um cluster (conjunto) de cabos presente nas torres estaiadas,

considerando os dois deslocamentos transversais ao eixo da torre, além do seu deslocamento axial.

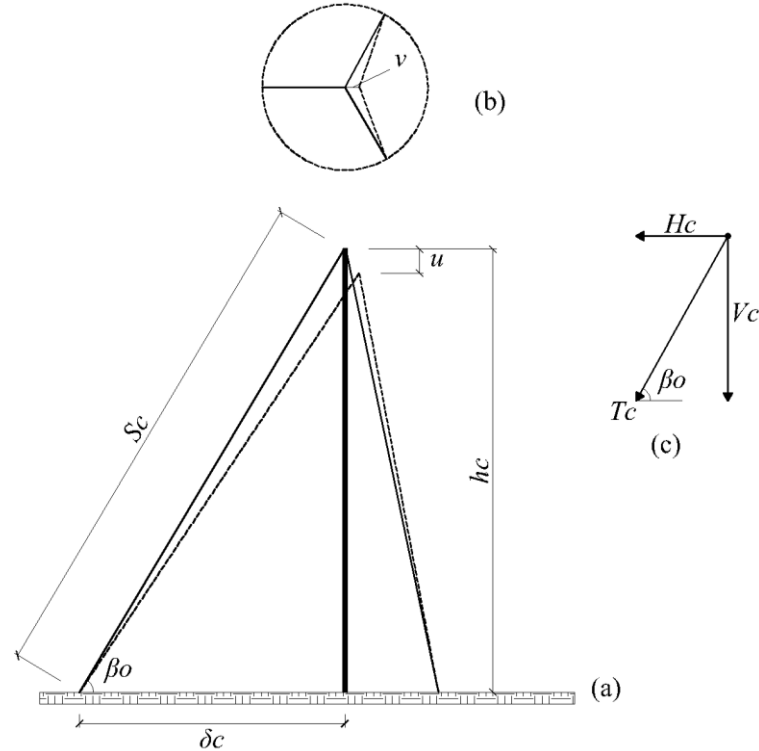
3.2.1 Resposta estática de um cluster de cabos

De acordo com Irvine (1992), o ponto de amarração cabo-torre movimenta-se em duas componentes de deslocamento, uma no plano transversal e outra no plano longitudinal à torre. A Figura 16 mostra um cluster simétrico com três cabos de propriedades geométricas idênticas e peso próprio desprezível, cada um dos três exerce sob o cluster uma carga vertical e horizontal que são dados pelas seguintes equações

$$V_c = T_c \sin(\beta_0) = T_c \left(\frac{hc}{Sc} \right), \quad (3.35)$$

$$H_c = T_c \cos(\beta_0) = T_c \left(\frac{\delta c}{Sc} \right). \quad (3.36)$$

Figura 16 – Definições geométricas do cluster simétrico: (a) Plano transversal; (b) Plano longitudinal; (c) Forças atuantes



Fonte: adaptado de Irvine (1992).

Sendo hc a profundidade do cabo, Sc o comprimento total do cabo, δc a projeção horizontal do cabo, Tc a força de tração do cabo, Hc a projeção horizontal da força de tração do cabo, Vc a projeção vertical da força de tração do cabo e β_0 o ângulo de ancoragem do cabo.

Considerando o movimento longitudinal u e transversal v pequenos, é possível obter o acréscimo de tensão nos cabos de barlavento e o decréscimo de tensão no cabo de sotavento, dados respectivamente por

$${}^B\Delta T = EA \left[\frac{\delta c v}{2 Sc^2} + \frac{\delta c^2 v^2}{8 Sc^2} - \frac{v^2}{2 Sc^2} + \frac{hc u}{Sc^2} \right] + O(u^3), \quad (3.37)$$

$${}^S\Delta T = -EA \left[\frac{\delta c v}{2 Sc^2} + \frac{\delta c^2 v^2}{8 Sc^2} - \frac{v^2}{2 Sc^2} + \frac{hc u}{Sc^2} \right] + O(u^3), \quad (3.38)$$

em que EA representa a rigidez axial de um cabo.

A componente horizontal e a vertical de tensão nos cabos de barlavento são dadas, respectivamente por

$${}^BHc = Tc \left(\frac{\delta c + v}{Sc} \right) + (EA - Tc) \left[\frac{\delta c^2 v}{Sc^3} + \frac{3 \delta c}{2 Sc} \left(1 - \frac{\delta c^2}{Sc^2} \right) - \frac{\delta c hc u}{Sc^3} \right] + O(u^3), \quad (3.39)$$

$${}^BVc = Tc \left(\frac{hc + u}{Sc} \right) + (EA - Tc) \left[\frac{\delta c hc v}{Sc^3} - \frac{3 \delta c^2 hc v^2}{2 Sc^3} + \frac{hc}{Sc} \left(\frac{v^2}{2 Sc^2} - \frac{hc u}{Sc^2} \right) \right] + O(u^3), \quad (3.40)$$

Enquanto que nos cabos de sotavento, a componente horizontal e vertical de tensão são dadas, respectivamente, por

$${}^SHc = Tc \left(\frac{\delta c}{2 Sc} - \frac{v}{Sc} \right) - (EA - Tc) \left[\frac{\delta c^2 v}{4 Sc^3} - \frac{3 \delta c}{4 Sc} \left(1 - \frac{\delta c^2}{4 Sc^2} \right) \frac{v^2}{Sc^2} + \frac{\delta c hc u}{2 Sc^3} \right] + O(u^3), \quad (3.41)$$

$${}^SVc = Tc \left(\frac{hc - u}{Sc} \right) - (EA - Tc) \left[\frac{\delta c hc v}{2 Sc^3} + \frac{3 \delta c^2 hc v^2}{8 Sc^3} + \frac{hc}{Sc} \left(\frac{v^2}{2 Sc^2} - \frac{hc u}{Sc^2} \right) \right] + O(u^3), \quad (3.42)$$

De posse das componentes horizontais e verticais de tensão nos cabos de barlavento e sotavento, pode-se obter a resultante de tensão horizontal e vertical atuante no ponto de amarração cabo-torre.

$$Hc = {}^BHc - 2 {}^SHc = 3Tc \left(\frac{v}{Sc} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\delta c}{Sc} \right)^2 (EA - Tc) \left(\frac{v}{Sc} \right) \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\delta c}{Sc} \right) \right] \left(\frac{v}{Sc} \right) + O(u^3), \quad (3.43)$$

$$V_c = {}^B V_c + 2 {}^S V_c = 3T_c \frac{hc}{Sc} \left(1 - \frac{Sc}{hc} \frac{u}{Sc}\right) + \frac{3}{2} (EA - T_c) \left\{ \frac{hc}{Sc} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\delta c}{Sc}\right)^2\right] \left(\frac{v}{Sc}\right)^2 - 2 \left(\frac{hc}{Sc}\right)^2 \left(\frac{u}{Sc}\right) \right\} + O(u^3), \quad (3.44)$$

Como (v/Sc) e (u/Sc) são na realidade valores muito pequenos, as Equações (3.43) e (3.44) podem ser simplificadas e reescritas como

$$H_c = \frac{v}{Sc} \left[3T_c + \frac{3}{2} \left(\frac{\delta c}{Sc}\right)^2 (EA - T_c) \right], \quad (3.45)$$

$$V_c = 3T_c \frac{hc}{Sc}. \quad (3.46)$$

Na prática, como os cabos normalmente são feitos de aço, têm-se que $T \ll EA$. Assim, as equações linearizadas para um cluster, com cabos n distribuídos simetricamente em torno da torre, podem ser novamente simplificadas, resultando em

$$H_c = n \left[T_c + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta c}{Sc}\right)^2 EA \right] \frac{v}{Sc}, \quad (3.47)$$

$$V_c = n T_c \frac{hc}{Sc}. \quad (3.48)$$

De acordo com Irvine (1992), o peso próprio dos cabos não influencia na projeção vertical da força de tração do cabo, no entanto, gera uma redução na projeção horizontal da força de tração. Desse modo, quando se analisa a forma de catenária assumida pelos cabos suspensos, é necessário considerar o peso próprio dos cabos. Assim, obtém-se:

$$H_c = n \left[T_c + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta c}{Sc}\right)^2 EA \left(\frac{12 T_c}{12 T_c + \left(\frac{qc \delta c}{T_c}\right)^2 EA} \right) \right] \frac{v}{Sc}, \quad (3.49)$$

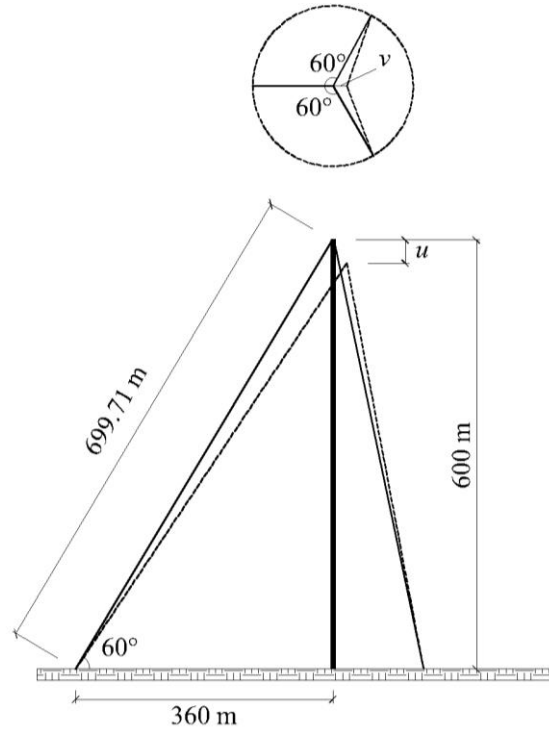
Sendo $n \geq 3$, e qc o peso por unidade de comprimento do cabo.

3.2.2 Aplicação

Para exemplificar as equações linearizadas que envolvem o cluster de cabos, este item contém uma aplicação com dados numéricos. O exemplo realizado nesta seção é baseado nas aplicações feitas por Irvine (1992). Supõe-se o cluster simétrico de três cabos dado na Figura

17, na configuração de equilíbrio estático, cujos cabos possuem módulo de Young $E = 147.10 \text{ kN} / \text{mm}^2$, peso próprio por unidade de comprimento $q_c = 538.78 \text{ N} / \text{m}$ e diâmetro $\phi = 12.7 \text{ mm}$.

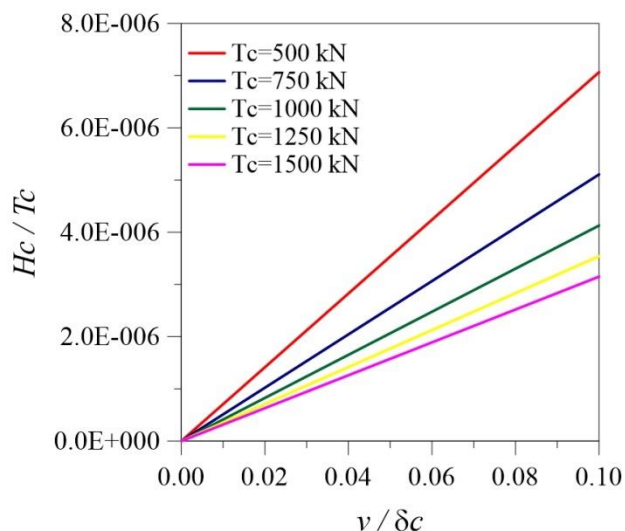
Figura 17 – Características geométricas do cluster



Fonte: adaptado de Irvine (1992).

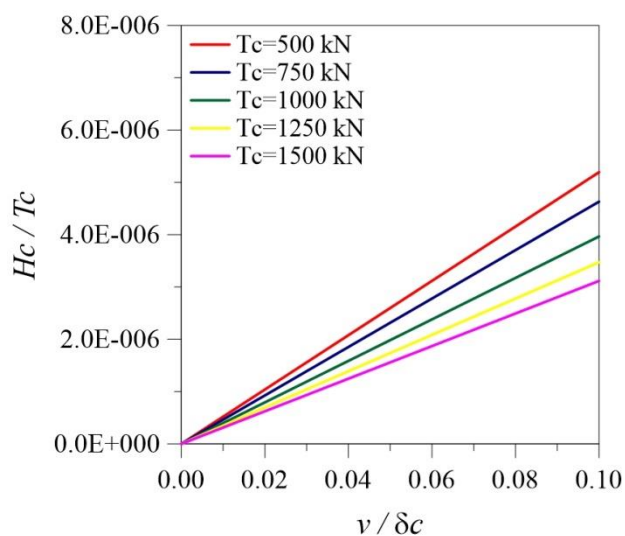
Aplicando-se os dados do exemplo nas Equações (3.47) e (3.49), obtém-se a evolução da força horizontal H_c com o deslocamento v no plano transversal da torre, para vários níveis de tração nos cabos. O Gráfico 10 mostra essa relação sem a consideração do peso próprio dos cabos, enquanto o Gráfico 11 mostra essa relação considerando a presença do peso próprio dos cabos. Analisando as duas figuras, percebe-se que ambas as equações fornecem trajetórias lineares e que, ao levar-se em conta o efeito do peso próprio, a força horizontal H_c de tração atuante no ponto de amarração é menor do que a situação em que não se considera o peso próprio.

Gráfico 10 – Relação entre a força horizontal e o deslocamento transversal do cluster (desconsiderando o peso próprio)



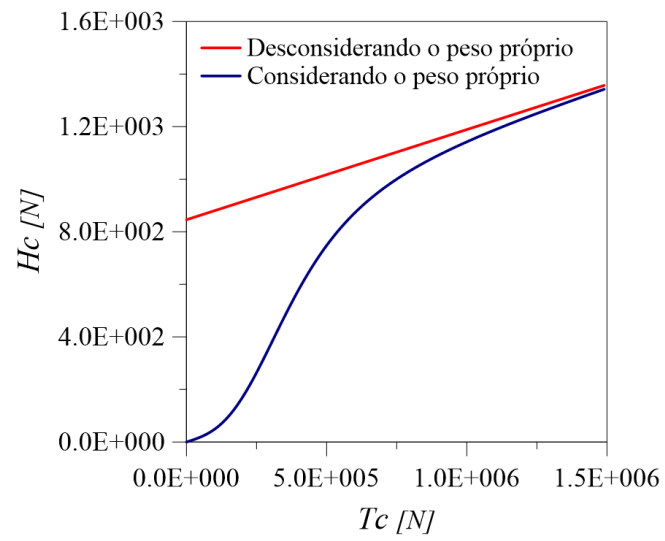
Fonte: elaboração da autora, 2017.

Gráfico 11 – Relação entre a força horizontal e o deslocamento transversal do cluster (considerando o peso próprio)



Fonte: elaboração da autora, 2017.

Com o acréscimo da força de tração T_c aplicada no cabo, a força horizontal H_c dada pela Equação (3.49) aproxima-se da encontrada pela Equação (3.47) para um mesmo nível de deslocamento, neste caso particular, $v = 0.08 \text{ m}$, como mostra o Gráfico 12. Este comportamento é o esperado, já que a curvatura da catenária tende a desaparecer com o acréscimo da força de tração T_c aplicada no cabo, aproximando-se, portanto, da solução por cabos retilíneos, situação na qual o peso próprio dos cabos é desprezível.

Gráfico 12 – Relação entre a força horizontal e a força de tração do cabo

Fonte: elaboração da autora, 2018.

4 ESTUDO DO CONJUNTO TORRE-CABOS

O presente capítulo contém as equações integro-diferenciais que regem o movimento dinâmico não linear do conjunto torre-cabos. Para isso, compatibilizou-se as equações dos mastros das torres estaiadas, apresentadas no Capítulo 2, às equações das forças atuantes nos cabos, apresentadas no Capítulo 3 deste trabalho, considerando a existência de protensão.

4.1 Compatibilização das equações

Para a realização da compatibilização das equações de movimento do conjunto torre-cabos foi escolhida a direção de v , ou seja, todas as parcelas na direção de w e do ângulo de torção γ não foram analisadas. Assim, por conveniência, no presente trabalho, optou-se por fazer a análise apenas em uma direção (1D). Sugere-se que em trabalhos futuros esse estudo possa se estender a mais de uma direção.

Inicialmente voltou-se à Equação 3.47, e transformou-se os termos constantes, aqueles que dependem das propriedades geométricas das torres estaiadas, em uma única variável, como é mostrado a seguir,

$$TM = \frac{n}{Sc} \left[Tc + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta c}{Sc} \right)^2 EA \right]. \quad (4.1)$$

Desse modo obteve-se que

$$Hc = TM \ v.$$

Assim, recorrendo-se à Equação 2.66, chegou-se à uma nova equação

$$Hc = TM \ (F_v \ v). \quad (4.2)$$

Acrescentando-se a parcela de tensão horizontal Hc referente à protensão dos cabos na Equação 2.86, que descreve o movimento dinâmico do mastro na direção de v , é possível chegar-se à uma nova equação de movimento que descreve o conjunto torre-cabos. E como todas as parcelas nas direções de w e do ângulo de torção γ foram desprezadas, a nova equação compatibilizada ficou da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^1 F_V^2 ds - J_\zeta \int_0^1 F_V'' F_V ds \right] \ddot{v} + \left[c_v \int_0^1 F_V^2 ds \right] \dot{v} + \left[\beta_y \int_0^1 F_V^{IV} F_V ds + \right. \\
& \left. \int_0^1 [P_s + q_u \cos(\Omega t)] F_V F_V'' ds + mg \int_0^1 (F_V F_V''(s-1) + F_V F_V') ds \right] v = \\
& \alpha_{v4} v^3 + \alpha_{v5} (v^2)^{\bullet\bullet} v + \alpha_{v7} v^2 \ddot{v} + \alpha_{v14} v \dot{v}^2 \\
& + \int_0^1 F_V [q_v \cos(\Omega_v t) + Hc] ds.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Desconsiderando-se o peso próprio do mastro mg na Equação 4.3 e considerando que a parcela axial P_s , exercida na extremidade deste mesmo elemento, equivale à parcela da tensão vertical exercida no cabo V_c , dada na Equação 3.48, a qual depende apenas das propriedades geométricas do cabo e da força de protensão adotada, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^1 F_V^2 ds - J_\zeta \int_0^1 F_V'' F_V ds \right] \ddot{v} + \left[c_v \int_0^1 F_V^2 ds \right] \dot{v} + \\
& \left[\beta_y \int_0^1 F_V^{IV} F_V ds + \int_0^1 V_c F_V F_V'' ds \right] v = \\
& \alpha_{v4} v^3 + \alpha_{v5} (v^2)^{\bullet\bullet} v + \alpha_{v7} v^2 \ddot{v} + \alpha_{v14} v \dot{v}^2 \\
& + \int_0^1 F_V [q_v \cos(\Omega_v t) + Hc] ds.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Substituindo-se a Equação 4.2 na Equação 4.4, tem-se que

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^1 F_V^2 ds - J_\zeta \int_0^1 F_V'' F_V ds \right] \ddot{v} + \left[c_v \int_0^1 F_V^2 ds \right] \dot{v} + \\
& \left[\beta_y \int_0^1 F_V^{IV} F_V ds + \int_0^1 V_c F_V F_V'' ds \right] v = \\
& \alpha_{v4} v^3 + \alpha_{v5} (v^2)^{\bullet\bullet} v + \alpha_{v7} v^2 \ddot{v} + \alpha_{v14} v \dot{v}^2 \\
& + \int_0^1 F_V [q_v \cos(\Omega_v t) + TM(F_v v)] ds,
\end{aligned}$$

desta forma, é possível obter-se enfim a equação compatibilizada que descreve o movimento dinâmico do conjunto unidimensional torre-cabos na direção de v , mostrado à seguir:

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^1 F_v^2 ds - J_\zeta \int_0^1 F_v'' F_v ds \right] \ddot{v} + \left[c_v \int_0^1 F_v^2 ds \right] \dot{v} + \\
 & \left[\beta_y \int_0^1 F_v^{IV} F_v ds + \int_0^1 V_c F_v F_v'' ds - \int_0^1 TM F_v^2 ds \right] v = \\
 & \alpha_{v4} v^3 + \alpha_{v5} (v^2)^{\bullet\bullet} v + \alpha_{v7} v^2 \ddot{v} + \alpha_{v14} v \dot{v}^2 \\
 & + \int_0^1 F_v q_v \cos(\Omega_v t) ds
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Sabe-se que a Equação 4.5 contém um erro, pois a parcela TM não age em todo o mastro, ela existe somente na extremidade deste elemento. Para consertar essa não idealidade deveria-se utilizar o Delta de Dirac, artifício matemático que dentro das integrais de movimento seria capaz de fazer com que a parcela TM fosse considerada somente na extremidade do mastro, situação que acontece na realidade. Assim, desde as deduções da equação do mastro, o Delta de Dirac deveria ser acrescentado e integrado em todos os processos. Sugere-se que este problema seja objeto de estudo em uma próxima pesquisa, e dessa forma possa ser solucionado.

4.2 Aplicação

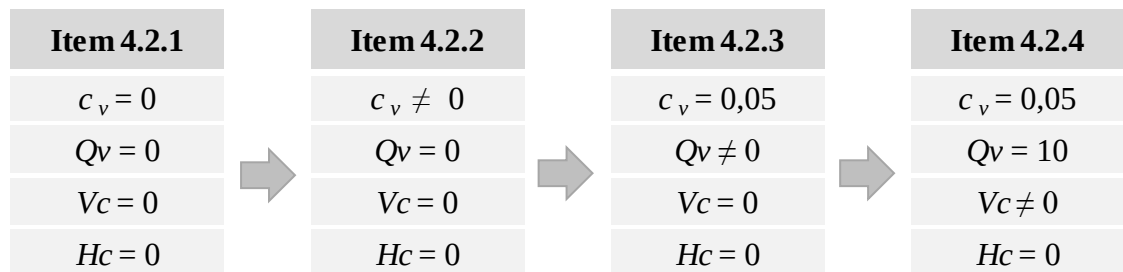
A partir da equação unidimensional de movimento compatibilizada na direção de v é possível realizar a aplicação de exemplos numéricos. Para os cálculos feitos a seguir, consideram-se novamente os dados utilizados para o mastro no Item 2.1.10 deste trabalho. Dessa forma, pressupõe-se uma barra uniforme, de material elástico linear isótropo, comprimento L , seção transversal quadrada de lado $a = b = L/25$, $b = 1$, $G = 80.0 E9$, $E = 210.0 E9$.

Para a resolução dos exemplos utilizou-se novamente o software Maple 18, obtendo-se planilhas numéricas com os resultados dos deslocamentos, velocidades e acelerações ao longo do tempo. Os gráficos das respostas no tempo do deslocamento na direção de v foram traçados por meio do programa Grapher 9, com base nas planilhas obtidas.

Nos itens a seguir, 4.2.1 ao 4.2.4, serão mostrados casos representando diferentes situações as quais a torre, exemplificada pelos dados anteriores, pode estar submetida. Em

cada caso serão obtidas respectivas respostas do deslocamento no domínio do tempo, para que assim seja possível verificar não só o comportamento dinâmico do conjunto torre-cabos, mas também perceber como as alterações do sistema modificam as respostas. Inicialmente irá se considerar um sistema completamente livre de forças (Item 4.2.1), posteriormente irá se acrescentar a parcela de amortecimento (Item 4.2.2), em seguida de carregamento distribuído ao longo do mastro (Item 4.2.3) e por fim será acrescentada a tensão vertical presente nos cabos (Item 4.2.4). Utiliza-se a Equação 4.5 para a resolução de todos estes exemplos. O fluxograma presente na Figura 18 mostra a situação em que cada exemplo foi submetido.

Figura 18 – Fluxograma com os dados de cada exemplo

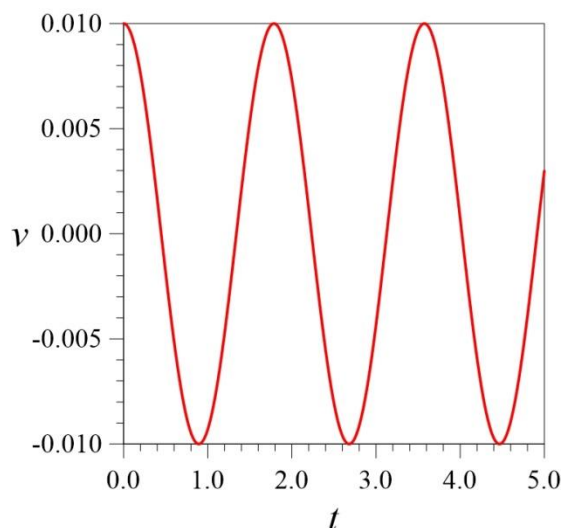


Fonte: elaboração da autora, 2018.

4.2.1 Sistema livre de forças e não amortecido

Considerando-se um sistema livre de forças e não amortecido, foi possível obter, por meio da Equação 4.5, a resposta no tempo do deslocamento do conjunto torre-cabos, na extremidade livre, na direção de v , como mostra o Gráfico 13.

Gráfico 13 – Resposta no tempo (v vs. t)



Fonte: elaboração da autora, 2017.

A frequência natural de vibração do conjunto torre-cabos na direção de v (f_v) foi adquirida por meio da frequência média envolvendo a quantidade de tempo necessária para a realização de cada uma das primeiras 20 oscilações.

Tabela 5 – Frequência natural (v)

Nº de Oscilações Acumulado	Tempo	Oscilações	Frequência
1	1,79	1	0,558659218
2	1,78	1	0,561797753
3	1,79	1	0,558659218
4	1,79	1	0,558659218
5	1,78	1	0,561797753
6	1,79	1	0,558659218
7	1,79	1	0,558659218
8	1,78	1	0,561797753
9	1,79	1	0,558659218
10	1,79	1	0,558659218
11	1,78	1	0,561797753
12	1,79	1	0,558659218
13	1,79	1	0,558659218
14	1,79	1	0,558659218
15	1,78	1	0,561797753
16	1,79	1	0,558659218
17	1,79	1	0,558659218
18	1,78	1	0,561797753
19	1,79	1	0,558659218
20	1,79	1	0,558659218

Fonte: elaboração da autora, 2017.

A partir dos valores observados na Tabela 5, obteve-se

$$f_v = 0,5596.$$

Deste modo, por meio da frequência natural, determinou-se a frequência angular na direção de v (ω_v), através da Equação (2.95). Assim, obteve-se que

$$\omega_v = 3,516.$$

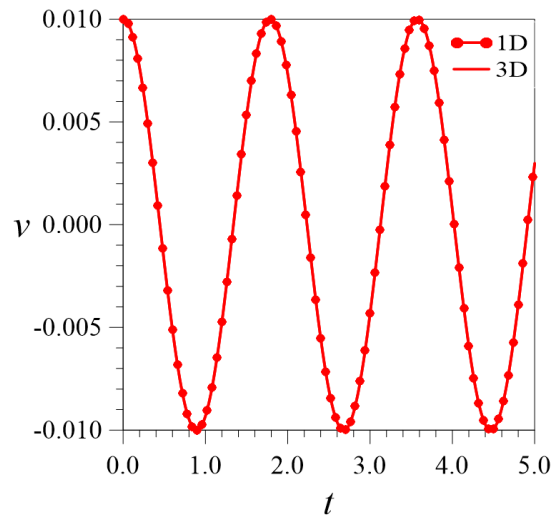
Determinou-se o valor da amplitude na direção de v (A_v), por meio de análise do Gráfico 13. Dessa forma, encontrou-se

$$A_v = 0,010.$$

Nota-se que os valores encontrados para a resposta no tempo na direção de v do sistema unidimensional (1D) são iguais às encontradas no sistema tridimensional (3D), para o

mesmo exemplo numérico. Essa análise pode ser melhor verificada sobrepondo-se as duas respostas, como mostra o Gráfico 14.

Gráfico 14 – Respostas no tempo (v vs. t): sistema de equações

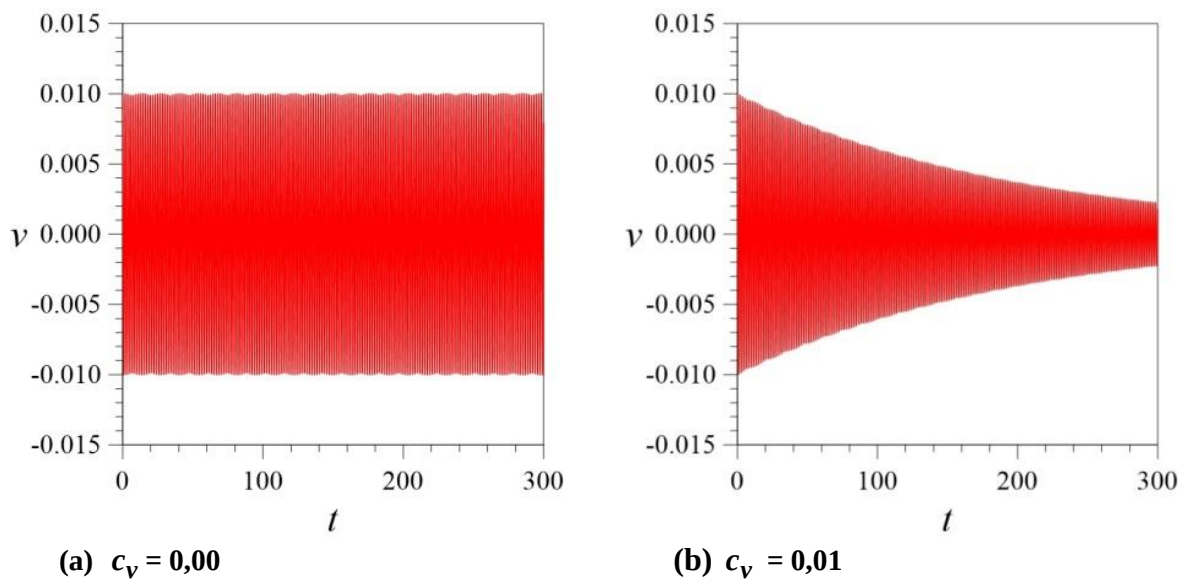


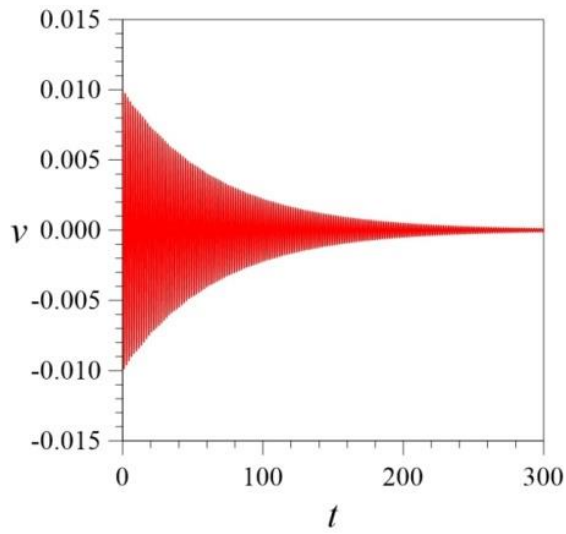
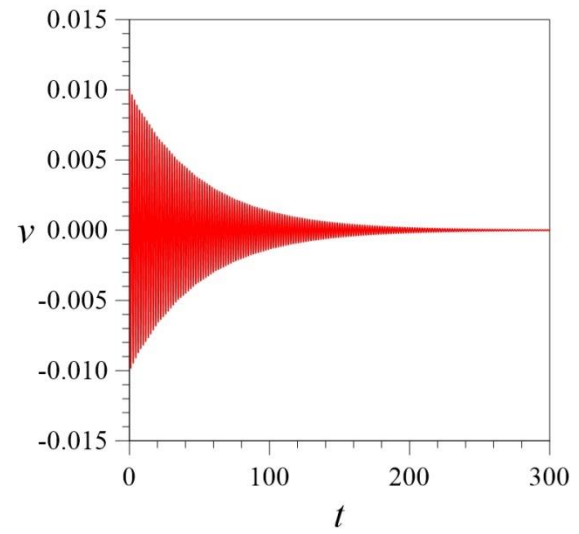
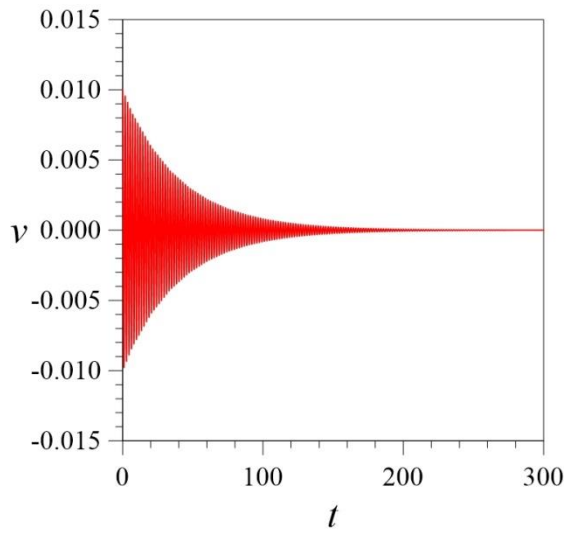
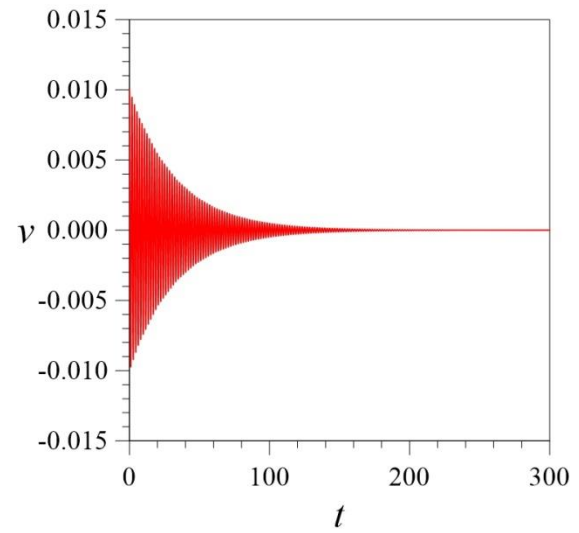
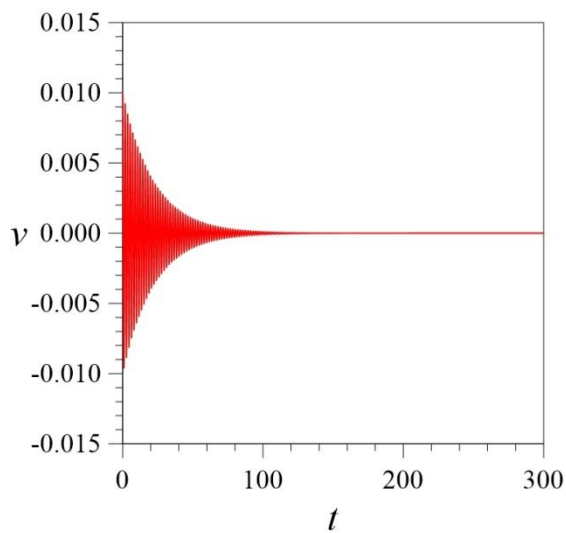
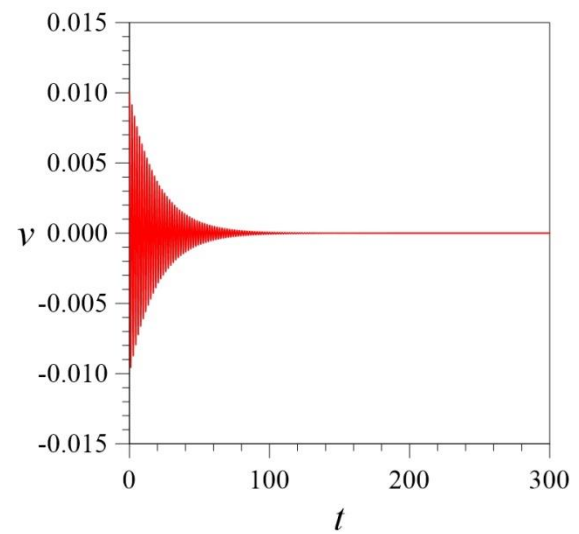
Fonte: elaboração da autora, 2017.

4.2.2 Sistema livre de forças e amortecido

Analisando-se um sistema livre de forças e com vários valores de amortecimento (c_v), foi possível obter a resposta no tempo do deslocamento do conjunto torre-cabos na direção de v como mostra o Gráfico 15.

Gráfico 15 – Respostas no tempo para diferentes valores de amortecimento (c_v)



(c) $c_v = 0,03$ (d) $c_v = 0,04$ (e) $c_v = 0,05$ (f) $c_v = 0,06$ (g) $c_v = 0,09$ (h) $c_v = 0,10$

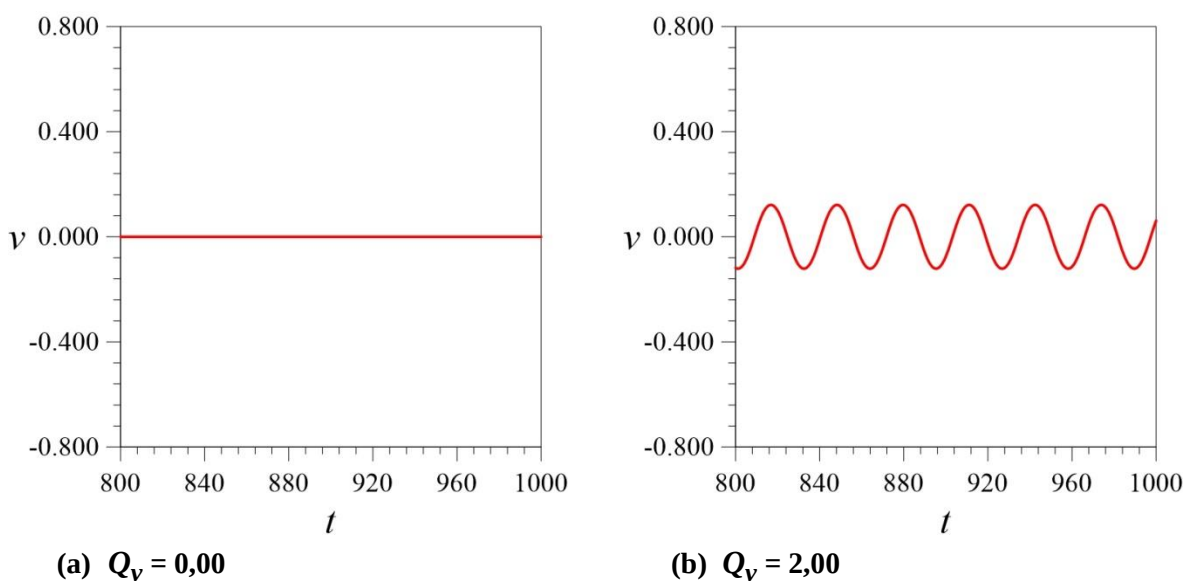
Fonte: elaboração da autora, 2018.

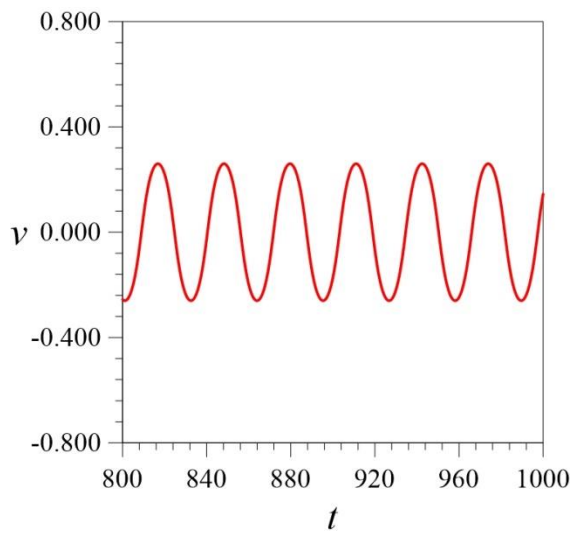
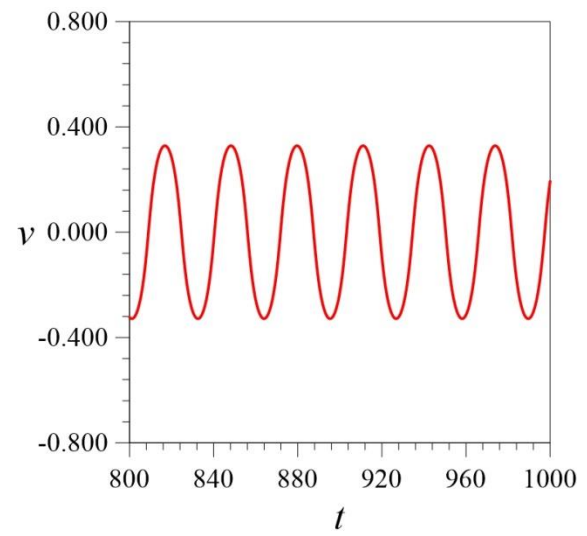
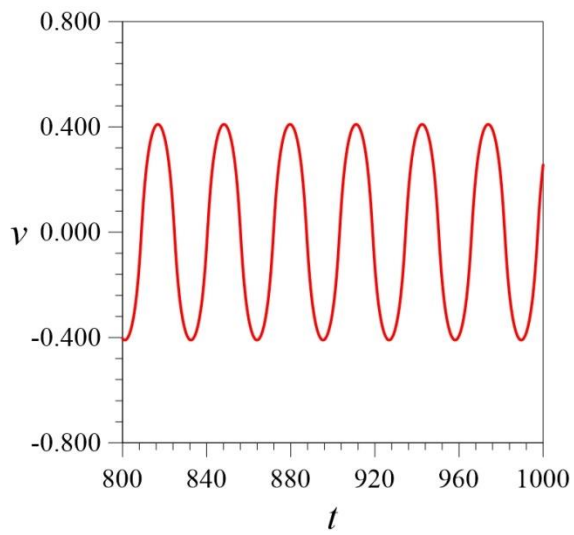
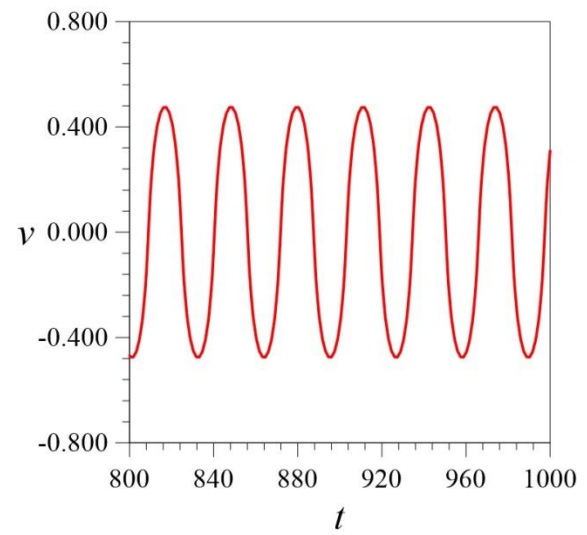
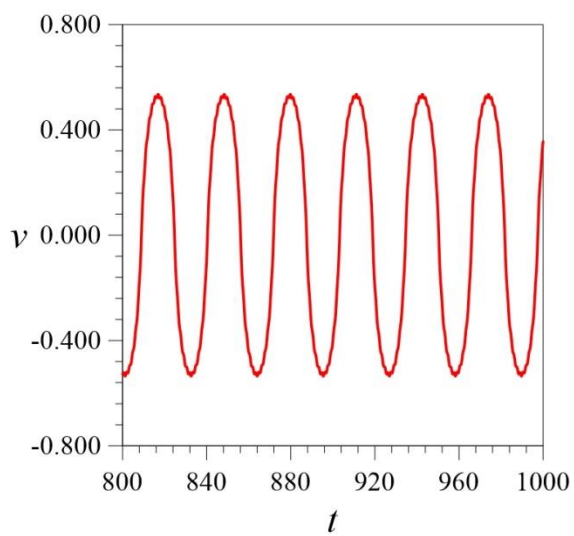
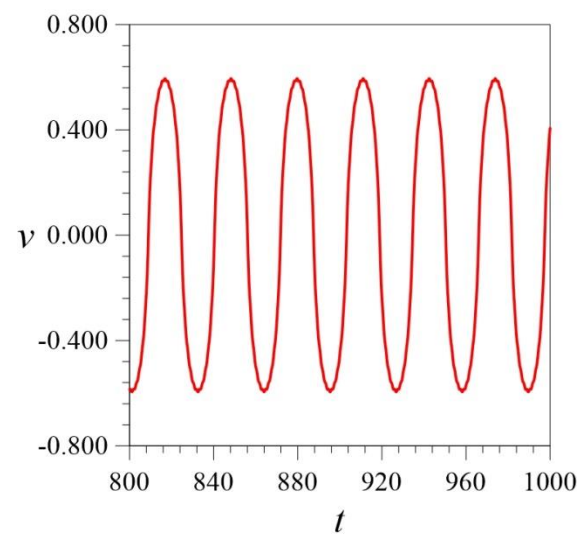
Por meio dos gráficos, percebe-se como o amortecimento afeta a vibração do conjunto da direção de v . Aumentando-se os valores de amortecimento c_v , nota-se que o sistema entra no regime permanente mais rapidamente, com um intervalo de tempo menor, ou seja, quanto maior o amortecimento menor será o tempo em que o sistema se encontrará no regime transiente.

4.2.3 Sistema com carga distribuída ao longo do mastro e amortecido

Considerando-se agora um sistema que possua diferentes valores para a carga distribuída ao longo do mastro (Q_v) e que tenha, por exemplo, um amortecimento igual à 0,05, obteve-se as respostas no tempo do deslocamento do conjunto torre-cabos na direção de v como mostra o Gráfico 16.

Gráfico 16 – Respostas no tempo para diferentes valores de carga distribuída (Q_v)



(c) $Q_v = 5,00$ (d) $Q_v = 7,00$ (e) $Q_v = 10,00$ (f) $Q_v = 13,00$ (g) $Q_v = 16,00$ (h) $Q_v = 20,00$

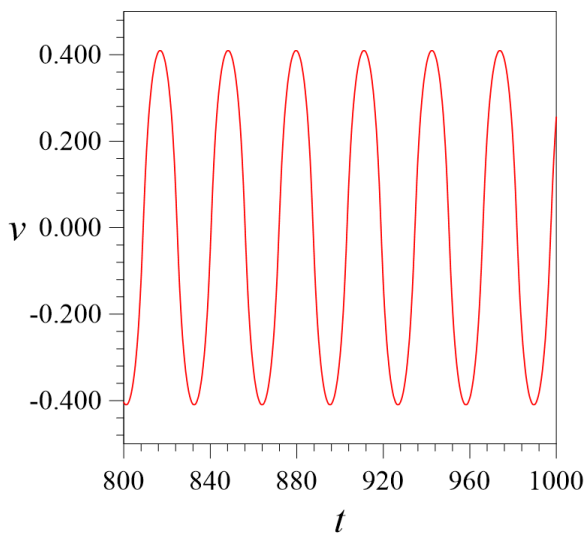
Fonte: elaboração da autora, 2018.

Por meio dos resultados encontrados percebe-se que quanto maior a carga distribuída ao longo do mastro, maior o valor da amplitude de vibração na direção de v . Nota-se que essa mudança ocorre sem alterar a frequência de oscilação.

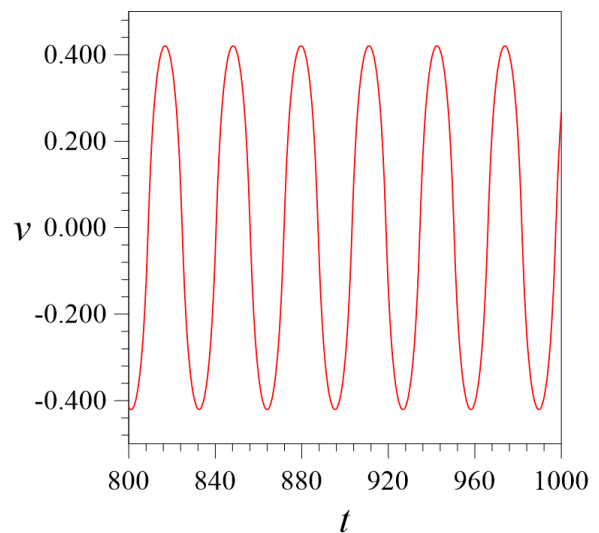
4.2.4 Sistema com carga distribuída ao longo do mastro, tensão vertical nos cabos e amortecimento

Por fim, considerando-se um sistema que possua diferentes valores para a tensão vertical (V_c), e que possua, por exemplo, carga distribuída ao longo do mastro (Q_v) igual à 10 e amortecimento (c_v) igual a 0,05, obtém-se as respostas no tempo do deslocamento do conjunto torre-cabos na direção de v como mostra o Gráfico 17

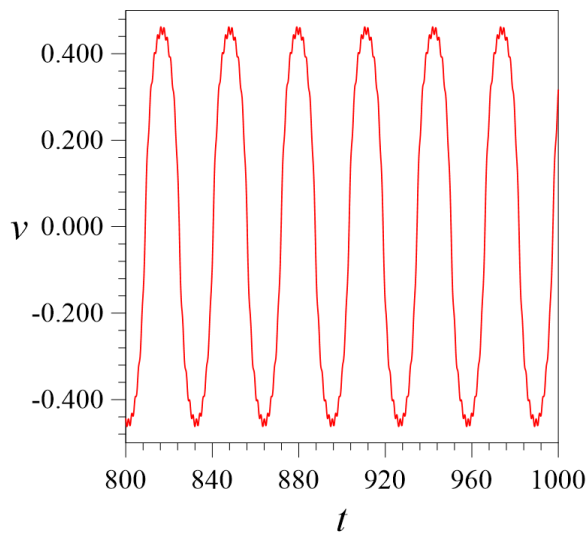
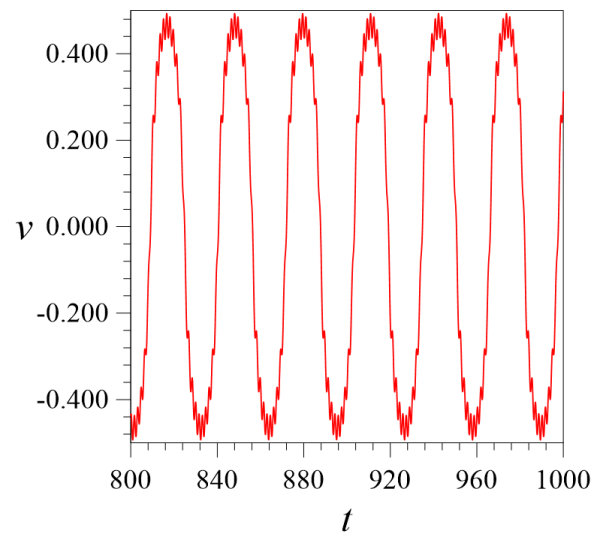
Gráfico 17 – Respostas no tempo para diferentes valores de tensão vertical (V_c)



(a) $V_c = 0,00$



(b) $V_c = -1,00$

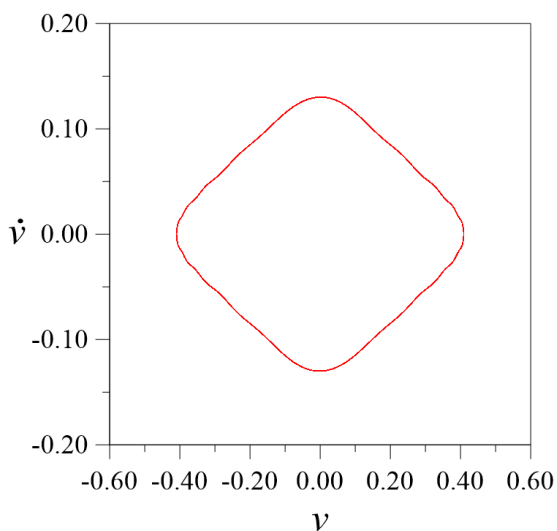
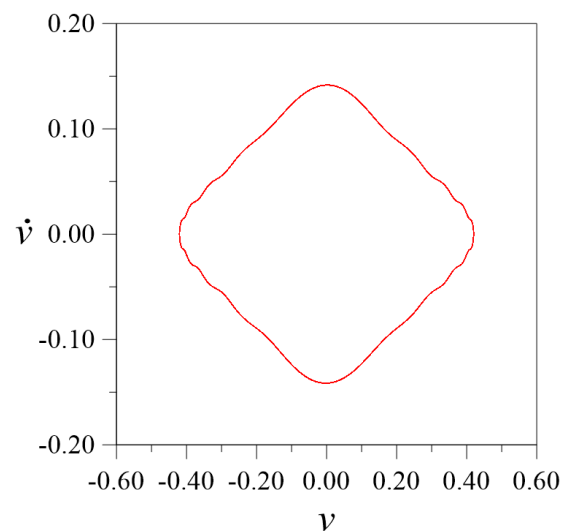
(c) $V_c = -3,00$ (d) $V_c = -5,00$

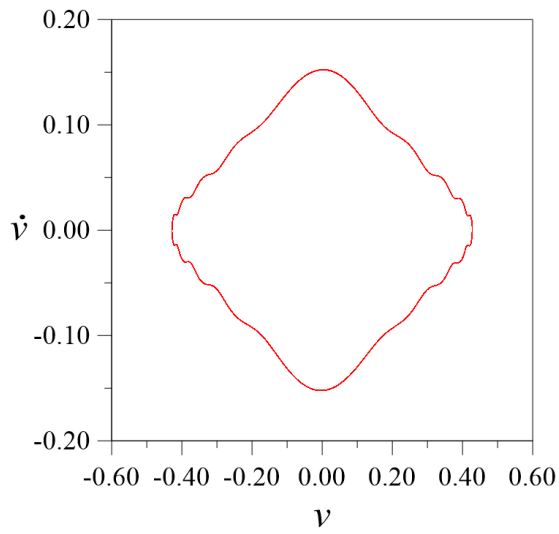
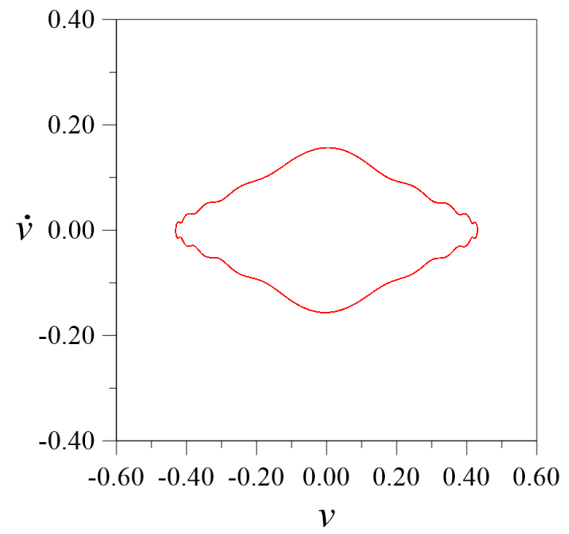
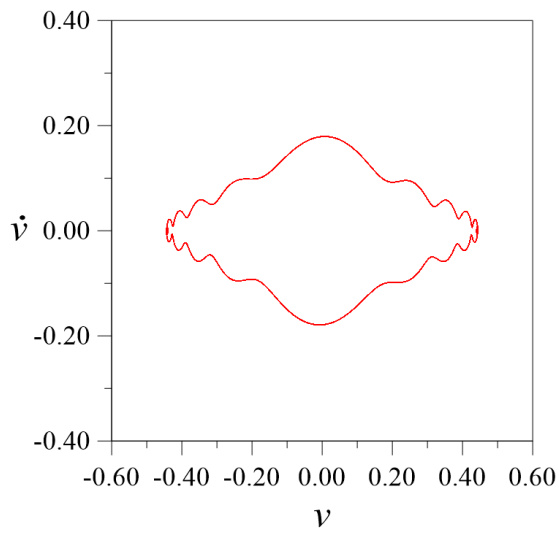
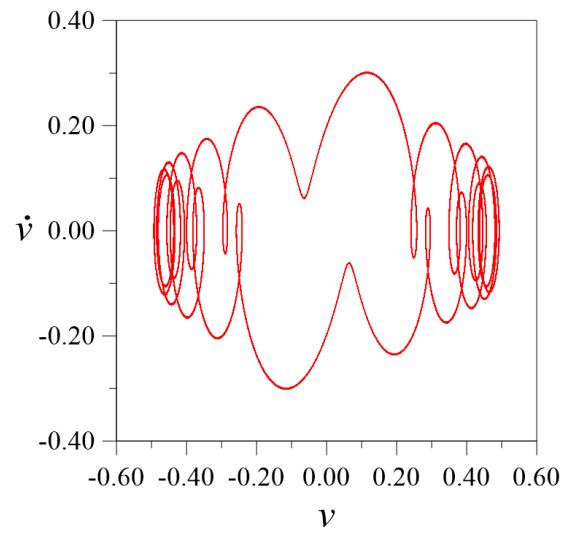
Fonte: elaboração da autora, 2018.

Observa-se que aumentando-se o valor da tensão vertical V_c , a qual possui sinal negativo já que considera-se que essa tensão haja de forma a comprimir a torre, a frequência de oscilação da resposta ao longo do tempo continua a mesma, porém o sistema passa a ter um ruído na vibração ao longo da direção v , além de ter um acréscimo no valor da amplitude. Esse ruído pode ser um problema numérico, pode ser uma solução quase periódica ou o valor do período pode ser diferente de 1. Espera-se que a causa exata deste ruído possa ser determinada em uma próxima pesquisa.

Analisando-se o plano de fase para o sistema dinâmico em questão, para diferentes valores de V_c , têm-se os seguintes planos de fase mostrados no Gráfico 18.

Gráfico 18 – Planos de fase para diferentes valores de tensão vertical (V_c)

(a) $V_c = 0,00$ (b) $V_c = -1,00$

(c) $V_c = -1,75$ (d) $V_c = -2,00$ (e) $V_c = -3,00$ (f) $V_c = -5,00$

Fonte: elaboração da autora, 2018.

Percebe-se que com o acréscimo da tensão vertical que age sobre a torre, o sistema passa a ter um padrão de comportamento mais complexo ao longo do tempo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou realizar o estudo da estabilidade e vibrações não lineares de torres estaiadas, apresentando o desenvolvimento de um modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico não linear do conjunto torre-cabos em uma direção de deslocamento. Por meio dos resultados obtidos mediante a aplicação de exemplos numéricos, foi possível verificar a influência dos cabos no comportamento dinâmico não linear deste sistema estrutural.

Esta pesquisa contém as equações no espaço (tridimensional) e no plano (bidimensional) que descrevem o movimento do mastro das torres estaiadas. Realizou-se uma análise dinâmica não linear da viga inextensível, com a discretização das equações de movimento 3D, além das simplificações para 2D. Com o intuito de estudar a dinâmica não linear de vigas espaciais estabilizadas por cabos, o presente trabalho apresentou também as equações necessárias para o cálculo das forças atuantes nos cabos das torres estaiadas, considerando a protensão e a existência de um cluster de cabos. Devido à complexidade das formulações que descrevem o movimento das torres estaiadas por cabos, optou-se por analisar o comportamento de uma única direção de deslocamento dessa estrutura.

Por meio da compatibilização das equações referentes aos deslocamentos do mastro e as equações atuantes nas forças dos cabos, foi possível chegar-se a uma das equações integro-diferenciais que regem o movimento dinâmico não linear do conjunto torre-cabos. Entretanto, sabe-se que a solução encontrada para o deslocamento das torres estaiadas, em uma direção, ainda não é a ideal. A parcela referente à tensão horizontal aplicada nos cabos precisa ser descrita com maior precisão.

Ainda assim, considerando uma abordagem simplificada do problema, por meio da análise dos exemplos numéricos relativos ao conjunto torre-cabos, notou-se que ao crescer a magnitude da carga dinâmica lateral, distribuída ao longo do mastro, e aumentar o valor da tensão vertical, agindo axialmente, gerou-se um maior valor da amplitude de vibração não linear. Vale salientar que ao aumentar a tensão vertical, encontrou-se um ruído na vibração ao longo do deslocamento. Acredita-se que esse ruído possa ter ocorrido em função da presença de uma solução quase periódica, um aspecto que precisa ser investigado com maior profundidade.

Estudar a não linearidade de uma estrutura como a abordada nesta pesquisa é algo complexo. Dessa forma, entende-se que esta pesquisa pode ser estendida a trabalhos futuros.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os tópicos a seguir sugerem ideias que visam contribuir para o prosseguimento dessa pesquisa:

- Estudar a parcela referente à tensão horizontal aplicada nos cabos, para que esta possa ser descrita com maior precisão;
- Estender a análise de comportamento dinâmico não linear do conjunto torre-cabos a mais de uma direção de deslocamento;
- Determinar a causa do ruído que ocorre ao se aumentar o valor da tensão vertical nos cabos, em um sistema amortecido e com a presença de carga distribuída ao longo do mastro;
- Implementar as equações de movimento do conjunto torre-cabos em uma simulação com barras e cabos discretos para realizar a comparação com os resultados de deslocamento encontrados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- BARROS, E. de. **Interações Modais Não Ressonantes em Vigas Cantilever Flexíveis**. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.
- BENTES, J. L. **Análise dinâmica da ruptura de cabos em torres autoportantes e estaiadas de linhas de transmissão**. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- CARLOS, T. B. **Análise dinâmica de torres estaiadas de linhas de transmissão submetidas à ruptura de cabo**. 2015. Dissertação (mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.
- CARVALHO, E. C. **Análise da instabilidade dinâmica de estruturas estaiadas**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia.
- CARVALHO, E. C.; GOLCALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Nonplanar dynamics of fixed-free beams with low torsional stiffness. In: **International design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference**, 2012a, Chicago.
- CARVALHO, E. C. et al. Influence of axial loads on the nonplanar vibrations of cantilever beams. In: **ICNPAA congress: mathematical problems in engineering, aerospace and sciences**, 2012b, Viena.
- CARVALHO, E. C. **Vibrações Não Lineares e Não Planares e Instabilidade Dinâmica de Barras Esbeltas**. 2013. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- CARVALHO, E. C. et al. The influence of symmetry breaking on the nonplanar vibrations of slender beams. In: **XV International Symposium on Dynamics Problems of Mechanics**, 2013a, Brazil.
- CARVALHO, E. C. et al. Influence of axial loads on the nonplanar vibrations of cantilever beams. **Shock and Vibration**, v. 20, 2013b, 1073-1092. DOI 10.3233/SAV-130823.
- CARVALHO, E. C. et al. Nonlinear nonplanar vibration of a functionally graded box beam. In: **New Advances in the Nonlinear Dynamics and Control of Composites for Smart Engineering Design**, 2013c, Cape Town, South Africa.
- CARVALHO, E. C. et al. Nonplanar vibration and dynamics instability of slender cruciform columns. In: **The Fifth International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation**, 2013d, Senigallia, Italy.
- CARVALHO, E. C. et al. The influence of axial loads on the dynamics instability of cruciform columns with low torsional stiffness. In: **International Conference on Vibration Problems**, 2013e, Lisbon, Portugal.

CARVALHO, E. C. et al. Nonplanar vibrations and dynamic instabilities of geometrically imperfect cantilever beams. In: **International Congress of Mechanical Engineering**, 2013f, Ribeirão Preto, SP, Brazil.

CARVALHO, E. C. et al. Nonplanar vibrations of an imperfect slender beam. In: **XXXIV Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2013g, Pirenópolis, GO, Brazil.

CARVALHO, E. C. et al. Nonlinear nonplanar vibration of a functionally graded box beam. **Meccanica**, 2014, DOI 10.1007/s11012-013-9863-z.

CARVALHO, E. C.; GOLCALVES, P. B.; MANCILLA, G. Influence of axial load on the stabilities and non-linear dynamics behaviour of thin-walled open section elements. In: **23 rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering**, 2015, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

CHAN, S. L.; SHU, G. P.; LÜ, Z. T. Stability analysis and parametric study of pre-stressed stayed columns. **Engineering Structures**, v. 24, n. 1, p. 115-124, 2002.

CHENG, J. et al. Advanced aerostatic stability analysis of cable-stayed bridges using finite-element method. **Computers and Structures**, v. 80, n. 13, p. 1145-1158, 2002.

COAQUIRA, J. C.; GOLCALVES, P. B.; CARVALHO, E. C. Vibrações e estabilidade de barras esbeltas se seção aberta. In: **Eighth International Conference on Advances in Steel Structures**, 2015, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

COSTA, R. S. **Formulação para a análise avançada de sistemas estruturais formados por cabos e treliças espaciais visando à aplicação em torres estaiadas para linhas de transmissão**. 2014. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

CRESPO DA SILVA, M. R. M.; GLYNN, C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I. Equations of motion. **Journal of Structural Mechanics**, v. 6, n. 4, p. 437-448, 1978a.

CRESPO DA SILVA, M. R. M.; GLYNN, C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. II. Forced motions. **Journal of Structural Mechanics**, v. 6, n. 4, p. 449-461, 1978b.

CRESPO DA SILVA, M. R. M.; HODGES, D. H. Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades—I. Formulation. **Vertica**, v. 10, n. 2, p. 151-169, 1986a.

CRESPO DA SILVA, M. R. M.; HODGES, D. H. Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades—II. Response and stability results. **Vertica**, v. 10, n. 2, p. 171-186, 1986b.

DI EGIDIO, A.; CONTENTO, A.; VESTRONI, F. The role of nonlinear torsional contributions on the stability of flexural-torsional oscillations of open-cross section beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 358, p. 236-250, 2015.

FREIRE, A. M. S.; NEGRÃO, J. H. O.; LOPES, A. V. Geometrical nonlinearities on the static analysis of highly flexible steel cable-stayed bridges. **Computers and Structures**, v. 84, n. 31, p. 2128-2140, 2006.

Golden Software. (2012) Grapher 9.

HARIKRISHNA, P. et al. Full scale measurements of the structural response of a 50 m guyed mast under wind loading. **Engineering Structures**, v. 25, n. 7, p. 859-867, 2003.

IRVINE, H. M. **Cable Structures**. Dover Publications, New York, 1992.

KAHLA, N. B. Nonlinear dynamic response of a guyed tower to a sudden guy rupture. **Engineering Structures**, v. 19, n. 11, p. 879-890, 1997.

KAHLA, N. B. Response of a guyed tower to a guy rupture under no wind pressure. **Engineering Structures**, v. 22, n. 6, p. 699-706, 2000.

KAROUMI, R. Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. **Computers and Structures**, v. 71, n. 4, p. 397-412, 1999.

LOVE, A. E. H. **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**. Dover Publications, New York, 1944.

MADUGULA, M. K. S.; WAHBA, Y. M. F.; MONFORTON, G. R. Dynamic response of guyed masts. **Engineering Structures**, v. 20, n. 12, p. 1097-1101, 1998.

MADUGULA, M. K. S. **Dynamic response of lattice towers and guyed masts**. ASCE, 2002.

MALATKAR, P. **Nonlinear vibrations of cantilever beams and plates**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.

MANCILLA, R. C.; GOLCALVES, P. B.; CARVALHO, E. C. Vibrações Não Lineares e Estabilidades de Perfis Esbeltos de Seção Aberta. In: **XXXVI Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural**, 2014a, Montevideu, Uruguai.

MANCILLA, R. C.; GOLCALVES, P. B.; CARVALHO, E. C. Nonlinear vibrations of thin-walled open section bars. In: **XXXV Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2014b, Fortaleza, CE, Brazil.

MANCILLA, R. C.; GOLCALVES, P. B.; CARVALHO, E. C. Non-linear dynamic analysis and stability of thin-walled beams with monosymmetric channel-section. In: **XXXV Ibero Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2015, Lisbon, Portugal.

MAZARIM, D. M. **Histórico das Pontes Estaiadas e sua Aplicação no Brasil**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Meirovitch, L. **Analytical Methods in Vibrations**. Macmillan, London, 1967.

PAI, P. F.; NAYFEH, A. H. Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 25, n. 5, p. 455-474, 1990a.

PAI, P. F.; NAYFEH, A. H. Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams—I. Equations of motion. **Nonlinear Dynamics**, v. 1, n. 6, p. 477-502, 1990b.

PAI, P. F.; NAYFEH, A. H. Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams—II. Flapwise excitations. **Nonlinear Dynamics**, v. 2, n. 1, p. 1-34, 1991a.

PAI, P. F.; NAYFEH, A. H. Three-dimensional nonlinear vibrations of composite beams—III. Chordwise excitations. **Nonlinear Dynamics**, v. 2, n. 2, p. 137-156, 1991b.

PASQUETTI, E. **Análise da instabilidade estática e dinâmica de torres estaiadas**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SAITO, D.; WADEE, M. A. Post-buckling behavior of prestressed steel stayed columns. **Engineering Structures**, v. 30, n. 5, p. 1224-1239, 2008.

Timoshenko, S., e Goodier, J. N. **Theory of elasticity**. McGraw-Hill, Inc., New York, 1970.

Török, J. S. **Analytical mechanics**. John Wiley and Sons, New York, 2000.

WAHBA, Y. M. F.; MADUGULA, M. K. S.; MONFORTON, G. R. Evaluation of non-linear analysis of guyed antenna towers. **Computers and Structures**, v. 68, n. 1, p. 207-212, 1998.

Waterloo Maple Inc. (2014) Maple 18 Versão Estudantil.

XU, K. Y.; WEI, D. M.; LIU, C. Seismic response analysis of long-span bridge under uniform and traveling-wave excitations. In: **Advanced Materials Research**, v. 368-373, p. 690-694, 2010.

XU, Y. L.; KO, J. M.; YU, Z. Modal analysis of tower-cable system of tsing ma long suspension bridge. **Engineering Structures**, v. 19, n. 10, p. 857-867, 1997.

YAN-LI, H; XING, M; ZHAO-MIN, W. Nonlinear discrete analysis method for random vibration of guyed masts under wind load. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 91, n. 4, p. 513-525, 2003.

Zaretzky, C. L., Crespo da Silva, M. R. M. Experimental investigation of nonlinear modal coupling in the response of cantilever beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 174, p. 145-167, 1994.

ZAVODNEY, L. D.; NAYFEH, A. H. The response of a single-degree-of-freedom system with quadratic and cubic non-linearities to a fundamental parametric resonance. **Journal of Sound and Vibration**, v. 120, n. 1, p. 63-93, 1988.

ZAVODNEY, L. D.; NAYFEH, A. H. The non-linear response of a slender beam carrying a lumped mass to a principal parametric excitation: theory and experiment. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 24, n. 2, p. 105-125, 1989.

ZHANG, W. Chaotic motion and its control for nonlinear nonplanar oscillations of a parametrically excited cantilever beam. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 26, n. 3, p. 731-745, 2005.

APÊNDICE

A seguir estão presentes os coeficientes α_{vi} , α_{wi} e $\alpha_{\gamma i}$ de Garlekin, para $(i = 1, 2, \dots)$:

$$\alpha_{v1} = \int_0^1 \left[-\beta_\gamma F_\gamma (F_\gamma' F_w'')' + (1 - \beta_\gamma) F_v (F_\gamma F_w'')'' \right] ds, \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha_{v2} = -(1 - \beta_\gamma) \int_0^1 \left[F_v (F_v'' F_\gamma'^2)'' \right] ds, \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha_{v3} = \int_0^1 (1 - \beta_\gamma) F_v \left[F_w''' \int_0^1 F_v' F_w'' ds \right]' ds - \int_0^1 \beta_\gamma F_v (F_v' F_w''^2)' ds -$$

$$\int_0^1 F_v (F_v' F_w' F_w''')' ds - \int_0^1 [P_s + q_u \cos(\Omega_u t)] (F_v F_w'^2 F_v'' + 2 F_v F_v' F_w' F_w'') ds,$$

$$\alpha_{v4} = -\beta_\gamma \int_0^1 F_v \left[F_v' (F_v' F_v'')' \right]' ds - 3 \int_0^1 [P_s + q_u \cos(\Omega_u t)] F_v F_v'^2 F_v'' ds, \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha_{v5} = -\frac{1}{2} \int_0^1 F_v \left(F_v' \int_L^s \int_0^s F_v'^2 ds ds \right)' ds, \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha_{v6} = -\frac{1}{2} \int_0^1 F_v \left(F_v' \int_L^s \int_0^s F_w'^2 ds ds \right)' ds, \quad (\text{A.6})$$

$$\alpha_{v7} = J_\zeta \int_0^1 F_v \left[(F_v')^3 \right]' ds, \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha_{v8} = \int_0^1 \left[J_\eta F_v (F_v' F_w'^2)' + (J_\eta - J_\zeta) F_v \left(F_w' \int_0^s F_v' F_w'' \right)' \right] ds ds, \quad (\text{A.8})$$

$$\alpha_{v9} = 2J_\eta \int_0^1 F_v (F_\gamma F_w')' ds, \quad (\text{A.9})$$

$$\alpha_{v10} = 2J_\eta \int_0^1 F_v \left(F_w' \int_0^s F_v' F_w'' ds \right)' ds, \quad (\text{A.10})$$

$$\alpha_{v11} = \int_0^1 \left[2J_\eta F_v \left(F_w' \int_0^s F_v' F_w'' ds \right)' - J_\zeta \int_0^1 F_v (F_v' F_w'^2)' \right] ds, \quad (\text{A.11})$$

$$\alpha_{v12} = (J_\eta - J_\zeta) \int_0^1 F_v (F_v' F_\gamma'^2)' ds, \quad (\text{A.12})$$

$$\alpha_{v13} = (J_\eta - J_\zeta) \int_0^1 F_v (F_w' F_\gamma')' ds, \quad (\text{A.13})$$

$$\alpha_{v14} = \alpha_{v7} = J_\zeta \int_0^1 F_v \left[(F_v')^3 \right]' ds, \quad (\text{A.14})$$

$$\alpha_{v15} = -J_{\xi} c_{\gamma} \int_0^1 F_v (F_w' F_{\gamma}')' ds, \quad (\text{A.15})$$

$$\alpha_{w1} = \int_0^1 \left[\beta_{\gamma} F_w \left(F_{\gamma}' F_v'' \right)' + (1 - \beta_{\gamma}) F_w \left(F_{\gamma}' F_v'' \right)'' \right] ds, \quad (\text{A.16})$$

$$\alpha_{w2} = (1 - \beta_{\gamma}) \int_0^1 \left[F_w (F_w'' F_{\gamma}^2)'' \right] ds, \quad (\text{A.17})$$

$$\alpha_{w3} = - \int_0^1 (1 - \beta_{\gamma}) F_w \left[F_v''' \int_0^s F_w' F_v'' ds \right]' ds - \int_0^1 F_w (F_w' F_v''^2)' ds - \int_0^1 \beta_{\gamma} F_w (F_v' F_w' F_v''')' ds - \quad (\text{A.18})$$

$$\int_0^1 [P_S + q_u \cos(\Omega_u t)] \left(F_w F_v'^2 F_w'' + 2 F_w F_w' F_v' F_v'' \right) ds, \\ \alpha_{w4} = - \int_0^1 F_w \left[F_w' (F_w' F_w'')' \right]' + 3 [P_S + q_u \cos(\Omega_u t)] F_w F_w'^2 F_w'' ds, \quad (\text{A.19})$$

$$\alpha_{w5} = - \frac{1}{2} \int_0^1 F_w \left(F_w' \int_L^s \int_0^s F_w'^2 ds ds \right)' ds, \quad (\text{A.20})$$

$$\alpha_{w6} = - \frac{1}{2} \int_0^1 F_w \left(F_w' \int_1^s \int_0^s F_v'^2 ds ds \right)' ds, \quad (\text{A.21})$$

$$\alpha_{w7} = J_{\eta} \int_0^1 F_w \left[(F_w')^3 \right]' ds, \quad (\text{A.22})$$

$$\alpha_{w8} = \int_0^1 \left[J_{\zeta} F_w (F_w' F_v'^2)' + (J_{\eta} - J_{\zeta}) \int_0^1 F_w \left(F_v' \int_0^s F_w' F_v'' ds \right)' ds \right] ds, \quad (\text{A.23})$$

$$\alpha_{w9} = -2 J_{\eta} \int_0^1 F_w (F_{\gamma}' F_v')' ds, \quad (\text{A.24})$$

$$\alpha_{w10} = \int_0^1 \left[-J_{\xi} F_w \left(F_v' \int_0^s F_v' F_w'' ds \right)' + J_{\xi} \int_0^1 F_w (F_w' F_v'^2)' ds + \right. \\ \left. (J_{\eta} - J_{\zeta}) F_w \left(F_v' \int_0^s F_w' F_v'' ds \right)' \right] ds, \quad (\text{A.25})$$

$$\alpha_{w11} = \int_0^1 \left[-J_{\xi} F_w \left(F_v' \int_0^s F_v' F_w'' ds \right)' + J_{\zeta} \int_0^1 F_w (F_w' F_v'^2)' ds + \right. \\ \left. (J_{\eta} - J_{\zeta}) F_w \left(F_v' \int_0^s F_w' F_v'' ds \right)' \right] ds, \quad (\text{A.26})$$

$$\alpha_{w12} = -(J_\eta - J_\zeta) \int_0^1 F_w (F_w' F_\gamma^2)' ds, \quad (\text{A.27})$$

$$\alpha_{w13} = -(J_\eta - J_\zeta) \int_0^1 F_w (F_v' F_\gamma)' ds, \quad (\text{A.28})$$

$$\alpha_{w14} = \alpha_{w7} = J_\eta \int_0^1 F_w \left[(F_w')^3 \right]' ds, \quad (\text{A.29})$$

$$\alpha_{\gamma 1} = -\frac{1-\beta_y}{J_\xi} \int_0^1 F_\gamma^2 F_v''^2 ds, \quad (\text{A.30})$$

$$\alpha_{\gamma 2} = -\frac{1-\beta_y}{J_\xi} \int_0^1 F_\gamma^2 F_w''^2 ds, \quad (\text{A.31})$$

$$\alpha_{\gamma 3} = -\frac{1-\beta_y}{J_\xi} \int_0^1 F_\gamma F_w'' F_v'' ds, \quad (\text{A.32})$$

$$\alpha_{\gamma 4} = -\int_0^1 F_\gamma \int_0^s F_v' F_w'' ds ds, \quad (\text{A.33})$$

$$\alpha_{\gamma 5} = -\int_0^1 F_\gamma F_v' F_w' ds, \quad (\text{A.34})$$

$$\alpha_{\gamma 6} = \frac{J_\eta - J_\zeta}{J_\xi} \int_0^1 F_v'^2 F_\gamma''^2 ds, \quad (\text{A.35})$$

$$\alpha_{\gamma 7} = \frac{-(J_\eta - J_\zeta)}{J_\xi} \int_0^1 F_w'^2 F_\gamma^2 ds, \quad (\text{A.36})$$

$$\alpha_{\gamma 8} = \frac{-(J_\eta - J_\zeta)}{J_\xi} \int_0^1 F_\gamma F_v' F_w' ds. \quad (\text{A.37})$$