

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CAMPUS GOIÂNIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

EFRAIM SOARES BERNARDES

**FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE COMPARATIVA ELÁSTICO-
LINEAR DE VIGAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Goiânia, GO
2019



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: EFRAIN SOARES BERNARDES

Matrícula: 2013 1011 050055

Título do Trabalho: formulação computacional e análise elástica - linear de vigas utilizando o método dos elementos finitos.

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG;
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____;
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG.

Ao indicar a opção **2** ou **3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia
Local

17 / 12 / 2019
Data

Efrain Soares Bernardes

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Efraim Soares Bernardes

**FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE COMPARATIVA ELÁSTICO-
LINEAR DE VIGAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

**Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação de
Engenharia Civil, do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de
Goiás, Campus Goiânia, como parte dos
requisitos necessários para obtenção
do título de Bacharel em Engenharia
Civil**

**Orientador: Prof. Dr. Elias Calixto
Carrijo.**

**Coorientador: Prof. Msc. Guilherme
Santana Alencar.**

**Goiânia, GO
2019**

B4568f Bernardes, Efraim Soares.

Formulação computacional e análise comparativa elástico-linear de vigas utilizando o Método dos Elementos Finitos / Efraim Soares Bernardes. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2019.
154 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Elias Calixto Carrijo.

Coorientador: Prof. Msc. Guilherme Santana Alencar.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Bacharelado em Engenharia Civil, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.
Incluem apêndices e anexos.

1. Vigas de Euler-Bernoulli. 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Análise computacional.
I. Carrijo, Elias Calixto (orientador). II. Alencar, Guilherme Santana (coorientador). III. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. IV. Título.

CDD 624.171

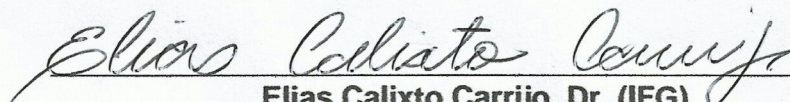
Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva Abreu CRB1/ 2.740
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

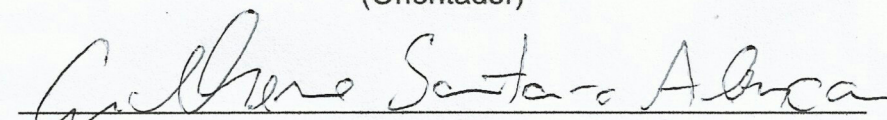
Efraim Soares Bernardes

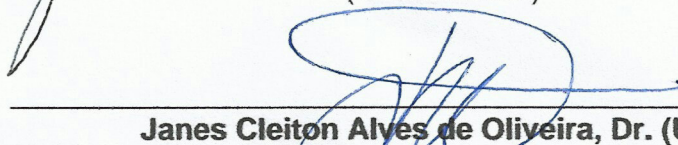
**FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE COMPARATIVA ELÁSTICO-
LINEAR DE VIGAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

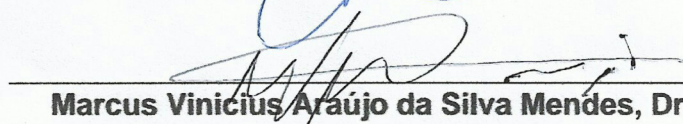
**Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação de
Engenharia Civil, do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de
Goiás, Campus Goiânia, como parte dos
requisitos necessários para obtenção
do título de Bacharel em Engenharia
Civil**

Aprovado em 05 de dezembro de 2019:


Elias Calixto Carrijo, Dr. (IFG)
(Orientador)


Guilherme Santana Alencar, Msc. (IFG)
(Coorientador)


Janes Cleiton Alves de Oliveira, Dr. (UFG)


Marcus Vinicius Araújo da Silva Mendes, Dr. (IFG)

Goiânia, GO
2019

DEDICATÓRIA

*À Deus, minha família e todos que
contribuíram para a realização deste
trabalho.*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é resultado de esforços de pessoas que me auxiliaram em todos os momentos de dificuldades como também me conduziram para as corretas escolhas em minha vida. Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste estudo e, de uma maneira especial, sou grato:

- à minha família que me apoiara em todos os momentos durante o curso e em minha vida;*
- ao meu professor orientador Dr. Elias Calixto Carrijo, pela confiança no meu trabalho e excelência na orientação;*
- ao meu professor coorientador Msc. Guilherme Santana Alencar, por me aconselhar em decisões importantes em meu trabalho;*
- ao IFG por me oferecer as oportunidades de realização ao curso de Engenharia Civil e a esse trabalho;*
- à todos que auxiliaram direta e indiretamente para a sua concretização.*

RESUMO

FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE COMPARATIVA ELÁSTICO-LINEAR DE VIGAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

AUTOR: Efraim Soares Bernardes
ORIENTADOR: Elias Calixto Carrijo

Este trabalho fundamenta-se na análise estrutural elástico-linear de vigas a partir de métodos numéricos com vistas a comparação com as soluções obtidas com as teorias clássicas. Nesse sentido, teve como objetivo o desenvolvimento de uma rotina computacional de cálculo de esforços e deslocamentos em vigas contínuas de Euler-Bernoulli, baseando-se no Método dos Elementos Finitos (MEF). Em face da formulação numérica desenvolvida segundo a teoria da elasticidade e através do MEF, o estudo da linha elástica foi realizado segundo a aproximação em função polinomial de grau três, considerando a análise energética por meio do conceito da mínima energia potencial total e do princípio de minimizações de funcionais do cálculo variacional. Logo, foram estabelecidas as relações matriciais entre a rigidez da estrutura, seu carregamento e os deslocamentos por estes causadas, podendo, a partir dos resultados de deslocamento nodais, obter os valores de esforços internos e reações nos vínculos das vigas. A partir desta formulação numérica e matemática foi realizada a implementação computacional em linguagem de alto nível procedural, montando-se as matrizes de rigidez global e local, bem como os vetores de cargas equivalentes global e local. O sistema principal em que as incógnitas são os deslocamentos nodais fora resolvido segundo o método de Gauss-Jordan e os esforços internos e as reações de apoio obtidos com sub-rotinas baseadas no princípio da rigidez. Aplicou-se o programa em 3 casos que totalizaram 10 exemplos de vigas em situações diferentes de vínculos, carregamento externo, rigidez à flexão e materiais. Com base nos resultados, evidenciou acurácia e validação dentre a aplicação da rotina aos exemplos analisados, tendo como base comparativa resultados analíticos e/ou valores advindos de outros autores e softwares de análise estrutural. Os resultados nodais de esforços, reação de apoio e deslocamentos foram consistentes em termos de vigas isostáticas e hiperestáticas. Por fim, verificou-se, ainda que os valores de esforços e deslocamentos foram obtidos de forma discreta (nodais), tornar-se possível a obtenção aproximada dos diagramas de esforços internos e da linha elástica de uma viga segundo um maior refinamento da matriz de elementos.

Palavras-chave: Vigas de Euler-Bernoulli. Método dos Elementos Finitos. Análise computacional.

ABSTRACT

COMPUTER FORMULATION AND ELASTIC-LINE COMPARATIVE ANALYSIS OF BEAMS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

AUTHOR: Efraim Soares Bernardes

ADVISOR: Elias Calixto Carrijo

This work is based on the elastic-linear structural analysis of beams using numerical methods to compare with the solutions obtained with the classical theories. In this sense, it aimed to develop a computational routine for calculating stress and displacement in continuous beams by Euler-Bernoulli, based on the Finite Element Method (FEM). Given the numerical formulation developed according to the theory of elasticity and through the MEF, the study of the elastic line was performed according to the approximation in degree three polynomial function, considering the energy analysis through the concept of the minimum total potential energy and the principle of functional minimizations of variational calculus. Thus, the matrix relations between the structure stiffness, its loading and the displacements caused by them were established. From the results of nodal displacement, the values of internal stresses and reactions in the beams can be obtained. From this numerical and mathematical formulation, the computational implementation was performed in high procedural language, assembling the global and local stiffness matrices, as well as the global and local equivalent load vectors. The main system whose unknowns are the nodal displacements had been solved by the Gauss-Jordan method and the internal efforts and support reactions obtained with stiffness-based subroutines. The program was applied in 3 cases totaling 10 examples of beams in different situations of bonds, external loading, flexural stiffness and materials. Based on the results, it showed accuracy and validation between the routine application to the analyzed examples, based on comparative analytical results and / or values from other authors and structural analysis software. The nodal results of efforts, support reaction and dislocations were consistent in terms of isostatic and hyperstatic beams. Finally, it was verified that, although the values of efforts and displacements were obtained discreetly (nodal), it is possible to obtain the approximation of the internal stress diagrams and the elastic line of a beam according to a greater refinement of the stress matrix. Elements.

Keywords: Euler-Bernoulli Beams. Finite Element Method. Computational analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Tipos de carregamentos e vinculações em vigas.....	25
Figura 2 –	Deformação no elemento infinitesimal e seus deslocamentos.....	26
Figura 3 –	Modelo de viga de Euler-Bernoulli.....	29
Figura 4 –	Representação da seção da viga de Euler-Bernoulli.....	34
Figura 5 –	Deslocamentos positivos nos nós do elemento.....	39
Figura 6 –	Esforços positivos nos nós do elemento.....	40
Figura 7 –	Carregamento distribuído trapezoidal sobre o elemento.....	44
Figura 8 –	Carregamentos concentrados sobre os elementos.....	45
Figura 9 –	Viga hipotética com n elementos finitos.....	57
Figura 10 –	Fluxograma do algoritmo simplificado do programa.....	62
Figura 11 –	Esquema estático, carregamento e esforços na seção de uma viga biengastada.....	68
Figura 12 –	Esquemas estáticos e carregamentos dos exemplos analisados no caso 1.....	74
Figura 13 –	Esquema estático e carregamento da viga do exemplo 1 – Caso 2.....	79
Figura 14 –	Esquema estático e carregamento da estrutura do exemplo 2 – Caso 2.....	80
Figura 15 –	Esquema estático e carregamento da estrutura do exemplo 3 – Caso 2.....	81
Figura 16 –	Esquema estático genérico da estrutura do exemplo 1 – Caso 3...	82
Figura 17 –	Esquema estático e carregamento genérico da estrutura do exemplo 2 – Caso 3.....	83
Figura 18 –	Condições estáticas de viga engastada submetida a carga concentrada.....	86
Figura 19 –	Condições estáticas de viga engastada submetida a carga uniformemente distribuída.....	88
Figura 20 –	Condições estáticas de viga engastada submetida a carga distribuída trapezoidal.....	90
Figura 21 –	Condições estáticas de viga biapoiada com carregamento concentrado.....	91
Figura 22 –	Condições estáticas de viga bi engastada com carregamento uniformemente distribuído.....	93
Figura 23 –	Condições estáticas de viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído.....	96
Figura 24 –	Representação da variação percentual local (erro) entre resultados analíticos de esforços na viga analisada no exemplo 1 - caso 2 de aplicação e os resultados dados pela formulação com a MEF utilizando-se as derivadas da função admissível para os deslocamentos transversais como demonstrado por Castro	

	(2009): a) cortante no ponto A; b) momento fletor no ponto B; c) cortante no ponto C.....	99
Figura 25 –	Representação dos diagramas de esforço cortante da viga deste exemplo para as formulações analítica e apresentada por Castro (2009), utilizando: a) 2 elementos; b) 4 elementos; c) 16 elementos; d) 50 elementos.....	100
Figura 26 –	Representação dos diagramas de momento fletor da viga deste exemplo para as formulações analítica e apresentada por Castro (2009), utilizando: a) 2 elementos; b) 4 elementos; c) 16 elementos; d) 50 elementos.....	101
Figura 27 –	Representação dos diagramas de esforço cortante da viga representada na Figura 23 com os resultados do programa deste trabalho e pela formulação apresentada por Castro (2009), utilizando: a) 1 elemento; b) 2 elementos; c) 4 elementos; d) 16 elementos.....	102
Figura 28 –	Representação dos diagramas de momento fletor da viga representada na Figura 23 com os resultados do programa deste trabalho e pela formulação apresentada por Castro (2009), utilizando: a) 1 elemento; b) 2 elementos; c) 4 elementos; d) 16 elementos.....	103
Figura 29 –	Representação dos deslocamentos verticais $v(x)$ da viga representa pela Figura 23, obtidos com a utilização de 2, 4 e 16 elementos finitos pelo programa implementado, como também da solução analítica com base na Equação (66)	104
Figura 30 –	Configuração de carregamento e vinculação da viga do exemplo 2 – Caso 2.....	105
Figura 31 –	Diagrama de momento fletor [t.m] para a viga do exemplo 2 – Caso 2 com a resolução pelo MD dada em Sussekind (1987).....	105
Figura 32 –	Diagrama de esforço cortante [t] para a viga do exemplo 2 – Caso 2 com os valores obtidos com a rotina implementada.....	107
Figura 33 –	Diagrama de momento fletor [t.m] para a viga do exemplo 2 – Caso 2 com os valores obtidos com a rotina implementada.....	108
Figura 34 –	Representação do esquema estático da viga do exemplo 3 – Caso 2.....	109
Figura 35 –	Representação do esquema estático da viga do exemplo 1 – Caso 3.....	112
Figura 36 –	Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (inferior) segundo a resolução de Soriano (2006) pelo MD, em [KN.m] e [KN], respectivamente.....	112
Figura 37 –	Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (intermediário) segundo a resolução do software Ftool, em [KN.m] e [KN], respectivamente, além da representação da linha elástica da viga (inferior), em mm.....	113
Figura 38 –	Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (intermediário) segundo a resolução pela rotina implementada, em [KN.m] e [KN], respectivamente, além da representação da linha elástica da viga (inferior), em mm.....	114

Figura 39 –	Representação do esquema estático da viga do exemplo 2 – Caso 3.....	116
Figura 40 –	Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (inferior) segundo a resolução do software Ftool, em [KN.m] e [KN], respectivamente.....	117
Figura 41 –	Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (inferior) segundo a resolução pela rotina implementada, em [KN.m] e [KN], respectivamente.....	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Resultados de reações de apoio para viga do exemplo 1 – Caso 1....	86
Tabela 2 –	Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos, rotações e esforços para viga do exemplo 1 – Caso 1.....	87
Tabela 3 –	Resultados de reações de apoio pelo programa para viga do exemplo 2 – Caso 1.....	89
Tabela 4 –	Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos, rotações e esforços para viga do exemplo 2 – Caso 1.....	89
Tabela 5 –	Resultados de reações de apoio para viga do exemplo 3 – Caso 1....	90
Tabela 6 –	Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos, rotações e esforços para viga do exemplo 3 – Caso 1.....	91
Tabela 7 –	Resultados de reações de apoio para viga do exemplo 4 – Caso 1....	92
Tabela 8 –	Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos e rotações para viga do exemplo 4 – Caso 1.....	92
Tabela 9 –	Resultados analíticos e pelo programa dos esforços para viga do exemplo 4 – Caso 1.....	92
Tabela 10 –	Resultados das reações de apoio para viga do exemplo 5 – Caso 1.	94
Tabela 11 –	Resultados analíticos e pelo programa do deslocamento e esforço de momento fletor no ponto B para o exemplo 5 – Caso 1.....	94
Tabela 12 –	Resultados analíticos e pelo programa dos esforços dos pontos A e C para viga do exemplo 5 – Caso 1.	95
Tabela 13 –	Resultados de reações de apoio para viga do exemplo 1 – Caso 2.	96
Tabela 14 –	Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos e rotações para viga do exemplo 1 – Caso 2.....	97
Tabela 15 –	Resultados analíticos e pelo programa dos esforços para viga do exemplo 1 – Caso 2.....	97
Tabela 16 –	Resultados da análise de esforços segundo a formulação do MEF utilizada por Castro (2015) para viga do exemplo 1 – Caso 2.	98
Tabela 17 –	Resultados de reações de apoio para a viga do exemplo 2 – Caso 2.....	106
Tabela 18 –	Resultados de reações de apoio para a viga do exemplo 2 – Caso 2.....	106
Tabela 19 –	Resultados de reações de apoio para a viga do exemplo 2 – Caso 2.....	109
Tabela 20 –	Reações de apoio para a combinação 1 à viga do exemplo 2 – Caso 2.....	109
Tabela 21 –	Reações de apoio para a combinação 2 à viga do exemplo 2 – Caso 2.....	110
Tabela 22 –	Reações de apoio para a combinação 3 à viga do exemplo 2 – Caso 2.....	110
Tabela 23 –	Reações de apoio para o exemplo 1 – Caso 3.....	113
Tabela 24 –	Reações de apoio para o exemplo 2 – Caso 3.....	116

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Resumo das características das vigas do exemplo 1.....	85
Quadro 2 –	Resumo das características das vigas do exemplo 2.....	95
Quadro 3 –	Resumo das características das vigas do exemplo 3.....	111

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
IFG	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
MEC	Método dos elementos de Contorno
MEF	Método dos elementos Finitos
MD	Método dos deslocamentos
NASA	National Aeronautics and Space Administration (Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço)
NBR	Norma Técnica Brasileira
PUC-Rio	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

LISTA DE SÍMBOLOS

Comerciais

®	Marca registrada
©	Copyright

Letras latinas maiúsculas

E	Módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young ou os Esforços de uma estrutura
I	Momento de inércia de área da seção transversal em relação ao eixo z
P	Força pontual (carregamento externo)
V	Esforço cortante vertical ou volume de um sólido deformável no espaço
H	Esforço normal
A	Área da seção transversal de uma estrutura em corte paralelo ao eixo z
$A_{v,h,M}$	Reações de apoio em uma viga
M	Esforço de momento fletor
S, S'	Comprimento de um segmento de reta em um sólido no espaço
Y, F	Funcionais (escalares)
U	Energia potencial de deformação (escalar)
T	Operador transposta de uma matriz
B	Matriz das derivadas segundas das funções de forma
F	Vetor de forças nodais
K	Matriz global de rigidez
V	Vetor global dos parâmetros nodais
R	Vetor global de cargas nodais equivalentes
N	Matriz com a funções de forma locais ao carregamento trapezoidal
I	Vetor de carregamentos nodais do elemento

Letras latinas minúsculas

q	Carregamento distribuído
b_i	Parâmetros nodais
p_i	Carga nodal externa da estrutura
l	Comprimento do elemento
x	Coordenada do eixo x (abcissas)
y	Coordenada do eixo y (ordenadas)
z	Coordenada do eixo z
i, j, k	Contadores dos somatórios
n	Eixo de indicação do sentido de deformação de um segmento de reta ou o grau de indeterminação cinemática de uma estrutura ou limite de um somatório
m	Número de esforços a serem calculados

u	Vetor de deslocamentos de um ponto do eixo da estrutura
v	Vetor de parâmetros nodais do elemento
k	Matriz de rigidez do elemento
r	Vetor de cargas nodais equivalentes do elemento
f	Vetor de esforços nodais
p	Vetor de cargas nodais equivalentes da estrutura

Letras gregas maiúsculas

Ω	Energia potencial das cargas
Π	Energia potencial total
Δ	Variação de uma incógnita ou deslocamento de um ponto da estrutura
Γ	Domínio das coordenadas da função de deformação de uma viga
Δ	Vetor de deslocamentos da estrutura

Letras gregas minúsculas

u	Função do deslocamento na direção x (longitudinal)
v	Função do deslocamento na direção y (transversal)
w	Função do deslocamento na direção z
ε	Deformação normal
σ	Tensão normal
δ	Variação de um funcional
θ	Rotação da seção transversal do elemento
τ_P	Trabalho de uma força P
τ_M	Trabalho de um momento M
ξ	Coordenada adimensional das abcissas
ψ	Funções de forma
ρ	Raio de curvatura seccional de uma viga submetido à flexão
$\beta_{i,0}$	Coefficientes de ações de engastamento de uma barra
$\beta_{i,j}$	Rigidez de uma barra
β_0	Vetor dos coeficientes de ações de engastamento da estrutura
β	Matriz de rigidez da estrutura

Operadores

∂	Operador diferencial parcial
d	Operador diferencial total
δ	Operador variação de um funcional
T	Operador transposta de uma matriz

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2.1	Contextualização	17
2.2	Objetivos	19
2.2.1	Objetivos gerais	19
2.2.2	Objetivos específicos	19
2	REFERENCIAL TEÓRICO	21
2.1	Revisão histórica	21
2.1.1	Contexto histórico da mecânica dos sólidos	21
2.1.2	Contexto histórico do estudo energético de vigas e do MEF	23
2.2	Vigas de Euler-Bernoulli	23
2.2.1	Conceitos Fundamentais	25
2.2.2	Hipótese de Euler-Bernoulli	28
2.2.3	Considerações sobre o Método dos Deslocamentos	30
2.2.4	Princípio da Energia Potencial Total na análise de vigas e o cálculo variacional	32
2.2.5	Energia potencial total para viga de Euler-Bernoulli	33
2.3	Método dos elementos finitos	36
2.3.1	Método de Rayleigh-Ritz e princípio da mínima energia potencial total aplicados ao estudo dos métodos dos elementos finitos	38
2.3.2	Elemento finito de viga	39
2.3.3	Método dos elementos finitos aplicado ao estudo de vigas de Euler-Bernoulli	40
2.3.4	Vetor de cargas nodais equivalentes para diferentes carregamentos	44
2.3.5	Esforços nodais do elemento	48
2.3.6	Equações globais para rede de elementos finitos	51
3	METODOLOGIA	61
3.1	Aspectos computacionais	61
3.1.1	Algoritmo base do programa	62
3.1.2	Sub-Rotinas	63
3.1.2.1	<i>Declarações de variáveis</i>	63
3.1.2.2	<i>Declaração e abertura dos arquivos de entrada e saída</i>	63
3.1.2.3	<i>Leitura dos dados de entrada pelo programa</i>	63
3.1.2.4	<i>Impressão dos dados no arquivo de saída</i>	63
3.1.2.5	<i>Cálculo do comprimento de cada elemento</i>	64
3.1.2.6	<i>Cálculo e montagem da matriz de rigidez do elemento</i>	64
3.1.2.7	<i>Montagem da matriz de rigidez global</i>	64
3.1.2.8	<i>Cálculo e montagem do vetor de cargas nodais equivalentes de cada elemento</i>	64
3.1.2.9	<i>Montagem do vetor de cargas nodais global</i>	65
3.1.2.10	<i>Estabelecimento das condições de contorno do sistema global</i>	65
3.1.2.11	<i>Resolução do sistema de equações</i>	66
3.1.2.12	<i>Cálculo das reações de apoio</i>	66
3.1.2.13	<i>Cálculo dos esforços internos</i>	67
3.1.2.14	<i>Impressão dos resultados</i>	67
3.1.2.15	<i>Fechamento dos arquivos de entrada e saída</i>	67
3.2	Métodos de análise de vigas	68

3.2.1	Estruturas isostáticas e hiperestáticas: processos analíticos.....	68
3.2.2	Soluções numéricas: formulação clássica do MEF e erros locais.....	70
3.2.3	Desempenho computacional.....	72
3.3	Casos de aplicação do software implementado.....	73
3.3.1	Caso 1.....	73
3.3.2	Caso 2.....	78
3.3.3	Caso 3.....	81
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	85
4.1	Caso 1.....	85
4.1.1	Exemplo 1.....	85
4.1.2	Exemplo 2.....	88
4.1.3	Exemplo 3.....	90
4.1.4	Exemplo 4.....	91
4.1.5	Exemplo 5.....	93
4.2	Caso 2.....	95
4.2.1	Exemplo 1.....	96
4.2.2	Exemplo 2.....	104
4.2.3	Exemplo 3.....	108
4.3	Caso 3.....	111
4.3.1	Exemplo 1.....	111
4.3.2	Exemplo 2.....	115
5	CONCLUSÃO E SUGESTÕES.....	120
5.1	Conclusões.....	120
5.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	123
	REFERÊNCIAS.....	125
	ANEXO A – Código fonte comentado do programa implementado no trabalho.....	129
	ANEXO B – Código fonte comentado das sub-rotinas de cálculo de esforços.....	141
	ANEXO C – Exemplos de arquivos de dados de entrada e saída comentados.....	143
	APÊNDICE A – Resolução de sistemas lineares pelo método de Gauss-Jordan.....	147

1 INTRODUÇÃO

O estudo de estruturas é um campo de conhecimento importante à humanidade, sendo essencial ao seu desenvolvimento. Contribuindo a esse aspecto, ver-se-á nas próximas seções uma breve abordagem acerca da análise de vigas e os fundamentos deste trabalho.

1.1 Contextualização

Os conceitos da mecânica dos sólidos deformáveis e da análise de estruturas são fundamentais no processo de produção do que se conhece atualmente na humanidade. Assim, são desenvolvidos atualmente projetos desde a escala macroscópica como automóveis e aviões, arranha-céus e pontes; como também estruturas microscópicas semelhantes a circuitos integrados e microprocessadores computacionais, até a recente atuação no campo da análise em escala nanométrica (ARRUDA, 2001; BEER, 2009).

O dimensionamento dos elementos de suporte à edificação é um dos principais objetivos do cálculo de estruturas na engenharia civil, garantindo segurança, viabilidade técnica e economia no empreendimento (CAMPOS, 2015; SÉLIS RODRIGUES, 2016).

Conforme Leal (2015), iniciam-se às etapas da concepção estrutural de um edifício com a correta escolha do arranjo dos elementos estruturais, avaliando a finalidade e funcionalidade da edificação, conforme o projeto de arquitetura. Assim, em vista de uma maior demanda por agilidade e dinamização do ato de projetar, atualmente, escritórios de cálculo cotidianamente utilizam-se de recursos computacionais para a racionalização de projetos, destinando maior tempo no estabelecimento daqueles parâmetros pelo projetista.

Até o início do século XX, devido a não existência dos sofisticados mecanismos computacionais atuais (ainda surgiram algumas máquinas de cálculo de maior acessibilidade), os pesquisadores viam-se obrigados a desenvolverem formulações matemáticas complexas à resolução de equações diferenciais relacionadas aos diversos tipos de estruturas, como o caso de placas delgadas e vigas sobre condições específicas de carregamento e vinculação. (AMPOLINI et al, 2012; NIRSHL, 2008). Tais soluções analíticas podem ser de difícil resolução, recorrendo-se, então, ao uso

de métodos numéricos que discretizam o contínuo para, então, aproximar uma solução para os campos incógnitos associados ao problema a se analisar. (ASSAN, 2003; LEAL, 2015).

O desenvolvimento da computação e dos recursos de programação trouxeram às ciências exatas a possibilidade de aplicação de métodos numéricos de forma mais precisa e satisfatória na análise estrutural, utilizados nas diversas áreas do conhecimento. Desenvolveram-se, portanto, várias metodologias das quais citam-se: o Método dos elementos Finitos (MEF), Métodos dos elementos de Contorno (MEC), utilização de Diferenças Finitas para resolução das equações da teoria elástica clássica, entre outros métodos aproximados. (CARVALHO et al, 2013; CARVALHO et al, 2014).

Soriano (2009 apud LEAL, 2015) e Mesquita (1998) abordam acerca da aplicação do MEF na resolução de equações diferenciais com condições de contorno iniciais, dividindo o contínuo em subdomínios chamados elementos finitos. Já Campillo (2012 apud MONZINI ROTTA, 2014) e Moraes (2015 apud MONZINI ROTTA, 2014) dispõem sobre o surgimento de diversos autores e estudiosos acerca do MEF, bem como da existência de diversos softwares de análise estrutural baseados neste método, os quais citam-se o ©ANSYS, o ©NASTRAN (desenvolvido pela NASA), o SAP2000®, o Ftool (PUC-Rio), o Insane (UFMG), o Frame 3DD (Duky University), entre outros.

No entanto, existem ainda hoje restrições aos diversos profissionais e estudantes da área das ciências exatas ao acesso às rotinas de cálculo disponíveis comercialmente, visto que apresentam elevado valor de venda. Portanto, o desenvolvimento de programas livres e de código aberto estimularia de forma substancial o desenvolvimento da pesquisa na instituição de desenvolvimento deste trabalho, bem como um maior interesse pela análise numérica por parte daqueles profissionais. (AMPOLINI et al, 2012; LEAL, 2015; MESQUITA, 1998).

A norma brasileira da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) ABNT NBR 6118:2014 também aborda a análise linear de vigas-parede ou pilares-parede com o emprego de métodos numéricos e como uma das sugestões de estudo a utilização do MEF.

1.2 Objetivos

Discorre-se acerca dos objetivos do trabalho a seguir, dividindo-os em geral e específicos.

1.2.1 Objetivo geral

O presente trabalho trata-se da elaboração e implementação de uma formulação computacional com base no MEF para a avaliação numérica linear elástica de vigas de Euler-Bernoulli, estabelecendo esforços e deslocamentos a estas relacionados.

1.2.2 Objetivos específicos

Citam-se os objetivos específicos do trabalho:

- Apresentar e desenvolver a modelagem matemática que embasa o Método dos Elementos Finitos no estudo de vigas com base no modelo de Euler – Bernoulli (modelo numérico);
- Implementar uma rotina computacional (Linguagem Fortran) a partir do Método dos Elementos Finitos para o cálculo de estruturas unidimensionais lineares (barras/vigas);
- Analisar casos distintos de vigas segundo as diversas alternativas de carregamento, geometria, rigidez e vinculações.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A fim de se fundamentar o estudo deste trabalho, apresentou-se uma retrospectiva histórica dos principais nomes e acontecimentos dentro da evolução da mecânica dos materiais e do MEF, além do posicionamento acerca dos conceitos de métodos energéticos de análise estrutural, de resistência dos materiais e sobre o MEF. É nesse capítulo que se fez quase toda formulação matemática utilizada no trabalho.

2.1 Revisão histórica

Relata-se, então, acerca dos pensadores e desenvolvedores desta área do conhecimento, abordando o desenvolvimento deste tema ao longo do tempo.

2.1.1 Contexto histórico da mecânica dos sólidos

Historicamente situa-se o início dos estudos da mecânica na filosofia Grega, embora já se houvessem desenvolvido a escrita e conceitos matemáticos no Egito e Mesopotâmia entre 4000 a.C. e 1650 a.C. Assim, pensadores como Mileto (570 - 500 a.C.), Arquimedes (287 - 212 a.C.) e Euclides (cerca de 300 a.C.) legaram à humanidade vários dos conhecimentos e conceitos dentre a matemática, física e resistência dos materiais. (ARRUDA, 2001; HIBBELER, 2005).

Após a hegemonia helênica, a dominação romana não trouxe muitas contribuições ao estudo de mecânica dos materiais, o que também fora a realidade na Idade Média.

No entanto, o renascimento representou a retomada de todo o conhecimento na área de estudos da mecânica dos materiais. Leonardo da Vinci (1452 - 1519) se destacara no estudo de resistência de fios metálicos e ensaios que contribuíram para estática e mecânica dos sólidos. (ARRUDA, 2001).

Galileu Galilei (1564 – 1642), com sua obra *Duas Novas Ciências*, em 1638, é tido como o precursor da mecânica a partir de uma abordagem científica, iniciando todo o desenvolvimento científico nessa área do conhecimento. (MARTHA, 2010; SORIANO, 2014).

A partir da segunda metade do século XVII, a renascença tem sua expansão com a criação das sociedades científicas da modernidade como a *Royal Society* em Londres e a *Académie des Sciences* de Paris. (ARRUDA, 2001).

Robert Hooke (1635 -1703) tem participação inicial na *Royal Society*, contribuindo com o desenvolvimento do estudo da mecânica dos sólidos. Seu principal trabalho para a ciência fora “*De Potentia Restitutiva*”, o qual enuncia a Lei de Hooke que estabelece a relação da elasticidade dos materiais. (FRANÇA FILHO; LINDENBERG NETO, 2004).

Posteriormente, tem-se a contribuição de Isaac Newton (1642 - 1727) à mecânica, sendo conhecido pelas três leis que regem a dinâmica e o movimento de corpos e a lei da gravitação universal, além de contribuições na estática. (HIBBELER, 2005).

No século XVIII, os irmãos Jacques Bernoulli (1654 – 1705) e Jean Bernoulli (1667 – 1748) trouxeram um grande desenvolvimento para a mecânica dos sólidos, tendo Jacques se dedicado ao eixo de rotação de vigas e Jean no desenvolvimento do Princípio dos Trabalhos Virtuais. (ARRUDA, 2001).

Leonard Euler (1707 – 1783) desenvolveu vários conceitos dentro da mecânica dos sólidos, racionalizando-a e sendo um dos mais importantes nomes para a resistência dos materiais. Destaca-se o cálculo da carga crítica de colunas em 1744 e a decomposição de forças e de movimentos dos corpos. Afirma-se que Daniel Bernoulli (1700 – 1782), filho de Jean, tenha sugerido a Euler princípios que chegariam à formulação da teoria de vigas, denominada atualmente por Euler-Bernoulli. (ARRUDA, 2001; ASSAN, 1996).

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) fora apontado como quem formulou formalmente os Princípios do Trabalho Virtual desenvolvidos por Jean Bernoulli e também racionalizou os conceitos da mecânica dos sólidos de Leonard Euler. (ASSAN, 1996).

Claude-Louis Navier (1785 – 1836) e Cauchy (1789 – 1857) desenvolveram as formulações acerca das equações de campo elástico em 1821 e 1822, respectivamente. (ARRUDA, 2001).

Outros nomes expressivos que contribuíram ao estudo e aperfeiçoamento da mecânica dos sólidos podem ser citados, a saber, Thomas Young (1773 – 1829), Saint - Venant (1707 – 1783), Coulomb (1736 – 1806), Kirchhoff (1824 – 1887), Maxwell (1831 – 1879), Mohr (1835 – 1918), entre outros. (HIBBELER, 2005; MARTHA, 2010).

2.1.2 Contexto histórico do estudo energético de vigas e do MEF

Remonta-se o início do desenvolvimento do MEF ao final do século XVIII, com Gauss (1777 – 1855) propondo a utilização de funções de aproximação para solução de questões matemáticas. (OLIVEIRA, 2000 apud LOTTI, 2006).

Um grande avanço da análise estrutural fora em 1877, com as contribuições de John Willian Strutt (1842 – 1919), conhecido como Lord Rayleigh, e Walter Ritz (1878 – 1909), em 1908, com a qual utilizaram de princípios de energia para obter soluções aproximadas de problemas da mecânica dos sólidos, sendo desenvolvido então o método de Rayleigh-Ritz. Tem-se nesse método a base e o início para o desenvolvimento do MEF. (ASSAN, 1996; CAIXETA; OLIVEIRA, 2018).

A continuação do desenvolvimento do MEF se deu apenas na década de 1940, devido às limitações do processamento de equações algébricas. Foi, então, em 1943 que Richard Courant (1888 – 1972) ampliou os trabalhos de Walter Ritz, utilizando da interpolação por partes, a fim de se obter as soluções numéricas do problema. (MORAES, 2015; SÉLIS, 2016).

Foi, entretanto, em 1960, estabelecida a nomenclatura como a conhecemos (MEF), pelo então professor de Engenharia Estrutural da Universidade da Califórnia, Ray. W. Clough (1920 – 2016). Clough estava trabalhando em um projeto de aeronaves para a Boeing e publicara um artigo em coautoria a outros engenheiros e matemáticos em 1956, onde propõem um método de análise estrutural, definindo-o em 1960, sendo tal referência uma das mais antigas no estudo do MEF. (CAIXETA; OLIVEIRA, 2018; LOTTI, 2006).

Com o desenvolvimento computacional nas décadas subsequentes à 1960, houve um acelerado desenvolvimento do método, surgindo várias publicações e softwares de análise estrutural com base no MEF, dentre os quais alguns já foram citados nesse trabalho.

2.2 Vigas de Euler-Bernoulli

Vigas são elementos estruturais lineares unidimensionais (barras) cujo o comprimento longitudinal é bem maior que as dimensões da seção transversal, de forma que a flexão é a solicitação preponderante, atuando os esforços de momento

fletor, força cortante e normal e momento torsor. (ABNT, 2014; SÉLIS RODRIGUES, 2016).

Segundo o modelo da teoria de Euler-Bernoulli, desprezam-se os efeitos devido ao cisalhamento, considerando as deformações originadas em função dos esforços de momento fletor, sendo válida em termos de vigas com uma grande relação vão/altura. (CASTRO, 2009).

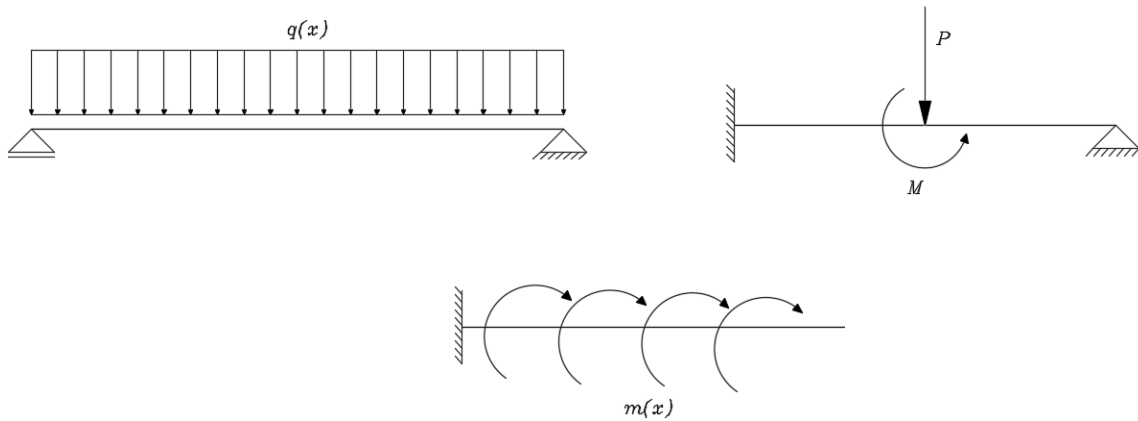
A norma brasileira ABNT NBR 6118:2014 dispõe da divisão da análise de vigas segundo dois agrupamentos em função da relação vão/altura dessas estruturas. Assim, segundo dispõe a norma, consistiriam as vigas-paredes em “[...] vigas altas em que a relação entre o vão e altura l/h é inferior a 2 em vigas biapoiadas e inferior a 3 em vigas contínuas. [...]”. As recomendações, portanto, em relação às estruturas lineares que sejam superiores a estes intervalos – $l/h > 2$ para estruturas isostáticas ou $l/h > 3$ para elementos em continuidade – estariam enquadradas como vigas, de forma que l é o comprimento do vão teórico (ou o dobro do vão teórico em balanços) e h sua altura. (ABNT, 2014).

Assim, diferente ao modelo de Timoshenko mais adequado ao estudo de vigas altas, neste trabalho focou-se à análise de vigas com maiores relações vão/altura de forma que não houvesse prejuízo nos resultados segundo essas considerações.

Estes elementos podem estar dispostos na posição horizontal ou inclinados em relação a essa direção, devendo sempre garantir, ao mínimo, a condição de vigas isostáticas. Podem ser constituídas de diferentes materiais, dentre os quais destacam-se o concreto armado, o aço, a madeira, o alumínio e o ferro fundido. (CAMPOS, 2015).

Em soluções de concreto armado, por exemplo, os pavimentos de edifícios constituem-se de lajes que transmitem os esforços às vigas as quais carregam os pilares e, por fim, estes à fundação, sendo assim massivamente utilizados em soluções estruturais no âmbito da construção civil no Brasil. (CARVALHO et al, 2014; LEAL, 2015).

As condições de vinculação relacionadas aos seus nós podem situar-se entre apoio rotulado móvel ou do primeiro gênero, apoio rotulado fixo ou do segundo gênero e apoio engastado, sendo os outros tipos de vinculação relacionados à combinação entre essas três formas, variando segundo a análise bidimensional ou tridimensional. As situações bidimensionais descritas podem ser observadas na Figura 1. (SORIANO, 2014).

Figura 1 – Tipos de carregamentos e vinculações em vigas.

Fonte – Própria.

As ações externas ativas sobre as vigas podem ser descritas conforme permanentes, acidentais e excepcionais; e os carregamentos descritos segundo forças ou momentos distribuídos e/ou forças ou momentos pontuais. A Figura 1 também demonstra esta situação. (CARVALHO et al, 2014; SORIANO, 2014).

2.2.1 Conceitos fundamentais

Considera-se uma seção de um sólido contido no espaço representado dentre as direções x , y e z . Por hipótese, o corpo será composto de um material contínuo e coeso, apresentando uniformidade de massa e matéria, bem como de suas propriedades físicas. (BEER, 1995; HIBBELER, 2004).

Seja um segmento de reta cujos pontos de início e fim sejam A e B, respectivamente, e que estes estejam contidos na reta n a qual também pertence o segmento $\overline{AB}$.

Define-se por deformação normal ao alongamento ou contração de um segmento de reta contido em uma seção de um sólido, por unidade de comprimento, variando de um valor inicial ΔS até um valor $\Delta S'$ após a deformação. (BEER, 1995).

Assim, a deformação normal poderá ser definida como:

$$\varepsilon = \lim_{B \rightarrow A} \lim_{\text{eixo } n} \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S} \quad (1)$$

Dessa forma, verifica-se que a deformação normal é em obtida quando da aproximação do ponto A ao ponto B na reta n , o que implica em valores cada vez menores para o comprimento ΔS .

No estado geral de deformações representam-se os deslocamentos dos pontos de um corpo rígido deformável através das funções u , v e w , nas direções x , y e z respectivamente. Assim, segundo Bettencourt (2010), para um sólido deformável, os deslocamentos de um ponto nas três direções são função de suas coordenadas no espaço:

$$u = u(x, y, z) \quad (2)$$

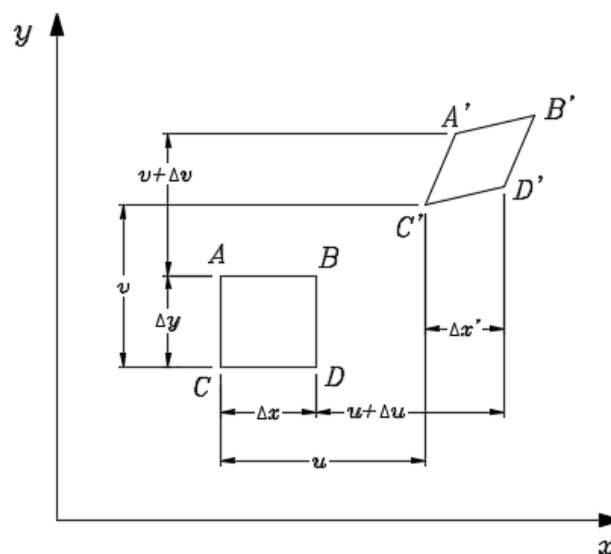
$$v = v(x, y, z) \quad (3)$$

$$w = w(x, y, z) \quad (4)$$

Considera-se um elemento infinitesimal de um sólido deformável cujo volume é dado por $dV = dx \cdot dy \cdot dz$.

Na Figura 2 está representado o plano xy deste elemento, podendo-se identificar os pontos A, B, C e D pertencentes à configuração original da seção e os pontos A', B', C' e D' contidos na seção deformada.

Figura 2 – Deformação no elemento infinitesimal e seus deslocamentos no plano xy .



Fonte - Adaptado de Bettencourt (2010).

Considerando-se os deslocamentos na direção x , chega-se a:

$$\Delta u = u \cdot \Delta x \quad (2)$$

$$\partial u = u \cdot \partial x \quad (3)$$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \quad (4)$$

Da Figura 2 é obtido:

$$\Delta x' = (\Delta x + u + \Delta u) - u = \Delta x + \Delta u \quad (5)$$

De forma equivalente à Equação (1), sendo a reta n representada pelo eixo cartesiano x , chega-se à deformação nessa direção, segundo Hibbeler (2004) e Bitencourt (2010), dada por:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} \quad (6)$$

Substituindo as Equações (5) e (4) na Equação (6) chega-se a:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$

De forma equivalente, também nas direções y e z chega-se a:

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8)$$

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9)$$

Uma vez considerando neste problema o estudo de elementos estruturais lineares (vigas) em flexão pura cuja seção transversal é constante ao longo do eixo x e cujos deslocamentos transversais de todos os pontos são constantes (hipótese apresentada na próxima seção) os deslocamentos dos pontos do corpo deformável poderão ser representados através das funções u e v nas direções x e y , respectivamente, ambas em função da coordenada x do eixo x (BITENCOURT, 2010, BEER, 1995).

Logo o vetor de deslocamentos de um ponto no eixo da viga pode ser dado por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

E novamente as deformações são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{du}{dx} \quad (11)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x)}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$\varepsilon_w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

A lei de Hooke enuncia a proporcionalidade entre tensões e deformações no estado de deformação linear elástica do material. (HIBBELER, 2004; TIMOSHENKO, 1983).

Assim, para um elemento submetido a tensão σ , tem-se:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (14)$$

A constante E na Equação (14) representa a proporcionalidade entre tensão e deformação no regime elástico que é o adotado neste trabalho, conhecida como módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young.

Dessa forma, a tensão axial em uma viga devido às deformações na direção x pode ser expressa por:

$$\sigma_x = E \cdot \frac{du}{dx} = E \cdot \varepsilon_x \quad (15)$$

2.2.2 Hipótese de Euler-Bernoulli

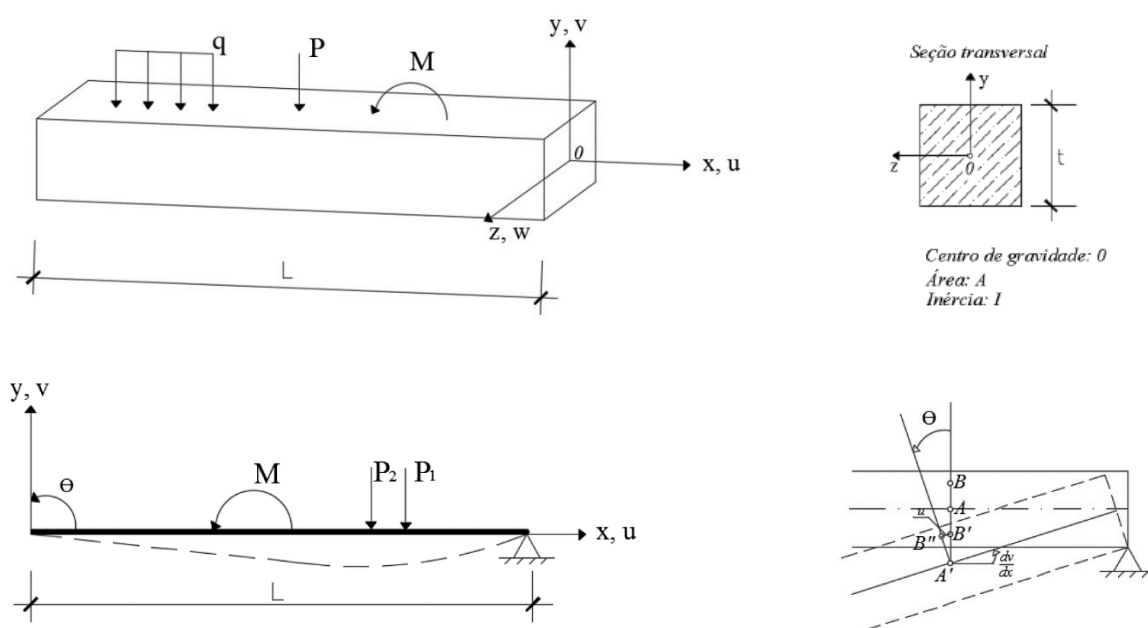
A teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli é representante do modelo de deflexões de vigas em que se descreve o deslocamento transversal ou linha elástica da viga fletida submetida a um certo carregamento, seja distribuído ou localizado (SÉLIS RODRIGUES, 2016).

Nessa hipótese são abordados alguns parâmetros e considerações, a fim de se obter a equação da linha elástica viga. Logo, descrevem-se as suposições, segundo Beer (1995), Hibbeler (2004) e Migotto (2011, p. 25):

- Considera-se a forma prismática da viga cujo eixo central da seção (baricentro) coincide com seu eixo na direção x ;
- As dimensões das seções transversais são pequenas em relação ao seu comprimento;
- Presença de uma linha neutra, não havendo nem tração nem compressão nessa região;
- As seções inicialmente planas permanecem planas após a deflexão de seu eixo central e a curvatura de deflexão é considerada pequena;
- O material constituinte da viga é elástico-linear e homogêneo e não se consideram as deformações por cisalhamento.

A figura 3 contém a representação e indicações de alguns desses parâmetros abordados.

Figura 3 - Modelo teórico de viga de Euler-Bernoulli.



Fonte - Oñate (1992 apud SÉLIS RODRIGUES, 2016).

2.2.3 Considerações sobre o Método dos Deslocamentos

Frequentemente no cálculo estrutural são estabelecidas situações em que as equações básicas do equilíbrio estático das peças não são suficientes para a resolução das incógnitas associadas ao problema, indeterminando os deslocamentos e/ou esforços atuantes na estrutura devido ao carregamento externo. À essas peças estruturais denominam-se hiperestáticas. Logo, processos de resolução a este tipo de estruturas, como o Método dos Deslocamentos (MD), tornam-se importantes. (SORIANO, 2006; SUSSEKIND, 1987).

Além do MD, existem outros processos de cálculo de estruturas hiperestáticas, determinando-se esforços a essas submetidas, os quais se destacam o Método das Forças com base no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e os métodos energéticos de análise estrutural como o Princípio da Energia Potencial Total e os teoremas de Castigliano. Tais métodos são bem descritos em Assan (1996), Sussekink (1980, 1981, 1987) e Timoshenko (1987).

De forma oposta ao Método das Forças, as incógnitas do problema pelo MD são os deslocamentos que as estruturas apresentam segundo as direções de liberdade ao movimento, ao passo que àquele as variáveis a se determinar são as forças nodais associadas a esses respectivos deslocamentos. Assim, em ambos métodos se resolve um sistema de equações de compatibilidade que, a partir da identificação dos valores das incógnitas, torna-se possível obter os deslocamentos e esforços dos elementos estruturais. (MARTHA, 2010; SORIANO, 2006).

Uma estrutura pode apresentar diferentes tipos de liberdade que a possibilite deslocar. O grau de liberdade de um elemento estrutural pode ser quantizado por sua indeterminação cinemática que, por sua vez, consiste nas considerações de deslocabilidade interna e externa do mesmo. A deslocabilidade interna de uma estrutura refere-se às condições de não restrição à rotação ou deformação de seus nós, passível de ser quantizada pelos números de nós rígidos nelas existente, excluindo-se as rótulas e logicamente os engastes. Já a deslocabilidade externa compreende as possibilidades de deslocamentos dos nós e dos elementos estruturais, também sendo possível ser quantizada pelo número de apoios de primeiro gênero a acrescentar na estrutura para que impeça tais liberdades. (SOREANO, 2006; SUSSEKIND, 1987).

Conforme Timoskenko (1984), a aplicação do MD constitui de duas principais situações de cálculo: a determinação de esforços nos nós das barras segundo a atuação dos carregamentos externos, representada pelas ações de engastamento existentes nas barras consideradas biengastadas; e a definição de esforços (rigidezes) devido à deslocamentos ou deformações unitárias em barras biengastadas nos sentidos de liberdade existentes na estrutura. Portanto, o método consiste antes de qualquer consideração, na restrição das liberdades às deformações e deslocamentos existentes na estrutura original através do acréscimo de engastes ou apoios de primeiro gênero.

Tanto as ações de engastamento quanto as rigidezes são determinadas antecipadamente por outros processos como o Método das Forças – também denominado Método da Flexibilidade por Timoshenko (1984) – ou pelo Processo de Mohr, descrito em Sussekind (1980).

O MD baseia-se em situações diferentes de cálculo, correspondentes a efeitos de carregamentos e deformações ou deslocamentos analisados separadamente de forma que da atuação simultânea destas situações, pelo princípio da superposição, configurem o cenário de cálculo original da estrutura. (SUSSEKIND, 1987).

Assim, obtêm-se as equações de compatibilidade de esforços em cada nó, somando-se às ações de angastamento ao produto das rigidezes com os respectivos deslocamentos reais nestes nós, os quais são as incógnitas do problema. A esta soma igualam-se os carregamentos concentrados existentes neste nó na situação original. Com os valores de deslocamentos, são obtidos os diagramas de esforços das situações individuais e da configuração original. (SOREANO, 2006; SUSSEKIND, 1987)

Considere as ações de engastamento $\beta_{i,0}$ atuantes em um nó i de uma barra hipotética existente em uma estrutura sujeita a deslocabilidade interna e externa e p_i as forças atuantes no nó i da estrutura na configuração original. Seja $\beta_{i,j}$ a rigidez existente no nó i devido ao deslocamento ou deformação unitários no nó j e Δ_j o deslocamento ou deformação real do nó i da estrutura/barra.

As situações de cálculo configuram estados: E , original da estrutura; E_0 , devido às ações de engastamento; e E_i , devido às rigidezes, com $i = 1, \dots, n$ e n o grau de indeterminação cinemática da estrutura ou número de situações de cálculo.

O sistema de compatibilidade de esforços nos nós i , em um grau de indeterminação cinemática n , segundo Soriano (2006) e Sussekind (1987), pode ser dado por:

$$\beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \cdot \Delta_j = p_i , \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

Matricialmente o sistema fica:

$$\beta_0 + \beta \cdot \Delta = p \quad (17a)$$

Ou explicitando as matrizes:

$$\begin{bmatrix} \beta_{1,0} \\ \beta_{2,0} \\ \vdots \\ \beta_{n,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \cdots & \beta_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (17b)$$

De posse dos valores dos deslocamentos Δ_k dos n nós obtidos com a resolução do sistema apresentado pelas Equações (17), chega-se aos valores de esforços da situação original E_j , segundo Soriano (2006) e Sussekind (1987), pela relação:

$$E_j = E_{j,0} + \sum_{k=1}^n E_{j,k} \cdot \Delta_k , \quad j = 1, \dots, m \quad (18)$$

onde $E_{j,0}$ e $E_{j,k}$ são os esforços devido às situações de ações de engastamento e devido às rigidezes, respectivamente e j definido segundo o número de tipos de esforços a se analisar: cortante, momento fletor, normal ou até mesmo a reação de apoio.

2.2.4 Princípio da Energia Potencial Total na análise de vigas e o cálculo variacional

Conforme Timoshenko (1984), o conceito em torno da energia potencial é de fundamental importância em mecânica estrutural, visto que se aplica no estudo analítico estrutural e no cálculo aproximado de estruturas, sendo este último realizado nesse trabalho.

Tal princípio é estabelecido conforme a definição de energia potencial de um sistema estrutural, conceituada como o trabalho realizado pelos esforços atuantes no sistema, levando-o de uma situação deformada à posição inicial (sem carregamento). Entende-se aqui os esforços como cargas externas e esforços internos. (ASSAN, 1996).

A energia de deformação é constituída então por duas parcelas: a equivalente às cargas externas e a energia de deformação interna armazenada na estrutura. A energia devido às cargas externas é dada pelo produto de suas respectivas intensidades com seus deslocamentos. Já as energias de deformação interna são dadas pelos métodos convencionais da mecânica dos sólidos.

Do cálculo variacional, expressa-se um funcional como função de variáveis, de funções e de suas derivadas, admitindo soluções que representem a resolução diferencial das equações formados por esses mesmos funcionais. Atenta-se para a distinção do operador diferencial e variacional utilizados. A energia potencial total de um sistema estrutural é considerada como um funcional que é função dos deslocamentos verticais ou axiais bem como da coordenada dimensional no eixo x e suas derivadas. (ASSAN, 2003).

Expressa-se, então, o princípio da mínima energia potencial total, ou de Kirchhoff, através da condição de extremo do funcional, tornando-o estacionário e com o valor mínimo da energia potencial total, tendo assim condição de equilíbrio do sistema. (ASSAN, 1996).

2.2.5 Energia potencial total para viga de Euler-Bernoulli

Conforme abordado, a energia potencial total de um sistema estrutural é a soma das parcelas de energia devido ao trabalho das forças externas com a energia de deformação interna.

Conforme Assan (1996) a energia potencial devido ao trabalho das cargas externas é dada por:

$$\Omega = - \sum_{i=1}^n P_i v_i \quad (19)$$

com P_i os carregamentos genéricos e v_i seus respectivos deslocamentos.

O sinal negativo na expressão anterior representa o trabalho negativo que certo carregamento irá realizar ao voltar da configuração deformada para configuração inicial sem carregamento. Nessa expressão não se tem o valor de $\frac{1}{2}$ devido a força estar atuando em sua totalidade durante todo o percurso de deformação desde o início do carregamento.

Seja U a energia de deformação interna e considerando o estado uniaxial de tensão, conforme Assan (1996) e Hibbeler (2004) tem-se:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \epsilon_x dV \quad (20)$$

Substituindo a Equação (15) na Equação (20) a chega-se a:

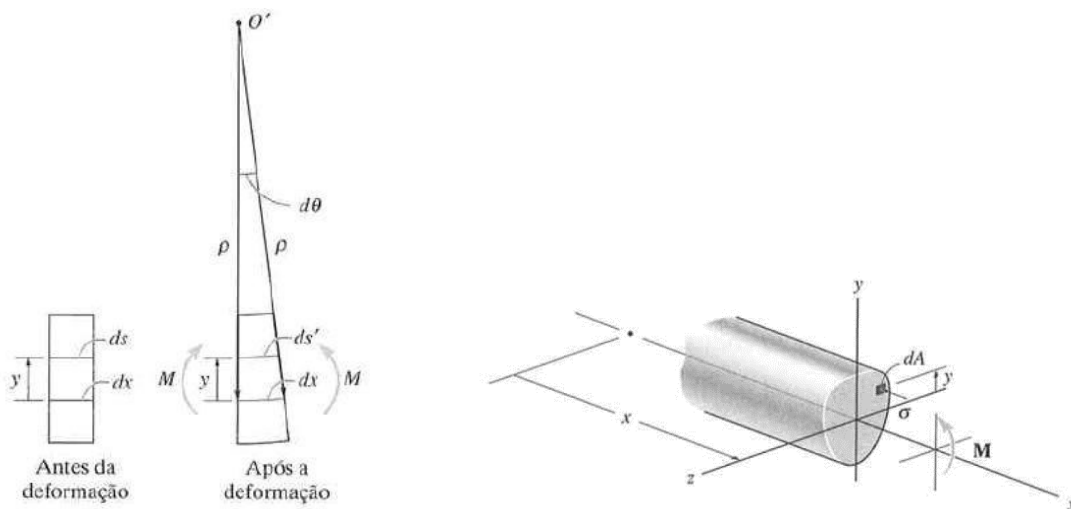
$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x)^2 / E dV \quad (21)$$

Da mecânica dos sólidos, conforme Beer (1995), Hibbeler (2004) e Timoshenko (1984) é estabelecida a relação:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (22a)$$

A Figura 4 ilustra a relação do momento com o raio da curvatura ρ , o módulo de elasticidade E , momento de inércia I e o momento fletor M .

Figura 4 - Representação da seção da viga de Euler-Bernoulli.



Fonte –Hibbeler (2004).

A relação da deflexão v da viga na direção do eixo y com a curvatura expressa anteriormente pode ser visualizada pela literatura definida como em Hibbeler (2004), Beer (1995) ou Timoshenko (1984).

Também, a relação da tensão axial com o momento fletor atuante na seção em flexão e a distância do elemento até da linha neutra é dada por Hibbeler (2004):

$$\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I} \quad (23)$$

Unindo-se as Equações (22a) e (23), chega-se a:

$$\sigma_x = -y \cdot E \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (24)$$

Assim, a energia de deformação interna, a partir da Equação (24), será dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \cdot (y \cdot v'')^2 dV \quad (25)$$

Considerando um elemento de volume $dV = dA \cdot dx$ contido na seção da viga (ver Figura 4) e redefinindo a integral no volume V nas integrais na superfície A da área da seção da viga e no comprimento l do elemento, a energia de deformação será dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot (v'')^2 dx \int_A y^2 dA \quad (26)$$

Sendo a segunda integral da Equação (26) equivalente ao momento de inércia da seção em relação ao eixo z , tem-se para a energia interna de deformação:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot I (v'')^2 dx \quad (27)$$

A energia potencial total é então dada pela soma das Equações (19) e (27):

$$\Pi = U + \Omega = \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot I (v'')^2 dx - \sum_{i=1}^n P_i v_i \quad (28)$$

Se o carregamento na viga for distribuído o trabalho realizado pelas cargas externas será dado por:

$$d\tau_P = dP \cdot v(x) = q(x) \cdot v(x) dx \quad (29)$$

Assim, pelo teorema do trabalho da força resultante e pela conservação da energia:

$$\Delta U = U - U_0 = -\tau_P = -\int_0^l dP \cdot v(x) = -\int_0^l q(x) \cdot v(x) dx \quad (30)$$

Como a energia inicial das cargas externas é nula (estado sem carregamento):

$$U = \Omega = -\tau_P = -\int_0^l q(x) \cdot v(x) dx \quad (31)$$

Para o estado genérico de uma viga carregada uniformemente a energia potencial total será dada, então, por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot I (v'')^2 dx - \int_0^l q(x) \cdot v(x) dx \quad (32)$$

Adotando, porém a coordenada adimensional $\xi = x/l$:

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^l E \cdot I (v'')^2 d\xi - l \int_0^l q(\xi) \cdot v(\xi) d\xi \quad (33a)$$

2.3 Método dos elementos finitos

O início da análise de estruturas apresentou-se como problema, uma vez que as variáveis e equações envolvidas nos casos mais complexos demonstram-se de difícil resolução, passíveis de poucas soluções analíticas ou de exaustiva manipulação, havendo, além disso, situações de geometria específica que necessitem de hipóteses simplificadoras. (MESQUITA, 1998).

A computação e os recursos de programação trouxeram às ciências exatas a possibilidade de aplicação de métodos numéricos de forma mais precisa e satisfatória, com a qual sugeriram novas metodologias de análise estrutural nas diversas áreas do conhecimento. Dentre os mais fundamentados métodos numéricos, destaca-se o

Método dos Elementos Finitos (MEF), originado inicialmente dos métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin e formulado basicamente em meados da década de 50 do século XX. (ASSAN, 2003).

Soriano (2009 apud LEAL, 2015) dispõe sobre sua aplicação na resolução de equações diferenciais com condições de contorno naturais e iniciais, dividindo o contínuo em subdomínios chamados elementos finitos para, então, aproximar uma solução para os campos incógnitos associados ao problema a se analisar. Em resumo tem-se:

Este [MEF] consiste não apenas em transformar o sólido contínuo em uma associação de elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio entre eles, mas admitir funções contínuas que representam, por exemplo, o campo de deslocamentos no domínio de um elemento e, a partir daí, obter o estado de deformações correspondentes que associado às relações constitutivas do material, permitem definir o estado de tensões em todo o elemento. (ASSAN, 2003, p. 15).

Tendo como base a utilização das ações equivalentes nodais e as rigidezes definidas no MD, são obtidas então as matrizes de rigidez local e global da estrutura, como também os vetores de esforços nodais local e global da estrutura. A principal diferença advém da origem dos parâmetros de ações de engastamento e de rigidez que no MD provêm do Método das Forças (embutido o PTV) ou pelo Processo de Mohr de forma analítica; ao passo que pelo MEF da aproximação feita pelo método de Rayleigh-Ritz e pelo Princípio da Energia Potencial Total (MESQUITA, 1998; MONZINI ROTTA, 2014).

Nesse trabalho será utilizado um elemento finito de geometria linear com dois pontos nodais, cada qual apresenta dois graus de liberdade para deformação. Este elemento é descrito por Assan (2003) e foi também representado neste trabalho.

Diante da aplicação do método numérico dos elementos finitos, compatibilizar-se a modelagem matemática em termos das características geométricas e de rigidez dos elementos, indicando suas deformações e esforços para, a partir da discretização, obtenção de uma solução aproximada refinada de todo o contínuo. Portanto, se estabeleceu uma discretização de pontos, definindo elementos que analisados em conjunto constituíram uma malha cuja densidade (refinamento do contínuo) determinará a precisão dos resultados. (SÉLIS, 2016).

2.3.1 Método de Rayleigh-Ritz e princípio da mínima energia potencial total aplicados ao estudo do MEF

Dado o funcional representado pela Equação (28), a derivada parcial da energia potencial total em relação aos deslocamentos v_i será dada, segundo Assan (1996):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = \frac{\partial U}{\partial v_i} - P_i \quad (34)$$

O primeiro teorema de Castigliano enuncia que:

$$\frac{\partial U}{\partial v_i} = P_i \quad (35)$$

Logo, conclui-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = 0 \quad (36)$$

A Equação (36) representa o sistema de equações cujas incógnitas são os deslocamentos.

Agora de forma genérica, ver-se-á a implicação de tal constatação a qualquer funcional.

Seja o seguinte funcional:

$$Y = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (37)$$

Conforme o cálculo variacional é condição para que o funcional se torne estacionário a nulidade da sua primeira variação.

A variação do funcional é dada por:

$$\delta Y = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \quad (38a)$$

Seja a aproximação para a função $y(x)$:

$$y(x) \cong v(x) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \psi_i(x) \quad (39)$$

A função $v(x)$ é denominada admissível à medida que se aproxima de $y(x)$ e ambas representam a solução para a condição de mínimo do funcional, ou seja, a função que resolve o problema de contorno estabelecida pelo estudo.

As funções $\psi_i(x)$ são denominadas funções de forma e satisfazem as condições de contorno $\psi_i(x_1) = \psi_i(x_2) = 0$, sendo x_1 e x_2 os limites de integração do funcional. Os coeficientes b_i são parâmetros de deslocamento. (ASSAN, 2003).

Substituindo a aproximação $v(x)$ no funcional $F(x, y, y')$ e minimizando Y , segundo Assan (2003) e Bathe (2014), chega-se a:

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial b_1} \delta b_1 + \frac{\partial Y}{\partial b_2} \delta b_2 + \dots + \frac{\partial Y}{\partial b_n} \delta b_n = 0 \quad (38b)$$

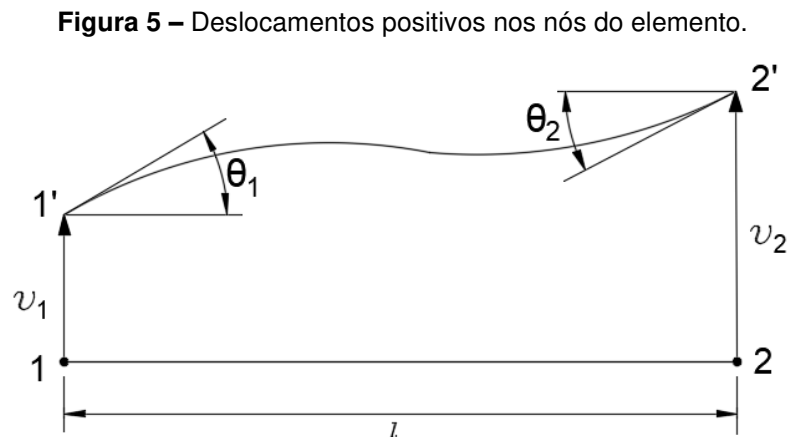
Como a equação se anula qualquer que seja os valores de δb_i , tem-se:

$$\frac{\partial Y}{\partial b_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (40)$$

que é a relação anteriormente estabelecida.

2.3.2 Elemento finito de viga

A aplicação do método fundamenta-se na subdivisão do domínio de integração do funcional que define o problema, estabelecendo uma rede de regiões denominadas elemento finitos. As interseções entre os domínios dessa rede denominam-se nós (ASSAN, 2003; BATHE, 2014).

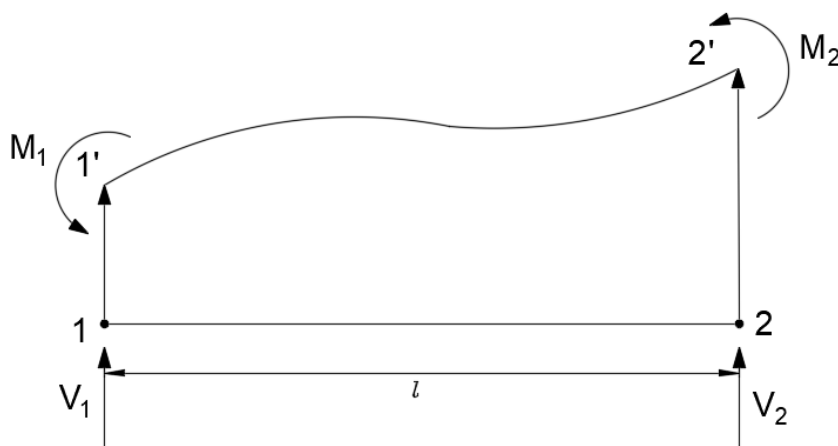


Fonte – Adaptado de Assan (2003).

Na Figura 5 contém a representação do elemento finito utilizado neste trabalho, caracterizado pela condição unidimensional e apresentando dois pontos nodais por elemento, bem, como dois graus de liberdade por nó, totalizando o número de quatro parâmetros nodais, a saber, duas rotações em torno do eixo z e duas translações ao longo do eixo y.

Os nós 1 e 2 deslocam-se de valores v_i e θ_i quanto aos deslocamentos vertical e rotacional respectivamente assumindo a deformada cujos ponto de início e fim da nova configuração do elemento estão representados pelos novos pontos 1' e 2'.

Figura 6 – Esforços positivos nos nós do elemento.



Fonte – Adaptado de Assan (2003).

A deformação do elemento e os deslocamentos de seus nós estão relacionados com os carregamentos presentes, gerando esforços em toda estrutura e inclusive nos pontos nodais. Na Figura 6 estão representados os esforços de momento e cortante nos pontos nodais analisados, relacionados respectivamente às rotações e deslocamentos nesse elemento finito. Atenta-se ao sentido considerado positivo tanto aos deslocamentos quanto esforços nodais.

2.3.3 Método dos elementos finitos no estudo de vigas de Euler-Bernoulli

O desenvolvimento do método inicia-se pelo estudo de apenas um elemento para, então, após demonstrar o caso particular, expandir a análise à toda a estrutura. Nesse sentido, se aplicará a teoria de análise energética de estruturas pelo princípio

da energia potencial total ao estudo do elemento finito, tendo por base o cálculo variacional e o método de Rayleigh-Ritz.

Aplicando-se o método de Rayleigh-Ritz, toma-se uma função admissível $v(x)$ como solução aproximada para os deslocamentos dos nós do elemento, substituindo-a ao funcional energia potencial total.

Conforme Assan (2003), Bathe (2014) e Timoshenko (1984) e outras literaturas acerca do tema, funções polinomiais apresentam resultados satisfatórios em termos de aproximação ao campo de incógnitas do problema, havendo também alternativas para funções trigonométricas, por exemplo, entre outras. Citam-se os trabalhos de Monzini Rotta (2014) e Sélis (2016) em que se utilizaram de polinômios de grau 3 e 5 respectivamente em suas formulações e obtiveram boa aproximação.

Considere o elemento finito conforme a Figura 5 com dois pontos nodais e dois graus de liberdade por nó. Suponha inicialmente o elemento carregado com carga uniformemente distribuída. Sabe-se o comprimento l do elemento, o módulo de elasticidade do material utilizado, e o momento de inércia da seção da viga.

Assim, adotando uma função admissível polinomial de grau 3 tem-se:

$$v(x) = b_1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot x^2 + b_4 \cdot x^3 \quad (41a)$$

E a sua primeira derivada dada por:

$$v'(x) = b_2 + 2 \cdot b_3 \cdot x + 3 \cdot b_4 \cdot x^2 \quad (42)$$

As condições de contorno são dadas pela própria configuração do elemento finito, a saber:

$$\begin{cases} v(0) = v_1 ; v(l) = v_2 \\ v'(0) = \theta_1 ; v'(l) = \theta_2 \end{cases}$$

Impondo as condições de contorno e resolvendo o sistema chega-se a:

$$v(x) = v_1 + \theta_1 \cdot x + \left[\frac{3(v_2 - v_1)}{l^2} - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{l} \right] x^2 + \left[\frac{2(v_1 - v_2)}{l^3} - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{l^2} \right] x^3 \quad (41b)$$

Rearranjando em termos dos parâmetros nodais:

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \theta_1 + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) v_2 + \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) \theta_2 \quad (41c)$$

Substituindo a coordenada x pela variável adimensional $\xi = x/l$:

$$v(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_1 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l\theta_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_2 + (\xi^3 - \xi^2)l\theta_2 \quad (43a)$$

Ou simplificadamente:

$$v(\xi) = \psi_1 \cdot v_1 + \psi_2 \cdot \theta_1 + \psi_3 \cdot v_2 + \psi_4 \cdot \theta_2 \quad (43b)$$

Matricialmente pode se escrever:

$$v(\xi) = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{v} \quad (43c)$$

sendo $\mathbf{\Psi}$ a matriz das funções de forma e $\mathbf{v}$ o vetor dos parâmetros nodais.

A segunda derivada de $v(\xi)$ é dada por:

$$v''(\xi) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \quad (44a)$$

com $\mathbf{B}$ a matriz das derivadas segundas das funções de forma.

Seja o funcional estabelecido pela Equação (33a):

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^l E \cdot I (v'')^2 d\xi - l \int_0^l q(\xi) \cdot v(\xi) d\xi \quad (33a)$$

Nele substituindo as Equações (43a) e (44a), tem-se:

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^1 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})^T \cdot E \cdot I \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) d\xi - l \int_0^1 q(\xi) \cdot \mathbf{\Psi} d\xi \cdot \mathbf{v} \quad (33b)$$

Minimizando o funcional, segundo Assan (2003), sua variação será dada por:¹

$$\delta\Pi = \delta\mathbf{v}^T \left(\frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{B}^T \cdot (E \cdot I) \cdot \mathbf{B} d\xi \right) \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}^T \left(l \int_0^1 \mathbf{\Psi}^T \cdot q(\xi) d\xi \right) = 0 \quad (45)$$

¹ Se $Y = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$ e $\mathbf{D}$ é simétrica então $\delta Y = 2 \cdot \delta\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$, com Y e δY escalares. Ver Assan (2003, p.65).

Sendo $\delta \mathbf{v}^T$ de valor variável (arbitrário), chega-se a:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{l^3} \int_0^l \mathbf{B}^T \cdot (E \cdot I) \cdot \mathbf{B} d\xi \right)}_{\mathbf{k}} \mathbf{v} - \underbrace{\left(l \int_0^l \mathbf{\Psi}^T \cdot q(\xi) d\xi \right)}_{\mathbf{r}} = 0 \quad (46a)$$

Denotando a primeira integral entre parênteses por $\mathbf{k}$ e a segunda por $\mathbf{r}$, chega-se a:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \quad (46b)$$

A matriz $\mathbf{k}$ é denominada matriz de rigidez do elemento e representa as características do material e da seção do elemento de viga analisado; $\mathbf{r}$ o vetor de cargas nodais equivalentes, representando o carregamento existente na extremidade do elemento finito estudado (equivalente nodal ao carregamento distribuído).

A formulação matricial existente nas Equações (46) representa um sistema linear cuja solução fornece os valores dos parâmetros nodais do problema que são os deslocamentos nos nós do elemento em questão.

A resolução das integrais apresentadas pela Equação (46a) conduz ao sistema do tipo:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} \quad (46c)$$

A representação numérica desse sistema considerando-se um carregamento uniformemente distribuído pode ser dada por:

$$\frac{E \cdot I}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = ql \begin{bmatrix} 1/2 \\ l/12 \\ l/12 \\ -l/12 \end{bmatrix} \quad (47)$$

em que os parâmetros nodais v_1 , θ_1 , v_2 e θ_2 são as incógnitas do sistema de equações e os respectivos deslocamentos nodais do elemento em análise.

2.3.4 Vetor de cargas nodais equivalentes para diferentes carregamentos

Até aqui considerou-se o elemento carregado por uma distribuição uniforme linear conforme se dispõem nas Equações (31) e (47). O vetor de cargas nodais equivalentes para esse caso é dado pela segunda integral da equação (46a).

Assim, para uma distribuição uniforme linear sobre o elemento de comprimento l , tem-se:

$$\mathbf{r} = l \int_0^1 \mathbf{\Psi}^T \cdot q(\xi) d\xi \quad (48)$$

Seja agora a distribuição trapezoidal sobre o elemento conforme Figura 7. A partir dessa configuração de carregamento, tem-se a seguinte relação:

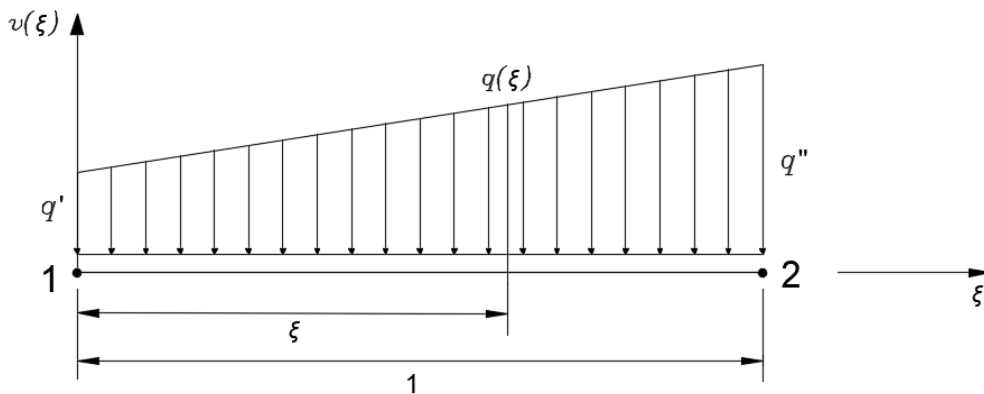
$$\frac{q'' - q'}{1} = \frac{q - q'}{\xi} \quad \text{ou} \quad q = q'' \cdot \xi + q' \cdot (1 - \xi) \quad (49)$$

Representando matricialmente:

$$q(\xi) = \begin{bmatrix} (1 - \xi) & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad q(\xi) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}^i \quad (50)$$

onde $\mathbf{N}$ e $\mathbf{q}^i$ são matrizes.

Figura 7 – Carregamento distribuído trapezoidal sobre o elemento.



Fonte – Própria.

Substituindo-se a Equação (50) na Equação (48) chega-se a:

$$\mathbf{r} = l \int_0^1 \mathbf{\Psi}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}^i d\xi \quad (51a)$$

Resolvendo a integral chega-se ao seguinte vetor de cargas nodais equivalentes:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 7q'l/20 + 3q''l/20 \\ q'l^2/20 + q''l^2/30 \\ 3q'l/20 + 7q''l/20 \\ -q'l^2/30 - q''l^2/20 \end{bmatrix} \quad (51b)$$

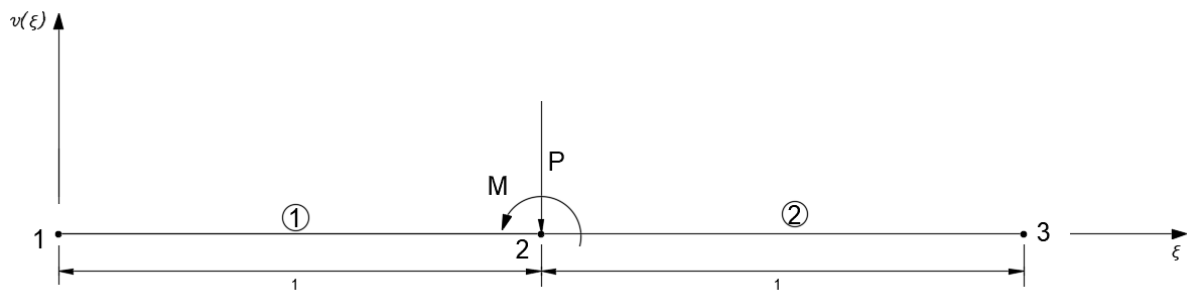
Suponha agora um carregamento concentrado presente nos nós dos elementos. A Figura 8 dispõe do carregamento de uma força e momento pontuais atuantes no nó 2 (interseção dos elementos) pertencente aos dois elementos finitos que compõem a viga.

Se junto à carga P atuar também um momento M no nó do elemento e havendo neste ponto uma rotação θ e um deslocamento v , o trabalho realizado por esse carregamento nessa deformação, conforme Hibbeler (2004), é dado por:

$$\tau_M = M \cdot \text{tg} \theta \cong M \cdot \theta \quad e \quad \tau_P = P v \quad (52)$$

A Equação (52) em termos de momento é válida para ângulos pequenos.

Figura 8 – Carregamentos concentrados sobre os elementos.



Fonte – Própria.

A energia potencial total em um elemento finito pode ser escrita como se dispõe na Equação (28). Assim, para uma carga pontual P e um momento M , segundo as

respectivas deformações de rotação $v'(1) = \theta(1)$ e deslocamento $v(1)$, conforme a Figura 8, a energia potencial total para o elemento 1 (força e o momento localizam-se na posição $\xi = 1$ para esse elemento) é dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^1 E.I (v'')^2 d\xi - P.v(1) - M.\theta(1) \quad (53a)$$

Substituindo $\xi = 1$ (ponto aplicação da carga P considerando a análise do elemento 1) na função admissível $v(\xi)$ dada pela Equação (18), chega-se a:

$$v(1) = v_2 \quad (54)$$

A primeira derivada de $v(\xi)$ em relação a ξ é dada por:

$$v'(\xi) = (-6\xi + 6\xi^2)v_1 + (1 - 4\xi + 3\xi^2)l\theta_1 + (6\xi - 6\xi^2)v_2 + (3\xi^2 - 2\xi)l\theta_2 \quad (43a)$$

Porém, a rotação θ é definida em:

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (55a)$$

E pela regra da cadeia, com $\xi = x/l$, chega-se a:

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l} \frac{dv}{d\xi} \quad (55b)$$

Logo, a rotação da linha elástica em função de ξ será:

$$\theta(\xi) = \frac{1}{l} [(-6\xi + 6\xi^2)v_1 + (1 - 4\xi + 3\xi^2)l\theta_1 + (6\xi - 6\xi^2)v_2 + (3\xi^2 - 2\xi)l\theta_2] \quad (55c)$$

Realizando a substituição $\xi = 1$ em $\theta(\xi)$, tem-se:

$$\theta(1) = \theta_2 \quad (56)$$

Portanto:

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^1 E \cdot I (v'')^2 d\xi - P \cdot v_2 - M \cdot \theta_2 \quad (53b)$$

Matricialmente pode-se escrever:

$$P \cdot v(1) + M \cdot \theta(1) = P \cdot v_2 + M \cdot \theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{v} \quad (57)$$

E a energia potencial total fica:

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^1 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})^T \cdot E \cdot I (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) d\xi - \mathbf{I} \cdot \mathbf{v} \quad (53c)$$

A minimização da energia potencial total será dada por:

$$\delta \Pi = \delta \mathbf{v}^T \left(\frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{B}^T \cdot (E \cdot I) \cdot \mathbf{B} d\xi \right) \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}^T \mathbf{I}^T = 0 \quad (58a)$$

Assim, arbitrando-se ao valor de $\delta \mathbf{v}^T$, tem-se:

$$\frac{1}{l^3} \int_0^1 \mathbf{B}^T \cdot (E \cdot I) \cdot \mathbf{B} d\xi \mathbf{v} = \mathbf{I}^T \quad (58b)$$

Ou, de forma simplificada:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \quad (58c)$$

Para esse carregamento, então, o vetor de esforços nodais equivalentes para o elemento 1 será:

$$\mathbf{r} = \mathbf{I}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ M \end{bmatrix} \quad (59)$$

Suponha, porém, a existência tanto do carregamento distribuído quanto concentrado no elemento. Conforme explicitado nas relações anteriores, pode-se

notar que o vetor de cargas nodais para o carregamento localizado tem sua construção de forma semelhante ao carregamento distribuído, conforme se observa nas formulações em (47), (51b) e (59).

Assim, para a situação hipotética de carregamento distribuído trapezoidal como apresentado na Figura 7 em conjunto a um momento e força aplicada no segundo nó do elemento 1 conforme Figura 8 e pelo princípio da superposição, pode-se escrever o vetor de esforços nodais equivalentes dessa situação como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{I}^T + l \int_0^1 \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}^i d\xi \quad (60a)$$

Ou explicitando as matrizes:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7q'l/20 + 3q''l/20 \\ q'l^2/20 + q''l^2/30 \\ 3q'l/20 + 7q''l/20 \\ -q'l^2/30 - q''l^2/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7q'l/20 + 3q''l/20 \\ q'l^2/20 + q''l^2/30 \\ 3q'l/20 + 7q''l/20 + P \\ -q'l^2/30 - q''l^2/20 + M \end{bmatrix} \quad (60b)$$

Por fim, as Equações (60) resumem o processo de consideração das cargas sobre o elemento. Nesse sentido, para um carregamento concentrado, verifica-se somar seus valores aos demais carregamentos diretamente no vetor de cargas nodais do elemento na posição referente ao nó em que esteja aplicado, chegando-se às cargas que de fato atuam em cada nó do elemento.

Para tanto, o posicionamento de tais esforços no vetor de cargas nodais refere-se ao tipo de carga pontual aplicada (momento ou força) relacionando-a à respectiva deformação (translação ou rotação). A exemplo, a força e o momento aplicados no elemento 1 da viga da Figura 8 serão colocados na posição 3 e 4 do vetor de cargas nodais do elemento devido estarem no segundo nó desse elemento, relacionados aos deslocamentos de translação e rotação desse nó (v_2 e θ_2).

2.3.5 Esforços nodais do elemento

Viu-se que a solução do sistema local apresentada pela condição de mínima energia potencial total resulta nos valores dos parâmetros nodais do problema conforme se dispõe nas Equações (46a) e (46b).

Porém, a determinação dos esforços nodais no elemento devido ao carregamento externo também é foco do trabalho e pode ser obtido através dos valores dos deslocamentos nos nós do elemento (parâmetros nodais). (BITENCOURT, 2010).

Para tanto, seja a energia potencial de deformação do elemento dada por:

$$U = \frac{1}{2l^3} \int_0^l E.I (v'')^2 d\xi \quad (61)$$

com E o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da seção em relação ao eixo z .

A segunda derivada de $v(\xi)$ em relação a ξ é dada por:

$$v'' = (-6 + 12\xi)v_1 + (4 + 6\xi)l\theta_1 + (6 - 12\xi)v_2 + (6\xi - 2)l\theta_2 \quad (44b)$$

Pelo primeiro teorema de Castigliano, conforme já visto neste trabalho, escreve-se os valores dos esforços no elemento como função da derivada primeira da energia potencial de deformação interna em relação aos deslocamentos nodais. Tais deslocamentos são representantes substitutos dos respectivos esforços que atuam nesses nós quando da situação de vinculação real ou solidariedade com a continuidade da estrutura.

Assim, dada a relação de equivalência conceitual mecânica entre os esforços e deslocamentos, pode-se determinar as solicitações internas no elemento a partir dos parâmetros nodais obtidos com o equacionamento do método. (ASSAN, 2003).

Dessa forma, o esforço no nó i devido à deformação v_i neste nó será:

$$\frac{\partial U}{\partial v_i} = \frac{E.I}{l^3} \int_0^1 v'' \cdot \frac{dv''}{dv_i} d\xi = E_i \quad (62)$$

com v_i os parâmetros nodais v_1 , θ_1 , v_2 e θ_2 (deslocamentos) no elemento finito e E_i os esforços existentes nos nós no elemento finito V_1 , M_1 , V_2 e M_2 .

Substituindo a segunda derivada da função admissível $v''(\xi)$ dada pela Equação (44b) na Equação (62), chega-se ao sistema, que representado matricialmente, é dado pela Equação (63a).

$$\frac{E.I}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (63a)$$

Nesse sentido, pela Expressão (63a), observa-se que cada coluna da matriz de rigidez representa o próprio esforço nodal do elemento caso imponha o valor unitário ao deslocamento na direção do grau de liberdade v_i cuja posição no vetor de parâmetros nodais tenha número igual ao da coluna que representa tal esforço, mantendo-se os demais impedidos. Em tese, obtêm-se o esforço de determinado nó com a imposição de um deslocamento unitário nesse nó, mantendo-se as restrições nos demais.

Havendo liberdade em todos os nós do elemento, os esforços corresponderiam aos respectivos valores de carregamento do elemento presentes no vetor de cargas nodais equivalentes.

Os resultados dados pelo sistema linear apresentado pela Equação (46b) fornecem os valores dos parâmetros nodais do elemento, representados por v_1 , θ_1 , v_2 e θ_2 . Liberando-se a apenas um grau de liberdade no elemento finito e considerando os valores obtidos dos parâmetros nodais v_i da Equação (46b) e restringindo aos demais deslocamentos (anulando-os), chega-se ao produto (vetor de cargas nodais) $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e$, representante do esforço que surgem em todos os nós do elemento devido à respectiva deformação ocorrida no nó liberado. (ASSAN, 2003).

Um exemplo do vetor de cargas nodais $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e$ para a liberdade do nó 1 em relação à translação vertical v_1 já conhecida, restringindo-se os demais, pode ser representado por:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e = \frac{E.I}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (63b)$$

Como já visto, o vetor de cargas nodais equivalentes $\mathbf{r}$, representado pela Equação (51b), indica o próprio carregamento a que se submete os nós do elemento finito. Pelo princípio da superposição e considerando o método da rigidez, os esforços finais nos nós do elemento poderá ser dado pela subtração do vetor de cargas nodais

$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e$ ao vetor de cargas nodais equivalentes, desconsiderando-se os carregamentos concentrados nos nós dos elementos. (ASSAN, 2003).

A necessidade de não considerar os valores de carregamento concentrado nos nós dos elementos no cálculo de esforços deve-se àqueles representarem a descontinuidade nos valores de esforços entre a transição de um elemento e seu adjacente, sendo já contemplada nos valores de esforços obtidos com o produto entre as rigidezes dos elementos e seus respectivos deslocamentos. Logo, tem-se valores limites de esforços antes e após a descontinuidade que em diferença absoluta torna-se numericamente iguais às cargas locais.

Assim, os esforços nodais, para um certo carregamento, podem ser obtidos com:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e - \mathbf{r} + \mathbf{I}^T \quad (64a)$$

O vetor $\mathbf{I}^T$ tem o mesmo significado quando utilizado na Equação (59), sendo representante dos carregamentos concentrados nos nós do elemento.

Assim, de forma geral pode-se definir o vetor de cargas nodais equivalentes parcial $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{I}^T$ de forma que:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e - \mathbf{r}^* \quad (64b)$$

2.3.6 Equações globais para a rede de elemento finitos

Foi feito agora o estudo não só a um elemento finito, mas para toda rede de elementos finitos que comporão o sólido deformável. Como o objetivo do trabalho é o estudo de vigas como elementos estruturais e a ideia do método é a discretização do contínuo, foram abordadas as equações globais de resolução do problema, perfazendo o domínio total de integração do funcional.

Dividindo-se o corpo em subdomínios, apresentam-se soluções aproximadas segundo as condições de contorno nos limites do elemento finito, estabelecendo funções admissíveis segundo o domínio de cada elemento, inclusive um sistema individual de coordenadas. Assim, uma subdivisão representaria uma parcela da rigidez de todo o corpo. (BITENCOURT, 2010; ASSAN, 2003).

Seja o elemento i cujo funcional Π_i é montado em seu próprio domínio tal que, para todo o corpo é estabelecido, segundo o intervalo de integração:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (65a)$$

A função admissível para cada elemento pode ser expressa conforme:

$$v = \sum_{k=1}^m b_k \cdot \psi_k \quad (39)$$

Logo, colocando o funcional Π em termos de b_k , tem-se:

$$\Pi(b_k) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(b_k) \quad (65b)$$

Da minimização do funcional:

$$\delta \Pi(b_k) = \sum_{i=1}^n \delta \Pi_i(b_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Pi_i(b_k)}{\partial b_k} = 0 \quad (66)$$

Assim, a solução desse sistema de equações fornece os valores dos parâmetros nodais b_i que podem ser os deslocamentos caso seja utilizado o modelo da rigidez do método dos elementos finitos. (ASSAN, 2003). Nesse trabalho será utilizado tal modelo conforme se explicita no desenvolvimento para um elemento finito, especialmente no vetor de parâmetros nodais representados pelos deslocamentos v_1 , θ_1 , v_2 e θ_2 .

Seja inicialmente a divisão de uma viga em dois elementos finitos conforme a figura 8. Cada elemento finito terá sistema próprio de coordenadas e características específicas de rigidez e seção $E.I$ e comprimento próprio l_i .

Será feita uma análise genérica da viga de forma que o interesse principal será o estudo de interação entre as matrizes de rigidez individuais dos elementos finitos, constituindo uma matriz global de rigidez e um sistema global de equações. Assim, independente dos carregamentos e vinculações das extremidades das vigas, representam-se as matrizes de rigidez e os vetores de cargas equivalentes dos elementos finitos conforme as formulações das Equações (46).

Logo, para um elemento finito, tem-se:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \quad (46b)$$

Ou explicitando as matrizes:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} \quad (46c)$$

As parcelas correspondentes às energias potenciais de deformação dos elementos 1 e 2 serão U_1 e U_2 e relativas às energias potenciais das cargas serão Ω_1 e Ω_2 .

Segundo a formulação para um elemento finito, a variação da energia potencial total será dada por:

$$\delta\Pi = \delta\mathbf{v}^T \left(\frac{1}{l^3} \int_0^l \mathbf{B}^T \cdot (E \cdot I) \cdot \mathbf{B} d\xi \right) \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}^T \left(l \int_0^1 \boldsymbol{\Psi}^T \cdot q(\xi) d\xi \right) \quad (67a)$$

A primeira parcela da soma anterior representa a variação da energia potencial de deformação do elemento δU e a segunda parcela a variação da energia potencial de cargas do elemento $\delta\Omega$. Conforme abordado anteriormente tais integrais representam respectivamente as matrizes de rigidez do elemento $\mathbf{k}$ e o vetor de cargas nodais equivalentes $\mathbf{r}$ explicitados na Equação (46a).

Logo, a primeira variação da energia potencial total para um elemento poderá ser rescrita como:

$$\delta\Pi = \delta\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \delta\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{r} = \delta U - \delta\Omega \quad (67b)$$

Portanto, as variações das energias de deformação para cada elemento serão expressas por:

$$\delta U_1 = \delta\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \quad (68a)$$

$$\delta U_2 = \delta\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \quad (69a)$$

Ou matricialmente:

$$\delta U_1 = [\delta v_1 \quad \delta \theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta \theta_2] \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (68b)$$

$$\delta U_2 = [\delta v_2 \quad \delta \theta_2 \quad \delta v_3 \quad \delta \theta_3] \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (69b)$$

As variações energias potenciais de carga para cada elemento serão:

$$\delta \Omega_1 = -\delta \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{r}_1 \quad (70a)$$

$$\delta \Omega_2 = -\delta \mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{r}_2 \quad (71a)$$

Em representação matricial:

$$\delta \Omega_1 = -[\delta v_1 \quad \delta \theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta \theta_2] \begin{bmatrix} r_1^1 \\ r_2^1 \\ r_3^1 \\ r_4^1 \end{bmatrix} \quad (70b)$$

$$\delta \Omega_2 = -[\delta v_2 \quad \delta \theta_2 \quad \delta v_3 \quad \delta \theta_3] \begin{bmatrix} r_1^2 \\ r_2^2 \\ r_3^2 \\ r_4^2 \end{bmatrix} \quad (71b)$$

Os índices acima dos elementos das matrizes indicam à que elementos finitos se referem.

Tem-se agora seis incógnitas $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2, v_3$ e θ_3 , representantes do vetor de parâmetros nodais. Nota-se que o número de deslocamentos é equivalente ao dobro do número de pontos nodais presentes na viga analisada.

Devido à nova compatibilização do problema, define-se o novo vetor de parâmetros nodais $\bar{\mathbf{v}}$ e sua variação $\delta\bar{\mathbf{v}}$ dados por:

$$\bar{\mathbf{v}} = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3]^T \quad (72)$$

$$\delta\bar{\mathbf{v}} = [\delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \quad \delta v_3 \quad \delta\theta_3]^T \quad (73)$$

Agora, expandindo-se as expressões das variações de energia potencial de deformação e de cargas para cada elemento finito, tem-se:

$$\delta U_1 = [\delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \quad \delta v_3 \quad \delta\theta_3] \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (68c)$$

$$\delta U_2 = [\delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \quad \delta v_3 \quad \delta\theta_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ 0 & 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (69c)$$

$$\delta\Omega_1 = -[\delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \quad \delta v_3 \quad \delta\theta_3] \begin{bmatrix} r_1^1 \\ r_2^1 \\ r_3^1 \\ r_4^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70c)$$

$$\delta\Omega_1 = -[\delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \quad \delta v_3 \quad \delta\theta_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1^2 \\ r_2^2 \\ r_3^2 \\ r_4^2 \end{bmatrix} \quad (71c)$$

Pela Expressão (65a), a energia potencial total para a viga será dada por:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = U_1 + \Omega_1 + U_2 + \Omega_2 = U_1 + U_2 + \Omega_1 + \Omega_2 \quad (65c)$$

Conforme a minimização do funcional que expressa a energia potencial total da Equação (65c) ou pela Equação (66), considerando os conceitos do cálculo variacional segundo Assan (2003), chega-se a:

$$\delta\Pi = \delta\Pi_1 + \delta\Pi_2 = \delta U_1 + \delta U_2 + \delta\Omega_1 + \delta\Omega_2 \quad (74)$$

Logo, pela Equação (74), tem-se:

$$\delta\Pi = \delta\bar{\mathbf{v}}^T \cdot \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{11}^2 + k_{33}^1 & k_{12}^2 + k_{34}^1 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{21}^2 + k_{43}^1 & k_{22}^2 + k_{44}^1 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} - \delta\bar{\mathbf{v}}^T \cdot \begin{bmatrix} r_1^1 \\ r_2^1 \\ r_1^2 + r_3^1 \\ r_2^2 + r_4^1 \\ r_3^2 \\ r_4^2 \end{bmatrix} \quad (67c)$$

Denotando a nova matriz de rigidez global por $\bar{\mathbf{k}}$ e ao vetor de cargas nodais equivalentes $\bar{\mathbf{r}}$ e minimizando o funcional, chega-se a:

$$\delta\Pi = \delta\bar{\mathbf{v}}^T \cdot \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \delta\bar{\mathbf{v}}^T \cdot \bar{\mathbf{r}} = 0 \quad (67d)$$

Sendo arbitrário os valores para a variação do vetor de parâmetros nodais, tem-se:

$$\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{r}} \quad (75)$$

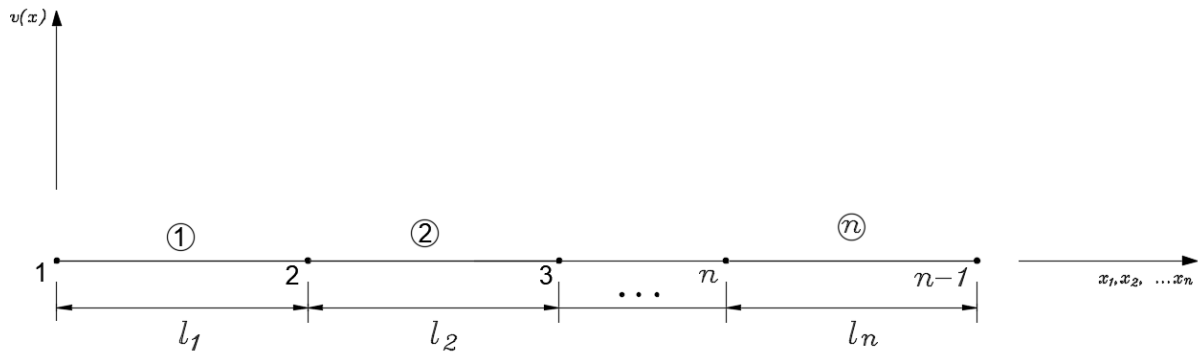
A matriz agora $\bar{\mathbf{k}}$ é a matriz de rigidez global da estrutura e apresenta características de rigidez e seção de ambos elementos da viga. O vetor de cargas nodais equivalentes global $\bar{\mathbf{r}}$ representa os carregamentos em todos os nós da viga, não apenas de cada elemento.

Considere agora uma viga com n elementos conforme está indicado na Figura 9. De maneira análoga ao que foi desenvolvido para uma viga com dois elementos finitos, chegando-se à matriz global de rigidez de ordem $2(n+1)$, equivalente ao dobro do número de nós na viga. Nessa situação, tem-se que os vetores dos parâmetros nodais e de cargas nodais equivalentes terão $2(n+1)$ elementos.

O elemento finito utilizado nesta etapa do trabalho apresenta uma translação v e uma rotação θ por nó e dois nós por elemento. Assim, apresenta 4 graus de liberdade e uma matriz de rigidez de ordem 4, como representado pelas parcelas $\mathbf{k}_i$ da

matriz global de rigidez $\mathbf{K}$. O sistema global de equações está representado pela Equação (79), fornecendo agora os valores dos deslocamentos dos $(n + 1)$ nós da viga.

Figura 9 – Viga hipotética com n elementos finitos.



Fonte – Própria.

A matriz de rigidez global da viga poderá ser escrita como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{k}_1} & & & & \\ & \boxed{\mathbf{k}_2} & & & \\ & & \boxed{\mathbf{k}_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{\mathbf{k}_{n-1}} & \\ & & & & & \boxed{\mathbf{k}_n} \end{bmatrix} \quad (76)$$

O vetor de parâmetros nodais global poderá ser dado por:

$$\mathbf{V} = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2 \ v_3 \ \theta_3 \ \cdots \ v_{n-1} \ \theta_{n-1} \ v_n \ \theta_n \ v_{n+1} \ \theta_{n+1}]^T \quad (77)$$

E o vetor de cargas nodais equivalente global será:

$$\mathbf{R} = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5 \ r_6 \ \cdots \ r_{n-4} \ r_{n-3} \ r_{n-2} \ r_{n-1} \ r_n \ r_{n+1}]^T \quad (78)$$

Finalmente, tem-se o sistema global de equações, para a viga com n elementos, dado por:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R} \quad (79)$$

Nota-se que a matriz de rigidez global definida pela Equação (76) tem um formato em banda formada pelas matrizes de rigidez locais sobrepostas a cada duas linhas e dois elementos e cujos elementos abaixo e acima dessas diagonais apresentam-se nulos, formando uma matriz triangular superior e inferior. De fato, pela condição de simetria do produto $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}$ presente na formulação das matrizes de rigidez e segundo o teorema de Betti, demonstra-se a simetria da matriz de rigidez global. (ASSAN, 2003).

Voltando-se à formulação de cálculo dos esforços para um elemento finito, tem-se a determinação dos esforços cortantes e momentos a cada nó do elemento a partir da Equação (64b), estabelecidos os valores dos parâmetros nodais segundo as condições de contorno na Equação (63a).

Realizando a análise agora para a formulação global, calcula-se os valores dos deslocamentos (parâmetros nodais) segundo as condições de contorno da viga e substitui-os ao novo vetor de cargas nodais global $(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V})_g$ que representam os esforços originados devido aos deslocamentos não restringidos dos apoios e considerando a matriz de rigidez global sem as condições de contorno.

Pode-se, então, chegar aos valores de todas as forças nodais de toda a estrutura (nos apoios representam as reações de apoio e são nulas onde a estrutura é contínua), subtraindo-se do vetor de cargas nodais global o vetor de esforços nodais equivalentes global.

Assim, para a escala global o vetor de forças nodais pode ser representado por:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{V})_g - \mathbf{R} \quad (80)$$

No caso do cálculo de esforços no elemento finito isolado visto na seção anterior, também são utilizados valores dos parâmetros nodais obtidos com a solução do sistema global de equações, uma vez que os deslocamentos das extremidades dos elementos devem garantir a continuidade da estrutura em nós compartilhados por dois elementos. Para isso, conforme já visto, subtrai-se do vetor local de cargas nodais

$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e$ o vetor local de cargas nodais equivalentes parcial $\mathbf{r}^*$, obtendo-se os esforços nas extremidades do elemento.

3 METODOLOGIA

A partir do desenvolvimento matemático deste trabalho com base no MEF foi realizada uma análise elástica linear de vigas de Euler-Bernoulli.

Para tanto, descreveu-se o roteiro computacional, indicando suas respectivas sub-rotinas e processos de cálculo. Além disso, foram utilizados processos analíticos e clássicos da resistência dos materiais e do MEF para análise estrutural como via de complementação e comparação com a formulação do trabalho.

3.1 Aspectos Computacionais

O estudo continuou com a implementação em lógica computacional ao desenvolvimento teórico matemático deste trabalho, utilizando-se da linguagem procedural FORTRAN (95). A estrutura da rotina foi definida em três módulos: entrada de dados, processamento das informações e consequente saída de resultados.

Os dados de entrada foram constituídos basicamente das características dos materiais, da geometria da estrutura, do carregamento externo e suas condições de contorno. A interação entre o usuário e o software nesta etapa é feita por meio do formato de arquivo de texto (".txt") elaborado antecipadamente pelo usuário segundo um modelo estabelecido de leitura de dados o qual o programa é capaz de ler. Este modelo pode ser observado nos Anexo C.

Já o processamento de dados envolve questões relativas à montagem e ao cálculo das matrizes e vetores utilizando-se do MEF de forma a resolver o sistema global constituído através do método de eliminação de Gauss-Jordan, assim como também incluir nas matrizes as definições acerca das condições de contorno.

Por fim, os resultados de esforços internos e deslocamentos nodais da viga segundo seu carregamento e vinculação foram escritos no arquivo de saída em formato (".txt") construído pelo próprio programa, também indicado no Anexo C.

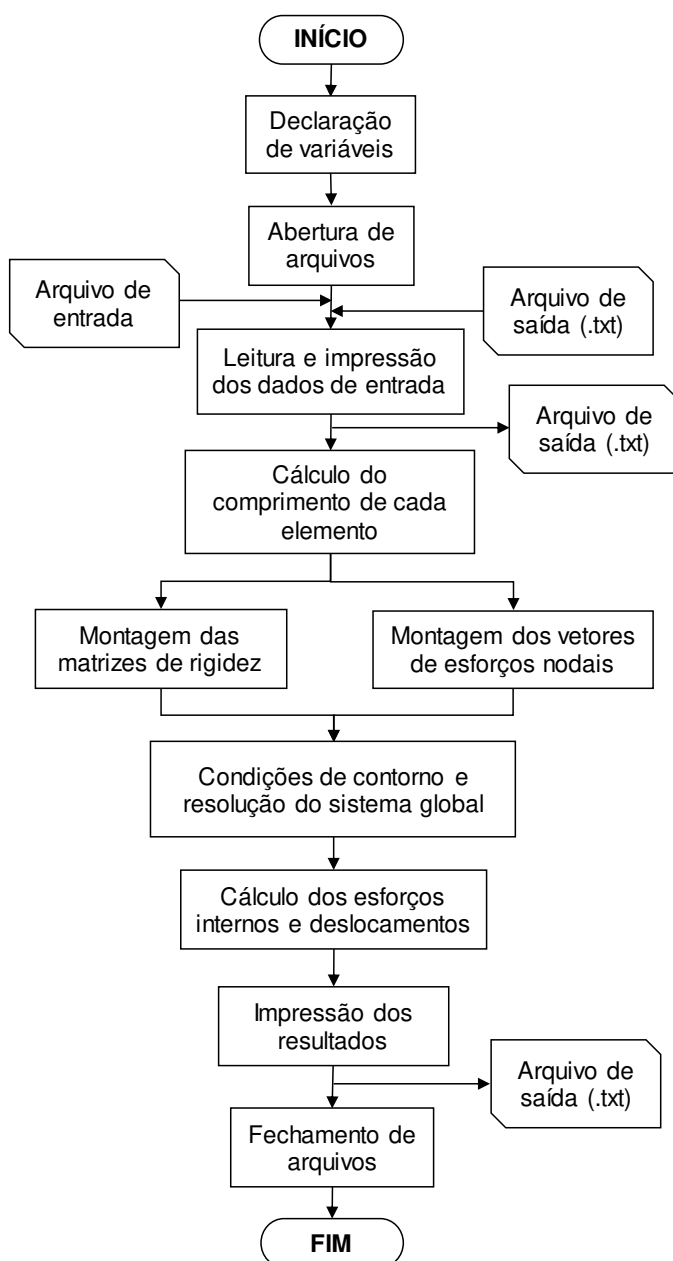
Ressalta-se o embasamento à construção do algoritmo em outras fontes de pesquisa com a qual se utilizou algumas sub-rotinas e partições de programas relacionados ao tema, a saber: Campos (2015), Monzini Rotta (2014) e Sélis Rodrigues (2016), cujos trabalhos produziram rotinas de análise de vigas por meio do MEF; também as notas de aula de disciplinas e rotinas publicadas pelo professor Walter Savassi (1992,1996), além de outros trabalhos do Departamento de

Engenharia de Estruturas (SET) da USP foram fontes para o estudo. O código fonte principal, bem como as sub-rotinas específicas estão listadas nos Anexos A e B.

3.1.1 Algoritmo base do programa

Cada etapa de progressão lógica computacional do software desenvolvido pode ser observada de forma simplificada na Figura 10.

Figura 10 – Fluxograma do algoritmo simplificado do programa.



3.1.2 Sub-rotinas

Descrevem-se aqui de forma discriminada as partições do programa implementado.

3.1.2.1 *Declarações de variáveis*

Nesta parte do programa, definem-se as características das variáveis utilizadas no programa, sejam internas (utilizadas apenas nos cálculos internos) ou externas (presentes tanto nos dados de entrada e saída dos arquivos em texto). Estas variáveis são definidas segundo sua natureza como, por exemplo, poderá ser um vetor ou matriz (array em FORTRAN) que armazene dados numéricos inteiros (integer em FORTRAN). Utilizou-se da estrutura *module* para construção de um bloco comum.

3.1.2.2 *Declaração e abertura dos arquivos de entrada e saída*

Nessa sub-rotina foi feita a abertura dos arquivos em formato (.txt), tanto de leitura de dados como de saída.

O arquivo de leitura de informações deverá ser pré-definido pelo usuário com dados geométricos da viga, suas características de rigidez (material) e as condições de apoio. Esse arquivo foi apresentado como anexo ao trabalho, devendo ser construído conforme formatação específica em que o programa fora definido, sendo capaz de lê-lo. Já o arquivo de saída é criado pelo programa, sendo necessário apenas o nomear.

3.1.2.3 *Leitura dos dados de entrada pelo programa*

É feita a interpretação pelo programa dos dados contidos nos arquivos de entrada, locando-os na memória do computador segundo sua natureza de variável.

3.1.2.4 *Impressão dos dados no arquivo de saída*

Nessa etapa se expõe ao usuário os dados por ele adicionados ao programa, permitindo verificar sua correta inserção.

3.1.2.5 Cálculo do comprimento de cada elemento

Calcula-se, a partir das coordenadas dos nós dos elementos, o tamanho de cada partição da viga (elemento).

3.1.2.6 Cálculo e montagem da matriz de rigidez de cada elemento

Esta sub-rotina calcula a matriz de rigidez para cada elemento. Para tanto, são utilizadas outras incógnitas do problema como o comprimento do elemento e a ordem da matriz de rigidez, já calculados, montando-a. Tais matrizes são representadas pela formulação dada por pela Equação (47).

3.1.2.7 Montagem da matriz de rigidez global

Aqui é montada a matriz de rigidez global $\mathbf{K}$, definida na Equação (76), a partir das matrizes de rigidez de cada elemento, podendo ser escrita como a Equação (81).

A matriz criada, portanto, terá ordem $2(n + 1)$, uma vez que se apresentam dois graus de liberdade em cada nó do elemento, com n o número de elementos da viga. Assim, serão definida uma matriz banda, formada pelas matrizes de rigidez de cada elemento sobrepondo-se a cada duas linhas e colunas das respectivas matrizes.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{11}^2 + k_{33}^1 & k_{12}^2 + k_{34}^1 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & \cdots & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{21}^2 + k_{43}^1 & k_{22}^2 + k_{44}^1 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{11}^3 + k_{33}^2 & k_{12}^3 + k_{34}^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{21}^3 + k_{43}^2 & k_{22}^3 + k_{44}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{44}^n \end{bmatrix} \quad (81)$$

3.1.2.8 Cálculo e montagem do vetor de cargas nodais equivalentes do elemento

Nessa sub-rotina são calculados os vetores de carga nodais equivalentes para cada elemento, utilizando dos dados obtidos com o cálculo do comprimento de cada elemento e suas características de rigidez e de geometria da seção. Tal matriz será

dada conforme a Equação (60b), havendo carregamento distribuído e/ou concentrado atuando no elemento.

3.1.2.9 Montagem do vetor de cargas nodais global

De forma equivalente à matriz global de rigidez, será montado o vetor de cargas nodais equivalentes $\mathbf{R}$ de ordem $2(n + 1)$, representado na Equação (78).

3.1.2.10 Estabelecimento das condições de contorno do sistema global

A fim de se impor condições que equivalem às reais vinculações dos nós que constituem os apoios das vigas, torna-se necessário modificações na matriz de rigidez global e no vetor de cargas equivalentes global.

Para tanto, foi definida uma lógica de modificação dos valores das matrizes globais constituintes do sistema principal. Assim, matematicamente, se anulariam os valores da linha numericamente igual à posição do deslocamento restrito no vetor de parâmetros nodais, v_i ou θ_i , como também anulariam os valores da coluna referente ao número dessa mesma posição. Entretanto, tomaria ao elemento K_{jj} da matriz de rigidez global igual a 1, correspondente à posição cujo número da linha e coluna j seja igual à posição do deslocamento restrito no vetor de parâmetros nodais.

Por fim, também se tornaria nulo o valor referente à posição do deslocamento a ser restrito no vetor de cargas nodais equivalentes.

Como exemplo, para a situação de viga com o primeiro nó do elemento 1 restrito quanto à rotação θ_1 em torno do eixo z , seria anulada a coluna e linha de número 2 e atribuindo valor 1 ao elemento k_{22}^1 da matriz global de rigidez $\mathbf{K}$. Tal modificação resultaria na formulação apresentada na Equação (82a).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & 0 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{31}^1 & 0 & k_{11}^2 + k_{33}^1 & k_{12}^2 + k_{34}^1 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & \cdots & 0 \\ k_{41}^1 & 0 & k_{21}^2 + k_{43}^1 & k_{22}^2 + k_{44}^1 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{11}^3 + k_{33}^2 & k_{12}^3 + k_{34}^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{21}^3 + k_{43}^2 & k_{22}^3 + k_{44}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{44}^n \end{bmatrix} \quad (82a)$$

O vetor de carga nodais equivalente global $\mathbf{R}$ para esse caso será dado conforme a Equação (83).

$$\mathbf{R} = [r_1 \quad 0 \quad r_3 \quad r_4 \quad r_5 \quad r_6 \quad \cdots \quad r_{n-4} \quad r_{n-3} \quad r_{n-2} \quad r_{n-1} \quad r_n \quad r_{n+1}]^T \quad (83)$$

Por fim, a rotina então irá anular os valores da matriz de rigidez global e do vetor de cargas nodais equivalentes global conforme os deslocamentos restringidos informados nos dados iniciais de entrada presentes no arquivo de informações inicialmente lido pelo programa. Constituem das vinculações dos nós.

3.1.2.11 *Resolução do sistema de equações*

Nessa etapa soluciona-se o sistema global de equações já com as condições de apoio da viga, pelo método de eliminação de Gauss – Jordan, através de pivôs de triangulação da matriz de rigidez. Os valores de deslocamentos serão armazenados no vetor (array) correspondente v indicado no código computacional presente no Anexo A deste trabalho.

Supondo-se o sistema dado pela Equação (79), a proposta de Gauss-Jordan de resolução das equações lineares com vistas a obtenção dos deslocamentos nodais embasa-se em realizar operações elementares entre os elementos das linhas e colunas com vistas a formação de uma matriz diagonal equivalente à matriz original, resultando em um vetor solução $\mathbf{V}$ que guarda os valores de deslocamentos nodais. Explica-se com mais detalhes acerca desse processo no Apêndice A deste trabalho.

3.1.2.12 *Cálculo das reações de apoio*

Nesta etapa, a partir da obtenção dos valores dos parâmetros nodais, segundo as condições de contorno no sistema global, representados no vetor de parâmetros nodais global $\mathbf{V}$, realiza-se seu produto com a matriz de rigidez global sem as condições de contorno, obtendo-se o vetor de cargas nodais global $(\mathbf{K} \cdot \mathbf{V})_g$.

Assim, as reações e as forças nodais da estrutura (nulas onde a estrutura é contínua) serão dadas por:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{V})_g - \mathbf{R} \quad (80)$$

3.1.2.13 Cálculo dos esforços internos

Nesta sub-rotina se calculará os esforços internos nas seções da estrutura nos nós de cada elemento.

De forma equivalente às reações de apoio, porém para cada elemento, a obtenção dos esforços nodais será dada pela subtração do vetor de cargas nodais locais $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e$ o vetor de esforços nodais locais equivalentes parciais $\mathbf{r}^*$, chegando à formulação já representada pela Equação (64b). Conforme abordado, os parâmetros nodais utilizados para o cálculo do vetor de cargas nodais locais serão obtidos com a formulação global, sem prejuízo dos resultados.

Assim, pode ser definido o vetor de esforços nodais como:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e - \mathbf{r}^* \quad (64b)$$

com $\mathbf{v}$ o vetor que contém os parâmetros nodais relacionados apenas ao elemento em análise, mas obtidos da formulação global.

3.1.2.14 Impressão dos resultados

Antecipadamente, imprime-se na tela de execução do programa os dados acerca da viga adicionados, para fins de verificação.

Consequente, segue-se a impressão (exportação) dos resultados de análise (deformações, esforços e reações de apoio) da viga no arquivo de saída em formato (.txt) criado pelo programa segundo formatação pré-definida internamente.

3.1.2.15 Fechamento dos arquivos de entrada e saída

Por fim, tem-se o fechamento dos arquivos de leitura e escrita utilizados pelo programa, encerrando em seguida o algoritmo de análise estrutural.

Foi disponibilizado o código fonte do software desenvolvido passível de utilização no Anexo A, citando-se as fontes de base ao seu desenvolvimento.

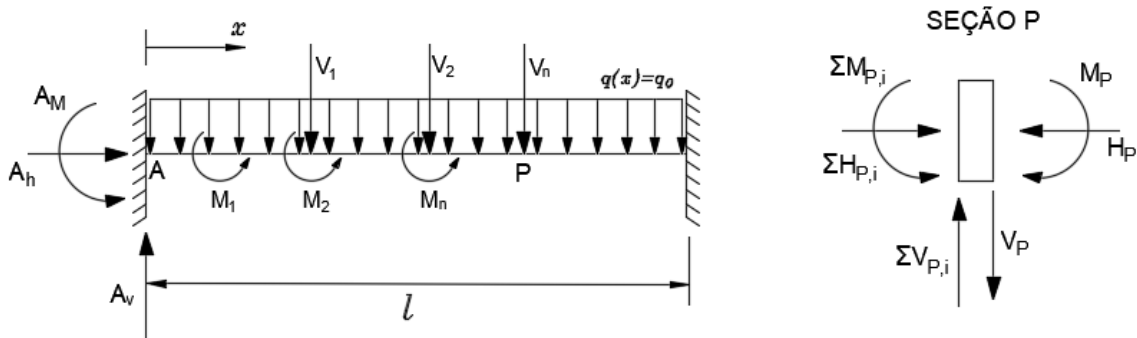
3.2 Métodos de análise de vigas

De forma a possibilitar o estudo comparativo entre os resultados do programa implementado e valores obtidos com a formulação clássica da mecânica dos sólidos e do MEF, como também com outros trabalhos e softwares de análise de vigas com base neste método, foram imprescindíveis as definições dos processos básicos analíticos de análise de estruturas. Também foram descritos os principais passos seguidos pelo trabalho para efeito de comparação de resultados.

3.2.1 Estruturas isostáticas e hiperestáticas: processos analíticos

Considere a viga genérica engastada representada na Figura 11, com carregamentos genéricos concentrados e distribuídos. A origem das coordenadas está indicada nos respectivos apoios com sentido positivo para direita conforme a figura.

Figura 11 – Esquema estático, carregamento e esforços na seção de uma viga biengastada.



Fonte – Própria.

Para o equilíbrio estático de uma viga submetida a um certo carregamento, segundo Beer (2009) e Soriano (2014), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n M_{A,i} = 0 \quad \sum_{i=1}^n H_{A,i} = 0 \quad \sum_{i=1}^n V_{A,i} = 0 \quad (84)$$

sendo V , H e M os n carregamentos de atuação vertical, horizontal e de momento fletor em um ponto A de uma viga, respectivamente. O ponto A pode ser qualquer posição da viga dentro de seu comprimento, inclusive os apoios.

É importante ressaltar que as Equações (84) fornecem os valores de reações dos apoios A_v , A_h e A_M de vigas isostáticas o que pode ser representada com a substituição de um dos apoios da viga observada na Figura 11 por uma extremidade livre.

A parte de uma seção em corte da viga representada pela Figura 11, os esforços de momento fletor, cortante e normal nesta seção podem ser obtidos com as Equações (84), considerando-se os carregamentos externos em apenas um dos lados da estrutura em corte. (HIBBELER, 2004; SORIANO, 2014; SUSSEKIND, 1981).

Logo, pela resistência dos materiais, segundo Hibbeler (2004), os esforços em um ponto P qualquer de uma viga podem ser dados por:

$$M_P = \sum_{i=1}^n M_{P,i} \quad H_P = \sum_{i=1}^n H_{A,i} \quad V_P = \sum_{i=1}^n V_{A,i} \quad (85)$$

considerando todos os carregamentos existentes até o ponto P , inclusive as reações de apoio. A coordenada de P varia dentro do domínio representado pelo comprimento da viga, isto é, $\Gamma = (0, l)$.

Sussekkind (1981) dispõe das relações entre as equações de esforços de momento fletor e de cortante em uma viga como função do carregamento a que se submete, representando-as por:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (86)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x) \quad (87)$$

Novamente, conforme a mecânica dos sólidos, segundo Beer (1995), Hibbeler (2004) e Timoshenko (1984), é possível aproximar a relação do momento fletor com a rigidez da estrutura em uma seção a partir de:

$$\frac{M(x)}{E.I} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (22b)$$

E conforme as Equações (87) e (22b):

$$\frac{q(x)}{EI} = \frac{d^4 v}{dx^4} \quad (88)$$

com $E.I$ a rigidez à flexão da viga em torno do eixo z na seção considerada.

A partir da resolução das equações diferenciais ordinárias (EDO) representadas pelas Equações (22b) ou (88), pode-se chegar à função da linha elástica da viga $v(x)$, definida no domínio formado pelas abcissas iniciais e finais da viga e dado por $\Gamma = (a, b) = (0, l)$ em caso da não existência de descontinuidades do carregamento, como uma força concentrada.

No caso de estruturas com o número de incógnitas a serem determinadas maior que o número de equações de equilíbrio existentes, apresentando-se uma indeterminação cinemática, torna-se necessário o uso de processos de resolução de estruturas hiperestáticas.

A viga apresentada pela Figura 11, por exemplo, pode ter os deslocamentos ao longo do vão e as reações nos apoios determinados pelo Método das Forças, citado no item 2.2.3 deste trabalho e também descrito detalhadamente em Soriano (2006), Sussekind (1981) e Timoshenko (1984). Métodos energéticos de análise de vigas poderiam também ser utilizados para a resolução analítica dessa viga, como por exemplo, o processo de Mohr apresentado por Sussekind (1980) e os teoremas de Castigliano, discutidos em Assan (1996) e Timoshenko (1984).

Estruturas hiperestáticas com maior complexidade também podem ser resolvidas pelo MD definido no item 2.2.3 deste trabalho, especificando, a partir do sistema definido pelas Equações (16) e (17), a compatibilidade de esforços nodais nos pontos em que haja deslocabilidade externa ou interna. As incógnitas nesta formulação são os deslocamentos. Por fim, com a resolução do sistema de compatibilidade, dadas as situações de cálculo, obtêm-se os esforços e reações nos apoios da estrutura pelo conjunto das Equações (18), considerando-se as ações de engastamento no estado com cargas (E_0) e as rigidezes nos demais estados (E_i).

3.2.2 Soluções numéricas: formulação clássica do MEF e os erros locais

Conforme estabelecido na revisão bibliográfica foi utilizado no trabalho uma função de aproximação polinomial de grau 3 para a equação da linha elástica, obtendo-se assim os deslocamentos nodais da estrutura.

A formulação matemática com base no MEF utilizada neste trabalho, a priori, se diferenciou da formulação mais comumente utilizada do MEF, apresentada pela literatura e utilizada por Castro (2009), devido a consideração do cálculo dos esforços nodais da estrutura por meio das relações de equilíbrio dos esforços seccionais representadas pelas Equações (22), ao passo que neste trabalho utilizou-se do método da rigidez e do princípio da superposição. Logo, mesmo que os valores obtidos em ambas formulações se originam da análise numérica com auxílio computacional, apresentam-se localmente diferentes (variáveis nodais) devido àqueles parâmetros de cálculo correlacionados.

A relação da curva elástica com o momento atuante na seção e sua inércia pode ser obtida com a formulação da Equação (22c). Assim, diferente ao apresentado pelo trabalho, pode-se calcular os esforços de momento e cortante diretamente a partir da equação da linha elástica da estrutura e de suas características de rigidez, visto em estudos como de Castro (2009) e Monzini Rotta (2014).

A função admissível para o elemento de viga adotado, como já visto, é dada por:

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right)v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right)v_2 + \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}\right)\theta_2 \quad (41c)$$

Novamente, chega-se a:

$$M(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) \quad (22c)$$

$$M(x) = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) v_1 + \left(\frac{-4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \theta_1 + \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) v_2 + \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \right) \theta_2 \right] \quad (89)$$

De forma equivalente, o cortante é dado por:

$$V(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{12}{l^3} v_1 + \frac{6}{l^2} \theta_1 - \frac{12}{l^3} v_2 + \frac{6}{l^2} \theta_2 \right) \quad (90)$$

Os valores de parâmetros nodais na Equação (41c) são os mesmos obtidos com a resolução do sistema global dado pela Equação (79).

De antemão, a utilização de uma função aproximada polinomial de grau 3 para deflexão de vigas com base na teoria de Rayleigh-Ritz pode não corresponder ao

verdadeiro grau polinomial a que a solução analítica para a deflexão terá e consequentemente também às equações de esforços ao longo da estrutura, a depender do carregamento externo a que se submete a viga. (CASTRO, 2009; MONZINI ROTTA, 2014).

Como exemplo, a Equação (89) do momento fletor constitui um polinômio de grau 1 e a Equação (90) de esforço cortante ao longo da estrutura representa um polinômio de grau 0. Na formulação analítica, um carregamento distribuído uniforme proporcionaria, segundo a utilização da Equação (88), uma equação da linha elástica da viga representada por um polinômio de grau 4 e consequentemente, as equações de momento fletor e esforço cortante com grau 2 e 1, respectivamente. É importante ressaltar que essas equações definem não só os esforços em aspectos locais, mas também em todo o domínio do elemento.

Dessa forma, torna-se necessário o refinamento maior da matriz de elementos, perfazendo intervalos menores de comprimento (subdomínio) que originassem resultados mais próximos aos analíticos, com desvios percentuais relativos menores, tanto locais (parâmetros nodais) como no domínio do elemento (intervalo entre nós). Tal quantificação é discutida por Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005) e Gaspar (2018).

A análise de convergência nesse caso foi qualitativa em termos de resultados contínuos em cada elemento (em seu domínio), desconsiderando-se estudos de recuperação a posteriori da solução, especificados por autores como Gaspar (2018), Cook et al (2002), Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005) e Da Silva (2015), uma vez que demandaria maior trabalho de estudo, sendo recomendado como objetivo de outros trabalhos futuros. Portanto, a análise discreta local (nodal) foi baseada em desvios percentuais simples locais e análise da dispersão de pontos com aproximações lineares.

3.2.2 Desempenho computacional

A medição do desempenho computacional pode ser realizada com base na aferição do tempo de execução de uma determinada rotina computacional, variando, entretanto, com as características da execução do software como as condições e tipos de hardwares utilizados, bem como da análise a ser verificada.

A medição de um processo computacional a partir da leitura de tempo de processamento pode ser um bom método de medição dos esforços computacionais,

porém dependente de fatores como o número de utilizadores de um sistema operacional e o tipo de processador utilizado. (JOSÉ SANTANA, CARLUCCI SANTANA, 2019).

Em suma, uma vez não possível a definição de condições razoáveis de medição computacional e visto a condição de não refinamento excessivo dos exemplos utilizados – recaindo a um mínimo esforço computacional em sua análise – não fora realizado neste trabalho a medição do desempenho da rotina implementada.

3.3 Casos de aplicação do software implementado

A partir dos resultados obtidos com a rotina de análise estrutural implementada, foram feitos estudos comparativos com a formulação clássica da teoria das estruturas e da mecânica dos sólidos apresentadas nos itens anteriores, como também com trabalhos que utilizaram variações do MEF para o cálculo de esforços de estruturas, além de avaliar o desempenho computacional. Para tanto, dividiu-se o estudo em três casos de aplicação da formulação apresentada por este trabalho.

3.3.1 Caso 1

Neste caso, fez-se o teste do programa implementado em exemplos clássicos da resistência dos materiais já calculados analiticamente em Beer (1995), Hibbeler (2004), Timoshenko (1984), entre outros autores.

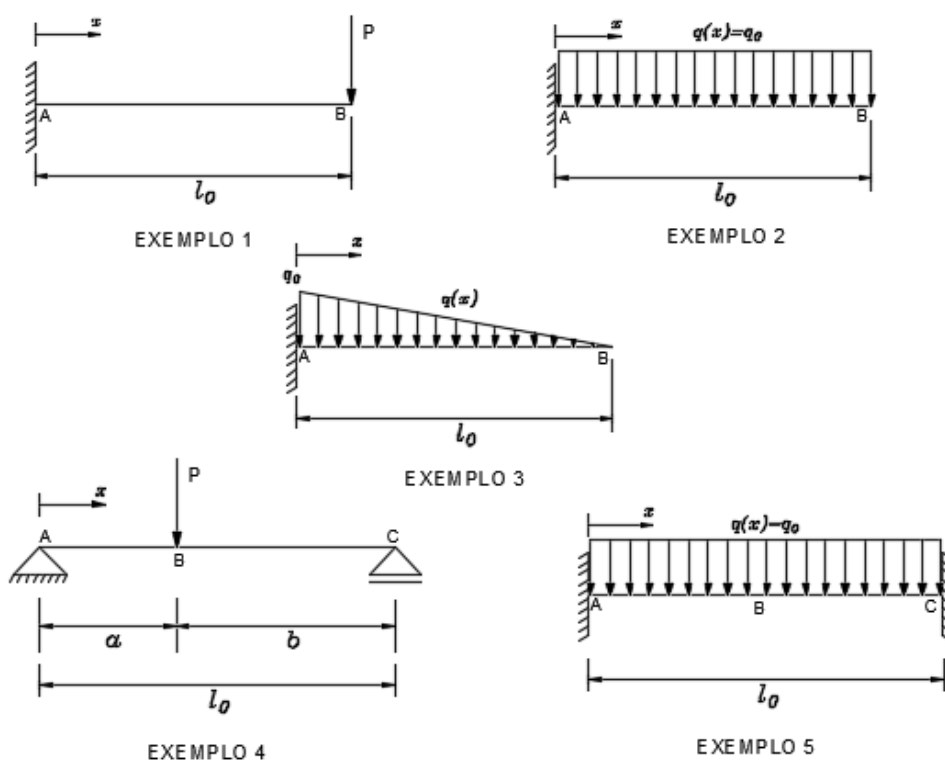
Os resultados originados a partir da aplicação numérica para os deslocamentos transversais e rotações dos nós das estruturas são, portanto, comparados aos valores obtidos com a formulação analítica. Calcula-se o erro segundo os resultados nodais da estrutura, avaliando-se o desvio local dos valores, sendo, porém, esta análise realizada de fato no próximo caso de aplicação.

Para tanto, analisou-se diferentes vigas com variados carregamentos e tipos de vínculos de apoio. Foram consideradas, neste caso, as seções de todos os elementos das vigas com inércia e módulo de elasticidade longitudinal constantes.

Os exemplos analisados nesta subseção estão descritos nos diagramas de esquemas estáticos definidos na figura 12 cujas características geométricas dos elementos e das vigas estão genericamente estabelecidas.

Nota-se que tais vigas são configuradas como isostáticas, com exceção à viga do exemplo 5 que é hiperestática.

Figura 12 – Esquemas estáticos e carregamentos dos exemplos analisados no caso 1.



Fonte – Própria.

No exemplo 5 deste caso, devido a viga ser hiperestática, seus resultados foram obtidos segundo a aplicação dos métodos dos deslocamentos e da rigidez, cujos princípios foram definidos no item 3.2 deste capítulo. Conforme a formulação analítica apresentada também neste item, a partir de todo o equacionamento embasado na teoria das estruturas e pela mecânica dos sólidos, descrevem-se as equações de deslocamentos e rotações existentes nas vigas observadas na Figura 12.

Assim, segue a seguir a descrição dos exemplos que foram estudados neste caso.

- Exemplo 1

Pela mecânica dos sólidos, conforme Hibbeler (2004) e pelas Equações (22) e (88), para este tipo de viga chega-se às expressões para o deslocamento transversal e a rotação do ponto B dados por:

$$\theta_B = \frac{-P \cdot l_0^2}{2EI} \quad (91)$$

$$v_B = \frac{-P \cdot l_0^3}{3EI} \quad (92)$$

De forma equivalente, a equação da linha elástica pode ser definida por:

$$v(x) = \frac{-P \cdot x^2}{6EI} (3l_0 - x), \quad (93)$$

A Equação (93) foi definida no sentido positivo do eixo x como saindo do ponto A em direção ao ponto B, conforme se demonstra na Figura 12, em metros.

- Exemplo 2

De forma semelhante ao exemplo anterior, os pontos A e B representam respectivamente as extremidades engastada e livre da viga, conforme a Figura 12.

Timoshenko (1984), através da teoria da elasticidade, propõe as deformações para viga em estudo em termos de suas características e sua linha elástica:

$$v_B = \frac{-q_0 \cdot l_0^4}{8EI} \quad (94)$$

$$\theta_B = \frac{-q_0 \cdot l_0^3}{6EI} \quad (95)$$

$$v(x) = \frac{-q_0 \cdot x^2}{24EI} (6l_0 - 4l_0x + x^2) \quad (96)$$

considerando na Equação (96) o sentido positivo do eixo x como saindo do ponto A em direção ao ponto B, conforme se demonstra na figura 12, em metros.

- Exemplo 3

Conforme Hibbeler (2004), de forma equivalente aos exemplos anteriores, define para este tipo de viga e carregamento a deformada da linha elástica e os deslocamentos dos pontos A e B, segundo a origem das coordenadas indicada na figura 12:

$$v_B = \frac{-q_0 \cdot l_0^4}{30EI} \quad (97)$$

$$\theta_B = \frac{-q_0 \cdot l_0^3}{24EI} \quad (98)$$

$$v(x) = \frac{-q_0 \cdot x^2}{120EI \cdot l_0} (10l_0^3 - 10l_0^2 x + 5l_0 x^2 - x^3) \quad (100)$$

- Exemplo 4

A deformada da linha elástica e os deslocamentos dos pontos A, B e C desta viga com carregamento concentrado, segundo Timoshenko (1984) e conforme as Equações (22) e (88), são dados por:

$$v_B = \frac{-P \cdot l_0^3}{48EI} \quad (101)$$

$$\theta_A = -\theta_C = \frac{-P \cdot l_0^2}{16EI} \quad (102)$$

$$v(x) = \frac{-P \cdot x}{48EI} (3l_0^2 - 4x^2) \quad (103)$$

sendo a Equação (103) definida no intervalo $0 \leq x \leq l_0/2$.

- Exemplo 5

O deslocamento do ponto B e a deformada da linha elástica da viga do Exemplo 5 deste caso com carregamento distribuído, segundo Sussekind (1980) e Hibbeler (2004) são dados por:

$$v_B = \frac{-q_0 \cdot l_0^4}{384EI} \quad (104)$$

$$v(x) = \frac{-q_0 \cdot x^2}{24EI} (2xl_0 - l_0^2 - x^2) \quad (105)$$

Este caso de carregamento e vinculação representam uma viga com 6 graus de restrições, embora possa se desconsiderar os vínculos na direção axial, restando ainda 4 restrições de deslocamento ao passo que contamos com apenas 3 equações de equilíbrio estático conforme as Equações (84), configurando-se em uma viga hiperestática.

Assim, o cálculo dos esforços nodais não podem ser obtidos diretamente com as condições de equilíbrio estático, sendo necessária a utilização de métodos que utilizam das propriedades de rigidez estrutural, isto é, incluem informações do material e seção das vigas em análise, a exemplo do Método das Forças, como também o MD que também é base ao MEF.

Logo, os esforços de momento e cortante nos pontos A e C, bem como o momento fletor máximo no ponto B, conforme Sussekind (1980,1987) e Timoshenko (1984) são dados por:

$$M_A = M_C = \frac{-q_0 \cdot l_0^2}{12} \quad (106)$$

$$V_A = -V_C = \frac{q_0 \cdot l_0}{2} \quad (107)$$

$$M_B = \frac{-q_0 \cdot l_0^2}{24} \quad (108)$$

3.3.2 Caso 2

Nos próximos exemplos foram analisadas vigas isostáticas e hiperestáticas com carregamentos distribuídos e localizados, com diferentes vinculações, enfatizando-se o estudo das linhas elásticas e dos diagramas de momento fletor e cortante àquelas relacionados.

Para tanto, foram consideradas, neste caso, as seções transversais das estruturas com rigidez à flexão constante nos elementos de uma mesma viga, modificando este valor em cada exemplo. Assim, cada viga terá uma seção com inércia por área constante e constituída de um mesmo material.

A análise do primeiro exemplo foi fundamentada na comparação entre valores obtidos pelo programa proposto e soluções analíticas, além de resultados advindos de formulações diferentes do MEF como a teoria apresentada por Castro (2009) e descrita no item 3.2.2 deste trabalho.

Como visto, a função utilizada como aproximação para deflexão da linha elástica pode trazer resultados não precisos de esforços nodais com base no MEF, visto que estes dependem do tipo de carregamento a ser submetido à viga. Por isso, foi necessário o maior refinamento da matriz de elementos no exemplo 1 deste caso.

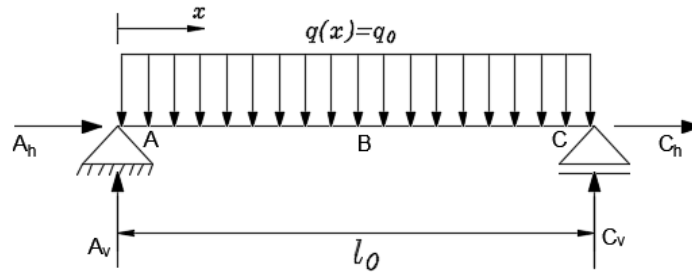
Ao demais exemplos, foram analisadas vigas hiperestáticas, estabelecendo valores nodais de esforços cortante e de momento fletor, além das reações de apoio das estruturas, e seus respectivos diagramas.

De forma equivalente ao caso anterior, explicitam-se as equações das deformadas da linha elástica das vigas deste exemplo a seguir, como também seus deslocamentos máximos nodais.

- Exemplo 1

A viga a ser analisada neste exemplo pode ser observada na Figura 13. Nota-se configurar uma viga isostática com carregamento distribuído, cujas vinculações extremas são apoios de primeiro gênero.

Figura 13 – Esquema estático e carregamento da viga do exemplo 1 – Caso 2.



Fonte – Própria.

A equação da linha elástica e os deslocamentos dos pontos A, B e C desta viga com carregamento uniformemente distribuído, conforme Hibbeler (2004) e pelas Equações (22) e (88), podem ser dados por:

$$v_B = \frac{-5q_0 l_0^4}{384EI} \quad (109)$$

$$\theta_A = -\theta_C = \frac{-q_0 l_0^3}{24EI} \quad (110)$$

$$v(x) = \frac{-q_0 x}{24EI} (x^3 - 2l_0 x^2 + l_0^3) \quad (111)$$

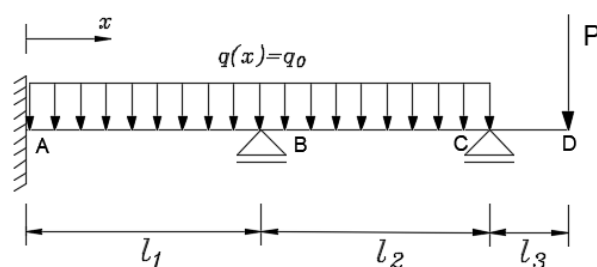
Aplicando-se a teoria apresentada pelas Equações (89) e (90) e segundo desenvolvimento de Castro (2009), chegam-se aos resultados de esforços com auxílio de rotinas aplicadas a esta teoria, definidas por autores como Savassi (1992, 1996) e também apresentadas em anexo ao trabalho. Ressalta-se a mudança apenas da sub-rotina para o cálculo de esforços, mantendo-se a mesma estrutura do código relativo até ao cálculo das deformações nodais. Tais modificações podem ser observadas nos códigos e informações contidos nos anexos A e B.

- Exemplo 2

Este exemplo fundamenta-se no estudo de uma viga hiperestática contínua, resolvida também em Sussenkind (1987) através do MD, definido nos itens 2.2.3 e 3.2.1 deste trabalho.

A viga constitui de dois apoios de primeiro gênero e um apoio de engaste além de um balanço com comprimento l_3 , em cujo extremo livre atua um carregamento concentrado P . O comprimento entre apoios foram de $l_1 = l_2 = l$ com um carregamento uniformemente distribuído $q(x) = q_0$. As informações acerca das configurações estáticas e de carregamento genérico desta viga estão contidas na Figura 14.

Figura 14 – Esquema estático e carregamento da estrutura do exemplo 2 – Caso 2.



Fonte – Adaptado de Sussekind (1987).

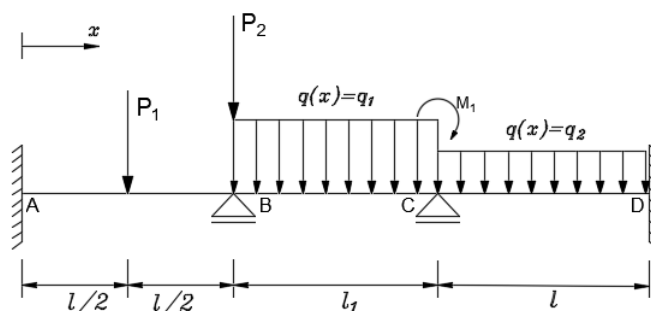
A partir dos resultados obtidos com o autor e com o programa implementado neste trabalho, foram avaliados comparativamente os esforços nodais e as reações de apoio da estrutura, além da análise de diagramas de esforços.

- Exemplo 3

Nesta viga também se analisou o estudo hiperestático e da continuidade da estrutura, resolvido em Timoshenko (1984) com distintos carregamentos e vinculações, enfatizando-se também ao cálculo das reações de apoio por processos energéticos definidos por esse autor e que serão comparados aos resultados obtidos com a rotina neste trabalho implementada.

A viga constitui de 4 apoios, sendo os dois extremos engastados e dois intermediários de primeiro gênero. Os vãos e carregamentos genéricos, bem como essas condições de vinculação estão representadas na Figura 15, a partir de seu esquema estático.

Figura 15 – Esquema estático e carregamento da estrutura do exemplo 3 – Caso 2.



Fonte – Adaptado de Timoshenko (1984).

A partir do cálculo por meio dos métodos energéticos como o princípio da energia potencial total ou pelos Método da rigidez e Método das Forças, apresentam-se as expressões para o cálculo das reações de apoio nos nós *A*, *B*, *C* e *D*, disposta em Timoshenko (1984) como:

$$\text{Reações} \left\{ \begin{array}{l} V_A = \frac{39P}{64l} \\ V_B = \frac{39P}{64l} \\ V_C = \frac{39P}{64l} \\ M_D = \frac{39P}{64l} \end{array} \right. \begin{array}{l} e \\ \\ \\ e \end{array} \begin{array}{l} M_A = \frac{39P}{64l} \\ \\ \\ V_D = \frac{39P}{64l} \end{array} \quad (112)$$

3.3.3 Caso 3

Neste caso foram avaliadas vigas hiperestáticas com carregamentos distribuídos e localizados, com diferentes vinculações e rigidezes das seções, apresentando-se variações tanto de materiais constituintes, quanto das inércias da seção transversal.

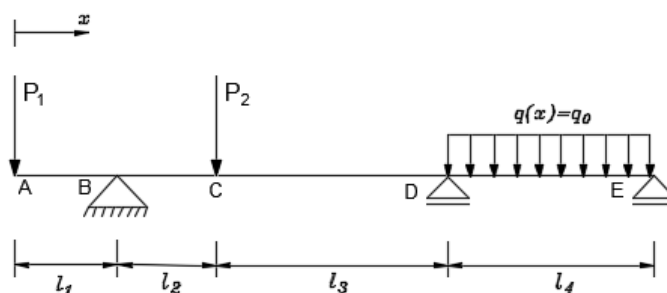
Outro ponto de análise foi a comparação entre os resultados de esforços e deformações obtidos com a rotina apresentada pelo trabalho e o software Ftool desenvolvido na PUC-Rio.

Em seguida foi descrita em pormenores a análise dos exemplos.

- Exemplo 1

Esta viga hiperestática contínua fora resolvida em Soriano (2006), com diferentes inércias entre as barras que a constitui, apresentando-se três apoios de primeiro gênero como é demonstrado genericamente na Figura 16.

Figura 16 – Esquema estático e carregamento da estrutura do exemplo 1 – Caso 3.



Fonte – Adaptado de Soriano (2006).

De forma semelhante, serão construídos os diagramas de esforços da viga segundo os resultados obtidos com o programa desenvolvido no trabalho e também pelo Software Ftool. Para efeito de construção dos diagramas, houve necessidade da construção gráfica das funções que representam os esforços ao longo dos elementos, obtidas a partir das Equações (85).

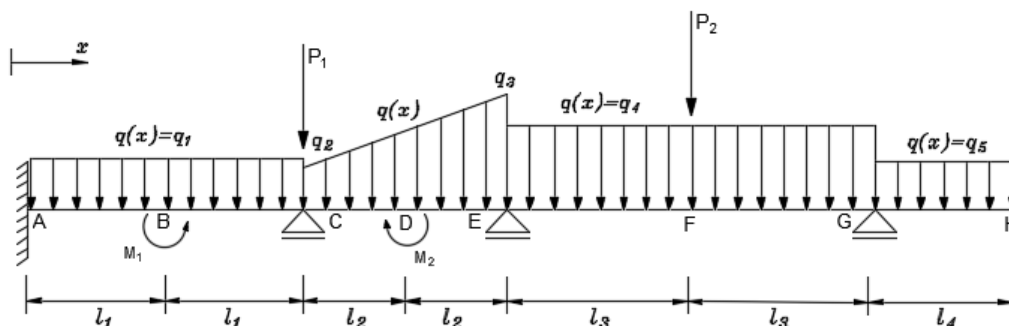
Neste caso, foram obtidas também as funções que representam a linha elástica da viga cada qual no subdomínio definido pelos elementos, obtidas segundo as relações definidas pelas Equações (22) e plotadas com o auxílio do software gráfico Microsoft® Office Excel.

- Exemplo 2

Para este exemplo foi analisada uma viga contínua hiperestática com 4 apoios, cujas configurações de carregamento e condições de contorno apresentam-se conforme a Figura 17.

Neste exemplo, destaca-se a utilização de módulos de elasticidade longitudinal e momentos de inércia com valores diferentes dentre os elementos e a comparação dos resultados também entre a rotina implementada e o software de cálculo Ftool.

Figura 17 – Esquema estático e carregamento da estrutura do exemplo 2 – Caso 3.



Fonte – Própria.

Foram, portanto, avaliados os resultados de reações de apoio por ambos métodos e os resultados nodais de esforços da estrutura. Os diagramas resultantes obtidos com os valores de esforços e reações de apoio calculados pelo programa implementado foram obtidos com o auxílio das Equações (85), plotando-se graficamente as funções assim obtidas com auxílio do software de representação gráfica Microsoft® Office Excel.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Descrevem-se neste capítulo resultados obtidos com a análise de vigas a partir da rotina implementada segundo o elemento de viga utilizado. Serão abordados casos de aplicação conforme definido pela metodologia de estudo apresentada no trabalho.

4.1 Caso 1

Foram aqui avaliados os exemplos discriminados nos esquemas presentes na Figura 12. A rigidez à flexão das vigas foi considerada de valor igual a $E.I = 7.087,5 \text{ KN.m}^2$ (aproximadamente uma seção 15 cm x 30 cm com Módulo de Elasticidade de 21,0 GPa), sendo utilizada esta rigidez em todos os exemplos. Tais observações estão resumidas no Quadro 1.

Quadro 1 – Resumo das características das vigas do exemplo 1.

QUADRO RESUMO DAS VIGAS DO CASO 1				
Viga	Tipo	Carregamento	Inércia da seção	Mód. de elasticidade
1	Balanço	$P = 10 \text{ KN}$ (concentrada)	$0,000375 \text{ m}^4$	21,0 GPa
2	Balanço	$q = 10 \text{ KN/m}$ (uniforme)	$0,000375 \text{ m}^4$	21,0 GPa
3	Balanço	$q = 10 \text{ KN/m}$ (trapezoidal)	$0,000375 \text{ m}^4$	21,0 GPa
4	Biapoiada	$P = 10 \text{ KN}$ (concentrada)	$0,000375 \text{ m}^4$	21,0 GPa
5	Biengastada	$q = 10 \text{ KN/m}$ (uniforme)	$0,000375 \text{ m}^4$	21,0 GPa

Fonte – Própria.

4.1.1 Exemplo 1

A primeira aplicação foi em uma viga engastada em um lado e livre em outro, carregada com uma força localizada de valor $P = 10 \text{ KN}$ e cujo comprimento foi $l_o = 2,0 \text{ m}$.

O diagrama de corpo livre contido na figura 18 indica as características estáticas e geométricas da viga, além do carregamento.

Figura 18 – Condições estáticas de viga engastada submetida a carga concentrada.

Fonte – Própria.

Utilizou-se, então, de uma malha com apenas um elemento finito e dois nós, coincidentes com as extremidades da viga, ou seja, os pontos A e B.

Pelas condições de vinculação desta viga engastada em apenas uma das extremidades e livre na outra, sabe-se da existência de três reações de apoio no engaste no ponto A para que se verifique a condição de equilíbrio estático, obtidas com as Equações (84) e observados os valores na Tabela 1. Também os resultados de reações no apoio A obtidas com programa implementado são dados na tabela 1.

Tabela 1 – Resultados de reações de apoio para viga do exemplo 1 – Caso 1.

Solução	Nome do Apoio	M (KN.m)	Reação	
			F_v (KN)	F_h (KN)
Analítica	A	20,000000	10,000000	0,000000
Programa	A	20,000000	10,000000	0,000000

Fonte: Própria

Os resultados analíticos das deformações obtidos com as Equações (91) e (92), bem como os esforços de força cortante e momento fletor expressos com base nas reações de apoio obtidas com as Equações (85) estão presentes na segunda linha da Tabela 2.

Verificam-se na primeira linha da Tabela 2 os resultados de deslocamento e rotação do ponto B da viga, como também os valores de esforços de força cortante e momento fletor no ponto A, obtidos com a aplicação do programa implementado e utilizando-se de apenas um elemento.

Tabela 2 – Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos, rotações e esforços para viga do exemplo 1 – Caso 1.

Solução	Deslocamento em B (m)	Rotação em B (rad)	Momento em A (KN.m)	Cortante em A (KN)
Programa	-0,003762493	-0,002821869	-20,000000	10,000001
Analítica	-0,003762493	-0,002821869	-20,000000	10,000000
Erro (%)	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001

Fonte: Própria

Nota-se que os resultados de deformações e de reações de apoio apresentados seguem as convenções de positividade do MEF, enquanto aos esforços a convenção utilizada pela teoria das estruturas apresentadas por Soriano (2014) e Sussekind (1981). Esta última convenção estabelece força e deslocamento com sinal positivo quando do sentido ascendente, ao passo que o momento e rotação positivos quando ocorridos no sentido anti-horário.

A componente horizontal das reações de apoio neste caso será nula devido a condição de carregamento da viga. Entretanto, os esforços normais foram desconsiderados neste trabalho, uma vez que o elemento de viga aqui utilizado não apresenta grau de liberdade no sentido axial, sendo esse item uma limitação ao programa. Em contrapartida, os exemplos de aplicação não houveram sido prejudicados os resultados, visto que não foram carregados na horizontal.

Com bases nos resultados analíticos, verificou-se a convergência dos valores obtidos com o programa já com a definição da primeira malha com 1 elemento, devido a maior simplicidade das condições de vinculação e carregamento.

Comparando-se os valores obtidos com a solução analítica e com a rotina implementada, pôde ser verificado o erro relativo a cada nó analisado. Tais valores estão apresentados na linha 3 da Tabela 2 para as deformações e esforços.

Os erros percentuais nodais, portanto, apresentaram-se relativamente pequenos, considerando precisões específicas quanto às casas decimais definidas em cada resultado. Assim, é verificada a validação desta rotina e teoria na aplicação deste tipo de viga isostática de carregamento pontual.

Ressalta-se ao fato da não utilização neste trabalho de técnicas de pós-processamento e controle de erros numéricos, tendo, porém, resultados pertinentes ao estudo. Em suma, é possível que em um maior grau de complexidade haja maiores erros devido a um refinamento não tão eficiente, necessitando maior quantidade de elementos.

Outro fator interessante é a análise nos pontos intermediários aos nós dos elementos, ou seja, até o momento foram obtidos resultados nodais, não se atentando aos valores intermediários máximos e mínimos por nó, o que será influenciado de forma substancial pelo refinamento de trechos com carregamentos em cada elemento. Tais constatações foram também analisadas nos próximos casos.

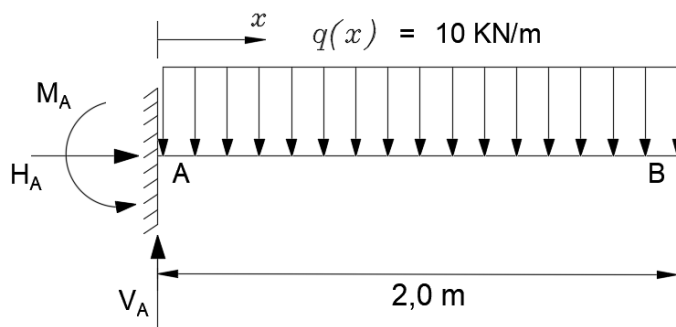
Observou-se também que os esforços nodais foram obtidos com base à formulação local $\mathbf{f} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})_e - \mathbf{r}^*$, conforme a solução do sistema global $\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R}$, ou seja, a partir das deformações nodais da estrutura. Assim, a solução analítica para os valores de esforços internos obtida com as equações de equilíbrio aproxima-se dos valores obtidos com o software implementado em que se aplica outro viés teórico, ressaltando sua validade para esse tipo de estrutura isostática.

4.1.2 Exemplo 2

Agora foi descrita a análise para uma viga engastada com carregamento uniformemente distribuído, cuja distribuição equivale a $q_0 = 10 \text{ KN/m}$ e comprimento igual a $l_0 = 2,0 \text{ m}$.

As informações presentes na figura 13 representam as condições estáticas e de geometria da viga e seu carregamento.

Figura 19 – Condições estáticas de viga engastada submetida a carga uniformemente distribuída.



Fonte – Própria.

Uma vez que esta viga também se configura como isostática conforme se observa na figura 19, as situações de equilíbrio estático apresentadas nas Equações

(84) são também válidas neste exemplo, de forma que foram obtidas as reações de apoio ao longo da estrutura.

Tabela 3 – Resultados de reações de apoio pelo programa para viga do exemplo 2 – Caso 1.

Solução	Nome do Apoio	Reação		
		M (KN.m)	F _v (KN)	F _h (KN)
Analítica	A	20,000000	20,000000	0,000000
Programa	A	20,000002	20,000000	0,000000

Fonte: Própria

Os valores das reações de apoio obtidos com o programa e pelo equilíbrio estático foram apresentados na Tabela 3. Já os resultados de deformações e esforços nodais obtidos com as formulações analíticas definidas pelas Equações (85), (94) e (95) e com a aplicação do programa são identificados na Tabela 4.

Tabela 4 – Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos, rotações e esforços para viga do exemplo 2 – Caso 1.

Solução	Deslocamento em B (m)	Rotação em B (rad)	Momento em A (KN.m)	Cortante em A (KN)
Programa	-0,002821870	-0,001881246	-20,000002	20,000000
Analítica	-0,002821869	-0,001881246	-20,000000	20,000000
Erro (%)	0,00001	0,00001	0,00001	0,00000

Fonte: Própria

Os resultados de deslocamento e rotação do ponto B e também dos esforços no ponto A obtido com o programa desenvolvido podem ser observados na primeira linha da Tabela 4 e relativos à solução analítica são observadas na segunda linha da Tabela 4, sendo calculado o erro percentual local a cada valor de deformação e esforço, representado na terceira linha da mesma tabela.

As soluções de esforços e deformações obtidos com o programa neste exemplo demonstrou convergência com apenas 1 elemento novamente, considerando a precisão decimal utilizada e conforme o erro insurgente. Portanto, verifica-se a validação da rotina para mais esse exemplo de viga de carregamento distribuído.

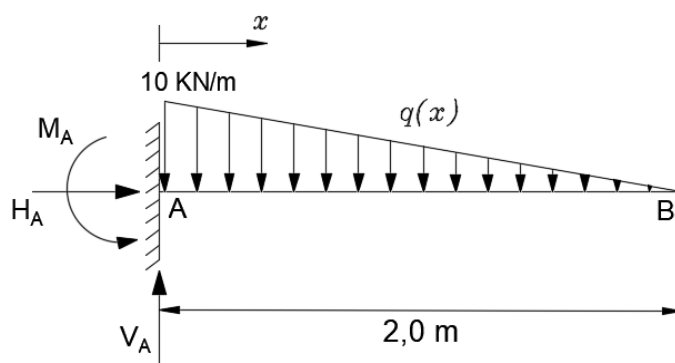
Novamente as variações percentuais de resultados mostraram-se em relativa precisão tendo em vista as condições de funcionamento do software em que não há

controle na propagação de erros nas operações e não há técnicas de pós-processamento.

4.1.3 Exemplo 3

Neste exemplo foi analisada uma viga engastada com carregamento distribuído trapezoidal cujo valores de carga são 10 KN/m no ponto A de engaste, anulando-se na extremidade livre ou ponto B. O comprimento da viga permanece-se com $l_0 = 2,0 \text{ m}$. Tais informações da viga presenciam-se na figura 14, além das condições estáticas e de geometria da viga e seu carregamento.

Figura 20 – Condições estáticas de viga engastada submetida a carga distribuída trapezoidal.



Fonte – Própria.

Também sendo a viga deste exemplo isostática conforme o diagrama presente na Figura 20, a formulação dada pelas Equações (84) foi aqui retomada para fins de consideração do equilíbrio estático da estrutura.

Os valores das reações de apoio da estrutura obtidas com as condições de equilíbrio e pelo programa são demonstrados na Tabela 5.

Tabela 5 – Resultados de reações de apoio para viga do exemplo 3 – Caso 1.

Solução	Nome do Apoio	M (KN.m)	Reação	
			F _v (KN)	F _h (KN)
Analítica	A	20,000000	20,000000	0,000000
Programa	A	20,000002	20,000000	0,000000

Fonte: Própria

A partir da formulação analítica para o cálculo de deformações e esforços desta viga pelas Equações (85), (97) e (98), apresentam-se tais resultados na Tabela 6, considerando a precisão já adotada.

Verifica-se que o erro percentual neste exemplo se apresentou proporcional aos observados nos exemplos anteriores, validando-se também a formulação e aplicação do programa para esse tipo de carregamento. As observações acerca dos resultados com vistas ao MEF realizadas nos exemplos anteriores também se aplicam neste tipo de viga.

Tabela 6 – Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos, rotações e esforços para viga do exemplo 3 – Caso 1.

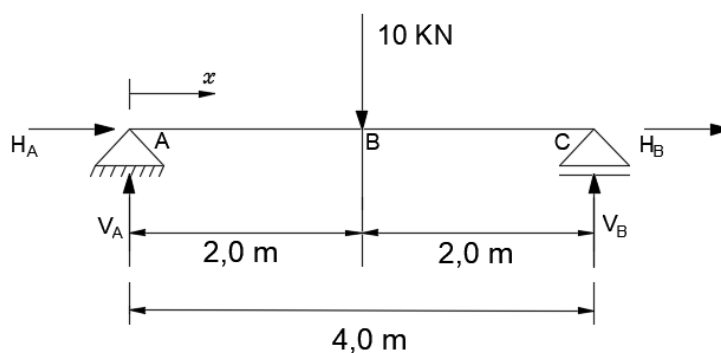
Solução	Deslocamento em B (m)	Rotação em B (rad)	Momento em A (KN.m)	Cortante em A (KN)
Programa	-0,000752499	-0,000470312	-6,666667	10,000000
Analítica	-0,000752499	-0,000470312	-6,666667	10,000000
Erro (%)	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Própria

4.1.4 Exemplo 4

A viga em estudo agora apresenta-se biapoiada com carregamento concentrado com valor $P = 10\text{KN}$, situado ao meio da viga cujo comprimento é $l_0 = 4,0\text{ m}$. Os apoios agora configuram os pontos A e C da esquerda e direita, respectivamente conforme o diagrama contido na Figura 21, classificados em segundo e primeiro gênero, respectivamente.

Figura 21 –Condições estáticas de viga biapoiada com carregamento concentrado.



Fonte – Própria.

O equilíbrio estático da estrutura aqui também pode ser definido conforme as Equações (84), obtendo-se as reações de apoio e conseqüentemente os esforços nodais, podendo observar tais valores na Tabela 7. Também os resultados de reações obtidos pelo programa estão contidos nas informações da Tabela 7.

Tabela 7 – Resultados de reações de apoio para viga do exemplo 4 – Caso 1.

Solução	Nome do Apoio	M (KN.m)	Reação	
			F _v (KN)	F _h (KN)
Analítica	A	0,000000	5,000000	0,000000
	C	0,000000	5,000000	0,000000
Programa	A	0,000000	5,000000	0,000000
	C	0,000000	5,000000	0,000000

Fonte: Própria

Através das formulações dadas pelas Equações (101) e (102) foram obtidos resultados respectivos à deformação vertical no ponto médio da viga B e de rotação dos pontos A e C, extremos da viga.

Tabela 8 – Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos e rotações para viga do exemplo 4 – Caso 1.

Solução	Deslocamento em B (m)	Rotação em A (rad)	Rotação em C (rad)
Programa	-0,001881246	-0,001410935	0,001410935
Analítica	-0,001881246	-0,001410935	0,001410935
Erro (%)	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Própria

Os valores de deslocamento e rotação dos pontos A, B e C obtidos com o programa desenvolvido podem ser observados na primeira linha da Tabela 8 e relativos à solução analítica são observados na segunda linha da Tabela 8, sendo calculado o respectivo erro percentual local.

Tabela 9 – Resultados analíticos e pelo programa dos esforços para viga do exemplo 4 – Caso 1.

Solução	Momento em B (KN.m)		Cortante em B (KN)	
	À esquerda	À direita	À esquerda	À direita
Programa	10,000000	10,000000	5,000000	-5,000000
Analítica	10,000000	10,000000	5,000000	-5,000000
Erro (%)	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Própria

Os esforços nodais da viga em análise podem ser observados da Tabela 9, comparando-se os resultados do programa com as soluções analíticas e apresentando o erro relativo percentual relacionado.

Neste caso, utilizou-se de uma malha com 2 elementos, visto que houve a descontinuidade do carregamento quando da aplicação da força concentrada ao meio da viga, necessitando neste ponto, devido à aplicação do MEF, da utilização de um ponto nodal compartilhado pelos elementos 1 e 2.

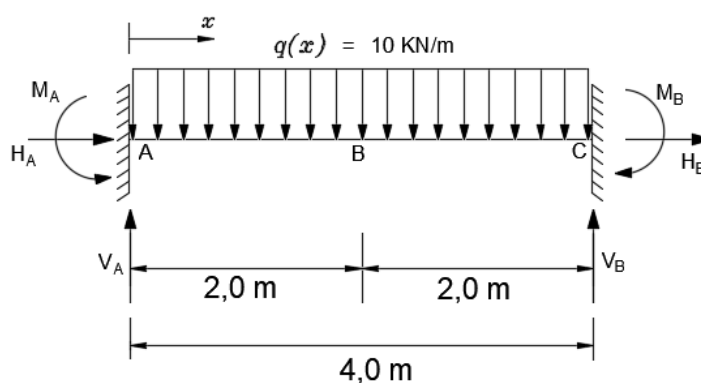
Portanto, houve assim a convergência dos resultados mesmo com um refinamento tão pequeno da matriz de elementos, validando também para esse tipo de viga e carregamento a formulação apresentada no trabalho.

Novamente, os esforços horizontais neste caso são nulos e as convenções de resultados adotada segue conforme os exemplos anteriores.

4.1.5 Exemplo 5

Neste exemplo é apresentada uma viga biengastada com carregamento distribuído cujo valor é $q_0 = 10 \text{ KN/m}$ ao longo de comprimento $l_0 = 4,0 \text{ m}$. Os apoios são os pontos A e C, conforme o diagrama contido na Figura 22.

Figura 22 –Condições estáticas de viga bi engastada com carregamento uniformemente distribuído.



Fonte – Própria.

Através da Equação (104) foi obtido o resultado da deformação vertical no ponto médio B da viga deste exemplo.

Com as formulações dadas pelas Equações (106), (107) e (108) chegou-se aos esforços da viga em análise.

Devido a viga deste exemplo apresentar-se hiperestática, as reações de apoio puderam ser obtidas analiticamente pelos métodos de análise hiperestática como o MD também descrito neste trabalho e expresso pelas Equações (16), (17) e (18).

Os resultados das reações de apoio da viga pela solução analítica e com o uso da rotina adaptada neste trabalho estão descritos na Tabela 10.

Tabela 10 – Resultados das reações de apoio para viga do exemplo 5 – Caso 1.

Solução	Nome do Apoio	M (KN.m)	Reação	
			F _v (KN)	F _h (KN)
Analítica	A	13,333333	20,000000	0,000000
	C	-13,333333	20,000000	0,000000
Programa	A	13,333333	20,000000	0,000000
	C	-13,333333	20,000000	0,000000

Fonte: Própria.

Os valores de deformação e esforço de momento para o ponto B pela solução analítica e pelo programa estão apresentados na Tabela 11, com o respectivo erro. Pela Equação da linha elástica (81), a primeira derivada que representa a rotação da seção é nula em $x = l/2$, explicando os valores nulos de rotação do ponto médio B da viga observados na Tabela 11.

Tabela 11 – Resultados analíticos e pelo programa do deslocamento e esforço de momento fletor no ponto B para o exemplo 5 – Caso 1.

Deformação / Esforço	Programa	Analítica	Erro (%)
Deslocamento (m)	-0,000940623	-0,000940623	0,00000
Rotação (rad)	0,000000000	0,000000000	0,00000
Momento (KN.m)	6,666667	6,666667	0,00000

Fonte: Própria.

Como observado na Figura 22 e pela Equação (108), o ponto médio B da viga configura-se como o ponto de maior esforço de momento, sendo, portanto, coordenada de maior deformação vertical dessa estrutura. Assim, para que se quantificasse os valores de esforços nesse ponto, a ele atribuiu-se um nó compartilhado pelos elementos 1 e 2 da viga.

Os valores de esforços de cortante e momento fletor nos pontos A e C podem ser verificados na Tabela 12 com os respectivos erros percentuais em comparação à solução analítica.

Tabela 12 – Resultados analíticos e pelo programa dos esforços dos pontos A e C para viga do exemplo 5 – Caso 1.

Solução	Momento (KN.m)		Cortante (KN)	
	Nó A	Nó C	Nó A	Nó C
Programa	-13,333333	-13,333333	20,000000	-20,000000
Analítica	-13,333333	-13,333333	20,000000	-20,000000
Erro (%)	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Própria

Os resultados de esforços e deformações segundo os dados presentes nas Tabelas 11 e 12 quanto à aplicação do programa apresentaram-se em consistência aos valores obtidos com a formulação analítica, uma vez que não houve variação pertinente percentual considerando a precisão adotada.

4.2 Caso 2

Como já definido, objetivou-se a obtenção de resultados de esforços e deformações de vigas isostáticas segundo um maior refinamento da matriz, como também a avaliação de estruturas hiperestáticas, conforme se observa no Quadro 2.

Quadro 2 – Resumo das características das vigas do exemplo 1.

QUADRO RESUMO DAS VIGAS DO CASO 2			
Características/ Viga	1	2	3
Tipo	Biapoiada	Contínua	Contínua
Número de vãos	1	3	3
Inércia da seção	0,0036 m ⁴	0,00001 m ⁴	10 ⁶ KN/m ²
Mód. de elasticidade	50 GPa	20 . 10 ⁵ t/m ²	
Carga (concentrada)	0	4 t	Combinações
Carga distribuída (uniforme)	100 KN/m	4 t/m	Combinações

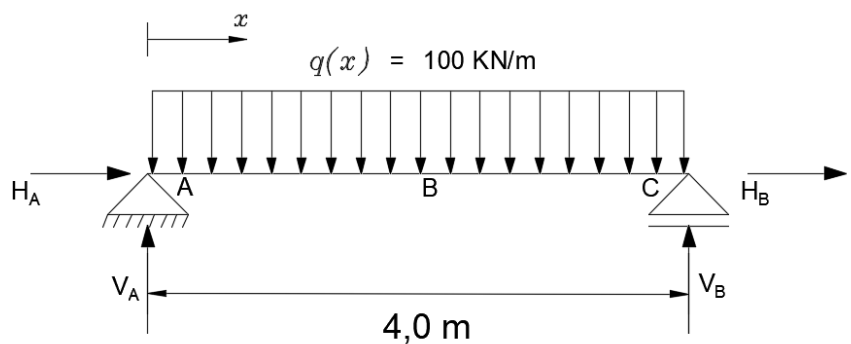
Fonte – Própria.

4.2.1 Exemplo 1

A análise agora será de uma viga simplesmente apoiada em suas extremidades, com carregamento uniformemente distribuído com valor igual a $q_0 = 100\text{ KN/m}$ e cujo comprimento tem valor $l_0 = 4,0\text{ m}$. Tais configurações podem ser observadas na Figura 23.

A seção considerada tem as dimensões 20 cm x 60 cm ($A = 1.200\text{ cm}^2$), cuja inércia da área em relação ao eixo z tem valor $I_z = 360.000\text{ cm}^4$ e o material considerado tem módulo de elasticidade longitudinal com valor $E = 50\text{ GPa}$, resultando em uma rigidez à flexão $E.I = 180.000\text{ KN.m}^2$.

Figura 23 –Condições estáticas de viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído.



Fonte – Própria.

Observe a presença dos pontos A, B e C indicados na Figura 23, onde se configuram máximas deformações da estrutura, também sendo estabelecidos esforços a estes pontos relacionados. Neste primeiro momento dividiu-se a estrutura em dois elementos com três nós.

Tabela 13 – Resultados de reações de apoio para viga do exemplo 1 – Caso 2.

Solução	Nome do Apoio	M (KN.m)	Reação	
			F _v (KN)	F _h (KN)
Analítica	A	0,000000	200,000000	0,000000
	C	0,000000	200,000000	0,000000
Programa	A	0,000000	200,000000	0,000000
	C	0,000015	200,000000	0,000000

Fonte: Própria

Segundo o equilíbrio estático da estrutura aqui configurada isostática, as reações de apoio e esforços das seções e nós podem ser obtidas com as Equações (84). Os valores de reações de apoio podem ser observados na Tabela 13.

Tabela 14 – Resultados analíticos e pelo programa dos deslocamentos e rotações para viga do exemplo 1 – Caso 2.

Solução	Deslocamento em B (m)	Rotação em A (rad)	Rotação em C (rad)
Programa	-0,001851852	-0,001481481	0,001481481
Analítica	-0,001851852	-0,001481481	0,001481481
Erro (%)	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Própria

Através das formulações dadas pelas Equações (109) e (110) foram obtidos resultados respectivos à deformação vertical no ponto médio B da viga e de rotação dos pontos A e C, extremos da viga.

Os resultados de rotação dos pontos A e C, bem como o deslocamento do ponto B podem ser observados na Tabela 14, detalhando valores obtidos com o programa e com a solução analítica e o respectivo erro local.

Os esforços nodais (pontos A, B e C) da viga em análise podem ser observados da Tabela 15, comparando-se os resultados do programa com as soluções analíticas e apresentando o erro relativo local relacionado.

Verificou-se com a utilização de dois elementos a convergência dos resultados de deformação e esforços nodais da estrutura, considerando a precisão adotada.

Tabela 15 – Resultados analíticos e pelo programa dos esforços para viga do exemplo 1 – Caso 2.

Solução	Momento nó B (KN.m)		Cortante (KN)	
	À esquerda	À direita	Nó A	Nó C
Programa	200,000000	200,000000	200,000000	-200,000000
Analítica	200,000000	200,000000	200,000000	-200,000000
Erro (%)	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Própria

A partir das formulações definidas pelas Equações (89) e (90) e observadas em Castro (2009), foram obtidos os valores de cortante nos pontos A e C, bem como de

momento fletor em B, apresentando-os na Tabela 16 como função do número de elementos em que se dividiu a viga.

Tabela 16 – Resultados da análise de esforços segundo a formulação do MEF utilizada por Castro (2015) para viga do exemplo 1 – Caso 2.

Nº de elementos	Cortante em A (KN)	Momento em B (KN.m)	Cortante em C (KN)
1	0,000000	133,333328	0,000000
2	99,999992	233,333328	-99,999992
4	149,999939	208,333405	-150,000061
8	175,000061	202,084717	-175,000565
16	187,510544	200,534088	-187,520615
32	193,931763	200,330017	-193,746689
40	194,164139	199,311569	-194,819397
50	198,057098	202,982407	-197,572021
64	198,107956	201,247360	-198,365448

Fonte: Própria

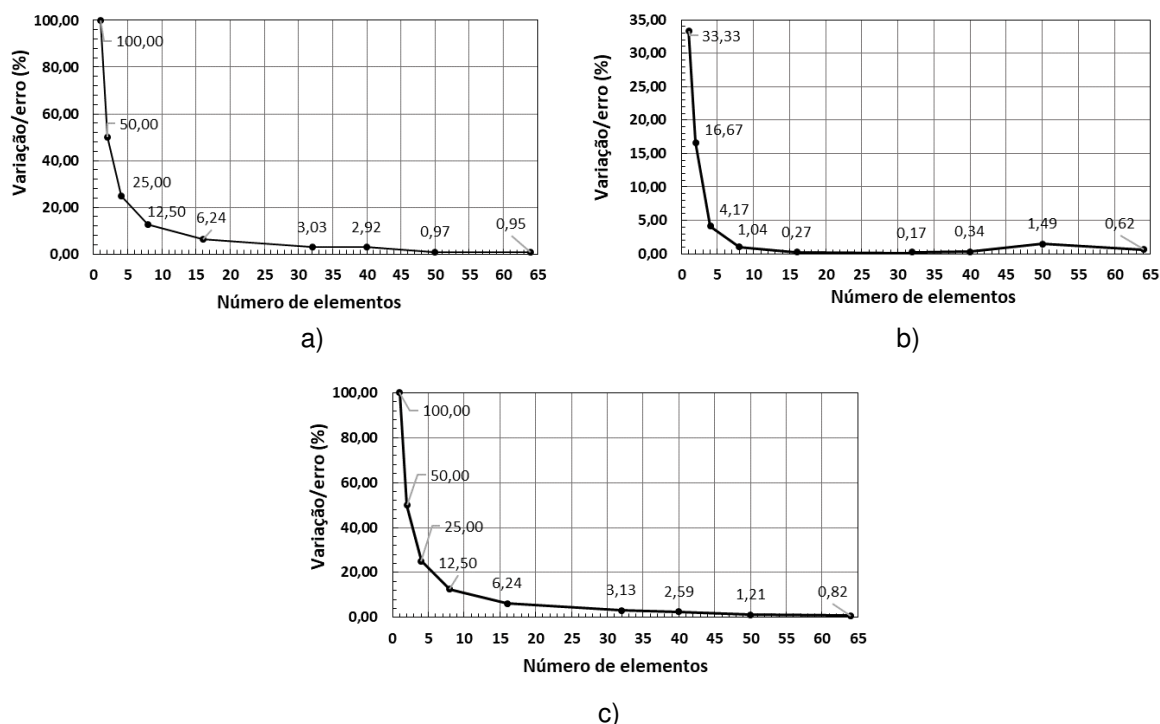
Comparando-se os resultados de esforços da Tabela 16 com os valores analíticos apresentados na Tabela 15, é possível calcular o erro relativo local do nós em análise segundo a quantidade de elementos.

Nota-se pelos resultados apresentados na Tabela 15 que os valores de esforços se aproximam dos resultados teóricos com base na solução analítica, apresentando-se acurados à medida que se refina a matriz de elementos.

A distribuição do erro relativo local em termos percentuais pode ser observada nos gráficos contidos nas Figuras 24, representando curvas características desse tipo de análise por elementos finitos.

Observa-se que a convergência dos resultados de momento é mais adiantada à acurácia quando do médio refinamento da matriz de elementos, ao passo que os esforços cortantes se aproximam do valor analítico apenas com um número bem maior de elementos. Observe que o momento começa a ter oscilações de valores ao ultrapassar o número de elementos necessários à sua convergência, uma vez que, pelo próprio processo de cálculo com base em rotinas computacionais, propagam-se erros numéricos nas operações elementares à medida que se aumentam os processos de cálculos iterativos como é o caso de um maior refinamento da matriz.

Figura 24 – Representação da variação percentual local (erro) entre resultados analíticos de esforços na viga analisada no exemplo 1 - caso 2 de aplicação e os resultados dados pela formulação com a MEF utilizando-se as derivadas da função admissível para os deslocamentos transversais como demonstrado por Castro (2009): a) cortante no ponto A; b) momento fletor no ponto B; c) cortante no ponto C.



Fonte – Própria.

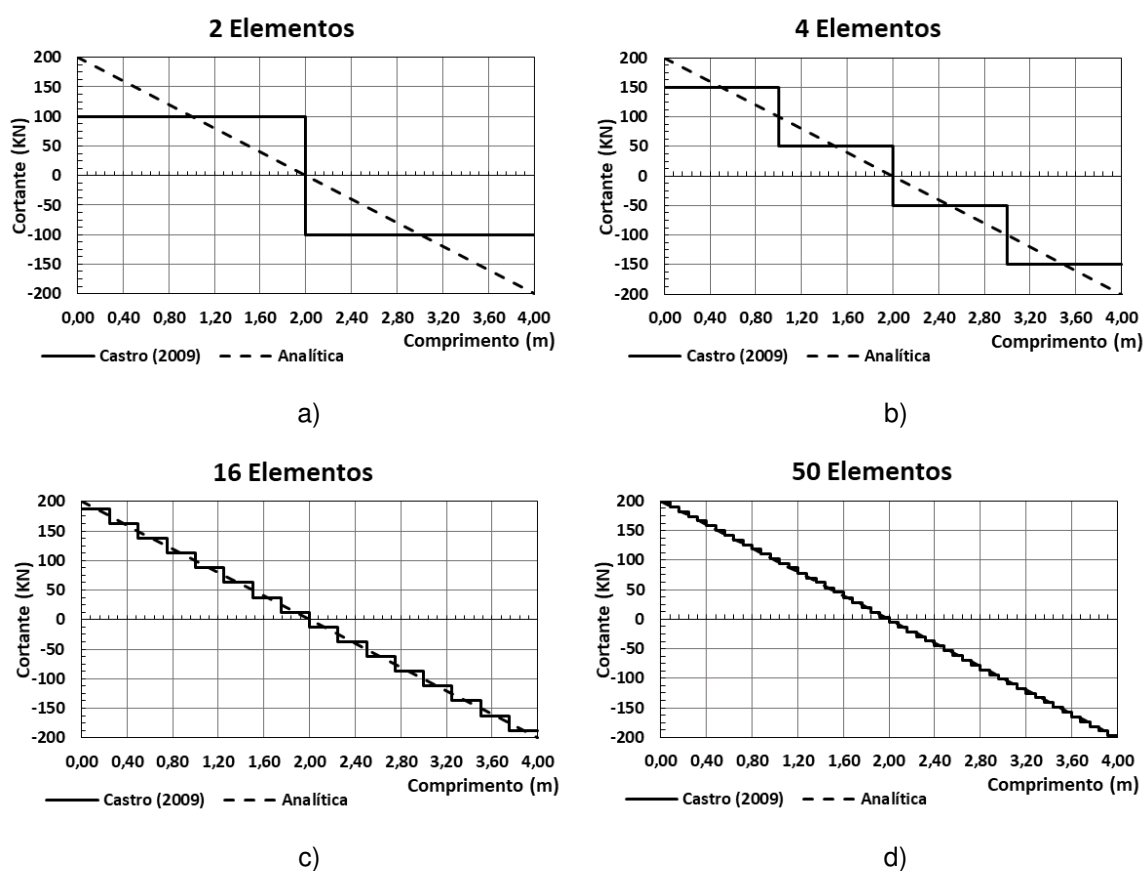
Conforme os resultados, a utilização das derivadas da função admissível estabelecida como aproximação à equação da linha elástica da viga – Equações (89) e (90) – pode oferecer resultados não muito próximos aos analíticos quando da utilização de poucos elementos e os erros relativos ainda consideravelmente altos frente aos erros obtidos com a primeira solução apresentada.

As Figuras 25 e 26 contêm os diagramas de esforço cortante e momento fletor para viga deste exemplo segundo a teoria clássica do MEF apresentada por Castro (2009), verificando-se funções polinomiais que satisfazem as condições de contorno dos nós e representam os esforços de cortante e momento fletor no domínio do elemento, respectivamente.

De certa forma, observa-se que utilizando-se da função polinomial de grau 3 para a aproximação da equação da deflexão da viga, como é feito por Castro (2009), obtêm-se funções polinomiais de grau 1 para representar a Equação do momento (69)

e de grau 0 para representação da Equação de esforço cortante (70), o que difere do que se espera a uma distribuição uniforme de carga, com equação da linha elástica representada por polinômio de grau 4, momento em polinômio de grau 2 e esforço cortante em polinômio de grau 1.

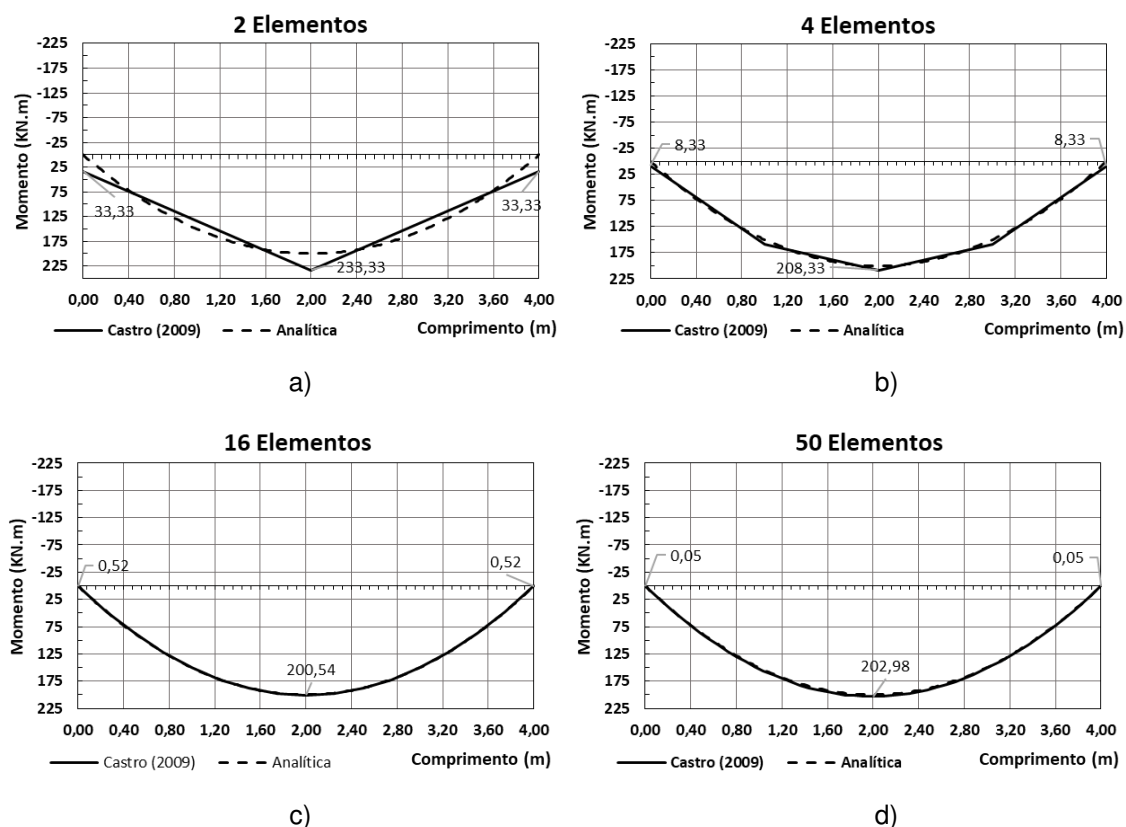
Figura 25 – Representação dos diagramas de esforço cortante da viga deste exemplo para as formulações analítica e apresentada por Castro (2009), utilizando: a) 2 elementos; b) 4 elementos; c) 16 elementos; d) 50 elementos.



Fonte – Própria.

Logo, a obtenção de valores locais diretamente a partir dessas equações configuram distorções de resultados segundo um domínio local de grande dimensão (utilizando-se de poucos elementos), necessitando cada vez mais um maior refinamento, conforme se explicita na Figura 25 com os diagramas de esforço cortante segundo o refinamento em 2, 4, 16 e 50 elementos.

Figura 26 – Representação dos diagramas de momento fletor da viga deste exemplo para as formulações analítica e apresentada por Castro (2009), utilizando: a) 2 elementos; b) 4 elementos; c) 16 elementos; d) 50 elementos.



Fonte – Própria.

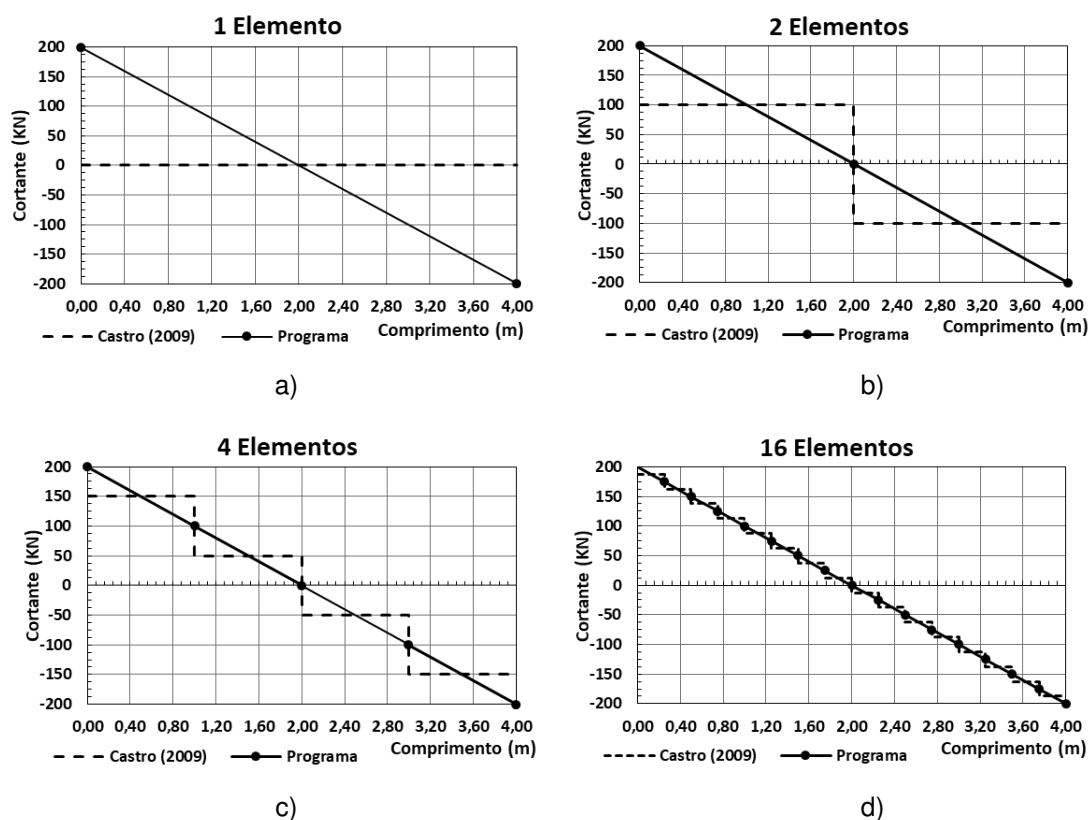
A perda de precisão dos resultados também se presencia nos pontos entre nós dos elementos, conforme aborda Monzini Rotta (2014), realçando que os valores de cortante serão representados ao longo do elemento como um valor constante e os valores de momento fletor por retas, correspondendo aos respectivos polinômios de grau 0 e 1. Esta configuração presencia-se tanto nas formulações clássicas do MEF apresentadas por Castro (2009), quanto às definições utilizadas neste trabalho.

Conforme previsto, nota-se a convergência melhor do momento fletor em relação aos valores analíticos em comparação ao esforço cortante, considerando-se a utilização de um mesmo número de elementos, conforme às Figuras 25 e 26.

Na Figura 27 estão ilustrados os valores de esforço cortante para a simulação segundo a formulação para o cálculo de esforços apresentada neste trabalho,

indicada em linhas contínuas. Os esforços devido à formulação de Castro (2009) apresentam-se em linhas tracejadas.

Figura 27 – Representação dos diagramas de esforço cortante da viga representada na Figura 23 com os resultados do programa deste trabalho e pela formulação apresentada por Castro (2009), utilizando: a) 1 elemento; b) 2 elementos; c) 4 elementos; d) 16 elementos.



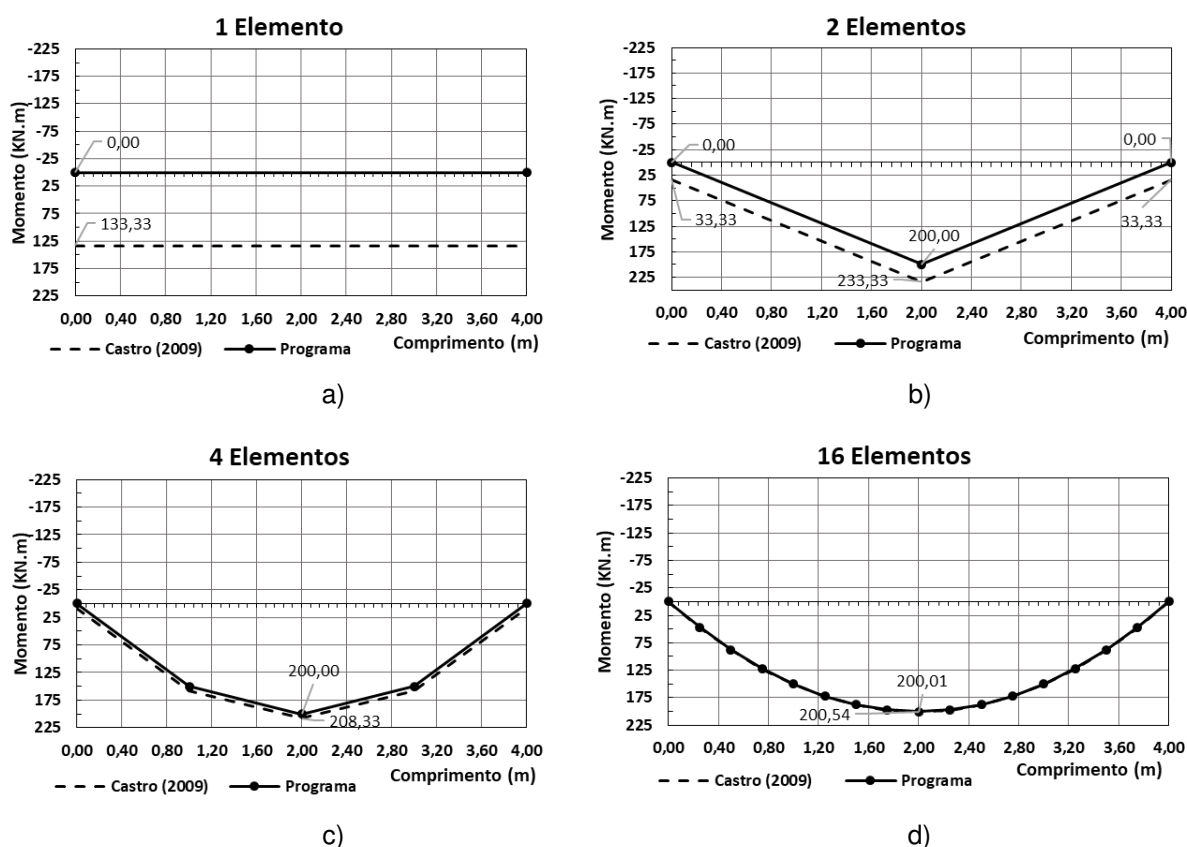
Fonte – Própria.

Ressalta-se que a dispersão de resultados nodais obtidos com o programa implementado no trabalho foi-lhe atribuída continuidade com a simples união de pontos por semirretas, de boa utilização de utilização uma vez que os resultados locais se apresentaram relativamente precisos segundo a formulação proposta por Assan (2003).

De forma equivalente, na Figura 28 se verifica a dispersão de resultados nodais de esforço de momento fletor para a formulação dada pelo trabalho embasado em Assan (2003) e os diagramas estabelecidos conforme a teoria desenvolvida em Castro

(2009), representados em linha tracejadas. Novamente uniu-se os resultados de pontos nodais da dispersão por semirretas.

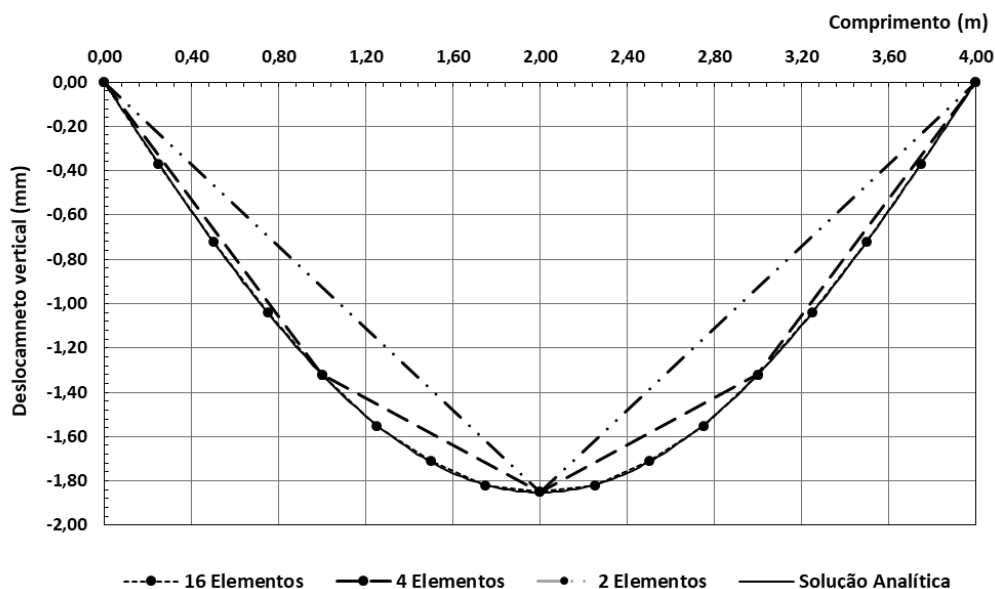
Figura 28 – Representação dos diagramas de momento fletor da viga representada na Figura 23 com os resultados do programa deste trabalho e pela formulação apresentada por Castro (2009), utilizando: a) 1 elemento; b) 2 elementos; c) 4 elementos; d) 16 elementos.



Fonte – Própria.

Nota-se a semelhança aos diagramas de esforço cortante segundo os resultados obtidos com o programa e com a solução analítica, tendo em vista a representação para esse esforço devido ao carregamento uniformemente distribuído conforme as Equações (86) e (87). Já em relação ao esforço de momento fletor, houve a necessidade de maior refinamento da matriz de elementos para que a solução aproximasse ao polinômio de grau 2, também conforme as Equações (86) e (87), conservando-se, entretanto, os resultados nodais. As Figuras 25, 26, 27 e 28 ilustram estas observações.

Figura 29 – Representação dos deslocamentos verticais $v(x)$ da viga representada pela Figura 23, obtidos com a utilização de 2, 4 e 16 elementos finitos pelo programa implementado, como também da solução analítica com base na Equação (66).



Fonte – Própria.

Em termos de deslocamentos nodais, foi representada na Figura 29 a linha elástica da viga analisada neste exemplo segundo a utilização de 2, 4 e 16 elementos, plotando-se resultados obtidos com a rotina desenvolvida e com a formulação analítica.

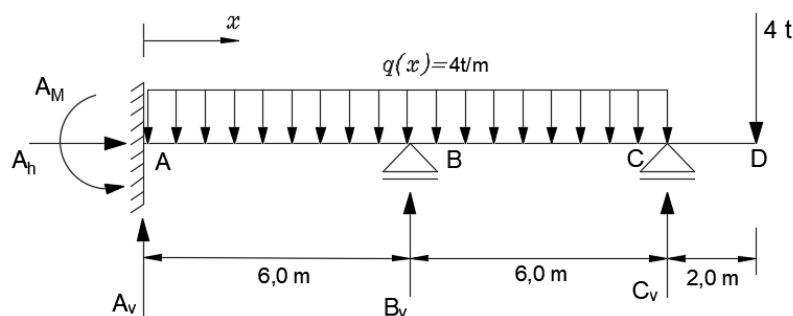
Observa-se que de forma equivalente ao esforço de momento fletor as deformações de translação vertical convergem à solução analítica muito rapidamente quando de um pequeno refinamento da matriz de elementos, validando a aplicação do software ao cálculo de deformações de estruturas isostáticas.

4.2.2 Exemplo 2

Nesta análise foi calculada uma viga hiperestática cujo esquema estático está apresentado na Figura 30.

Conforme abordado, esta estrutura fora calculada por Sussenkind (1987) utilizando o MD o qual obteve-se o diagrama de momento fletores dado pela Figura 31, com valores em [tm].

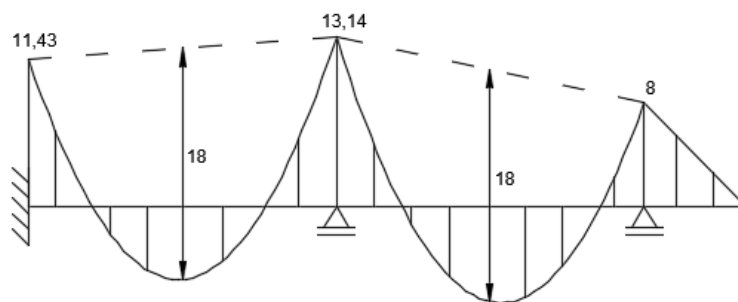
Figura 30 – Configuração de carregamento e vinculação da viga do exemplo 2 – Caso 2.



Fonte – Adaptado de Sussekind (1987).

Para efeito de utilização da rotina, todos os elementos da viga constituíram inércia de área em relação ao eixo z igual a $I_z = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ e módulo de elasticidade longitudinal com valor $E = 20 \cdot 10^5 \text{ t/m}^2$.

Figura 31 – Diagrama de momento fletor [t.m] para a viga do exemplo 2 – Caso 2 com a resolução pelo MD dada em Sussekind (1987).



Fonte – Adaptado de Sussekind (1987).

A partir dos valores de momento fletores observados no diagrama contido na Figura 31 e utilizando-se das Equações (84) e (85) de equilíbrio estático e de cálculo de esforços, foram obtidas as reações de apoio e esforços para viga.

Os resultados de reações nos apoios da viga podem ser observados na Tabela 17, sendo a solução analítica referente à aplicação do MD por Sussekind (1987) e o programa relativo à aplicação das rotinas implementadas neste trabalho.

Tabela 17 – Resultados de reações de apoio para a viga do exemplo 2 – Caso 2.

Solução	Nome do Apoio	Reação		
		M (t.m)	F _v (t)	F _h (t)
Analítica	A	11,43	11,71	0,00
	B	0,00	25,14	-
	C	0,00	15,14	-
Programa	A	11,43	11,71	0,00
	B	0,00	25,14	-
	C	0,00	15,14	-

Fonte – Própria.

Os esforços ao longo da viga analisados antes e após as seções relativas aos nós são apresentadas na Tabela 18, evidenciando também a solução por parte do programa e pela solução analítica.

Tabela 18 – Resultados de reações de apoio para a viga do exemplo 2 – Caso 2.

Esforço	Nó	Analítica (MD)	Programa
M (t.m)	A	0,00	0,00
	B	-13,14	-13,14
	C	-8,00	-8,00
	D	0,00	0,00
V (t)	A	0,00	0,00
	B	-12,29	-12,29
	C	-11,14	-11,14
	D	4,00	4,00
V (t)	A	11,71	11,71
	B	12,86	12,86
	C	4,00	4,00
	D	0,00	0,00

Fonte – Própria.

Adotando-se uma seção no trecho entre os nós *A* e *B* a uma distância *x* da origem das coordenadas em *A* no sentido estabelecido conforme a indicação na Figura 30 e pautando-se nas Equações (85), (86) e (87), chegou-se às funções do primeiro trecho.

No segundo trecho correspondido entre os nós *B* e *C* a diferença se deu na origem agora estabelecida no nó *B*, como também no terceiro trecho entre os nós *C* e *D* cuja origem fora o nó *C*.

Em resumo, definiu-se as funções:

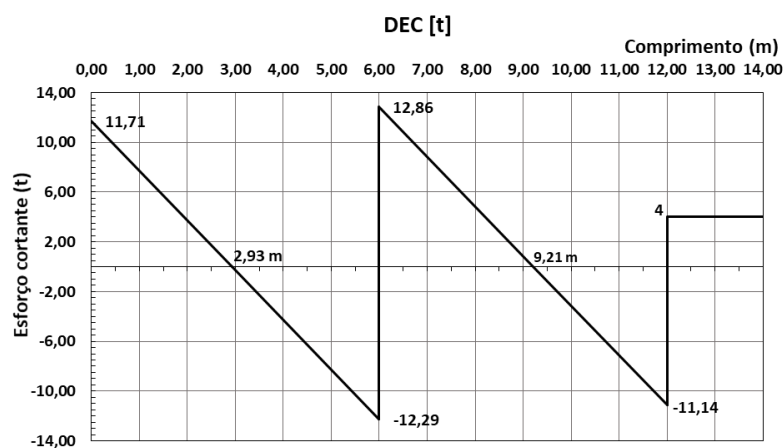
$$\text{Trecho 1 } (0 \leq x \leq 6) \quad \begin{cases} M(x) = -11,428 + 11,714x - 2x^2 \\ V(x) = 11,714 - 4x \end{cases} \quad (113)$$

$$\text{Trecho 2 } (0 \leq x \leq 6) \quad \begin{cases} M(x) = -13,144 + 12,587x - 2x^2 \\ V(x) = 12,857 - 4x \end{cases} \quad (114)$$

$$\text{Trecho 3 } (0 \leq x \leq 2) \quad \begin{cases} M(x) = -8 + 4x \\ V(x) = 4 \end{cases} \quad (115)$$

Atenta-se à utilização de apenas 3 elementos para o cálculo desta estrutura, atribuindo-se nós apenas aos pontos de descontinuidade de carga ou com restrição de liberdade, obtendo-se, ainda assim, os esforços existentes na viga.

Figura 32 – Diagrama de esforço cortante [t] para a viga do exemplo 2 – Caso 2 com os valores obtidos com a rotina implementada.

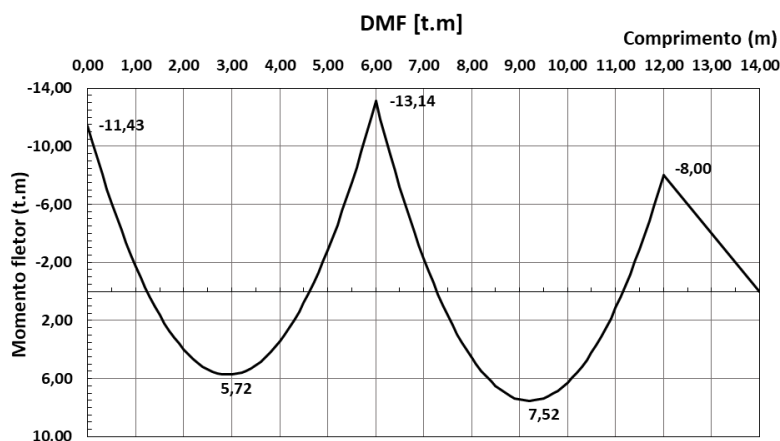


Fonte – Própria.

Plotando-se as funções definidas pelas Equações (113), (114) e (115), chegou-se aos diagramas representados pelas Figuras 32 e 33, cujos máximos momentos positivos equivalem às coordenadas de esforço cortante nulo, como pode ser

observados nestas figuras equivalentes às distâncias de 2,93 m e 9,21 m relativas ao primeiro e segundo trecho, respectivamente, em relação ao ponto A.

Figura 33 – Diagrama de momento fletor [t.m] para a viga do exemplo 2 – Caso 2 com os valores obtidos com a rotina implementada.



Fonte – Própria.

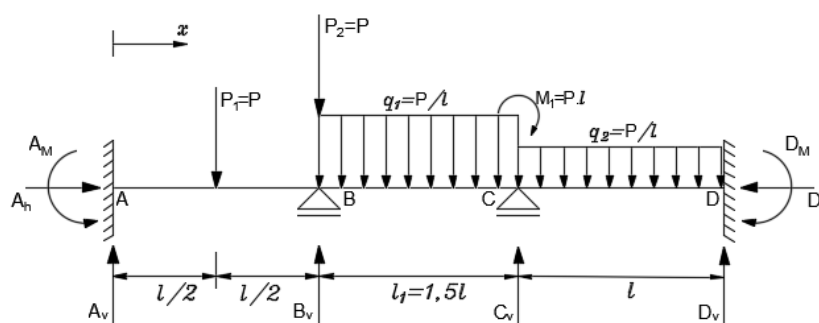
Observa-se mais uma vez a validação de resultados locais utilizando o MEF segundo a proposta adotada por Assan (2003) para o cálculo de esforços agora evidenciada em uma viga contínua hiperestática.

Nota-se que a partir da definição das reações de apoio e com os esforços nodais da estrutura calculados, não se apresenta grande dificuldade na determinação das equações de esforços ao longo da viga e construção dos respectivos diagramas.

4.2.3 Exemplo 3

Neste exemplo, conforme especificado na sequência de estudo do trabalho, foi realizada a análise da viga contínua hiperestática resolvida em Timoshenko (1984) a partir das configurações de carregamento e tamanho de vãos definidas na Figura 34.

Como efeito de aplicação da rotina implementada no trabalho, estabeleceu-se a rigidez à flexão de todos os elementos equivalente à $E.I = 1.10^6 \text{ KN.m}^2$.

Figura 34 – Representação do esquema estático da viga do exemplo 3 – Caso 2.

Fonte – Adaptação de Timoshenko (1984).

A Tabela 19 indica as diferentes combinações de valores utilizados para os carregamentos na viga em análise.

Tabela 19 – Resultados de reações de apoio para a viga do exemplo 2 – Caso 2.

Combinação	P [KN]	L [m]	M [KN.m]	q1=q2 [KN/m]
1	10,00	10,00	100,00	1,00
2	50,00	4,00	200,00	12,50
3	700,00	2,00	1400,00	1350,00

Fonte – Própria.

A partir do cálculo das reações de apoio da viga por meio das Equações (112) apresentadas em Timoshenko (1984), os resultados podem ser observados nas Tabelas 20, 21 e 22, juntamente aos valores obtidos com o software desenvolvido neste trabalho.

Tabela 20 – Reações de apoio para a combinação 1 à viga do exemplo 2 – Caso 2.

		Reações		
Solução	Nome do Apoio	M (KN.m)	F _v (KN)	F _h (KN)
Analítica	A	16,145833	6,093750	0,000000
	B	0,000000	18,211806	-
	C	0,000000	7,413194	-
	D	-35,937500	13,281250	0,000000
Programa	A	16,145832	6,093750	0,000000
	B	0,000000	18,211803	-
	C	-0,000008	7,413194	-
	D	-35,937504	13,281251	0,000000

Fonte – Própria.

Tabela 21 – Reações de apoio para a combinação 2 à viga do exemplo 2 – Caso 2.

Solução	Nome do Apoio	Reações		
		M (KN.m)	F _v (KN)	F _h (KN)
Analítica	A	32,291667	30,468750	0,000000
	B	0,000000	91,059028	-
	C	0,000000	37,065972	-
	D	-71,875000	66,406250	0,000000
Programa	A	32,291668	30,468750	0,000000
	B	-0,000004	91,059029	-
	C	0,000015	37,065975	-
	D	-71,874992	66,406250	0,000000

Fonte – Própria.

Observa-se que os dados extraídos das Tabelas 20, 21 e 22 configuram novamente a compatibilidade de valores entre a solução analítica e os resultados obtidos com o programa, apresentando-se desvios máximos de valores na ordem de 10^{-6} nas combinações com menores carregamentos e de 10^{-3} na última combinação com maiores carregamentos.

Tabela 22 – Reações de apoio para a combinação 3 à viga do exemplo 2 – Caso 2.

Solução	Nome do Apoio	Reações		
		M (KN.m)	F _v (KN)	F _h (KN)
Analítica	A	226,041667	426,562500	0,000000
	B	0,000000	1274,826389	-
	C	0,000000	518,923611	-
	D	-503,125000	929,687500	0,000000
Programa	A	226,041657	426,562470	0,000000
	B	0,000000	1274,826416	-
	C	0,000000	518,923645	-
	D	-503,124939	929,687439	0,000000

Fonte – Própria.

Todavia, os desvios de resultados apresentados nestas tabelas podem também ser avaliados com base aos erros numéricos e as respectivas propagações de erros operacionais embutidos normalmente em rotinas de cálculo.

Por fim, com este exemplo, consolida-se as considerações de análise de vigas hiperestáticas contínuas com a análise pelo MEF com base no processo de cálculo de esforços definido em Assan (2003).

4.3 Caso 3

Seguiu-se aqui o estudo de vigas contínuas segundo a comparação de diferentes inércias e materiais a constituir as estruturas, além da utilização do software Ftool em paralelo aos resultados obtidos com a rotina de cálculo neste trabalho estabelecida. Assim, verifica-se no Quadro 3 as características básicas das estruturas.

Quadro 3 – Resumo das características das vigas do exemplo 3.

QUADRO RESUMO DAS VIGAS DO CASO 3		
Características/ Viga	1	2
Tipo	Contínua	Contínua
Número de vãos	3	4
Inércia da seção	Variável	Variável
Mód. de elasticidade	21 GPa	Variável
Carga (concentrada)	20 kN/m; 50kN/m	Variável
Carga distribuída (uniforme)	20 kN/m	Variável

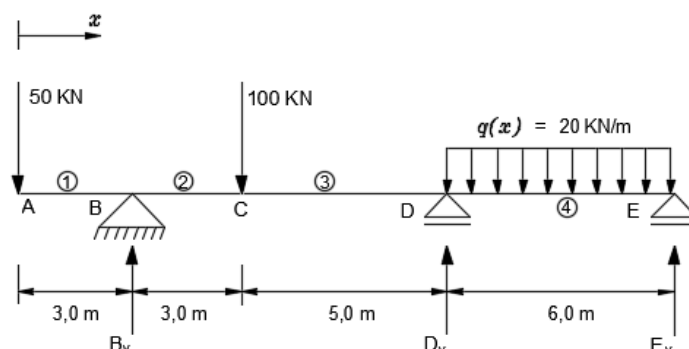
Fonte – Própria.

4.3.1 Exemplo 1

Uma vez estabelecido o arranjo geral desta viga no capítulo de metodologia, descreve-se em exato aos valores de carregamento e vãos relativos à estrutura deste exemplo, podendo-se observar tais valores na Figura 35.

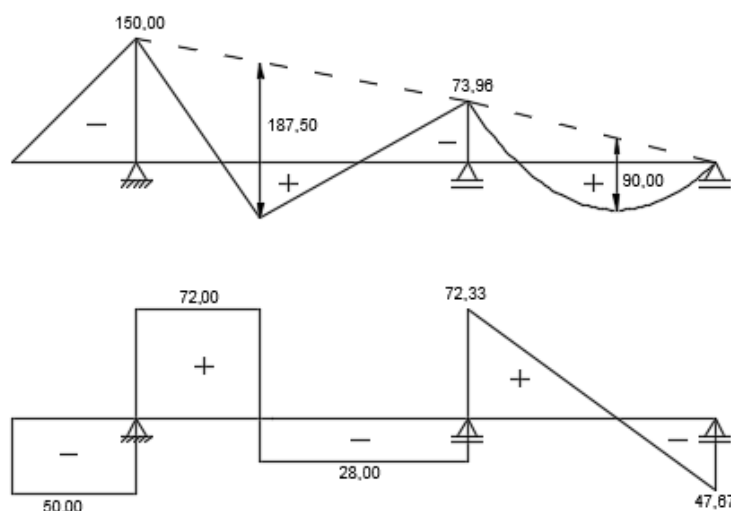
Haja vista a disposição dos carregamentos concentrados e das vinculações de apoio, houve precisão da divisão do contínuo da estrutura em 4 elementos, expressos pelos números 1 ao 4, conforme se verifica na Figura 35.

Toma-se neste exemplo o primeiro caso de variação da seção transversal das barras, constituindo aos elementos 1, 2 e 3 inércia de área em relação ao eixo z equivalente a $I_{z1} = 0,01 \text{ m}^4$ e ao elemento 4 igual a $I_{z2} = 0,006 \text{ m}^4$. Todos os elementos apresentam módulo de elasticidade $E = 21 \text{ GPa}$.

Figura 35 – Representação do esquema estático da viga do exemplo 1 – Caso 3.

Fonte – Adaptada de Soriano (2006).

A viga em estudo foi resolvida em Soriano (2006) pelo MD, cujos diagramas de esforços de cortante e momento fletor estão representados na Figura 36.

Figura 36 – Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (inferior) segundo a resolução de Soriano (2006) pelo MD, em [kN.m] e [kN], respectivamente.

Fonte – Adaptado de Soriano (2006).

Os valores de reações de apoio obtidas a partir dos esforços dados pela solução analítica através do MD em Soriano (2006) estão representados na Tabela 23, junto aos valores calculados pela rotina aqui neste trabalho implementada e pelo software Ftool.

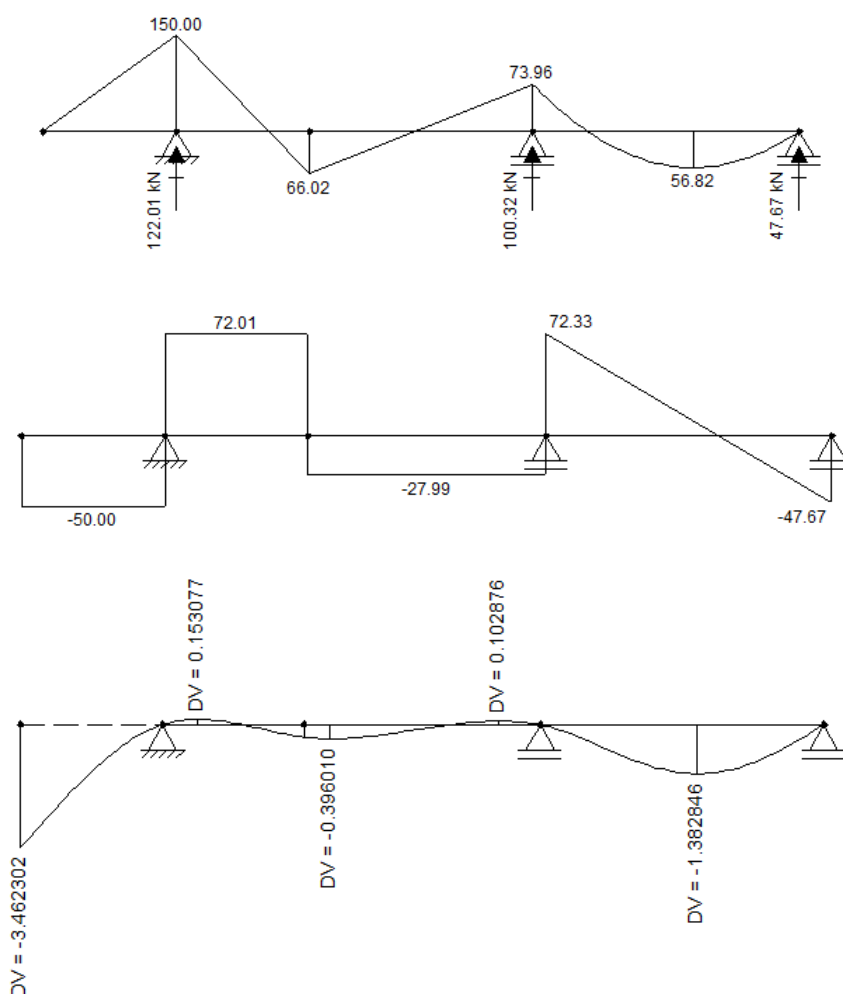
Tabela 23 – Reações de apoio para o exemplo 1 – Caso 3.

Solução	Reação vertical (KN)		
	Nó B	Nó D	Nó E
Análítica (MD)	122,000000	100,330000	47,670000
Programa	122,005261	100,321167	47,6736145
Ftool	122,005208	100,321181	47,673611

Fonte – Própria.

Os esforços da estrutura em análise calculados pelo software Ftool podem ser verificados nos diagramas na Figura 37, juntamente à deformada da viga.

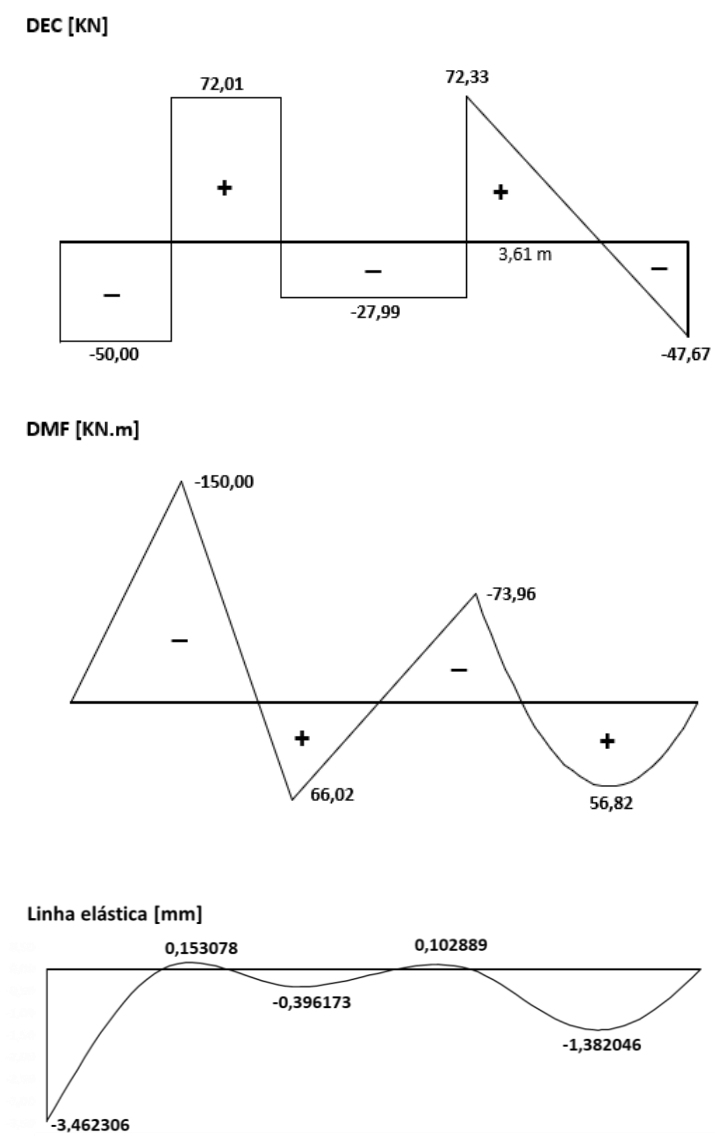
Figura 37 – Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (intermediário) segundo a resolução do software Ftool, em [KN.m] e [KN], respectivamente, além da representação da linha elástica da viga (inferior), em mm.



Fonte – Ftool.

Os diagramas de esforços e a linha elástica da viga estudada obtidos por meio da rotina implementada em termos de resultados nodais estão apresentados na Figura 38. As funções de momento fletor, esforço cortante e da linha elástica que constituem os diagramas da Figura 38 foram obtidas pelas Equações (85), (86) e (22). Os diagramas, portanto, foram a representação gráfica dessas expressões.

Figura 38 – Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (intermediário) segundo a resolução pela rotina implementada, em [KN.m] e [KN], respectivamente, além da representação da linha elástica da viga (inferior), em mm.



Fonte – Própria.

Nota-se pelos resultados obtidos que novamente os valores nodais de esforços convergiram conforme as três metodologias de cálculo, considerando-se as precisões de cada fonte consultada.

De forma geral, o desvio absoluto entre as soluções obtidas com o MD e os processos numéricos apresentaram-se quase nulos, considerando uma precisão dos resultados da ordem de 10^{-2} e com a maior variação absoluta quanto ao esforço cortante em torno de 0,01 KN ou 0,036% para o valor de cortante de 28 KN, fator observado dentre os diagramas das Figuras 36, 37 e 38.

Comparando-se os resultados de deslocamentos nodais entre a solução pelo software Ftool e pela rotina implementada, considerando-se a precisão da ordem de 10^{-2} , tem-se o maior desvio absoluto em 0,0008 mm relativo ao deslocamento vertical do ponto médio do elemento 4 ou em termos percentuais de 0,0578% de variação em relação ao valor obtido com o software Ftool.

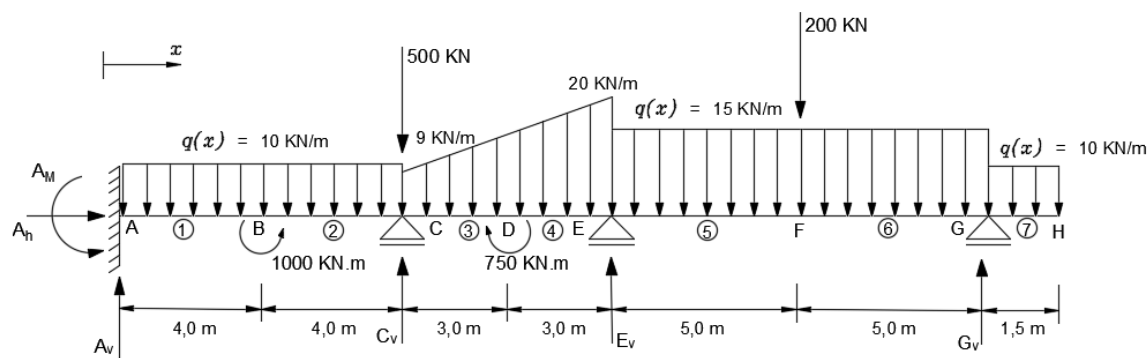
Por fim, observa-se pelos gráficos representativos dos diagramas de esforços, como também da linha elástica a compatibilidade do traçado e dos valores máximos e mínimos resultantes do cálculo estrutural, validando também a utilização desta metodologia defendida por este trabalho para esta configuração de viga.

4.3.2 Exemplo 2

Realizou-se aqui o estudo de uma viga hiperestática contínua com variados carregamentos e condições de vinculações, conforme se demonstra na Figura 39.

Ressalta-se ao fato deste exemplo utilizar seções com diferentes inércias e materiais. A estrutura foi composta por quatro vãos, sendo um engaste, dois apoios e um balanço.

Os elementos 1, 2, 5, 6 e 7 apresentam inércia de área em relação ao eixo z equivalente a um perfil I com altura com 50 cm e base 20 cm, espessura da alma em 3 cm e da mesa em 2 cm, resultando em um momento de inércia de área igual a $I_{z1} = 7,0441 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$. Já aos elementos 3 e 4, considerou-se uma seção retangular com 50 cm de altura e 20 cm de base cuja inércia de área foi de $I_{z2} = 2,0833 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$. À inércia I_{z1} foi associado um módulo de elasticidade longitudinal com o valor $E = 200 \text{ GPa}$, enquanto à inércia I_{z2} o módulo de elasticidade longitudinal $E = 25 \text{ GPa}$.

Figura 39 – Representação do esquema estático da viga do exemplo 2 – Caso 3.

Fonte – Própria.

A partir da resolução da estrutura, obteve-se os valores para as reações de apoio segundo a rotina implementada no trabalho e conforme o software Ftool, expressas na Tabela 24.

Tabela 24 – Reações de apoio para o exemplo 2 – Caso 3.

		Reações		
Solução	Nome do Apoio	M (KN.m)	F _v (KN)	F _h (KN)
Programa	A	311,464953	230,549347	0,000000
	C	-0,000023	164,031586	-
	E	0,000025	484,052521	-
	G	-0,000111	153,366486	-
Ftool	A	311,465188	230,549446	0,000000
	C	0,000000	164,031154	-
	E	0,000000	484,053003	-
	G	0,000000	153,366397	-

Fonte – Própria.

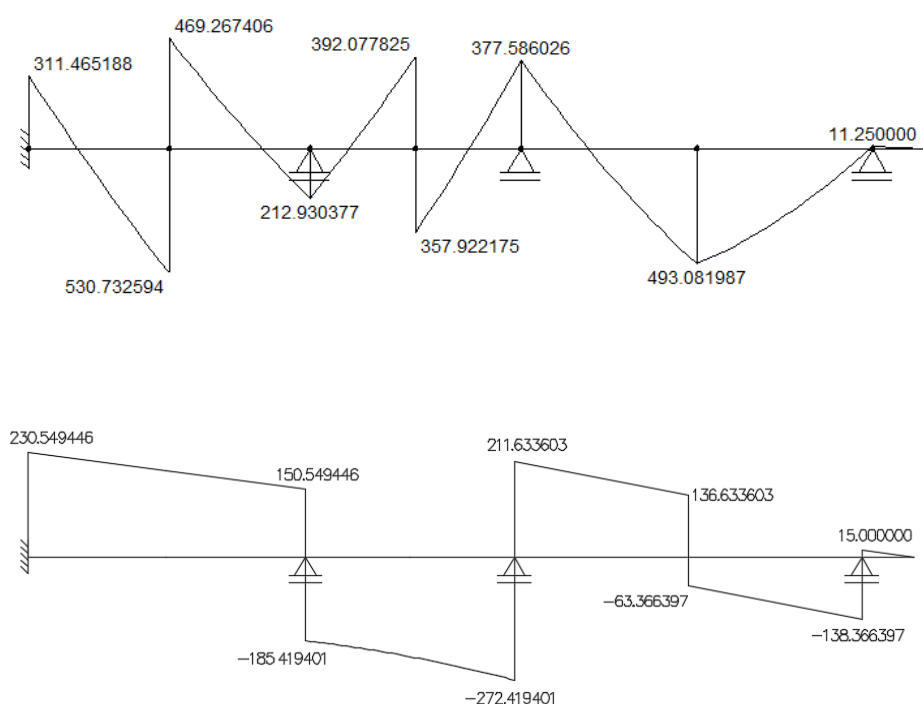
Os resultados de esforços pelos dois processos, podem ser observados nas Figuras 40 e 41 quanto ao Ftool e à rotina, respectivamente. Novamente, os dados obtidos com a rotina foram locais e, através da obtenção das funções dos esforços ao longo dos elementos utilizando-se das Equações (85) e com auxílio do software Microsoft® Office Excel, plotou-se os diagramas de esforços.

Considerando-se a precisão na ordem de 10^{-2} , os resultados de esforços apresentaram-se comparáveis aos valores obtidos com o Ftool, validando-se a aplicação da rotina. Em termos percentuais, houve a maior variação quanto ao valor

de cortante de 212,929823 KN, comparado ao apresentado pelo Ftool em 212,930377 KN, apresentando um desvio absoluto de 0,0000554 KN ou 0,00026%.

Quanto às reações de apoio, observa-se também consistência nos resultados da rotina, com desvios em torno da solução dada pelo Ftool percentualmente baixos.

Figura 40 – Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (inferior) segundo a resolução do software Ftool, em [KN.m] e [KN], respectivamente.



Fonte – Ftool.

Quanto ao traçado dos diagramas, observa-se consistência ao grau polinomial exigido às funções de esforços tendo em vista a distribuições de carga. Assim devido à presença da carga distribuída trapezoidal nos elementos 3 e 4, pelas equações (22), (86) e (87), chegou-se à função polinomial de grau 3, como se observa nas Figuras 40 e 41.

Nota-se novamente que a utilização de uma função aproximadora polinomial de grau 3 junto ao método de Rayleigh-Ritz, oferece resultados nodais precisos que,

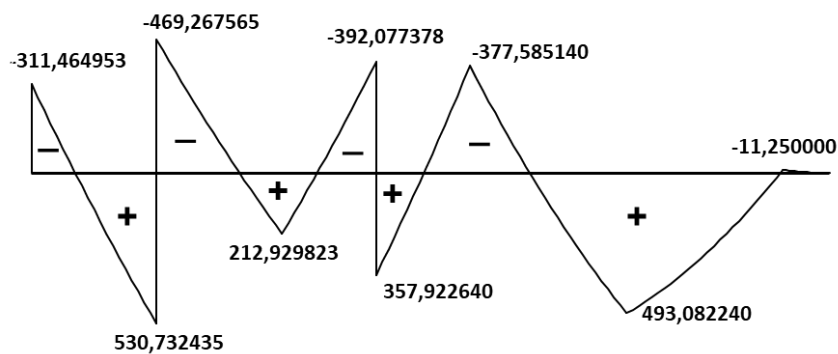
utilizados junto aos princípios fundamentais da mecânica dos sólidos, facilitam a determinação dos esforços no contínuo entre tais nós.

A utilização de diferentes materiais e geometria das seções neste exemplo ilustram a possibilidade de aplicação da rotina em situações diferentes de projeto, ampliando seu campo de validação.

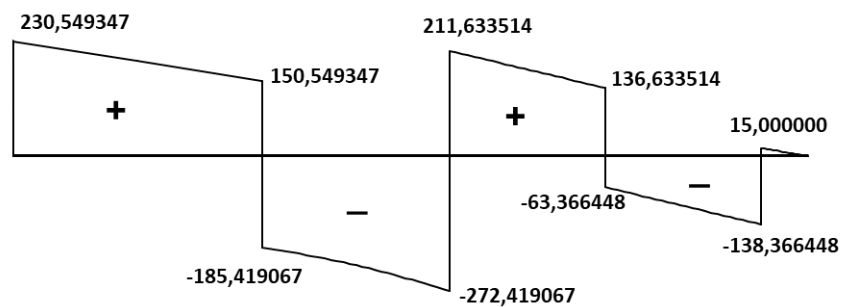
Por fim, verifica-se a possibilidade de utilização da rotina para vigas conforme as configurações descritas neste exemplo.

Figura 41 – Diagrama de esforços de momento fletor (superior) e de cortante (inferior) segundo a resolução pela rotina implementada, em [KN.m] e [KN], respectivamente.

DMF [KN.m]



DEC [KN]



Fonte – Própria.

5 CONCLUSÃO E SUGESTÕES

Destacam-se neste tópico as considerações finais relativas ao estudo realizado neste trabalho. Nesse sentido, especificou-se as conclusões da análise dos resultados alcançados frente aos objetivos estipulados, como também a definição de propostas a trabalhos futuros.

5.1 Conclusões

O objetivo deste trabalho fundamentou-se na apresentação de uma formulação numérica com base no Método dos Elementos Finitos para a análise elástica e linear de vigas segundo a teoria de Euler-Bernoulli, implementando-se também uma rotina computacional capaz de estabelecer resultados de esforços e deslocamentos de vigas conforme o carregamento externo e vinculações associados.

Utilizando-se de uma função polinomial de grau 3 como solução para o campo de deslocamentos nodais de uma viga segundo a teoria numérica de Rayleigh-Ritz e aplicando-se o conceito da mínima energia potencial total com base no cálculo variacional, foi possível chegar à formulação numérica apresentada e conforme o MEF, dividiu-se o contínuo em subdomínios finitos de forma que foram quantizados os resultados de deslocamentos nodais.

A construção da rotina computacional baseou-se na formulação matricial do método numérico apresentado, havendo sub-rotinas de montagem das matrizes de rigidez locais e globais, como também dos vetores de cargas nodais equivalentes locais e globais. Com a resolução do sistema global pelo método de Gauss-Jordan, encontrou-se os deslocamentos nos nós dos elementos e posteriormente os respectivos esforços associados. Assim, chegou-se à concretização quanto ao objetivo de elaboração de uma rotina computacional livre de código aberto em contribuição à comunidade acadêmica e científica.

De modo a avaliar a formulação e a rotina implementada, foram estabelecidos 3 casos de aplicação, sendo realizados um total de 10 exemplos numéricos com diferentes tipos de vigas contínuas, comparando-se (definido como objetivo do trabalho) a resultados obtidos com outras literaturas e softwares de análise de vigas.

Em termos gerais, os resultados de esforços e deslocamentos nodais apresentaram-se equiparáveis às soluções analíticas, tanto em vigas isostáticas

quanto hiperestáticas, validando-se também em relação aos diferentes materiais, inércias, carregamentos e vãos.

Antes de tudo, a análise por meio de valores nodais está presa a resultados em pontos singulares à estrutura como é o caso de apoios ou cargas concentradas. Caso seja necessário a obtenção de resultados intermediários aos nós, torna-se necessário um maior refinamento da matriz de elementos incluindo pontos nodais também nestas localidades. Portanto, tem-se resultados apresentados de forma discreta e não contínua em um domínio ou subdomínio.

A sub-rotina de cálculo de esforços aqui baseada na proposta apresentada em Assan (2003), bem como na rotina independente de cálculo de reações de apoio baseada no princípio da rigidez, foram utilizadas no programa principal e confrontadas à formulação definida por Castro (2009), que consistia em uma forma mais antiga e simples de cálculo de esforços pelo MEF com base na utilização diretamente das funções obtidas com as derivadas da equação polinomial aproximadora ao campo de deslocamentos. Ambas soluções ofereceram resultados discretos de esforços, reações de apoio e deslocamentos, apresentando, entretanto, a proposta de Assan (2003) maior acurácia nos resultados em meio a um menor refinamento da matriz de elementos, ao passo que a solução apresentada por Castro (2009) houve necessidade de uma maior quantidade de elementos.

Também, mesmo que utilizando-se de uma quantidade maior de elementos, a proposta mais clássica apresentou ainda uma convergência percentual não tão satisfatória em relação com a análise matricial pelo princípio da rigidez dos elementos que é a proposta definida em Assan (2003), com resultados praticamente precisos segundo a quantidade mínima de elementos. Outro fator a considerar fora os erros numéricos naturais ao processo computacional que em situações de cálculo por meio de funções com sequências de operações matemáticas tende-se a uma propagação maior de erros, como é o caso da utilização das funções representativas dos esforços e deslocamentos.

De outra forma, a partir dos valores nodais obtidos com uma malha de elementos para os exemplos apresentados nos casos 2 e 3, verificou-se que se torna possível a construção gráfica de diagramas e linhas elásticas de vigas hiperestáticas através das equações fundamentais da mecânica dos sólidos.

Distintamente, refinando-se a matriz de elementos de uma viga isostática ou hiperestática a fim de diminuir o tamanho dos elementos e estabelecendo uma linha

de interpolação linear (tendência) ou união com semirretas aos resultados nodais, pode-se chegar aos diagramas de esforços próximos aos analíticos como também à linha elástica aproximada da viga. Ressalta-se a não utilização de técnicas a posteriori de tratamento dos resultados e que mesmo assim houveram resultados consistentes.

Em resumo, destacam-se as seguintes considerações:

- Cumpriu-se ao objetivo da formulação de uma rotina capaz de calcular esforços e deslocamentos de vigas contínuas de Euler-Bernoulli;
- Fora obtido uma rotina de código livre em contribuição acadêmica;
- Os resultados obtidos com aplicação da rotina em 3 casos que reúnem 10 exemplos numéricos comparados aos resultados analíticos mostraram-se acurados com vistas da utilização de uma função polinomial de grau 3 como aproximação pelo método de Rayleigh-Ritz aplicado ao MEF em vigas segundo a teoria de Euler-Bernoulli;
- A obtenção de esforços por meio da formulação apresentada por Assan (2003) e utilizada na rotina apresentou-se com convergência maior em comparação à proposta dada em Castro (2009), ressaltando-se a proximidade em uma convergência monotônica;
- Verificou-se a obtenção de resultados precisos nos nós dos elementos sem, no entanto, a determinação da curva dos esforços no subdomínio entre nós, necessitando do maior refinamento da matriz de elementos para obtenção dos esforços e deslocamentos nestes intervalos. A partir de acurados resultados nodais, verificou-se a fácil obtenção de esforços ao longo do elemento por meio de métodos analíticos;

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como proposta para trabalhos futuros, foi possível inferir:

- A extensão desta formulação utilizando-se rótulas como representantes de pontos com momento fletor nulo ou vigas Gerber;
- Inclusões de deformações impostas e esforços devido à variação de temperatura, bem como a análise em estruturas com inércia variando em mísulas;
- Análise mais detalhada em relação aos tipos de materiais, explorando suas propriedades particulares e normatizações específicas de dimensionamento;
- Uma proposta de construção da interface gráfica que represente os valores de esforços e deslocamentos ao longo da viga.
- A implementação de mais um grau de liberdade por nó do elemento finito no sentido axial (translação horizontal) e a possibilidade de inclinação do elemento em relação à horizontal, passível de ser aplicado em pórticos planos;
- Análise de plastificação de seções baseadas também em uma análise não linear.

6 REFERÊNCIAS

AMPOLINI, Allan B.; JÚNIOR, Vítor L. K.; GRUBER, Yuri A. **Aplicação do método dos elementos finitos no estudo da teoria das placas**. 2012. 143 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012. Disponível em: http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/6623/1/CM_COECI_2015_2_05.pdf. Acesso em: 02 dez. 2018.

ARRUDA, J. R. F. **Introdução Histórica à Mecânica dos Sólidos**. Notas de aula. Campinas, 2004. Disponível em: http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/mecsol/Introducao_Historica_a_Mecanica_dos_Solidos.pdf. Acesso em: 08 maio 2019.

ASSAN, A.E. **Método dos elementos finitos**. 2.ed. Campinas: Editora Unicamp, 2003.

ASSAN, A.E. **Métodos Energéticos e Análise Estrutural**. Campinas: Editora da Unicamp, 1996.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118:2014**: projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BATHE, K.J. **Finite element procedures**. 2ª ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2014.

BEER, Ferdinand P et al. **Mecânica Vetorial para engenheiros**. 9ª ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2009.

BEER, F.P.; JOHNSTON Jr., E.R. **Resistência dos Materiais**. 3ª ed. São Paulo: Makron Books, 1995.

BITTENCOURT, M. L. **Análise computacional de estruturas**: com aplicação do Método dos elementos finitos. Campinas: Editora Unicamp, 2010.

CAIXETA, D. J. A.; OLIVEIRA, G. F. **Estudo do Método de Elementos Finitos como ferramenta na engenharia civil**. 2018. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – UniEvangélica, Anápolis, 2018.

CAMPILHO, R.D.S.G. **Método de elementos finitos**: ferramentas para análise estrutural. 1. ed. Porto: PUBLINDUSTRIA, 2012.

CAMPOS, J.V. **Formulação do Método dos Elementos Finitos para análise elástica linear de viga Timoshenko**. 2015. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2015.

CARLUCCI SANTANA, R. H.; JOSÉ SANTANA, M. **Avaliação de Desempenho de Sistemas Computacionais**: Aula 3, 2019. Notas de Aula. Universidade de São Paulo,

2019. Disponível em <<http://wiki.icmc.usp.br/images/3/33/Aula3tecnicas1.pdf>>. Acesso em 13 dez. 2019.

CARVALHO, R.C.; FIGUEIREDO FILHO, J.R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 4 ed. São Carlos: EdUFSCar, 2014. 415 p.

CARVALHO, R.C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 2 ed. v.2. São Paulo: PINI, 2013. 617 p.

CASTRO, L.M.S.S. **Método dos elementos finitos**: Análise de pórtico planos. 2009. 130 f. Notas de Aula – IST Instituto Técnico de Lisboa, Lisboa, 2009. Disponível em: <http://www.civil.ist.utl.pt/~luis/textos/AE2_Porticos.pdf>. Acesso em: 08 mai. 2019.

COOK, R. D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4. ed. USA: Wiley, 2001.

FRANÇA FILHO, L.; LINDENBERG NETO, H. **Resistência dos materiais com descrição, modelos e história dos conceitos**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2004, Brasília. **Anais** [...]. Brasília: ABENGE, 2004. Disponível em <http://www.abenge.org.br/cobenge/interna.php?ss=15&ctd=73>. Acesso em 08 maio 2019.

GASPAR, V. **Análise de técnicas de refino h-adaptativo em MEF utilizando estimativas de erro a posteriori em problemas de elasticidade unidimensional**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado de Engenharia Mecânica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2018.

HEIL, M.E. **Fortran IV**. São Paulo: McGraw-Hill, 1985.

HIBBELER, R.C. **Estática**: Mecânica para engenharia. 10. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

JUSTO, D. A. R. et al. **Cálculo numérico**: Um livro colaborativo, versão Python. 2019. Notas de aula. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2019. Disponível em <<https://www.ufrgs.br/reatmat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf>>. Acesso em 13 dez 2019.

LEAL, C.E.F. **Formulação do Método dos Elementos Finitos para Análise Elástica Linear de Placas Delgadas**. 2015. 80 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2015. Disponível em: http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/6623/1/CM_COECI_2015_2_05.pdf. Acesso em: 02 dez. 2018.

LOTTI, R. S. et al. **Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos**. R Dental Press Ortodon Ortop Facial, Maringá, v. 11, p. 35-43, 2006.

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MESQUITA, A. D. **Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada à análise elastoplástica de cascas**. 1998. 160 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/producao/249>. Acesso em: 02 dez. 2018.

MIGOTTO, D. **Autofunções e frequências de vibração do modelo de Viga Euler-Bernoulli para vigas não-clássicas**. 2011. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria - RS, 2011.

MONZINI ROTTA, S. M. **O Método dos Elementos Finitos aplicado à análise linear de vigas de Euler-Bernoulli: implementação computacional do elemento finito unidimensional com função de aproximação de quinto grau**. 2014. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão. 2014.

MORAES, A. J. **O método dos Elementos Finitos e a Engenharia Civil**. *Revista Especialize On line IPOG*, Cuiabá, v. 01, n. 10, 2015. Disponível em: <https://www.ipog.edu.br/revista-especialize-online/edicao-n10-2015/o-metodo-dos-elementos-finitos-e-a-engenharia-civil/>. Acesso em: 08. maio 2019.

NIRSCHL, G. C.; PROENÇA, S. P. B. **Método dos elementos finitos e técnicas de enriquecimento da aproximação aplicados à análise de tubos cilíndricos e cascas esféricas**. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 10, n. 47, p. 17-51, 2008. Disponível em: http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/artigos_det.php%3Fid=249.html. Acesso em: 05 dez. 2018.

OLIVEIRA, E. J. **Biomecânica básica para ortodontistas**. 1. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2000. 196p.

OÑATE, E. **Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos: análisis estático lineal**. Barcelona: CIMNE, 1992.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO – TecGRAF. **FTOOL: Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas**. Versão Educacional 4.0. Disponível em <<https://www.ftool.com.br/Ftool/>>. Acesso em jan. 2018.

QUEIROZ, B. C. N. et al. **Cálculo numérico Módulo V: Resolução Numérica de Sistemas Lineares – Parte 1**. Notas de aula. 2019. Universidade Federal de Campina Grande, 2019. Disponível em <<https://www.ppgia.pucpr.br/~jamhour/Download/pub/MatComp/3-SistemasLineares-Resumo.pdf>>. Acesso em 13 dez. 2019.

SAVASSI, W. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos em Análise Linear de Estruturas**. São Carlos: EESC-USP, 1996. 260p. v. 1

_____. **Introdução ao método dos elementos finitos**. 1992. Notas de aula - SET-Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

SÉLIS RODRIGUES, Lilian. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para a avaliação de comportamento estrutural de vigas de Euler-Bernoulli via Método dos Elementos Finitos**. 2016. 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2016.

SORIANO, H. L. **Elementos finitos**: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

_____. **Estática das estruturas**. 3.ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

SORIANO, H. L.; LIMA, S.S. **Análise de Estruturas**: Método das Forças e Método dos Deslocamentos. 2. ed. atual. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006. 301 p.
SÜSSEKIND, J.C. **Curso de Análise Estrutural** – 1. Estruturas Isostáticas. 6. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1981. 366 p. v. 1.

_____. **Curso de Análise Estrutural** – 2. Deformações em estruturas Método das Forças. 4. ed. Porto Alegre: Globo, 1980. 310 p. v. 2.

_____. **Curso de Análise Estrutural** – 3. Método das Deformações Processo de CROSS. 7. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1987. 293 p. v. 3.

TIMOSHENKO, Stephen P. **Mecânica dos sólidos**. v.2. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1984.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 6. ed. Oxford: ELSERVIER Butterworth Heinemann, 2005.

ANEXO A– Código fonte comentado do programa implementado no trabalho

```

/=====
/***** Programa de analise de Vigas *****/
/=====
/
!Observacoes:
/  Codigo em FORTRAN 95
/  Observar recuo de 6 caracteres para escrita do código, com exceção dos números
/  identificadores a esquerda
/
/-----
/===== Especificacao de variaveis =====
/-----
/ nom1      =  Nome do arquivo de entrada;
/ nom2      =  Nome do arquivo de saida;
/ NomViga   =  Nome da viga em estudo;
/ Nele      =  Numero de elementos;
/ Npn       =  Numero de pontos nodais;
/ Nmat      =  Numero de materiais;
/ Nnvinc    =  Numero de nos vinculados;
/ Nec       =  Numero de elementos carregados;
/ Nnc       =  Numero de nos carregados;
/ Iz        =  Valor do momento de inercia do tipo TipMI;
/ TipMI     =  Tipo do momento de inercia;
/ E         =  Valor do modulo de elasticidade do tipo TipME;
/ TipME     =  Tipo do modulo de elasticidade;
/ QtdMI     =  Quantidade de tipos de momento de inercia (TipMI);
/ QtdMAT    =  Quantidade de tipos de materiais (TipME);
/ l         =  Comprimento do elemento;
/ Plele(i)  =  Ponto inicial do do elemento i;
/ PFele(i)  =  Ponto final do do elemento i;
/ vincy(i)  =  Vinculacao em y do no i;
/ vincz(i)  =  Vinculacao em z do no i;
/ PosiCC    =  Posicao da equacao para condicao de contorno;
/ NtEq      =  Numero total de equacoes a serem anuladas;
/ No        =  Numero do no vinculado;
/ NElec     =  Numero do elemento carregado;
/ Floc      =  Vetor de forcas nodais externas;
/ q1        =  Valor a esquerda do carregamento distribuido;
/ q2        =  Valor a direita do carregamento distribuido;
/ Kele      =  Matriz de rigidez do elemento;
/ Rele      =  Vetor de cargas nodais equivalentes do elemento;
/ x(i)      =  Coordenada do elemento i;
/ Kglob     =  Matriz de rigidez global;
/ Rglob     =  Vetor de cargas nodais equivalentes global;
/ Esf       =  Vetor de esforcos nodais;
/ Rea       =  Vetor de reacoes de apoio nodais;
/ v         =  Vetor de parametros nodais;
/ W1,W2     =  Variaveis auxiliares;
/ W3,W4     =  Variaveis auxiliares;
/ aux2,aux3 =  Variaveis auxiliares;
/ aux4,aux7 =  Variaveis auxiliares;
/ aux8,aux9 =  Variaveis auxiliares;
/ aux10     =  Variavel auxiliar;
/ aux11     =  Variavel auxiliar;

```

```

! aux12      =      Variavel auxiliar;
! aux13      =      Variavel auxiliar;
! aux14      =      Variavel auxiliar;
! aux15      =      Variavel auxiliar;
! aux16      =      Variavel auxiliar;
! aux17      =      Variavel auxiliar;
! T          =      Contador;

!=====
!===== Criacao do modulo =====
!=====
!
Module variaveis

Implicit none
Integer :: k, i, j, p, m, Nele, Npn , Nnvinc, Nec,Nnc
Integer :: QtdMI, QtdMAT, TipME(60), TipMI(60), PosiCC(60)
Integer :: Plele(60), PFele(60), vincy(60), vincz(60), T(400)
Integer :: NtEq,No(61),NElec(60)
Integer :: aux2(4), aux3, aux4, aux7(4), aux8, aux9, aux10, aux14, aux15
Real(8)  :: E(60), Iz(60), Floc(60), q1(60), q2(60), Kele(4,4), l(60), Esf(122)
Real(8)  :: x(60), Rele(4), Rglob(120), Kglob(120,120), v(120), Rea(122)
Real(8)  :: W1, W2, W3, W4, aux11, aux12(120), aux13(120), aux16(4), aux17
Character*20 :: nom1, nom2, NomViga

End module
!
!=====
!===== Programa de Calculo de vigas continuas horizontais =====
!=====
!
Program vigas
!
!=====
!===== Declaracao das variaveis =====
!=====
!
Use variaveis
!
!-----
!===== Chamada das Subrotinas =====
!-----
!
!
Call AbrirArquivo
Call LerArquivo
Call EscrArquiSaida
Call MatrizRG
Call VetCEQglob
Call CondiContorno
Call SoluSistema
Call Reapoio
Call Esforcos
Call ImpressEsforcos
Call FechaArquivos

Stop
End program vigas
!
```

```

!
!-----
!===== Subrotina AbrirArquivo - Declaracao e abertura dos arquivos =====
!-----
!
Subroutine AbrirArquivo

Use variaveis

Write(*,01)
Write(*,02)
Read(*,03) nom1 !E feita a leitura do nome do arquivo de entrada
Write(*,04)
Read(*,03) nom2 !E feita a leitura do nome do arquivo de saida
Write(*,05)
Read(*,03) NomViga !E feita a leitura do nome da viga

01 Format(/,5x,50('#'),/,14x,'Programa de an lise de vigas:',/,5x,50('#'))

      !Tem-se aqui a definicao do nome do arquivo com dados iniciais
02 Format(//,10x,'Defina o nome do arquivo de entrada:')

      !Aqui se define o nome do arquivo com os dados de saida
03 Format(a20)
04 Format(//,10x,'Defina o nome do arquivo de saida:')

05 Format(//,10x,'Defina o nome da viga:')

      !Abertura dos arquivos de texto
open(7,file=nom1//'.txt')
open(8,file=nom2//'.txt')

Return
End subroutine
!
!-----
!===== Subrotina LerArquivo - Leitura dos dados da viga =====
!-----
!
      !Leitura dos dados iniciais
Subroutine LerArquivo

Use variaveis

Read(7,*)
Read(7,*)
Read(7,*) Nele, Npn, QtdMAT, QtdMI, Nnvinc

      !Definicoes geometricas e de materiais dos elementos
Read(7,*)
Read(7,*)(k,Plele(k),PFele(k),TipME(k),TipMI(k),i=1,Nele)

      !Definicoes do material de cada elemento
Read(7,*)
Read(7,*)(p,E(p),p=1,QtdMAT)

      !Definicoes da secao de cada elemento
Read(7,*)

```

Read(7,*)(i, lz(i), i=1,QtdMI)

!Anulando os vetores vincy(i), vincz(i) e Floc(i).

Do 06 i=1,Npn

 vincy(i)=0

 vincz(i)=0

 Floc(i)=0

06 **Continue**

!Leitura das coordenadas dos nos

Read(7,*)

Read(7,*)(i,x(i), k=1,Npn)

!Leitura das vinculações dos nos

Read(7,*)

Read(7,*)(No(k),vincy(No(k)),vincz(No(k)), k=1,Nnvinc)

!Anulando os vetores q1(i) e q2(i)

Do 09 i=1,Nele

 q1(i)=0

 q2(i)=0

09 **Continue**

!Leitura do carregamento

Read(7,*)

Read(7,*) Nec, Nnc

!Carregamento dos nos

If(Nnc.ne.0) then

Read(7,*)

Read(7,*)(i,Floc(2*i-1),Floc(2*i),k=1,Nnc)

Endif

!Carregamento dos elementos

If(Nec.ne.0) then

Read(7,*)

Read(7,*)(NElec(k),q1(NElec(k)),q2(NElec(k)),k=1,Nec)

Endif

Return

End subroutine

!

!-----

!===== **Subrotina EscrArquiSaida - Impressao dos dados da viga** =====

!-----

!

Subroutine EscrArquiSaida

Use variaveis

!Impressao em tela dos dados iniciais

!Dados da viga

Write(*,10)

Write(*,11)NomViga,Nele,Npn,Nnvinc

!Sobre o material

Write(*,12) QtdMAT

Write(*,13)(TipME(i),E(i),i=1,QtdMAT)

Write(*,14)

!Sobre a inercia

Write(*,15) QtdMI

Write(*,16)(TipMI(i),Iz(i),i=1,QtdMI)

Write(*,19)

!Sobre os nos

Write(*,17)

Write(*,18)(i,x(i),vincy(i),vincz(i),Floc(2*i-1),Floc(2*i),i=1,Npn)

Write(*,19)

!Sobre os nos

Write(*,20)

Write(*,21)(i,Plele(i),PFele(i),Iz(TipME(i)),E(TipME(i)),q1(NElec(i)),q2(NElec(i)),i=1,Nele)

Write(*,19)

!Pausa para leitura em tela

Pause"Para continuar aperte 'go'"

!Impressao dos dados iniciais no arquivo de saida

Write(8,10)

Write(8,11)NomViga,Nele,Npn,Nnvinc

Write(8,12) QtdMAT

Write(8,13)(TipME(i),E(i),i=1,QtdMAT)

Write(8,14)

Write(8,15) QtdMI

Write(8,16)(TipMI(i),Iz(i),i=1,QtdMI)

Write(8,19)

Write(8,17)

Write(8,18)(i,x(i),vincy(i),vincz(i),Floc(2*i-1),Floc(2*i),i=1,Npn)

Write(8,19)

Write(8,20)

Write(8,21)(i,Plele(i),PFele(i),Iz(TipME(i)),E(TipME(i)),q1(NElec(i)),q2(NElec(i)),i=1,Nele)

Write(8,19)

i=0

!Formatos utilizados

- 10 **Format**(/,10x,'Verifique os dados da viga:')
- 11 **Format**(//,5x,50('*'),//,10x,'Nome da Viga =',1x,a10,/,10x'Numero de elementos =',10x,i2,/,&10x,'Numero de pontos nodais =',6x,i2,/,10x,'Numero de nos vinculados =',5x,i2,/,5x,50('*'))
- 12 **Format**(/,10x,'A quantidade de materiais da viga e',2x,i2,/,10x,'Tipo de material',10x,&'Valor do ME(E)')
- 13 **Format**(/,15x,i2,20x,f16.3)
- 14 **Format**(/,5x,50('*'))
- 15 **Format**(/,10x,'A quantidade de inercias da viga e =',1x,i2,/,10x,'Tipo de inercia',10x,'Valor&do MI(Iz)')

134

```
16      Format(/,15x,i2,20x,f10.8)

17      Format(/,30x,'Caracteristicas dos nos',/,4x,'No',4x,'Coord. do no',4x,'Restricao y',4x,&
'Restricao z',4x,'Carga(KN)',4x,'Momento(KN.m)')

18      Format(/,4x,i2,6x,f7.3,11x,i2,11x,i2,9x,f10.3,5x,f10.3)

19      Format(/,5x,80('*'))

20      Format(/,27x,'Caracteristicas dos elementos',/,21x,'Nos',47x,'Carregamento',/,2x,&
'Elemento',5x,'Inicial',3x,'Final',7x,'Inercia',8x,'Mod.Elast.',7x,'Inicial',3x,'Final')

21      Format(/,4x,i2,11x,i2,6x,i2,7x,f10.6,3x,f16.1,4x,f8.1,1x,f8.1)

Return
End subroutine
!
!-----
!===== Subrotina MatrizRG - Calcula a matriz de rigidez global =====
!-----
!
Subroutine MatrizRG

Use variaveis

!Definindo o tamanho dos elementos
Do 22 j=1,Nele
    l(j)=x(PFele(j))-x(Plele(j))
22 Continue

!Anulando os valores da matriz de rigidez global
Do 23 j=1,2*Npn
    Do 24 k=1,2*Npn
        Kglob(j,k)=0
24 Continue
23 Continue

!Montagem da matriz de rigidez global
Do 25 i=1,Nele
    Call MatrizRE
    aux2(2)=2*Plele(i)
    aux2(4)=2*PFele(i)
    aux2(1)=aux2(2)-1
    aux2(3)=aux2(4)-1
    Do 26 j=1,4
        aux3=aux2(j)
        Do 27 k=1,4
            aux4=aux2(k)
            Kglob(aux3,aux4)=Kglob(aux3,aux4)+Kele(j,k)
27 Continue
26 Continue
25 Continue
Return
End subroutine
!
!-----
!===== Subrotina VetCEQglob - Calcula vetor de cargas nodais =====
!===== equivalentes global =====
```

```

!-----
!
Subroutine VetCEQglob

Use variaveis

!Definindo o tamanho dos elementos
Do 28 i=1,Nele
  l(i)=x(PFele(i))-x(Plele(i))
28 Continue

!Anulando os valores do vetor de cargas nodais equivalentes global
Do 29 i=1,2*Npn
  Rglob(i)=0
29 Continue

!Montagem do vetor de cargas nodais equivalentes com cargas nos el
!ementos
If (Nec.ne.0) then
  Do 30 i=1,Nec
    Call VetCEQele
    aux7(2)=2*Plele(i)
    aux7(4)=2*PFele(i)
    aux7(1)=aux7(2)-1
    aux7(3)=aux7(4)-1
    Do 31 j=1,4
      aux8=aux7(j)
      Rglob(aux8)=Rglob(aux8)+Rele(j)
31 Continue
30 Continue
End if

!Montagem do vetor de cargas nodais equivalentes com cargas nos
!nos dos elementos
Do 32 i=1,2*Npn
  Rglob(i)=Rglob(i)+Floc(i)
32 Continue

Return
End subroutine
!
!-----
!===== Subrotina CondiContorno - estabelece as =====
!===== condicoes de contorno =====
!-----
!
Subroutine CondiContorno

Use variaveis

!Identificando as posicoes de linha e coluna a serem anuladas
!Tambem quantificacao das equacoes a serem anuladas
j=0
Do 33 i=1,Nnvinc
If (vincy(No(i)).eq.0) go to 34
j=j+1
PosiCC(j)=2*No(i)-1
34 If (vincz(No(i)).eq.0) go to 33

```



```

j=j+1
PosiCC(j)=2*No(i)
33  Continue
NtEq=j

!Estabelecendo as condicoes de contorno no vetor de cargas globais
!e na matriz de rigidez global
Do 35 i=1,NtEq
aux9=PosiCC(i)
Do 36 k=1,2*Npn
Kglob(aux9,k)=0
Kglob(k,aux9)=0
36  Continue
Rglob(aux9)=0
Kglob(aux9,aux9)=1
35  Continue

Return
End subroutine
!
!-----
!===== Subrotina SoluSistema - Resolucao do sistema global =====
!-----
!
Subroutine SoluSistema

Use variaveis
!Resolucao de sistema lineares pelo m,todo de Gauss-Jordan por
!pivoteamento parcial

Do 37 k=1,2*Npn-1
Do 38 i=k,2*Npn-1
aux10=i+1
aux11=Kglob(aux10,k)/Kglob(k,k)
Do 39 j=1,2*Npn
Kglob(aux10,j)=Kglob(aux10,j)-aux11*Kglob(k,j)
39  Continue
Rglob(aux10)=Rglob(aux10)-aux11*Rglob(k)
38  Continue
37  Continue

v(2*Npn)=Rglob(2*Npn)/Kglob(2*Npn,2*Npn)
Do 40 i=(2*Npn)-1,1,-1
v(i)=Rglob(i)
Do 41 k=i+1,2*Npn
v(i)=v(i)-Kglob(i,k)*v(k)
41  Continue
v(i)=v(i)/Kglob(i,i)
40  Continue

Return
End subroutine
!
!-----
!===== Subrotina Reapoio - Caculo das reacoes de apoio nodais =====
!-----
!
Subroutine Reapoio

```

Use variaveis

!montagem novamente das matrizes globais

Call MatrizRG

Call VetCEQglob

!Calulo das reações de apoio com as matrizes sem condicao de

!contorno

Do 42 i=1,2*Npn

aux12(i)=0

42 **Continue**

Do 43 i=1,2*Npn

Do 44 j=1,2*Npn

aux12(j+1)=aux12(j)+Kglob(i,j)*v(j)

44 **Continue**

aux13(i)=aux12(1+2*Npn)

43 **Continue**

Do 45 i=1,2*Npn

Rea(i)=aux13(i)-Rglob(i)

45 **Continue**

Return

End subroutine

!

!-----

!===== Subrotina Esforços - Calculo das esforços dos elementos =====

!-----

!

Subroutine Esforços

Use variaveis

aux14=1

Do 46 i=1,Nele

aux15=i-1

Do 47 j=1,4

Rele(j)=0

47 **Continue**

!Calulo das matrizes dos elementos

Call MatrizRE

If ((NElec(aux14)).eq.i) **Then**

Call VetCEQele

aux14=aux14+1

Endif

Do 48 j=1,4

aux16(j)=0

48 **Continue**

!Calculo dos esforços

aux17=0

Do 49 k=1,4

Do 50 p=1,4

138

```

                    aux17=aux17+Kele(k,p)*v(p+2*aux15)
50      Continue
                    aux16(k)=aux17
                    aux17=0
49      Continue

      Do 51 J=1,4
          Esf(j+4*aux15)=aux16(j)-Rele(j)
51      Continue

      Do 52 J=2,3
          Esf(j+4*aux15)=-Esf(j+4*aux15)
52      Continue

46      Continue

      Return
      End subroutine
      !
      !-----
      !===== Subrotina ImpressEsforços - Impreme os resultados da análise =====
      !-----
      !
      Subroutine ImpressEsforços

      Use variaveis

      !Impressao dos deslocamentos
      Write(8,61)
      Do 53 i=2,2*Npn,2
          Write(8,62) i/2,v(i-1),v(i)
53      Continue

      !Impressao da reacoes de apoio
      Write(8,63)
      Do 54 i=1,2*Npn
          T(i)=0
54      Continue
          T(1)=1
      Do 55 i=3,2*Npn,2
          T(i)=T(i-2)+1
55      Continue
      Do 56 j=1,2*Npn,2
          Write(8,64) T(j),Rea(J),Rea(j+1)
56      Continue

      !Impressao dos esforcos
      Write(8,65)
      Do 57 l=1,2*Npn
          T(l)=0
57      Continue
          T(1)=1
      Do 58 l=5,4*Nele-3,4
          T(l)=T(l-4)+1
58      Continue
      Do 59 j=1,4*Nele-3,4
          Write(8,66) T(j),Esf(J),Esf(J+2),Esf(J+1),Esf(J+3)
59      Continue

```

```

!Formatos utilizados
61 Format(/,35x,"Resultados da analise",/,5x,80('*'),/,30X,'Resultados - Deslocamentos dos&
nos',/5x,80('*'),/,10X,'No',20X,'Vertical',20X,'Rotacao',/)
62 Format(10X,i2,12X,f16.12,11X,f16.12)
63 Format(/,5x,80('*'),/,30X,'Resultados - Reacoes de Apoio',/5x,80('*'),/,25X,'No',2X,'Reacao&
Cortante',5X,'Reacao Momento',/)
64 Format(20X,i2,6X,f12.7,6X,f12.7)
65 Format(/,5x,80('*'),/,35X,'Resultados - Esforços',/5x,80('*'),/,5X,'Elem.',2X,'Esfor. Cort.&
Esquerda',5X,'Esfor. Cort. Direita',6X,'Momento Esquerda',5X,'Momento Direita'/)
66 Format(7X,i2,6X,f12.7,13X,f12.7,12X,f12.7,10X,f12.7)

Return
End subroutine
!
!-----
!===== Subrotina MatrizRE - Calcula a matriz de rigidez do elemento =====
!-----
!
Subroutine MatrizRE

Use variaveis

W1=12*E(TipME(i))*Iz(TipMI(i))/(l(i)**3)
W2=6*E(TipME(i))*Iz(TipMI(i))/(l(i)**2)
W3=4*E(TipME(i))*Iz(TipMI(i))/l(i)
W4=2*E(TipME(i))*Iz(TipMI(i))/l(i)

Do 67 j=1,4
Do 68 k=1,4
Kele(j,k)=0
68 Continue
67 Continue
Kele(1,1)= W1
Kele(1,2)= W2
Kele(1,3)=-W1
Kele(1,4)= W2
Kele(2,1)= W2
Kele(2,2)= W3
Kele(2,3)=-W2
Kele(2,4)= W4
Kele(3,1)=-W1
Kele(3,2)=-W2
Kele(3,3)= W1
Kele(3,4)=-W2
Kele(4,1)= W2
Kele(4,2)= W4
Kele(4,3)=-W2
Kele(4,4)= W3

Return
End subroutine
!
!-----
!===== Subrotina VetCEQele - Calcula vetor de cargas nodais =====
!===== equivalentes do elemento =====
!-----
!

```

Subroutine VetCEQele**Use** variaveis
$$\begin{aligned} \text{Rele}(1) &= l(\text{NElec}(i)) * (0.35 * q1(\text{NElec}(i)) + 0.15 * q2(\text{NElec}(i))) \\ \text{Rele}(2) &= (q1(\text{NElec}(i)) * (l(\text{NElec}(i))^{**2}) / 20) + (q2(\text{NElec}(i)) * (l(\text{NElec}(i))^{**2}) / 30) \\ \text{Rele}(3) &= l(\text{NElec}(i)) * (0.15 * q1(\text{NElec}(i)) + 0.35 * q2(\text{NElec}(i))) \\ \text{Rele}(4) &= (-q1(\text{NElec}(i)) * (l(\text{NElec}(i))^{**2}) / 30) - (q2(\text{NElec}(i)) * (l(\text{NElec}(i))^{**2}) / 20) \end{aligned}$$
Return**End subroutine**

!

!-----

!===== **Subrotina FechaArquivos - Fecha os arquivos de texto** =====

!-----

!

Subroutine FechaArquivos**Close**(7)**Close**(8)**Return****End subroutine**

ANEXO B – Código fonte comentado das sub-rotinas de cálculo de esforços

Este código aqui apresentado refere-se à formulação de cálculo segundo a proposta de obtenção de esforços apresentada por Castro (2009) e neste trabalho especificada.

Ressalta-se que este trecho do código quando utilizado é parte do programa principal, diferente ao apresentado pela rotina contida no Anexo A que calcula os esforços por meio uma sub-rotina. Com exceção à sub-rotina de cálculo de reações de apoio, a aplicação da análise com base em Castro (2009) consistiu na inserção da sub-rotina abaixo especificada no programa implementado.

Neste caso também se substituiu a variável *Esf* pelas variáveis *Mf1*, *Mf2* e *Q*, representantes dos esforços de momento fletor no início e fim do elemento e do cortante no início e fim do elemento, respectivamente, além do acréscimo das variáveis A, B, C e D auxiliares.

```

!
!-----
!===== Subrotina Esforcos - Calculo das esforços dos elementos (Castro) =====
!-----
!
Do 100 i=1,Nele
    Mf1(i)=0.
    Mf2(i)=0.
    Q(i)=0.
100 Continue
Do 101 l=1,Nele
    j=2*Plele(i)
    k=2*PFele(i)
    D=E(TipME(i))
    C=Iz(TipMI(i))
    A= -D*C/l(i)/l(i)
    B=A/l(i)
    Mf1(i)=A*(-6.*v(j-1)-4.*l(i)*v(J)+6.*v(k-1)-2.*l(l)*v(k))
    Mf2(i)=A*(6.*v(j-1)+2.*l(i)*v(J)-6.*v(k-1)+4.*l(i)*v(k))
    Q(i)=B*(12.*v(j-1)+6.*l(i)*v(j)-12.*v(k-1)+6.*l(i)*v(k))
101 Continue

```


ANEXO C– Exemplos de arquivos de dados de entrada e saída comentados

São descritos agora os arquivos de entrada de dados e saída de resultados obtidos com a análise do exemplo 2 – CASO 2, comentado.

- **Arquivo de entrada**

VIGA 2 CASO 2 (3 ELEMENTOS)

Num.Elem.	Num.PN.	Qtd.Mat.	Qtd.MI.	Num Nos	Vinc.
3	4	1	1	3	
Elemento	Ponto inicial	Ponto final	TP.ME.	TP.MI.	
1	1	2	1	1	
2	2	3	1	1	
3	3	4	1	1	
Tipo.ME.	Mod. Elast.				
1	20E5				
Tipo. MI.	Mom. Inerc.				
1	1.0E-4				
Nó	Coordenadas				
1	0.0				
2	6.0				
3	12.0				
4	14.0				
Nó	Vínculo y	Vínculo z			
1	1	1			
2	1	0			
3	1	0			
Nec	Nnc				
2	1				
Nó	Carga y	Momento z			
4	-4.0	0.0			
Elemento	Carga 1	Carga 2			
1	-4.0	-4.0			
2	-4.0	-4.0			

A primeira linha configura a descrição da viga e a segunda o nome das variáveis a serem introduzidas, não sendo computadas como informações a serem lidas pelo programa. O mesmo ocorre com as linhas 4, 8, 10, 12, 17, 21, 23 e 25.

A terceira linha corresponde aos valores respectivos ao número de elementos, número de pontos nodais, quantidade de tipo de materiais, quantidade de tipos de inércia e número de nós vinculados.

As linhas 5, 6 e 7 referem-se aos números dos elementos, seus pontos iniciais e finais e o tipo de material e inércia de cada elemento.

A linha 9 corresponde ao tipo de material e seu respectivo valor de módulo de elasticidade associado. De forma semelhante ocorre na linha 11, porém em referência ao momento de inércia.

As linhas 13, 14, 15 e 16 referem-se ao número dos nós e suas respectivas coordenadas em relação a uma origem no início à esquerda da viga.

As linhas 18, 19 e 20 evidenciam os nós vinculados, associando o tipo de vínculo a ele aplicado. Observa-se ao fato de apenas indicar os nós que são vinculados ou livres.

Na linha 22 estão indicados os números de nós e elementos carregados.

Na linha 24 dispõe-se acerca do carregamento de força vertical e momento fletor em um respectivo nó. Novamente especificam-se apenas os nós carregados.

Por fim, nas linhas 26 e 27 especificam-se os carregamentos distribuídos sobre o elemento, indicando o valor da carga no início e fim do elemento.

- **Arquivo de saída**

Verifique os dados da viga:

Nome da Viga = viga 2

Numero de elementos = 3
 Numero de pontos nodais = 4
 Numero de nos vinculados = 3

A quantidade de materiais da viga e 1

Tipo de material Valor do ME(E)

1 2000000.000

A quantidade de inercias da viga e 1

Tipo de inercia Valor do MI (Iz)

1 0.00010000

Características dos nos

No	Coord. do no	Restricao y	Restricao z	Carga(KN)	Momento(KN.m)
1	0.000	1	1	0.000	0.000
2	6.000	1	0	0.000	0.000

3	12.000	1	0	0.000	0.000
4	14.000	0	0	-4.000	0.000

Características dos elementos

Elemento	Nos		Inercia	Mod.Elast.	Carregamento	
	Inicial	Final			Inicial	Final
1	1	2	0.000100	2000000.0	-4.0	-4.0
2	2	3	0.000100	2000000.0	-4.0	-4.0
3	3	4	0.000100	2000000.0	0.0	0.0

Resultados da analise

Resultados - Deslocamentos dos nos

No	Vertical	Rotacao
1	0.000000000000	0.000000000000
2	0.000000000000	-0.008571428571
3	0.000000000000	0.034285714286
4	0.015238095238	-0.005714285714

Resultados - Reacoes de Apoio

No	Reacao Cortante	Reacao Momento
1	11.7142857	11.4285714
2	25.1428571	-0.0000000
3	15.1428571	-0.0000000
4	0.0000000	-0.0000000

Resultados - Esforços

Elem.	Esfor. Cort. Esq.	Esfor. Cort. Dir.	Momento Esq.	Momento Dir.
1	11.7142857	-12.2857143	-11.4285714	-13.1428571
2	12.8571429	-11.1428571	-13.1428571	-8.0000000
3	4.0000000	4.0000000	-8.0000000	-0.0000000

Apêndice A1 – Resolução de sistemas lineares pelo método de Gauss-Jordan

Muitos são os problemas do cotidiano das ciências exatas resolvidos pela solução de sistemas de equações lineares. De forma a auxiliar o entendimento acerca da aplicação do método de Gauss-Jordan para resolução do sistema global dado pela Equação (79) que é fundamento deste trabalho, foi descrito neste apêndice resumidamente acerca deste processo. (JUSTO et al, 2019).

Existem dois caminhos para solução numérica de sistemas lineares: métodos diretos e métodos iterativos. Os métodos diretos apresentam soluções a partir de um número finito de passos ou operações, enquanto os métodos iterativos determinam uma solução com base numa sequência de aproximações para o valor do vetor solução conforme uma precisão pré-estabelecida. (BARROSO et al, 1987; QUEIROZ et al, 2019).

Um sistema linear de ordem n pode ser descrito, conforme Justo et al (2019), por:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + a_{n3} \cdot x_3 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n \end{cases} \quad (\text{A1.1a})$$

considerando com um mesmo número n de equações e incógnitas.

Representando-o matricialmente, chega-se a:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (\text{A1.1b})$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{A1.1c})$$

Outra forma de representar este sistema consiste em construir a matriz estendida ou completa que segundo Justo et al (2019) e Bitencourt (2010) pode ser expressa por:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

de forma que a matriz $[A|b]$ é a representatividade das constantes do sistema e a matriz $\mathbf{X}$ das soluções.

Conforme Barroso et al (1987), constituem transformações elementares as operações ou combinações com as equações de um sistema linear que visem trocar o ordenamento de duas equações do sistema, multiplicar uma equação do sistema por uma constante não nula e adicionar duas equações ou a combinação de linear de uma equação em outra.

Por definição, também conforme Barroso et al (1987), dois sistemas serão equivalentes se um puder for obtido segundo a transformação elementar do outro. Ambos sistemas, na condição de equivalência, deverão apresentar as mesmas soluções ou ser incompatíveis.

O método de Eliminação de Gauss enquadra-se aos métodos diretos, consistindo na formação de uma matriz triangular, resolvida de forma retroativa por meio de transformações elementares na matriz completa $[A|b]$ e na matriz $\mathbf{X}$. (QUEIROZ et al, 2019).

O processo de Gauss-Jordan dispõe também da formação de uma matriz triangular por meio de transformações elementares, porém, utilizando-se de pivôs de eliminação até que se obtenha os valores da diagonal principal unitários e a matriz se torne triangular inferior. (BARROSO et al, 1987; BITENCOURT, 2010).

Assim, considerando o método de Gauss-Jordan, conforme Bitencourt (2010), considerando-se o elemento a_{11} como pivô, define-se:

$$M_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad (\text{A1.3})$$

em que M_{21} corresponde ao termo anulador da linha 2.

Realizando a transformação elementar entre as linhas 1 e 2, tem-se para o novo primeiro elemento da segunda linha:

$$a'_{21} = a_{21} - M_{21} \cdot M_{11} = a_{21} - a_{21} = 0 \quad (A1.4)$$

E quanto aos demais elementos da segunda linha, estes adquirem novos valores segundo a mesma regra de combinação linear, formando os valores 0, a'_{22} , ..., a'_{2n} . O método indica a divisão também da primeira linha pelo valor do elemento a_{11} , porém neste trabalho não se realizara tal operação de forma a modificar o método, sem, no entanto, haver prejuízos nos resultados.

Assim, chega-se ao seguinte sistema equivalente:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (A1.5)$$

Utilizando-se como pivô agora o elemento a'_{22} , chega-se ao próximo sistema equivalente:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a''_{nn} & b''_n \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (A1.5)$$

E assim sucessivamente até que se obtenha uma matriz triangular quanto aos termos da matriz A , de forma que o valor do último elemento x_n da matriz $\mathbf{X}$ seja dado por:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad (A1.6)$$

As demais soluções correspondentes aos elementos da matriz $\mathbf{X}$ pode ser dado por:

$$x_{(n-k)} = \frac{b_{(n-k)}^{(n-k)} - \sum_{i=1}^n a_{(n-k),(i)}^{(i)} \cdot x_i}{a_{(n-k),(n-k)}^{(i)}}, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (A1.7)$$

sendo n a ordem do sistema.

No trabalho em análise o sistema considerado pela Equação (79) é comparável ao sistema dado pela Equação (A1.1b), de forma que as matrizes correspondem por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} , \quad \mathbf{X} = \mathbf{V} \quad e \quad \mathbf{R} = \mathbf{B} \quad (\text{A1.8})$$