

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE
GOIÁS
CÂMPUS ITUMBIARA
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

Wellington José Malaquias

**PROJETO E SIMULAÇÃO DE MÁQUINA SÍNCRONA DE ÍMÃ
PERMANENTE**

**ITUMBIARA-GO
2026**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Wellington José Malaquias

Matrícula: 20152040070016

Título do Trabalho: Projeto e simulação de máquina síncrona de ímã permanente

Autorização - Marque uma das opções

1. (X) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Itumbiara-GO, 26/05/2026.
Local Data

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Wellington José Malaquias

**PROJETO E SIMULAÇÃO DE MÁQUINA SÍNCRONA DE ÍMÃ
PERMANENTE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca examinadora do Curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Itumbiara, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Arantes de Freitas.

**ITUMBIARA-GO
2026**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M237p Malaquias, Wellington José
Projeto e simulação de máquina síncrona de ímã permanente. / Wellington José Malaquias. – Itumbiara, 2026.
82 p.: il.

Trabalho de conclusão do curso (Engenharia Elétrica) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Itumbiara, 2026.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Arantes de Freitas.

1. Veículos elétricos. 2. Máquinas elétricas síncronas. 3. Método dos elementos finitos.. I. Título. II. Freitas, Marcos Antônio Arantes de. III. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

CDD 621.319

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Biblioteca Maria Gabriela Pacheco Pardey / Câmpus Itumbiara
Bibliotecário: Rosiane Gonçalves de Lima CRB1/1684



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS ITUMBIARA

Wellington José Malaquias

PROJETO E SIMULAÇÃO DE MÁQUINA SÍNCRONA DE ÍMÃ PERMANENTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Itumbiara, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovado em 09 de Abril de 2026.

(Assinado Eletronicamente)

Prof. Dr. Marcos Antônio Arantes de Freitas
Instituto Federal de Goiás, Câmpus Itumbiara
Orientador

(Assinado Eletronicamente).

Prof. Dr. Thaissa de Melo César
Instituto Federal de Goiás, Câmpus Itumbiara
Avaliadora

(Assinado Eletronicamente).

Prof. Dr. Victor Régis Bernardeli
Instituto Federal de Goiás, Câmpus Itumbiara
Avaliador

Itumbiara/GO
2026

Documento assinado eletronicamente por:

- **Thaissa de Melo Cesar**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 09/04/2026 14:05:18.
- **Victor Regis Bernardeli**, CHEFE - CD4 - ITU-DAA, em 09/04/2026 13:57:41.
- **Marcos Antonio Arantes de Freitas**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 09/04/2026 13:56:31.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 09/04/2026. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 765725

Código de Autenticação: b73e3a2816



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Avenida Furnas, nº 55, 55, Bairro Village Imperial, ITUMBIARA / GO, CEP 75524-010
(64) 2103-5604 (ramal: 5604)

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus pela oportunidade de trilhar esta trajetória e concluir este curso. Nunca me sentirei plenamente merecedor de tamanha graça.

Agradeço, de maneira especial, à minha mãe, Luzia Aparecida, e ao meu irmão, Washington Fernando, que jamais deixaram de me apoiar e que foram fundamentais para que eu perseverasse ao longo dessa caminhada. O incentivo, o cuidado e as palavras de encorajamento de vocês foram essenciais para que eu não desistisse diante das dificuldades. Sem o apoio de minha família, nada disso seria possível.

Agradeço imensamente à minha amada namorada, Luana Açucena, por compartilhar comigo tantos momentos desta trajetória, oferecendo apoio, compreensão e incentivo mesmo nos períodos mais desafiadores. Sua presença foi fundamental durante todo esse processo.

Registro também minha sincera gratidão aos meus amigos de curso, que levarei para a vida: Yuri Campos, Rangel Cavalcante, Anderson Otávio e Leonardo Gonçalves, entre tantos outros que fizeram parte dessa jornada. O companheirismo, o apoio mútuo e os desafios compartilhados tornaram essa caminhada mais leve e significativa. A todos vocês, minha profunda gratidão.

Por fim, expresso minha gratidão ao meu orientador, Marcos Antônio, carinhosamente chamado de “Marcão” no cotidiano acadêmico. Agradeço pela orientação, pelo apoio constante e, sobretudo, por ser uma fonte de inspiração e exemplo profissional, demonstrando, por meio de sua postura e dedicação, que as portas do conhecimento estarão sempre abertas àqueles que buscam aprender.

“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

RESUMO

Este trabalho tem como finalidade o desenvolvimento e a análise de uma Máquina Síncrona de Ímã Permanente (MSIP) com rotor externo, projetada para aplicação direta em sistema de tração de scooters elétricas. Diante da crescente demanda por soluções sustentáveis no setor de mobilidade urbana, destaca-se a necessidade de motores elétricos mais eficientes, compactos e com elevada densidade de potência. A adoção de uma topologia com rotor externo e acoplamento direto à roda justifica-se pela possibilidade de eliminar elementos de transmissão mecânica, como redutores e diferenciais, resultando na redução do peso, das perdas mecânicas e do custo total do sistema. A pesquisa contempla, inicialmente, a apresentação da modelagem matemática envolvida na formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF), com o objetivo de resolver problemas eletromagnéticos relevantes para a fase de projeto da máquina, tais como o cálculo do fluxo magnético nas fases, da força contraeletromotriz (FCEM) e do torque eletromagnético. Na sequência, aborda-se de forma detalhada o processo de dimensionamento construtivo e eletromagnético da máquina, com ênfase na influência de cada parâmetro sobre o desempenho global do motor. Por fim, são realizadas simulações em ambiente computacional do software FEMM com base no MEF, permitindo a obtenção de curvas de desempenho fundamentais para avaliar a viabilidade da aplicação proposta. Os resultados obtidos evidenciam o potencial da topologia estudada para uso em veículos elétricos leves, especialmente scooters urbanas, contribuindo para o avanço de tecnologias limpas e eficientes no setor de mobilidade.

Palavras-chave: Veículo elétrico; Software FEMM, Simulação; Máquina síncrona de ímã permanente; Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

This work aims to develop and analyze a Permanent Magnet Synchronous Machine (PMSM) with an outer rotor, designed for direct application in traction systems of electric scooters. Given the growing demand for sustainable solutions in urban mobility, the need for more efficient, compact, and high power density electric motors becomes evident. The adoption of an outer rotor topology directly coupled to the wheel is justified by the possibility of eliminating mechanical transmission components, such as gear reducers and differentials, thus reducing weight, mechanical losses, and overall system cost. The research initially presents the mathematical modeling involved in the Finite Element Method (FEM), aiming to solve electromagnetic problems relevant to the machine design stage, such as the calculation of phase magnetic flux, back electromotive force (EMF), and electromagnetic torque. Subsequently, the study details the constructive and electromagnetic design process, with emphasis on the influence of each parameter on the motor's overall performance. Finally, computational simulations based on FEM are carried out, providing performance curves essential to assess the feasibility of the proposed application. The obtained results highlight the potential of the studied topology for use in light electric vehicles, especially urban scooters, contributing to the advancement of clean and efficient technologies in the mobility sector.

Keywords: Electric vehicle; FEMM software; Simulation; Permanent magnet synchronous machine; Finite Element Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – (a) MSIP de ímã na superfície. (b) MSIP de ímã inserido na superfície. (c) MSIP de ímã enterrado transversalmente. (d) MSIP de ímã enterrado longitudinalmente (CHAU; CHAN; LIU, 2008)	17
Figura 2 – Aproximação do potencial por meio de um elemento triangular.	27
Figura 3 – Conversão do domínio de integração em três dimensões para duas dimensões.	42
Figura 4 – Rotor externo com ímãs montado na superfície.	46
Figura 5 – Dimensões e formas dos dentes.	52
Figura 6 – Estrela de ranhuras (a) Distribuição dos fasores. (b) Divisão em setores.	54
Figura 7 – Distribuição dos condutores das fases nas ranhuras.	55
Figura 8 – Gráfico da FCEM em função do ângulo elétrico na fase A.	61
Figura 9 – Gráfico da FCEM em função do ângulo elétrico na fase B.	62
Figura 10 – Gráfico da FCEM em função do ângulo elétrico na fase C.	62
Figura 11 – Gráfico do torque ao longo de um período elétrico.	63
Figura 12 – Comparação do torque de borda nas condições de operação sem carga (no-load) e com carga (on-load).	65
Figura 13 – Comparação do fluxo magnético nas condições de operação sem carga (no-load) e com carga (on-load).	66
Figura 14 – Comparação da autoindutância nas condições de operação sem carga (no-load) e com carga (on-load).	67
Figura 15 – Comparação da indutância mútua nas condições de operação sem carga (no-load) e com carga (on-load).	68
Figura 16 – Modelo geométrico bidimensional da MSIP.	69
Figura 17 – Distribuição da densidade de fluxo magnético.	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do rotor	49
Tabela 2 – Parâmetros do estator	53
Tabela 3 – Parâmetros de enrolamento	56

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS	14
1.1.1	Objetivo Geral	14
1.1.2	Objetivos Específicos	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	20
3.1	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	20
3.2	POTENCIAL EM ELEMENTOS TRIANGULARES DE PRIMEIRA ORDEM.....	23
3.3	CÁLCULO DE FORÇA VIA MÉTODO DO TENSOR DE MAXWELL	37
4	METODOLOGIA DE PROJETO E SIMULAÇÃO.....	45
4.1	ROTOR.....	46
4.2	ESTATOR.....	50
4.3	ENROLAMENTO	53
4.4	SOFTWARE FEMM.....	56
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	60
6	CONCLUSÃO.....	73
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

A crescente demanda por energia elétrica configura-se como um dos principais desafios da sociedade contemporânea, impulsionada pelo avanço tecnológico e pela intensificação do uso de dispositivos eletroeletrônicos no cotidiano (SOYGENC; ERGENE, 2020). Esse contexto evidencia não apenas a necessidade de ampliação da capacidade de geração, mas, sobretudo, a importância da utilização eficiente dos recursos energéticos disponíveis. Ademais, a elevada dependência de fontes não renováveis, como carvão, gás natural e petróleo, agrava questões ambientais, uma vez que sua exploração e consumo estão diretamente associados à emissão de poluentes e ao agravamento das mudanças climáticas (WU et al., 2014). Assim, a busca por soluções energéticas mais limpas e eficientes consolida-se como uma prioridade em escala global.

Nesse cenário, os motores elétricos assumem papel de destaque, sendo responsáveis por aproximadamente dois terços do consumo mundial de energia elétrica (MUTLUER; BILGIN, 2012). Sua ampla aplicação, que abrange desde processos industriais até sistemas de mobilidade elétrica, reforça a necessidade de desenvolvimento de tecnologias que conciliem elevado desempenho e eficiência energética. Projeções indicam que o consumo de energia por motores elétricos poderá alcançar cerca de 14 TW até 2030, intensificando a urgência por inovações nesse setor (RASHID, 2017).

No âmbito dos transportes, a eletrificação veicular apresenta-se como uma alternativa promissora para a mitigação das emissões de gases de efeito estufa, destacando-se os veículos elétricos como elementos centrais nas estratégias de descarbonização. Nesse contexto, o desempenho dos sistemas de tração elétrica (drivetrains) torna-se determinante, sendo diretamente influenciado pelas características das máquinas elétricas empregadas (CHAN; BOUSCAYROL; CHEN, 2009). Dessa forma, a adequada seleção e o dimensionamento dessas máquinas são essenciais para assegurar eficiência, confiabilidade e competitividade tecnológica.

Diante desse panorama, as Máquinas Síncronas de Ímã Permanente (MSIP) destacam-se como uma das principais alternativas tecnológicas, em virtude de sua elevada eficiência, alta densidade de potência e menores perdas em comparação a outras topologias de máquinas elétricas. Entretanto, o projeto dessas máquinas envolve múltiplas variáveis e compromissos de engenharia, tais como o dimensionamento geométrico, a seleção de materiais, a distribuição do fluxo magnético e a análise do desempenho eletromagnético, tornando o processo complexo e desafiador.

Nesse sentido, o problema de pesquisa que orienta este trabalho pode ser assim formulado: como projetar e simular uma Máquina Síncrona de Ímã Permanente que atenda a critérios de eficiência, desempenho e viabilidade para aplicações em sistemas de acionamento elétrico, especialmente no contexto da mobilidade elétrica? A elucidação dessa questão requer a utilização de ferramentas computacionais e métodos numéricos capazes de prever o comportamento da máquina ainda na fase de projeto, contribuindo para a redução de custos e do tempo de desenvolvimento.

A relevância deste estudo justifica-se pela crescente necessidade de desenvolvimento de máquinas elétricas mais eficientes e sustentáveis, em consonância com as demandas energéticas e ambientais contemporâneas. Além disso, a aplicação de técnicas de simulação, como o Método dos Elementos Finitos, possibilita uma análise aprofundada do desempenho da máquina, contribuindo significativamente para a otimização de seu projeto, bem como para o aprimoramento da formação acadêmica e profissional na área de engenharia elétrica.

Por fim, este trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 1 apresenta a introdução, contemplando o contexto, a problemática, os objetivos e a justificativa da pesquisa. O capítulo 2 trará a revisão bibliográfica utilizada para embasar os estudos sobre o tema do referido trabalho. O Capítulo 3 aborda a fundamentação teórica, incluindo os principais conceitos relacionados às máquinas síncronas de ímã permanente e aos métodos de análise empregados. O Capítulo 4 descreve a metodologia adotada para o projeto da máquina, bem como as ferramentas de simulação utilizadas. O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos,

acompanhados de suas respectivas análises. Por fim, o Capítulo 6 expõe as conclusões do estudo e sugestões para trabalhos futuros.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar de forma detalhada o projeto de uma máquina síncrona de ímã permanente de rotor externo. A MSIP de rotor externo foi projetada para ser aplicada em tração, no contexto de veículos elétricos. Dentro do segmento de veículos elétricos foi estabelecida uma classe específica, a classe das motocicletas. No universo de motocicletas, a scooter elétrica foi adotada como objeto de estudos.

Podem ser elencados os seguintes pontos como objetivos específicos:

1.1.2 Objetivos Específicos

- Modelar matematicamente o método dos elementos finitos aplicado a problemas eletromagnéticos.
- Calcular o potencial elétrico e magnético para aplicação em máquinas elétricas.
- Dimensionar geometricamente a máquina e seus enrolamentos.
- Analisar a influência dos parâmetros construtivos no desempenho da máquina.
- Simular o motor utilizando software baseado no método dos elementos finitos.
- Avaliar o desempenho do motor em termos de torque, força contraeletromotriz e fluxo magnético.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Motores elétricos são encontrados em aplicações domésticas, ventiladores, veículos elétricos, bombas, elevadores, etc. Segundo (RASHID, 2017), o consumo de energia elétrica por motores elétricos vai aumentar para aproximadamente 14 TWs até 2030, gerando impactos significativos sobre o meio ambiente.

Ainda relacionado a motores elétricos em veículos, grandes empresas do ramo automobilístico realizam estudos relacionados ao desenvolvimento de drivetrains (CHAN; BOUSCAYROL; CHEN, 2009) cada vez mais adequados ao que o mercado exige.

Dessa forma, os drivetrains podem ser classificados em duas categorias, quanto ao número de motores utilizados no acionamento: sistemas de um único motor e multimotores (PROFUMO; ZHANG; TENCONI, 1997).

No sistema de um único motor, existe apenas um motor elétrico conectado às rodas pelas engrenagens de redução e pelo diferencial mecânico. O motor elétrico pode ser CC ou CA e o controlador está relacionado ao tipo de motor.

Os sistemas multimotores são constituídos por dois ou mais motores e cada motor é montado dentro das rodas ou conectado diretamente à roda. Com esta solução, o diferencial mecânico e até mesmo a caixa de redução podem ser desnecessários. Segundo a literatura, esta solução é denominada motor elétrico na roda com acionamento direto ou, do inglês, “direct drive in-wheel electric motors”.

Entre as máquinas elétricas mais empregadas em drivetrains pode ser citada a máquina de indução gaiola de esquilo (MI), máquina de relutância chaveada (MRC) e a máquina síncrona de ímã permanente (MSIP).

Em relação à máquina de relutância chaveada, apresenta baixo custo e alta confiabilidade, além de peso e eficiência competitivos (UEMATSU; WALLACE, 1995) para aplicação em EVs (OMAÇ et al., 2018; KIYOTA; CHIBA, 2012). Em 2013, uma MRC de 70 KW foi empregada em veículo Land Rover modelo 110 Defender, proporcionando ao veículo uma autonomia de 80 km com carga total e um teto de velocidade de 110 km/h (DRIVES; CONTROLS, 2013).

A máquina de indução destaca-se em drivetrains de EVs por sua robustez e disponibilidade universal (PELLEGRINO et al., 2012; ULU; KORMAN; KöMüRGÖZ, 2017). Aliado a isso, no lado do controle, o controle vetorial da MI orientado a campo

é considerado um padrão industrial. Além disso, conforme (PELLEGRINO et al., 2012), a MI perde excitação em caso de falha do inversor, e isto é muito bem-vindo entre os fabricantes de EVs por razões de segurança.

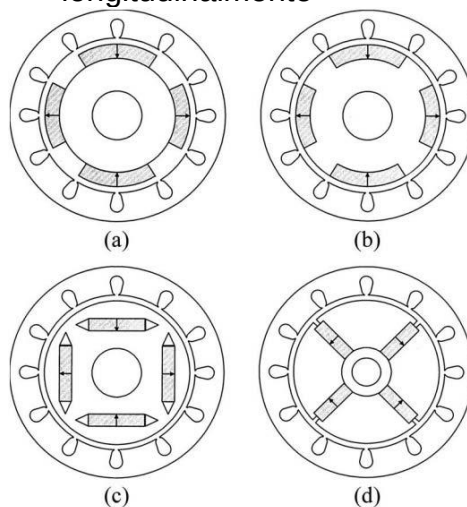
A máquina síncrona de ímã permanente, por sua vez, quando comparada às demais, apresenta a maior relação potência por volume, maior fator de potência e eficiência, além de ser mais recomendada em aplicações de elevadas velocidades (WU et al., 2014; PELLEGRINO et al., 2012).

A alta densidade de potência da MSIP é explicada pela elevada densidade de fluxo magnético verificada no entreferro, devido à utilização de ímãs de terras raras, ou de topologias de rotores com ímãs de ferrite que possibilitam concentração de fluxo. A elevada eficiência, por sua vez, é explicada pela ausência de perdas ôhmicas no circuito do rotor e ausência de escovas (estas sendo substituídas por acionamento elétrico com o auxílio de inversor) (PAULA, 2016).

Uma classificação frequentemente realizada das MSIPs é segundo a forma de onda do fluxo concatenado por fase e conseqüentemente à forma de onda da força contra eletromotriz (FCEM) induzida, que pode ser senoidal ou não senoidal. De modo geral, a forma de onda não senoidal é classificada como trapezoidal. Dessa forma, estudos realizados mostram que a MSIP de FCEM trapezoidal apresenta maior densidade de potência e eficiência em relação à senoidal (PAULA, 2016; MIYAMASU; AKATSU, 2011)

Além da classificação quanto à forma de onda da FCEM induzida, as MSIPs podem ser classificadas considerando os aspectos construtivos, conforme a disposição dos ímãs permanentes no rotor, podendo estar, de forma geral, na superfície ou enterrado, conforme indica a Figura 1 (CHAU; CHAN; LIU, 2008; MILLER, 1989; HENDERSHOT; MILLER, 1995; CASTRO, 2017).

Figura 1 – (a) MSIP de ímã na superfície. (b) MSIP de ímã inserido na superfície. (c) MSIP de ímã enterrado transversalmente. (d) MSIP de ímã enterrado longitudinalmente



Fonte: (CHAU; CHAN; LIU, 2008)

A topologia de ímãs na superfície do rotor é a mais simples sob o ponto de vista construtivo, uma vez que as peças magnéticas são montadas na superfície do rotor e em seguida um material de retenção é aplicado sobre a estrutura para fixação (HENDERSHOT; MILLER, 1995), Figura 1-(a). Além do mais, com esta topologia é possível construir um rotor oco, reduzindo, portanto, peso e momento de inércia (CASTRO, 2017).

Os ímãs apresentam permeabilidade magnética relativa próxima à do ar, e isto contribui para a baixa variação de relutância na superfície do rotor. Em virtude disto, o torque de relutância é frequentemente desprezado em trabalhos onde a MSIP de ímã na superfície do rotor é abordada como objeto de estudos (CASTRO, 2017; MILLER, 1989)., 2008; MILLER, 1989; HENDERSHOT; MILLER, 1995; CASTRO, 2017)

No caso da topologia com ímãs enterrados, Figura 1-(b), Figura 1-(c) e Figura 1-(d), apesar do elevado esforço construtivo, o rotor apresenta maior robustez mecânica, tornando a máquina mais adequada para aplicações em elevadas velocidades, uma vez que, diferente dos ímãs montados na superfície, a própria estrutura auxilia na fixação das peças magnéticas.

Além de carros elétricos, é possível observar um crescente uso de MSIPs em scooters elétricas. As scooters destacam-se como um transporte alternativo interessante para viagens de curta distância. Aliado a isto, a scooter é especialmente útil quando o tráfego é intenso e o espaço de estacionamento é limitado (GRUBER;

BÄCK; AMRHEIN, 2011). Ademais, os custos por distância são comparativamente baixos, devido, sobretudo, ao avanço em pesquisas relacionadas às baterias e carregadores, contribuindo para elevar a autonomia por carga (AFFANNI et al., 2005; PELLEGRINO; ARMANDO; GUGLIELMI, 2009).

No entanto, apesar das vantagens listadas, permanecem algumas desvantagens. A maioria dos sistemas de propulsão para este tipo de aplicação são projetados apenas para baixas velocidades. A eficiência do acionamento, confiabilidade, relação torque-peso e a densidade de energia devem ser melhoradas. Com o objetivo de solucionar os pontos elencados, na literatura existem diferentes propostas.

Em GRUBER; BACK e AMRHEIN (2011), é apresentado o projeto, construção e otimização de uma MSIP para aplicação diretamente na roda de uma scooter elétrica. A máquina foi projetada para substituir uma outra já instalada na scooter. Com a nova proposta, segundo os autores, a intenção é construir uma máquina com maior densidade de potência e velocidade máxima de operação, mantendo as dimensões do projeto, uma vez que as medidas das rodas são fixas. A nova MSIP é projetada com 36 ranhuras e 40 polos. Em tabelas e gráficos é mostrado que o protótipo final conseguiu entregar aproximadamente 90 N.m em uma velocidade de 750 RPM, potência suficiente para o veículo alcançar a velocidade desejada. Foi utilizado o método dos elementos finitos ou, do inglês, “Finite Element Method” (FEM), para auxiliar no projeto e um algoritmo de busca baseado em meta-heurística para reduzir a massa da máquina, torque de borda e aumentar a eficiência.

No caso de (SONG; CHANG; CHOI, 2010), assim como no trabalho anterior, o objetivo central foi projetar uma MSIP para o sistema de propulsão de uma scooter elétrica. A máquina de rotor externo e 20 polos foi projetada e integrada ao aro da roda do pneu. Com base nos requisitos do sistema, simulações e resultados experimentais foram apresentados para validação do projeto desenvolvido. Ainda na fase de projeto, foram realizadas simulações utilizando FEM para atender aos requisitos do sistema. A eficiência global atingiu 87% em uma determinada

velocidade. O projeto completo e seus aspectos foram discutidos com os resultados dos testes no sistema prático.

Em (RAVI; EKRAM; MAHAJAN, 2006) é discutido sobre o projeto completo de uma MSIP para scooter elétrica, assim como o módulo de controle necessário para atuar sobre o motor frente aos requisitos de desempenho estabelecidos. Nesse trabalho especificamente, a quantidade apresentada de resultados experimentais merece ser destacada, conscientizando o leitor acerca da real capacidade do sistema projetado. Assim como nos casos anteriores, foram realizadas simulações utilizando FEM ainda na fase de projeto do motor. Com a bancada de resultados experimentais, o sistema é capaz de entregar até 500W de potência, que, de acordo com o trabalho, é possível levar até 200 Kg (massa da scooter de 80Kg e massa de dois homens 120kg). São apresentados resultados do sistema avaliado diante de inclinações, simulando subidas. É mostrado um envelope de curvas de torque e velocidade, caracterizando as regiões de atuação da máquina, onde foi possível avaliar a regulação de velocidade de acordo com o aumento de carga no eixo.

Em (BIANCHI; BOLOGNANI; ZIGLIOTTO, 2001), o objetivo é projetar uma MSIP para scooter elétrica com uma topologia de rotor diferente das apresentadas até o momento. No caso da máquina projetada é destacada a presença de torque devido aos ímãs e torque de relutância. Um ponto positivo apresentado da topologia adotada é a larga faixa de operação de velocidade permitida pelo enfraquecimento de campo, onde a máquina alcança velocidades acima da nominal, mantendo a potência constante. É dado foco tanto na parte do projeto da máquina, assim como na apresentação do sistema de controle utilizado. Em relação ao projeto, é discutido acerca da taxa de saliência, que é um parâmetro de projeto definido como a razão entre a indutância de eixo direto e quadratura, e sua influência no desempenho do motor.

No caso de (SANDESH et al., 2023), um Motor de Relutância Variável (MRV) foi adotado como objeto de estudos no contexto de tração para scooter elétrica. Segundo os autores, a MRV destaca-se em relação às demais candidatas para aplicação em EVs, pois não utiliza ímãs, é robusta e tolerante a falhas. A máquina projetada apresenta 8 ranhuras e 10 polos e é de rotor externo. Simulações FEM são utilizadas para otimizar a máquina, reduzindo perdas e aumentando o torque.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo são apresentados os softwares utilizados para realização das análises em MEF. A abordagem desenrolar-se-á de forma que é dada ênfase nas ferramentas mais utilizadas para a evolução dos resultados do trabalho até este momento.

É discutida uma modelagem matemática necessária para o método dos elementos finitos, aplicável tanto em problemas estáticos assim como na resolução de problemas dinâmicos. Em seguida, as expressões matemáticas fundamentais para o cálculo da força que atua sobre um corpo submetido a um campo magnético via tensores de maxwell são desenvolvidas.

3.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos foi utilizado pela primeira vez para analisar problema de rigidez e deformação na fuselagem de avião, em 1956, que é creditado a John Argyris (CARDOSO, 2016).

A ideia central consiste em dividir um sistema, cujo comportamento é desconhecido e complexo para ser analisado na forma única, em componentes individuais pertencentes a este sistema único. Assim, conhecendo o comportamento individual de cada 'elemento', o sistema geral pode ser reconstruído e estudado (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005).

Em muitos casos, modelos adequados são obtidos utilizando um número bem definido de componentes individuais. Tais problemas podem ser denominados discretos. Em outros casos, o sistema pode somente ser representado por infinitos componentes, que levam a equações diferenciais e elementos infinitesimais. Tais problemas, por sua vez, recebem o nome de contínuos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005). No momento atual, problemas discretos podem ser resolvidos prontamente por computadores, mesmo sendo elevada a quantidade de elementos.

No caso de problemas contínuos, como a capacidade de um computador é finita, manipulações matemáticas são necessárias, que adicionam erros na resposta final.

Para contornar este problema, surgem as abordagens de discretização dadas por matemáticos e engenheiros. Matemáticos atuam diretamente em equações diferenciais que governam o problema, onde destacam-se as técnicas de aproximação por diferenças finitas e procedimentos residuais ponderados. Engenheiros conseguem aplicar uma visão mais intuitiva ao problema, fazendo analogias entre elementos discretos reais e porções finitas de um domínio contínuo (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005). O termo 'Elemento finito' surgiu diretamente dessa analogia realizada por engenheiros, e ao autor de (TURNER et al., 1956) é atribuído o primeiro uso da expressão. Deve-se destacar também os três livros de zienkiewicz, primeiros trabalhos que abordam MEF de forma didática e que foram largamente distribuídos pela comunidade acadêmica ao redor do mundo (DHATT; LEFRANÇOIS; TOUZOT, 2012).

A primeira aplicação do MEF em engenharia elétrica foi apresentada por (SILVESTER; CHARI, 1970). Na área de máquinas elétricas é atribuído a (SILVESTER; CABAYAN; BROWNE, 1973) as primeiras análises utilizando o método. (SILVESTER; FERRARI, 1996) destaca-se por ser o primeiro livro didático que aplica o método em problemas de engenharia elétrica. (CARDOSO, 2016) e (IDA; BASTOS, 1997) são livros mais recentes que ganham notoriedade por abordar o assunto com profundidade.

Em (DHATT; LEFRANÇOIS; TOUZOT, 2012), MEF é definido como uma forma de transformar equações diferenciais parciais em equações algébricas usando aproximações simples de variáveis. O método segue três etapas:

- Definição das leis físicas envolvidas no problema através das equações diferenciais parciais.
- Métodos numéricos para elaboração e solução de equações algébricas.
- Ferramentas computacionais eficientes para trabalhar os dados obtidos nos passos anteriores.

O processo de gerar resultados através do MEF, que também recebe o nome de pré-processamento, é a primeira etapa do estudo, e, em seguida, deve existir um pós-processamento. No caso de um problema magnetostático ou

eletrostático aplicado em máquinas elétricas, por exemplo, inicialmente é calculado o potencial em todos os nós, pré-processamento, e, logo após, na etapa de pós-processamento, é calculada a densidade de fluxo que é necessária para mensurar o valor da indutância (SALON, 1995). Além dos Softwares mencionados no capítulo anterior, podem ser citados os seguintes que fazem análise por meio do método dos elementos finitos com a metodologia detalhada acima: IDEAS, SAMCEF, NASTRAN, ABAQUS, FIDAP, MARC, ADINA, LSDYNA, ASTER e CASTEM (DHATT; LEFRANÇOIS; TOUZOT, 2012).

Este trabalho utiliza o pacote ONELAB para fazer as simulações em MEF, que reúne e integra os softwares Gmsh (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009) e GetDP (DULAR et al., 1999)(DULAR et al., 1998). O Gmsh é responsável pela etapa de pré-processamento, gerando a malha (mesh) de elementos finitos com todas as informações necessárias como potencial em nós e as coordenadas, por exemplo. O Gmsh foi desenvolvido por pesquisadores em 1996 (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009) com o interesse de apresentar um gerador de malhas em 2-D e 3-D que fosse rápido, leve e de fácil uso.

O Software conta com uma linguagem de script própria e uma interface gráfica do usuário (GUI) amigável e de uso intuitivo. Com o objetivo de ser leve e rápido, o núcleo e a interface de usuário são inteiramente escritos padrão C++. O núcleo usa subprogramas básicos de álgebra linear (BLAS) (DONGARRA et al., 1990) e LAPACK para realizar a maior parte das operações matemáticas de álgebra linear. Este conjunto de escolhas de subprogramas permite ao Gmsh gerar cerca de 1 milhão de tetraedros por minuto, marca superior à média de outros programas geradores de malha. Tal quantidade de elementos precisa de aproximadamente 150 Mb de RAM de um computador pessoal padrão, que o torna viável para aplicações acadêmicas e industriais (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009).

A interface gráfica é construída usando OpenGL e FLTK. Hoje, o Gmsh é impulsionado pela necessidade de pesquisadores por uma ferramenta de pré-processamento de bom desempenho, código aberto e que seja leve. Em virtude

disso, o software conta com uma comunidade de várias centenas de usuários e desenvolvedores em todo o mundo (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009).

O Ambiente de descrição assistido por computador chamado GetDP é responsável por fazer o pós-processamento. O software é principalmente escrito em linguagem C. É capaz de fazer análise eletromagnética, térmica e mecânica em 2-D e 3-D através de diferentes métodos numéricos, quais sejam método dos elementos finitos, método dos elementos de contorno e métodos integrais em qualquer estado de tempo (estático, harmônico ou transiente). Possui código fonte aberto possibilitando uma ampla gama de atividades, como pesquisa, colaboração, educação, treinamento e estudos industriais (DULAR et al., 1999) (DULAR et al., 1998). Para o seu funcionamento, o GetDP precisa das informações do domínio de estudo discretizado. É interessante observar que, quando se trata de FEM, o termo discretização tem duplo significado, como discutido em (DULAR et al., 1999). O termo pode referir-se a geração do mesh, que é a representação do domínio de estudo por um número finito de elementos com uma forma geométrica simples (triângulos, quadriláteros, tetraedros, hexaedros, prismas).

3.2 POTENCIAL EM ELEMENTOS TRIANGULARES DE PRIMEIRA ORDEM

Elementos triangulares de primeira ordem perderam espaço no estudo de MEF em engenharia elétrica devido, sobretudo, a sua baixa precisão e os elementos de ordem mais elevada passaram a ser mais utilizados. No entanto, continuam sendo empregados em áreas nas quais a geometria é complicada e a não linearidade é predominante, como em máquinas elétricas (SILVESTER; FERRARI, 1996).

O problema de calcular o potencial em um elemento triangular de primeira pode ser encontrado facilmente em (SILVESTER; FERRARI, 1996) e (SALON, 1995), onde abordagens diferentes foram adotadas, nas quais a última direciona para o estudo de máquinas elétricas. Em ambos os casos é afirmado que os mesmos resultados podem ser alcançados utilizando elementos de ordem mais elevada. O problema será apresentado de forma superficial neste trabalho, visto que constitui uma etapa fundamental no método dos elementos finitos. Todas as

passagens matemáticas podem ser encontradas de forma mais rigorosa em (SALON, 1995).

Inicialmente, é importante definir o método de Galerkin, que constitui uma ferramenta matemática fundamental na determinação de problemas de solução aproximada em métodos numéricos (DENDY JR, 1977).

Seja a equação:

$$\tau(x) = 0 \quad (3.1)$$

Em uma região Ω , com condições bem definidas na fronteira C . Substituindo uma solução aproximada $\hat{x}$ em (3.1), uma vez que $\hat{x} \neq x$, vai existir um valor residual R

$$\tau(\hat{x}) = R \quad (3.2)$$

O método dos resíduos ponderados (MRP), que é um caso geral do método de Galerkin, afirma que a integral da projeção do resíduo em uma função de ponderação especificada é zero no domínio de interesse. O que define o tipo de MRP é escolha da função de ponderação. A função de ponderação aqui escolhida será a função de forma que será definida adiante, que define o método de Galerkin.

Seja a equação da difusão (3.3). A é a componente z do potencial vetorial magnético que é desconhecida. Para o caso cartesiano linear de duas dimensões

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -J_0 + j\omega\sigma A \quad (3.3)$$

Onde μ é a permeabilidade magnética do meio, σ a condutividade elétrica, ω a frequência elétrica e J_0 a densidade de corrente.

Substituindo uma solução aproximada $\hat{A}$ em (3.3), vai existir um valor residual R

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} = -J_0 + j\omega\sigma\hat{A} \quad (3.4)$$

Aplicando o MWR sobre o resíduo R resulta em

$$\int_{\Omega} RW \, dx \, dy = 0 \quad (3.5)$$

Expandindo

$$-\iint_{\Omega} W \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} \right) dx \, dy + j\omega\sigma \iint_{\Omega} W \hat{A} \, dx \, dy = \iint_{\Omega} W J_0 \, dx \, dy \quad (3.6)$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado esquerdo de (3.6)

$$\iint_{\Omega} W \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} \right) dx \, dy = \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right) dx \, dy - \oint_C \frac{1}{\mu} W \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{n}} dc \quad (3.7)$$

O último termo da equação (3.7) é uma integral de linha sobre o contorno C da região Ω . $\hat{n}$ é um versor normal ao contorno C . Visando implementação computacional, a integral sobre todo o domínio Ω será substituída por uma integração em cada elemento e em seguida o somatório dos M elementos. Substituindo (3.7) em (3.6)

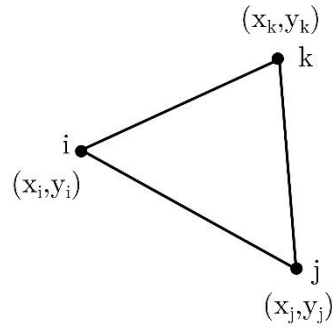
$$\begin{aligned}
\sum_M - \left(\frac{1}{\mu^e} \iint_{\Omega_e} \frac{\partial W^e}{\partial x} \frac{\partial A^e}{\partial x} + \frac{\partial W^e}{\partial y} \frac{\partial A^e}{\partial y} dx dy \right) + j\omega\sigma \iint_{\Omega_e} W^e A^e dx dy \\
+ \frac{1}{\mu^e} \frac{\partial A^e}{\partial \hat{n}} \oint_C W^e dc = \iint_{\Omega_e} J_0 W^e dx dy
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

Para que o problema tenha solução única, o potencial A ou sua derivada normal deve ser especificado em cada ponto da fronteira C . Para que a matriz de potencial nos nós, que será apresentada adiante, seja não singular, A deve ser definido em pelo menos um ponto. Esta é a condição de Dirichlet. Quando este valor é zero é definida a condição de Dirichlet homogênea. A condição de contorno natural ou condição de Neumann surge com a especificação da derivada normal do potencial. Quando a derivada normal é igual a zero $\frac{\partial A^e}{\partial \hat{n}} = 0$, surge a condição homogênea de Neumann (SALON, 1995). Na maioria dos casos, a condição homogênea de Neumann é seguida e o terceiro termo do lado esquerdo da equação (3.8) desaparece.

Com toda a modelagem matemática apresentada até aqui, que será útil adiante, agora é possível avançar em relação a definição do potencial em um elemento triangular. Seja o triângulo apresentado na Fig. (2), onde os nós (vértices) são contados em sentido anti-horário. Assumindo que o potencial varia de forma linear no elemento, pode ser definido o elemento triangular linear de primeira ordem. Em qualquer triângulo pertencente ao conjunto M , o potencial pode ser aproximado por

$$\hat{A} = C_1 + C_{2x} + C_{3y}
\tag{3.9}$$

Figura 2 – Aproximação do potencial por meio de um elemento triangular.



Os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 devem ser determinados. Assim, o potencial no nó i , $x = x_i$ e $y = y_i$. Dessa forma, $\hat{A} = \hat{A}_i$

$$\hat{A}_i = C_1 + C_{2xi} + C_{3yi} \quad (3.10)$$

Executando o mesmo para os nós j e k

$$\hat{A}_j = C_1 + C_{2xj} + C_{3yj} \quad (3.11)$$

$$\hat{A}_k = C_1 + C_{2xk} + C_{3yk} \quad (3.12)$$

Agora existem três equações e três incógnitas. Usando a regra de Kramer e manipulando para que as incógnitas fiquem em função de informações geométricas e dos potenciais

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \hat{A}_i & x_i & y_i \\ \hat{A}_j & x_j & y_j \\ \hat{A}_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}} \quad (3.13)$$

Ou

$$C_1 = \frac{\hat{A}_i \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix} + \hat{A}_j \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_i & y_i \end{vmatrix} + \hat{A}_k \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}}{2\Delta} \quad (3.14)$$

De forma semelhante

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \hat{A}_i & y_i \\ 1 & \hat{A}_j & y_j \\ 1 & \hat{A}_k & y_k \end{vmatrix}}{2\Delta} \quad (3.15)$$

e

$$C_2 = \frac{\hat{A}_i \begin{vmatrix} 1 & y_k \\ 1 & y_j \end{vmatrix} + \hat{A}_j \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_k \end{vmatrix} + \hat{A}_k \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_i \end{vmatrix}}{2\Delta} \quad (3.16)$$

E por último

$$C_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & \hat{A}_i \\ 1 & x_j & \hat{A}_j \\ 1 & x_k & \hat{A}_k \end{vmatrix}}{2\Delta} \quad (3.17)$$

Também

$$C_3 = \frac{\hat{A}_i \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_k \end{vmatrix} + \hat{A}_j \begin{vmatrix} 1 & x_k \\ 1 & x_i \end{vmatrix} + \hat{A}_k \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{vmatrix}}{2\Delta} \quad (3.18)$$

Onde, Δ corresponde a área do triângulo. Baseado nos resultados de C_1 , C_2 e C_3 a aproximação do potencial pode ser escrita

$$\hat{A} = \frac{(a_i + b_{ix} + c_{iy})\hat{A}_i + (a_j + b_{jx} + c_{jy})\hat{A}_j + (a_k + b_{kx} + c_{ky})\hat{A}_k}{2\Delta} \quad (3.19)$$

Em que

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned} \quad (3.20)$$

Então surge a expressão matemática conhecida no método dos elementos finitos, que é igual para diferentes problemas, mudando somente a física envolvida. No caso do ONELAB, pode ser conferida em (GYSELINCK et al., 2003)

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) \hat{A}_i \quad (3.21)$$

O coeficiente N_i é denominado função de forma, e também é frequente sua utilização no estudo de MEF. A aproximação do potencial vetorial no elemento e , então pode ser escrita como produto da função de forma N_i vezes o potencial no nó $\hat{A}_i$. É interessante observar também que o campo é a derivada do potencial. No caso de um potencial linear de primeira ordem o campo é constante.

Algumas propriedades da função de forma são (SILVESTER; FERRARI, 1996)

- A função de forma vale $N_i = 1$ no nó i e zero nos demais.
- O somatório de todas as funções de forma em qualquer ponto do triângulo e é igual a um.

Mudando a expressão (3.21) do potencial no elemento para forma matricial

$$\hat{A}^e = (N_i^e, N_j^e, N_k^e) \begin{pmatrix} \hat{A}_i^e \\ \hat{A}_j^e \\ \hat{A}_k^e \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Onde

$$\begin{aligned} N_i^e &= \frac{(a_i^e + b_i^e x + c_i^e y)}{2\Delta} \\ N_j^e &= \frac{(a_j^e + b_j^e x + c_j^e y)}{2\Delta} \\ N_k^e &= \frac{(a_k^e + b_k^e x + c_k^e y)}{2\Delta} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como mencionado anteriormente, o teorema de Galerkin afirma que a função de forma deve ser igual função de ponderação. Logo

$$W^e = \begin{pmatrix} N_i^e \\ N_j^e \\ N_k^e \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Derivando $\hat{A}$ e W^e em relação x e y

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (b_i^e, b_j^e, b_k^e) \begin{pmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i^e, c_j^e, c_k^e) \begin{pmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Da mesma forma

$$\frac{\partial W^e}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} b_i^e \\ b_j^e \\ b_k^e \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial W^e}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} c_i^e \\ c_j^e \\ c_k^e \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Retomando a equação (3.8), no primeiro termo do lado esquerdo serão aplicados os termos desenvolvidos acima. As derivadas acima são independentes de x e y , logo podem ser retiradas da integral. Assim

$$\frac{1}{\mu^e} \iint_{\Omega_e} \frac{\partial W^e}{\partial x} \frac{\partial A^e}{\partial x} + \frac{\partial W^e}{\partial y} \frac{\partial A^e}{\partial y} dx dy = \frac{1}{\mu^e} \left(\frac{\partial W^e}{\partial x} \frac{\partial A^e}{\partial x} + \frac{\partial W^e}{\partial y} \frac{\partial A^e}{\partial y} \right) \iint_{\Omega_e} dx dy \quad (3.29)$$

Como o domínio Ω_e é o triângulo

$$\iint_{\Omega_e} dx dy = \Delta$$

(3.30)

Substituindo em (3.29) e expandindo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^e} \iint_{\Omega_e} \frac{\partial W^e}{\partial x} \frac{\partial A^e}{\partial x} + \frac{\partial W^e}{\partial y} \frac{\partial A^e}{\partial y} dx dy \\ = \frac{1}{4\mu^e \Delta} \begin{pmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

A matriz de elementos geométricos em (3.31) é denominada matriz de rigidez, devido ao método dos elementos finitos ter sido aplicado inicialmente em problemas de mecânica.

Desenvolvendo o segundo termo do lado esquerdo da equação (3.8)

$$\begin{aligned} j\omega\sigma^e \iint_{\Omega_e} W^e A^e dx dy &= \iint_{\Omega_e} \begin{pmatrix} N_i^e \\ N_j^e \\ N_k^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_i^e & N_j^e & N_k^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{pmatrix} dx dy = \\ \frac{j\omega\sigma^e \Delta}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

A matriz de coeficientes acima é referida como matriz de massa.

Em uma demonstração matemática detalhada em (SALON, 1995), o termo do lado direito da equação (3.8) pode ser representado pela expressão (3.33), além de considerar uma densidade de corrente J_0 constante no triângulo.

Os pontos do centro do triângulo são adotados

$$\iint_{\Omega_e} J_0 \frac{(a_i + b_i x + c_i y)}{2\Delta} = J_0 \frac{(a_i + b_i \bar{x} + c_i \bar{y})}{2} \quad (3.33)$$

Calculando as coordenadas do centro

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{3}(x_i + x_j + x_k) \\ \bar{y} &= \frac{1}{3}(y_i + y_j + y_k) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\frac{(a_i + b_i \bar{x} + c_i \bar{y})}{2} = \frac{\Delta}{3} \quad (3.35)$$

Logo

$$\iint_{\Omega_e} J_0^e W^e dx dy = \frac{J_0^e \Delta}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

A equação (3.8) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\mu^e \Delta} \begin{pmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{pmatrix} + \frac{j\omega\sigma^e \Delta}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{pmatrix} \\ = \frac{J_0^e \Delta}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

A equação (3.37) pode ser utilizada tanto para problemas estáticos, assim como para dinâmicos. No caso de problemas estáticos, o segundo termo do lado esquerdo é igual a zero, pois $\omega = 0$. Para a resolução do sistema de equações também é necessário observar as condições de dirichlet e neumann.

Vale ressaltar que todas as passagens matemáticas foram apresentadas considerando uma operação linear. Máquinas elétricas apresentam características não lineares, quando trata-se de densidade de fluxo magnético no interior de materiais ferromagnéticos. A permeabilidade magnética é não homogênea e depende do valor do campo magnético no material.

No caso do MEF a permeabilidade é encontrada por meio de um processo iterativo e é corrigida até convergir a um valor final. Uma estratégia conhecida consiste em calcular a densidade de fluxo assumindo uma permeabilidade magnética. Em seguida, com o cálculo do valor da densidade de fluxo, a permeabilidade é corrigida e é atribuída um valor correto, baseado na densidade de fluxo de todo o mesh. O processo é retomado e continua até que a permeabilidade estabilize dentro de uma faixa permitida (SALON, 1995).

Uma ferramenta matemática eficiente para trabalhar com a resolução de problemas eletromagnéticos não lineares é o método de Newton-Raphson. Assim, partindo da equação (3.37) e considerando um caso estático, para fins de simplificação, o método de Newton-Raphson pode ser aplicado, uma vez que μ não é uma constante. Desse modo, a relutividade magnética pode ser definida como $\nu = \frac{1}{\mu}$.

Reorganizando a equação (3.37) e substituindo os elementos da matriz de rigidez para simplificação

$$\frac{\nu}{4\Delta} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} \\ s_{ji} & s_{jj} & s_{jk} \\ s_{ki} & s_{kj} & s_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{pmatrix} = \frac{J_0^e \Delta}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Separando as equações do sistema acima em F, G e H

$$F = \frac{\nu}{4\Delta} [s_{ii} \quad s_{ij} \quad s_{ik}] \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix} - \frac{J_0\Delta}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$G = \frac{\nu}{4\Delta} [s_{ji} \quad s_{jj} \quad s_{jk}] \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix} - \frac{J_0\Delta}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$H = \frac{\nu}{4\Delta} [s_{ki} \quad s_{kj} \quad s_{kk}] \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix} - \frac{J_0\Delta}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Para utilização do método de Newton-Raphson, as derivadas de F, G e H precisam ser calculadas

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = \frac{\nu}{4\Delta} s_{ii} + \frac{1}{4\Delta} [s_{ii}A_i + s_{ij}A_j + s_{ik}A_k] \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial A_i} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_j} = \frac{\nu}{4\Delta} s_{ij} + \frac{1}{4\Delta} [s_{ii}A_i + s_{ij}A_j + s_{ik}A_k] \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial A_j} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = \frac{\nu}{4\Delta} s_{ik} + \frac{1}{4\Delta} [s_{ii}A_i + s_{ij}A_j + s_{ik}A_k] \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial A_k} \quad (3.44)$$

Utilizando a equação do método de Newton-Raphson descrita abaixo (PANG, 1990)

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} \Delta A_i + \frac{\partial F}{\partial A_j} \Delta A_j + \frac{\partial F}{\partial A_k} \Delta A_k = -F(A_i, A_j, A_k) \quad (3.45)$$

Substituindo os termos (3.42), (3.43) e (3.44) na equação (3.45)

$$\begin{aligned}
& \frac{v}{4\Delta} [s_{ii}\Delta A_i + s_{ij}\Delta A_j + s_{ik}\Delta A_k] \\
& + \frac{1}{4\Delta} [s_{ii}A_i + s_{ij}A_j + s_{ik}A_k] \frac{\partial v}{\partial B^2} \left[\frac{\partial B^2}{\partial A_i} \Delta A_i + \frac{\partial B^2}{\partial A_j} \Delta A_j + \frac{\partial B^2}{\partial A_k} \Delta A_k \right] \\
& = -\frac{v}{4\Delta} [s_{ii}A_i + s_{ij}A_j + s_{ik}A_k] + \frac{J_0\Delta}{3}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Reorganizando a equação acima para a forma matricial temos

$$\begin{aligned}
& \frac{v}{4\Delta} [s_{ii} \quad s_{ij} \quad s_{ik}] \begin{pmatrix} \Delta A_i \\ \Delta A_j \\ \Delta A_k \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{4\Delta} \frac{\partial v}{\partial B^2} \left[\left(\sum_{n=1}^k s_{in} A_n \right) \frac{\partial B^2}{\partial A_i} \left(\sum_{n=1}^k s_{in} A_n \right) \frac{\partial B^2}{\partial A_j} \left(\sum_{n=1}^k s_{in} A_n \right) \frac{\partial B^2}{\partial A_k} \right] \begin{pmatrix} \Delta A_i \\ \Delta A_j \\ \Delta A_k \end{pmatrix} \\
& = \frac{-v}{4\Delta} (s_{ii} \quad s_{ij} \quad s_{ik}) \begin{pmatrix} \Delta A_i \\ \Delta A_j \\ \Delta A_k \end{pmatrix} + \frac{J_0\Delta}{3}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Repetindo o mesmo processo para G, H e montando todos os termos em uma matriz

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu}{4\Delta} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} \\ s_{ji} & s_{jj} & s_{jk} \\ s_{ki} & s_{kj} & s_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta A_i \\ \Delta A_j \\ \Delta A_k \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{4\Delta} \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^k s_{in} A_n & \sum_{n=1}^k s_{in} A_n & \sum_{n=1}^k s_{in} A_n \\ \sum_{n=1}^k s_{jn} A_n & \sum_{n=1}^k s_{jn} A_n & \sum_{n=1}^k s_{jn} A_n \\ \sum_{n=1}^k s_{kn} A_n & \sum_{n=1}^k s_{kn} A_n & \sum_{n=1}^k s_{kn} A_n \end{pmatrix} \\
& \times \begin{pmatrix} \frac{\partial B^2}{\partial A_i} & \frac{\partial B^2}{\partial A_j} & \frac{\partial B^2}{\partial A_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta A_i \\ \Delta A_j \\ \Delta A_k \end{pmatrix} = \frac{-\nu}{4\Delta} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} \\ s_{ji} & s_{jj} & s_{jk} \\ s_{ki} & s_{kj} & s_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta A_i \\ \Delta A_j \\ \Delta A_k \end{pmatrix} + \frac{J_0 \Delta}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Destaca-se que a equação (3.48) é o modelo completo para calcular o potencial nos nós da malha de elementos finitos. O segundo termo do lado esquerdo vai a zero no caso de relutividade constante pois $\frac{\partial \nu}{\partial B^2} = 0$, assim como a matriz coluna de variação de potencial do primeiro termo, voltando ao caso linear de relutividade constante da equação (3.38).

3.3 CÁLCULO DE FORÇA VIA MÉTODO DO TENSOR DE MAXWELL

Uma vez que um dos principais objetivos de uma máquina elétrica é produzir torque, o FEM deve ser capaz de calcular o torque produzido com tranquilidade (SALON, 1995). As principais técnicas largamente utilizadas são método do tensor de Maxwell e método do trabalho virtual (CHU; ZHU, 2012; SALON; BHATIA; BUROW, 1997; MULLER, 1990) (SALON; BHATIA; BUROW, 1997; MARINESCU; MARINESCU, 1988; IONEL et al., 2005; DEMERDASH; WANG; SECUNDE, 1992).

De forma resumida, o torque é calculado no método do tensor de Maxwell através da componente radial e tangencial da densidade de fluxo. No caso do método do trabalho virtual, o torque é calculado baseado no fluxo mútuo. Ambos os

métodos precisam chegar no mesmo resultado de torque global, embora possam ser influenciados pela discretização da malha (CHU; ZHU, 2012).

Em seguida serão apresentadas passagens matemáticas até chegar na expressão da força sobre um objeto a partir do método do tensor de Maxwell. Toda a modelagem matemática foi adaptada de (DEBORTOLI, 1992; SALON, 1995) e, assim como na seção 3.2, pode ser consultada com mais profundidade.

No método dos elementos finitos é comum a substituição de material ferromagnético por correntes equivalentes. A densidade de força pode ser calculada da seguinte forma

$$p_v = J \times B \quad (3.49)$$

Pela lei de Ampere

$$\nabla \times B = J \quad (3.50)$$

Mas, sabemos que $B = \mu_0 H$. Substituindo H em (3.50) e em seguida em (3.49)

$$p_v = \left(\nabla \times \frac{B}{\mu_0} \right) \times B \quad (3.51)$$

Realizando as operações matemáticas acima e apresentando a componente x inicialmente

$$\begin{aligned}
\nabla \times \frac{B}{\mu_0} &= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\mu_0} \left[\hat{a}_x \left[\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] + \hat{a}_y \left[\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right] + \hat{a}_z \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right] \right] \left(\nabla \times \frac{B}{\mu_0} \right) \times B \\
&= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} f_x \\
&= \frac{1}{\mu_0} \left[B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} - B_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} \right]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Somando e subtraindo $\frac{1}{\mu_0} B_x \frac{\partial B_x}{\partial x}$ da equação (3.52) resulta em

$$p_x = \frac{1}{\mu_0} \left[B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} - B_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \right] \tag{3.53}$$

Organizando os termos

$$p_x = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial B_x^2}{\partial x} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right] \tag{3.54}$$

Reescrevendo as derivadas parciais

$$p_x = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B_x^2 - \frac{1}{2} |B|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (B_x B_z) - B_x \nabla \cdot B \right] \tag{3.55}$$

Sabendo que $\nabla \cdot B = 0$, resulta em

$$p_x = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(B_x^2 - \frac{1}{2} |B|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (B_x B_z) \right] \quad (3.56)$$

A equação acima tem o formato do divergente de um vetor, que aqui será denominado T . Reescrevendo da forma própria

$$p_x = \nabla \cdot T_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \quad (3.57)$$

As componentes do vetor podem ser definidas como

$$T_{xx} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_x^2 - \frac{1}{2} |B|^2 \right) \quad (3.58)$$

$$T_{xy} = \frac{1}{\mu_0} B_x B_y \quad (3.59)$$

$$T_{xz} = \frac{1}{\mu_0} B_x B_z \quad (3.60)$$

Da mesma maneira que foi calculada a componente p_x da densidade de força, as demais componentes serão medidas

$$p_y = \nabla \cdot T_y \quad (3.61)$$

$$p_z = \nabla \cdot T_z \quad (3.62)$$

Os vetores T_x , T_y e T_z podem ser combinados na forma de um tensor da seguinte maneira

$$T = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|B|^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{1}{2}|B|^2 & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 - \frac{1}{2}|B|^2 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Logo, a densidade de força no volume é calculada como um divergente desse tensor

$$p_v = \nabla \cdot T \quad (3.64)$$

A força total, por sua vez, é obtida com uma integral no volume dessa densidade de força

$$F = \int_v \nabla \cdot T \, dv \quad (3.65)$$

Pelo teorema da divergência, a integral de volume da equação (3.65) pode ser substituída por uma integral de superfície

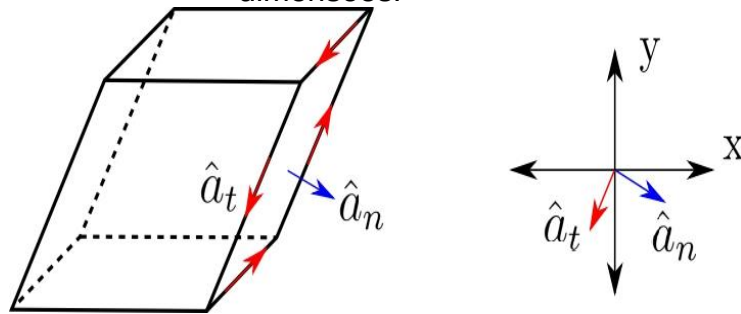
$$F = \oint_s T \cdot dS \quad (3.66)$$

Onde dS é um infinitesimal de área e um versor normal a superfície de integração, Fig. 3. Desde já, o problema será tratado de forma bidimensional. Sabendo disso, a Fig. 3 será útil no entendimento do domínio de integração. Considerando o elemento tridimensional inicial da Fig. 3, a integração deveria acontecer nas arestas destacadas. Convertendo o problema para bidimensional, os versores tangente $\hat{a}_t$ e normal $\hat{a}_n$ à superfície deverão ser representados conforme a

segunda Fig. 3, pois o domínio de integração agora será uma linha. Os versores podem ser representados como

$$\begin{aligned}\hat{a}_t &= s_x \hat{a}_x + s_y \hat{a}_y \\ \hat{a}_n &= s_y \hat{a}_x + s_x \hat{a}_y\end{aligned}\quad (3.67)$$

Figura 3 – Conversão do domínio de integração em três dimensões para duas dimensões.



Dessa forma, o caminho de integração incremental $d_s = \hat{a}_n dl$, onde dl é um caminho infinitesimal ao longo de todo o comprimento a ser integrado. A força incremental é calculada como

$$dF = T \cdot d_s \quad (3.68)$$

$$dF = \frac{dl}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|B|^2 & B_x B_y \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{1}{2}|B|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s_y \\ s_x \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

A componente normal e tangencial da força incremental

$$dF_t = d\vec{F} \cdot \hat{a}_t = \frac{dl}{\mu_0} [B_x B_y (s_x^2 - s_y^2) + s_x s_y (B_y^2 - B_x^2)]$$

(3.70)

$$dF_n = d\vec{F} \cdot \hat{a}_n = \frac{dl}{\mu_0} \left[B_x^2 s_y^2 + B_y^2 s_x^2 - \frac{1}{2} |B|^2 - 2B_x B_y s_x s_y \right]$$

(3.71)

A componente normal e tangencial da densidade de fluxo

$$B_t = \vec{B} \cdot \hat{a}_t = B_x s_x + B_y s_y$$

(3.72)

$$B_n = \vec{B} \cdot \hat{a}_n = -B_x s_y + B_y s_x$$

(3.73)

Realizando algumas operações entre as componentes da densidade de fluxo

$$B_n B_t = B_x B_y (s_x^2 - s_y^2) + s_x s_y (B_y^2 - B_x^2)$$

(3.74)

Da mesma forma

$$B_n^2 - B_t^2 = B_x^2 s_y^2 - 2B_x B_y s_x s_y + B_y^2 s_x^2 - (B_x^2 s_x^2 + 2B_x B_y s_x s_y + B_y^2 s_y^2)$$

(3.75)

Somando e subtraindo $B_x^2 s_y^2 + B_y^2 s_x^2$ da equação (3.75)

$$\begin{aligned} B_n^2 - B_t^2 &= 2B_x^2 s_y^2 - 2B_x B_y s_x s_y + 2B_y^2 s_x^2 \\ &\quad - (B_x^2 s_x^2 + B_x^2 s_y^2 + 2B_x B_y s_x s_y + 2B_x B_y s_x s_y + B_y^2 s_y^2 + B_y^2 s_x^2) \\ &= 2B_x^2 s_y^2 + 2B_y^2 s_x^2 - 4B_x B_y s_x s_y - B_x^2 (s_x^2 + s_y^2) - B_y^2 (s_x^2 + s_y^2) \\ &= 2B_x^2 s_y^2 + 2B_y^2 s_x^2 - 4B_x B_y s_x s_y - |B|^2 \end{aligned}$$

(3.76)

Comparando as expressões matemáticas (3.74) e (3.70) a seguinte substituição pode ser realizada

$$dF_t = \frac{B_n B_t}{\mu_0} dl \quad (3.77)$$

De maneira semelhante, comparando (3.76) e (3.71)

$$dF_n = \frac{B_n^2 - B_t^2}{2\mu_0} dl \quad (3.78)$$

Expressando em termos de densidade de força

$$p_t = \frac{B_n B_t}{\mu_0} \quad (3.79)$$

$$p_n = \frac{B_n^2 - B_t^2}{2\mu_0} \quad (3.80)$$

Como mencionado no início da seção, a força calculada via método do tensor de maxwell tem relação direta com a componente tangencial e normal da densidade de fluxo na qual esse objeto está imerso. Uma descrição detalhada do método do trabalho virtual pode ser consultada em (DEBORTOLI, 1992; SALON, 1995)

4 METODOLOGIA DE PROJETO E SIMULAÇÃO

O projeto de máquinas elétricas, como a MSIP, é um processo iterativo que envolve a aplicação de equações simplificadas, desconsiderando inicialmente as características não lineares dos materiais ferromagnéticos. Segundo autores como Boldea, essa forma de projeto permite uma estimativa inicial das dimensões e parâmetros operacionais da máquina. Posteriormente, os efeitos não lineares, como a saturação magnética — provocada ou não pela reação de armadura —, podem ser avaliados por meio de análises numéricas, como o método de elementos finitos, geralmente empregadas em módulos de simulação específicos (BOLDEA, 2004; KRISHNAN, 2010; PIQUET, 2010).

As diretrizes de projeto podem ser divididas em três partes inter-relacionadas: o rotor, o estator e o enrolamento. Cada uma dessas partes influencia diretamente as características eletromagnéticas e térmicas da máquina. O processo de dimensionamento de uma máquina síncrona de ímã permanente inicia-se pela definição dos principais parâmetros de operação, dentre os quais destacam-se a tensão de alimentação, as velocidades nominal e máxima, a potência de saída e o torque nominal. Neste trabalho, a máquina foi projetada para operar com tensão de alimentação trifásica de 380 V, potência de saída de 23,27 kW, torque médio de 49,65 N·m e corrente eficaz (RMS) de 35,36 A. A constante de força contraeletromotriz (back-emf), considerada uma das grandezas elétricas mais relevantes no projeto da máquina, é obtida em função da tensão de alimentação e da velocidade máxima de operação (KRISHNAN, 2010). Adicionalmente, os parâmetros de potência e torque influenciam diretamente o dimensionamento geométrico da máquina, especialmente no comprimento do entreferro e no volume total ativo, afetando de maneira significativa o desempenho eletromagnético e térmico do sistema (BOLDEA, 2004; JAHNS, 2008; DUONG, 2017).

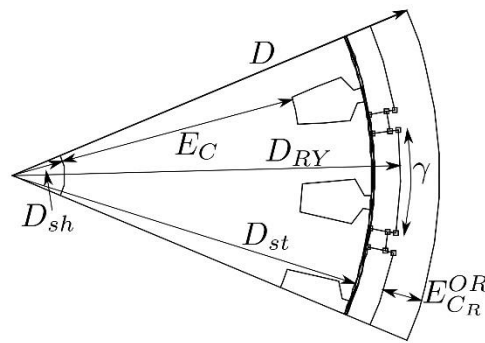
Após essa etapa inicial, o projeto pode ser refinado com base nas simulações computacionais, ajustando-se os parâmetros até que se obtenha o desempenho desejado. Esse ciclo de simulação e ajuste continua até que os critérios técnicos e de desempenho sejam plenamente atendidos.

4.1 ROTOR

A escolha do tipo de rotor, externo ou interno, é o passo inicial no projeto do rotor. A forma como os ímãs serão montados na máquina, na superfície ou embutido, também deve ser escolhido.

Fatores como a aplicação, espaço disponível, velocidade nominal e velocidade máxima serão essenciais nas escolhas do tipo de rotor e na forma de montagem dos ímãs. Rotores externos são compactos e com alta inércia, enquanto rotores internos são menos compactos e com baixa inércia.

Figura 4 – Rotor externo com ímãs montado na superfície.



Parâmetros como formato, tipo, classe do ímã e do valor de coeficiente de permeância também devem ser levados em consideração.

A espessura do ímã depende do comprimento do entreferro, do fator de dispersão de fluxo e do coeficiente de permeância, conforme equação abaixo:

$$L_M = PC * \frac{g}{(1 - f_{LKG})} \quad (4.1)$$

L_M : Espessura do ímã;

g : Comprimento do entreferro;

PC : Coeficiente de permeância;

f_{LKG} : fator de dispersão de fluxo;

Essa equação mostra que a espessura do ímã aumenta proporcionalmente ao entreferro e ao coeficiente de permeância, e que maiores perdas por fuga de fluxo exigem ímãs mais espessos para manter o desempenho desejado. Assim, o dimensionamento adequado de L_M é essencial para garantir a integridade magnética da máquina, evitando a desmagnetização parcial do ímã e assegurando uma resposta eficiente do sistema mesmo em condições de carga nominal.

A escolha do número de polos é uma etapa importante porque influencia diretamente em alguns parâmetros importantes como a espessura da coroa do estator e do rotor, as perdas por histerese no ferro e o torque de borda. O número de polos irá definir a área polar dos ímãs. A área polar é um parâmetro fundamental no projeto da MSIP, especialmente quando se utilizam ímãs montados na superfície do rotor. Essa área influencia diretamente a quantidade de fluxo magnético que atravessa o entreferro e, conseqüentemente, o desempenho eletromagnético da máquina. A área polar A_p pode ser calculada utilizando a seguinte expressão:

$$A_p = \left(\frac{\gamma}{\rho}\right) * R_{RY} * L_{STK} \quad (4.2)$$

A_p : Área Polar;

γ : Número de polo magnético;

ρ : Ângulo do polo;

R_{RY} : Raio de montagem;

L_{STK} : Profundidade axial da máquina.

A equação considera que cada polo magnético ocupa uma fração angular $\frac{\gamma}{\rho}$ da circunferência, sendo essa fração multiplicada pelo raio de montagem e pela profundidade axial da máquina, o que resulta na área efetiva ocupada por cada ímã.

Se aumentar o número de polos da máquina, o passo polar diminui, reduzindo a área polar correspondente a cada ímã. Esse comportamento implica em um compromisso entre o número de polos e o espaço disponível para os ímãs,

influenciando também na densidade de fluxo e nas perdas por histerese e correntes parasitas.

A correta determinação da área polar é essencial para assegurar que o fluxo magnético gerado pelos ímãs seja suficiente para atender aos requisitos de torque e potência da aplicação, respeitando ao mesmo tempo os limites físicos e construtivos da máquina.

Com o valor da área polar e da densidade de fluxo do ímã, que pode ser obtida a partir da curva de desmagnetização do material magnético, fornecida pelo fabricante do ímã, e do coeficiente de permeância, o fluxo por polo pode ser calculado.

O fluxo magnético por polo, representado por ϕ_P é um parâmetro fundamental no projeto de MSIP. Ele representa a quantidade de fluxo magnético efetivamente canalizado por cada polo magnético da máquina, sendo diretamente responsável pela geração da força contraeletromotriz e, conseqüentemente, pelo torque desenvolvido.

A expressão para o cálculo do fluxo por polo é dada por:

$$\phi_P = B_M A_P \quad (4.3)$$

Essa fórmula demonstra que o fluxo magnético é diretamente proporcional à densidade de fluxo gerada pelo ímã e à área disponível para sua condução. Em termos práticos, a densidade de fluxo é determinada a partir das propriedades do material magnético, considerando-se o ponto de operação estabelecido pelo coeficiente de permeância. A área polar, por sua vez, é definida em função da geometria do rotor, do número de polos e do comprimento axial da máquina.

A correta determinação de ϕ_P é essencial para garantir o desempenho eletromagnético da máquina, impactando diretamente no dimensionamento do enrolamento, na tensão gerada e no torque produzido. Erros nesse cálculo podem resultar em subdimensionamento magnético ou em sobrecarga térmica da máquina.

Finalizando o projeto do rotor é importante definir a espessura do núcleo do rotor. O núcleo do rotor externo, também denominado coroa, tem a função de conduzir o fluxo magnético de retorno no circuito magnético da máquina elétrica. Para que esse processo ocorra de forma eficiente, sem que haja saturação magnética, é necessário dimensionar adequadamente a espessura desse núcleo, garantindo que a densidade de fluxo magnético nele presente permaneça abaixo do limite de saturação do material ferromagnético utilizado. A expressão abaixo é utilizada para calcular a espessura do núcleo do rotor externo, que foi utilizado nesse trabalho. A tabela 1 apresenta os parâmetros que serão utilizados na simulação.

$$E_{CR}^{OR} = \frac{2\pi * B_M(R - L_M)}{4 * p * B_T + 2\pi * B_M} \quad (4.4)$$

E_{CR}^{OR} : Espessura do núcleo do rotor;

B_M : Densidade de fluxo magnético;

R : Raio externo do rotor;

L_M : Espessura do ímã;

p : Número de pares de polos;

B_T : Densidade de fluxo máxima do material ferromagnético.

Tabela 1 – Parâmetros do rotor

Parâmetro	Valor	
L_M	8,421	[mm]
E_{CR}^{OR}	12.655	[mm]
A_P	$16,979 \times 10^{-4}$	[m ²]
ϕ_P	$17,40 \times 10^{-4}$	[Wb]

4.2 ESTATOR

O projeto do estator inicia-se com a definição do número de ranhuras. Este número deve ser um múltiplo de três, de modo a possibilitar a acomodação de um enrolamento trifásico. Na sequência, procede-se à escolha da abertura da ranhura, a qual deve ser suficiente para permitir a adequada alocação das bobinas. Ressalta-se que a seleção do número de ranhuras e da abertura deve ser realizada com cautela, uma vez que tais parâmetros influenciam diretamente o pico do torque de borda.

No projeto de máquinas síncrona de ímã permanente, a definição do número de ranhuras e da abertura das ranhuras do estator é de fundamental importância, pois influencia diretamente o desempenho eletromagnético, a eficiência energética, o comportamento térmico e o nível de vibrações e ruídos da máquina.

O número de ranhuras do estator afeta a distribuição do campo magnético, a produção de torque e a resposta dinâmica do motor. Conforme mostrado em (IOSR Journals, 2024), um número elevado de ranhuras tende a proporcionar uma distribuição mais uniforme do fluxo magnético, reduzindo o "ripple" de torque — variações cíclicas que podem gerar vibrações mecânicas e ruído acústico.

Entretanto, a escolha do número de ranhuras deve ser feita com cautela. Combinações inadequadas entre o número de ranhuras do estator e polos do rotor podem resultar em altos níveis de torque de borda, o que compromete a suavidade da operação, principalmente em aplicações de controle preciso de velocidade (Core.ac.uk, 2023). Para minimizar esses efeitos indesejáveis, recomenda-se que o número de ranhuras e polos não sejam iguais nem múltiplos diretos entre si.

A abertura das ranhuras, por sua vez, influencia a facilidade de alocação dos condutores, a distribuição do fluxo magnético e a dissipação térmica da máquina. Conforme demonstrado por estudos técnicos de (ABCCobre, 2021), uma abertura excessivamente estreita pode dificultar a inserção das bobinas, enquanto uma abertura demasiadamente larga pode aumentar o fluxo de dispersão e reduzir a densidade de fluxo útil no entreferro, impactando negativamente o torque e a eficiência.

Além disso, a interação entre o entreferro e a geometria das ranhuras influencia a geração de forças magnéticas pulsantes, responsáveis por vibrações estruturais e níveis elevados de ruído acústico. Dessa forma, o dimensionamento adequado da abertura das ranhuras contribui não apenas para a otimização eletromagnética, mas também para o comportamento acústico da máquina.

Em máquinas elétricas que utilizam ímãs permanentes, é comum que uma pequena parcela do fluxo magnético gerado pelos ímãs não alcance o estator. Essa perda resulta em uma densidade de fluxo magnético no ferro inferior ao valor esperado, o que permite a redução das dimensões do estator sem comprometer o desempenho magnético da máquina. Tal fenômeno é conhecido como fluxo de dispersão (flux leakage) e é incorporado no projeto por meio do fator de dispersão (leakage factor).

O fator de dispersão pode assumir valores entre zero, quando a dispersão é desconsiderada, e um, quando se assume que nenhum fluxo magnético atinge o estator. A seleção do valor apropriado para esse fator deve ser realizada conforme as características específicas do projeto e os níveis de precisão desejados.

As principais dimensões no estator são largura do dente, largura total da sapata, altura da sapata, altura do dente, extremidade (ponta) do dente. Essas dimensões devem ser obtidas utilizando as equações (4.5) a (4.9), seguindo a ordem estabelecida.

$$w_t = \left(1/f_{lkg}\right) * \frac{(2p) * \phi_p}{N_s * B_T * L_{STK}} \quad (4.5)$$

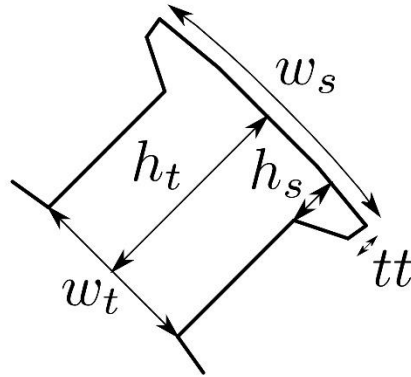
$$w_s = \left(2\pi/N_s\right) * R_{ST} - w_0 \quad (4.6)$$

$$h_s = (w_s - w_t)/2 \quad (4.7)$$

$$h_t = 4h_s \quad (4.8)$$

$$tt = w_0/2$$

(4.9)

Figura 5 – Dimensões e formas dos dentes.

Por fim, recomenda-se que a razão entre a altura do dente e a altura da sapata esteja compreendida entre dois e quatro, sendo quatro o valor padrão adotado para esse trabalho.

A última dimensão do estator a ser determinada é a espessura de sua coroa. A espessura da coroa do estator é um parâmetro crítico no projeto de máquinas elétricas rotativas, pois influencia diretamente a capacidade de condução do fluxo magnético, a resistência mecânica da estrutura e o desempenho térmico do motor.

Em termos eletromagnéticos, a coroa do estator serve como caminho para o fluxo magnético que retorna dos dentes para completar o circuito magnético. Caso a espessura da coroa seja insuficiente, ocorre a saturação magnética, que limita o fluxo e reduz o desempenho do motor, impactando diretamente o torque máximo disponível e a eficiência energética da máquina (MIRANDA et al., 2019). A saturação também pode aumentar a geração de calor, elevando as perdas e comprometendo a vida útil do equipamento.

Do ponto de vista mecânico, a coroa contribui para a rigidez estrutural do estator. Uma coroa muito fina pode resultar em uma estrutura suscetível a deformações e vibrações durante a operação, o que compromete a estabilidade

mecânica, aumenta o nível de ruído e pode levar a falhas prematuras (KRAUSE et al., 2013).

Adicionalmente, a espessura da coroa afeta o controle térmico do estator. Uma coroa adequadamente dimensionada permite uma melhor dissipação do calor gerado pelas perdas magnéticas e pelas correntes induzidas, evitando sobreaquecimento e garantindo a manutenção da temperatura de operação dentro dos limites seguros estabelecidos para os materiais isolantes e para o enrolamento (BOLDEA; NASAR, 2005).

$$E_C = \frac{\frac{1}{2}(1 - f_{lkg}) * B_M * A_P}{B_T * L_{STK}} \quad (4.10)$$

Por fim, em máquinas com rotor externo, caso a espessura da coroa seja maior do que o necessário para evitar a saturação, pode-se substituir parte do volume excedente por materiais não magnéticos e mais leves. Essa substituição resulta na redução do peso total da máquina e na diminuição dos custos de fabricação, sem comprometer o desempenho magnético. Para este cálculo, utiliza-se a equação (4.10). A tabela 2 apresenta os parâmetros que serão utilizados na simulação.

Tabela 2 – Parâmetros do estator

Parâmetro	Valor
w_t	19,083 [mm]
w_s	30,483 [mm]
h_s	5,70 [mm]
h_t	22,800 [mm]
tt	2,25 [mm]
E_C	10,018 [mm]

4.3 ENROLAMENTO

A definição do enrolamento é um dos aspectos mais importantes para garantir o desempenho eletromagnético adequado. Um dos métodos amplamente

utilizados para auxiliar no projeto do enrolamento é o método da estrela de ranhuras (star of slots method).

Esse método baseia-se na representação das tensões induzidas nos condutores localizados em cada ranhura do estator por meio de fasores, que são vetores que indicam magnitude e fase. Cada ranhura é representada por um fasor, cuja orientação depende da posição angular da ranhura no estator. Esses fasores são então organizados graficamente em forma de estrela, o que permite a análise visual e sistemática da distribuição dos condutores entre as fases do enrolamento, conforme ilustrado na figura 6 e 7.

A principal vantagem do método da estrela de ranhuras é que ele facilita a obtenção de um enrolamento balanceado e simétrico, o que é fundamental para a geração de um campo magnético girante uniforme e, conseqüentemente, para o funcionamento eficiente e silencioso do motor.

Figura 6 – Estrela de ranhuras (a) Distribuição dos fasores. (b) Divisão em setores.

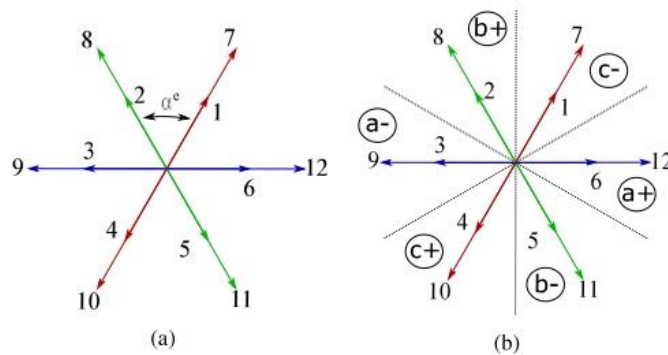
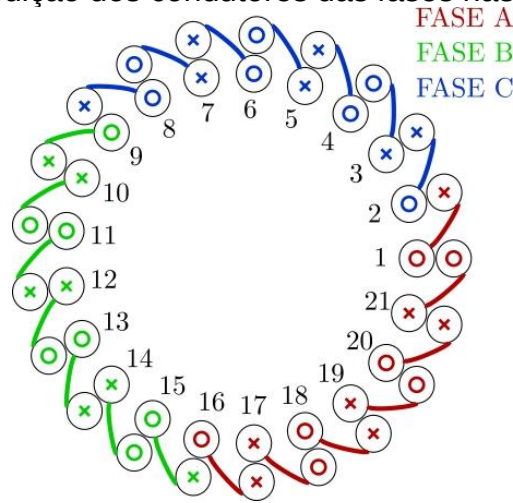


Figura 7 – Distribuição dos condutores das fases nas ranhuras.



A determinação do número de espiras por bobina e a bitola do fio condutor são etapas que finalizam o projeto do enrolamento. Para a definição do número de espiras, inicialmente calcula-se a constante de força contraeletromotriz, por meio da equação (4.11). Posteriormente, aplica-se a equação (4.12) para a obtenção do número de espiras por bobina. O número total de bobinas, por sua vez, é determinado a partir da construção da estrela de ranhuras.

$$K_E = 0.9(V/w_{max}) \quad (4.11)$$

$$N_t = \text{int} \left(\pi \frac{K_E}{4p(1 - f_{lkg}) * N_c * \phi_p} \right) \quad (4.12)$$

A determinação da bitola do fio condutor inicia-se com o cálculo da área da ranhura, obtida pela equação (4.13) no caso da máquina com rotor externo. O diâmetro máximo do fio que pode ser acomodado nas ranhuras é calculado por meio da equação (4.14), levando em consideração o fator de preenchimento da ranhura (slot fill factor). Esse fator apresenta valores típicos entre 0,30 e 0,35 para enrolamentos de dupla camada, e entre 0,65 e 0,70 para enrolamentos de camada simples (SILVA, 2015; PEREIRA, 2018). A bitola do fio é selecionada de modo que seu diâmetro seja inferior, porém o mais próximo possível do valor máximo

admissível (OLIVEIRA; COSTA, 2020). A tabela 3 apresenta os parâmetros que serão utilizados na simulação.

$$A_{SLT}^{OR} = \frac{(R_{ST} - h_s)^2 - (R_{ST} - h_t)^2}{N_s} - w_t * (h_t - h_s) \quad (4.13)$$

$$D_t = \sqrt{f_{slt} (A_{slt} / N_t)} \quad (4.14)$$

Tabela 3 – Parâmetros de enrolamento

Parâmetro	Valor	
K_E	1,031	[V.s/rad]
N_t	6	[-]
A_{slt}^{OR}	1.989×10^{-4}	[mm ²]
D_t	9	[AWG]

4.4 SOFTWARE FEMM

O Finite Element Method Magnetics (FEMM) é um software gratuito e de código aberto destinado à simulação de problemas eletromagnéticos bidimensionais (2D) e axissimétricos, por meio da aplicação do método dos elementos finitos. Sua utilização é amplamente difundida nas áreas de engenharia elétrica e automação, sendo especialmente eficaz na análise de máquinas elétricas rotativas, como as MSIPs.

A modelagem adequada da MSIP exige uma análise detalhada da distribuição de campos magnéticos, do torque eletromagnético gerado e do

comportamento de materiais ferromagnéticos e ímãs permanentes. Nesse contexto, o FEMM apresenta diversas vantagens para esse tipo de simulação, entre as quais se destacam:

- Gratuidade e acessibilidade: por ser um software de código aberto, o FEMM elimina a necessidade de licenciamento comercial, sendo uma ferramenta economicamente viável para pesquisadores, estudantes e instituições de ensino;
- Alta precisão na análise de campos: a utilização do método dos elementos finitos permite a obtenção de resultados precisos na simulação de campos magnéticos estáticos, sendo fundamental para o projeto e a otimização de máquinas elétricas;
- Modelagem de materiais não lineares: o software possibilita a inserção de curvas de magnetização do tipo B-H não lineares, o que contribui para uma representação mais realista dos materiais ferromagnéticos presentes nos componentes do motor, como o estator e o rotor;
- Cálculo de torque eletromagnético: o FEMM oferece métodos como o tensor de Maxwell e o trabalho virtual para o cálculo do torque, os quais são amplamente aceitos na literatura técnica e aplicáveis à análise do desempenho eletromagnético de motores;
- Automação de simulações com scripts: a integração com a linguagem de script Lua permite a realização de simulações paramétricas, como a variação da posição do rotor ou de parâmetros construtivos, facilitando a análise de sensibilidade e otimização de projeto;
- Interface gráfica interativa: a interface do software permite a construção visual da geometria do dispositivo, facilitando a modelagem de estruturas com múltiplos polos, dentes e ímãs.

Apesar de suas vantagens, o FEMM apresenta limitações. Entre elas, destaca-se a restrição a simulações apenas em 2D ou com simetria axial, o que inviabiliza a modelagem completa de fenômenos tridimensionais. Além disso, o software não dispõe de recursos nativos para simulação dinâmica eletromecânica ou de circuitos, sendo necessário utilizar ferramentas externas para essas análises.

Ainda assim, o FEMM representa uma alternativa eficiente e acessível para estudos iniciais de projeto, análise de desempenho magnético e validação de conceitos em motores de passo com ímãs permanentes. Sua adoção é particularmente recomendada em ambientes acadêmicos e de pesquisa aplicada, nos quais a viabilidade econômica e a flexibilidade da ferramenta são fatores decisivos.

A etapa de simulação, da MSIP abordada nesse trabalho, foi conduzida no software FEMM por meio da análise magnetostática baseada no método dos elementos finitos. A geometria da máquina foi parametrizada e gerada em ambiente MATLAB, permitindo a exportação direta do modelo para o FEMM.

A primeira etapa consistiu na modelagem geométrica, realizada em ambiente MATLAB. Para isso, foram implementadas rotinas paramétricas que permitiram a definição das dimensões construtivas da máquina, incluindo estator, rotor, ranhuras e ímãs permanentes. Esse procedimento garantiu flexibilidade na variação dos parâmetros de projeto, além de facilitar ajustes e otimizações. O modelo geométrico gerado pelo MATLAB foi exportado em formato compatível com o FEMM, assegurando a preservação da precisão dimensional necessária para a análise.

No FEMM, o modelo foi submetido a uma série de simulações magnetostáticas, que permitiram avaliar o comportamento eletromagnético da máquina em condições de regime permanente. Para a realização dessas simulações, foram definidos os materiais constituintes do estator, rotor e ímãs, bem como as condições de contorno do problema e a discretização da malha de elementos finitos. A qualidade da malha foi ajustada de modo a equilibrar a precisão dos resultados e o tempo de processamento computacional.

A partir dessas simulações, foram levantadas diversas curvas de interesse para o estudo do desempenho da máquina, como a distribuição do fluxo magnético ao longo do entreferro, a densidade de fluxo magnético nas regiões críticas do circuito, a força contraeletromotriz induzida nos enrolamentos e o torque eletromagnético desenvolvido.

Adicionalmente, foram conduzidas simulações em diferentes condições operacionais, variando parâmetros como a posição angular do rotor e o nível de excitação dos enrolamentos. Esse procedimento possibilitou a verificação da robustez do projeto e forneceu subsídios para a avaliação comparativa entre situações de carga e vazio.

Dessa forma, a utilização combinada do MATLAB e do FEMM mostrou-se uma estratégia eficiente, uma vez que o primeiro possibilitou a automação do processo de geração geométrica e o segundo forneceu um ambiente robusto para a análise numérica.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A análise do comportamento eletromagnético da MSIP requer técnicas de modelagem capazes de representar adequadamente a complexidade das interações entre os campos magnéticos e as correntes elétricas presentes na máquina. Nesse contexto, destaca-se o método dos tensores, por proporcionar uma formulação matemática precisa e concisa dos fenômenos eletromagnéticos, por meio de representações vetoriais e matriciais das interações entre os enrolamentos do estator e os ímãs permanentes do rotor. Tal abordagem favorece tanto a análise do comportamento dinâmico quanto o desenvolvimento de estratégias de controle da máquina, além de possibilitar a descrição clara das transformações entre sistemas de coordenadas, fundamentais para a interpretação das componentes de eixo direto e em quadratura do fluxo magnético e da corrente elétrica (SILVA, 2018; OLIVEIRA; SOUZA, 2020; COSTA; OLIVEIRA, 2018).

No regime de operação a vazio, ou seja, com o rotor girando sem carga mecânica conectada e sem corrente fluindo no estator, a força contraeletromotriz (FCEM) é induzida nos enrolamentos do estator exclusivamente pela rotação do campo magnético gerado pelos ímãs do rotor. O cálculo preciso dessa FCEM, a partir da modelagem tensorial, fornece não apenas sua magnitude, mas também sua fase temporal, informação crítica para estratégias de controle avançado (ALMEIDA et al., 2019).

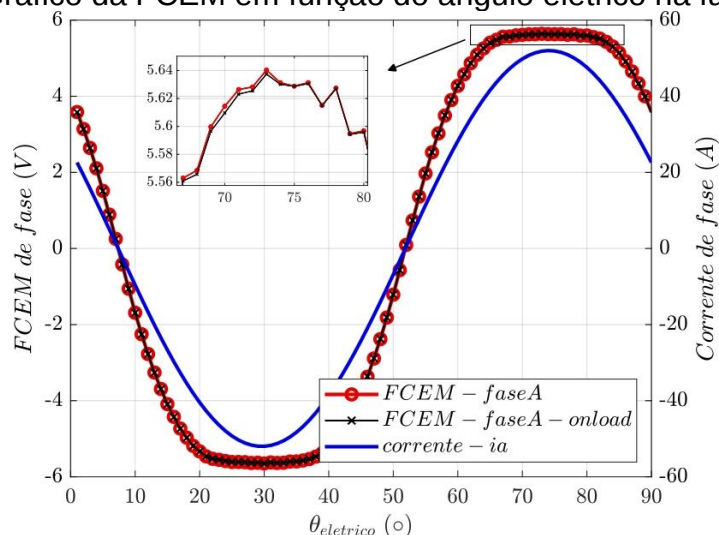
Conhecer a fase da FCEM é fundamental para implementar técnicas de controle por orientação de campo (FOC – Field Oriented Control), onde se busca aplicar uma corrente em fase com a FCEM, de modo a maximizar a transferência de potência ativa e minimizar a circulação de potência reativa. Essa condição ideal ocorre quando o vetor de corrente do estator está alinhado com o vetor de tensão induzida, o que resulta em um controle mais eficiente e com menor exigência de corrente total (PEREIRA; SANTOS, 2021).

Na MSIP simulada nesse trabalho os ímãs são montados na superfície do rotor, o que resulta em uma relutância praticamente constante ao longo do

entreferro. Devido a essa configuração construtiva, não há variação significativa na relutância em função da posição angular do rotor, o que impede a geração de torque por relutância. Dessa forma, o único componente de torque presente é o torque de alinhamento magnético, também denominado torque de interação entre os campos magnéticos do estator e do rotor. Quando a corrente do estator está em fase com a força contraeletromotriz (FCEM), o fluxo magnético resultante no entreferro encontra-se em quadratura com o campo dos ímãs permanentes, possibilitando a produção do torque máximo pela máquina.

As Figuras 8, 9 e 10 apresentam os resultados das simulações realizadas por meio do software FEMM. A força contraeletromotriz (FCEM) em vazio foi obtida utilizando o método dos tensores, enquanto a FCEM sob carga (onload) foi determinada por meio da análise por elementos finitos, a fim de avaliar o fluxo magnético que percorre o interior das espiras. Os resultados obtidos nas simulações mostraram-se satisfatórios, uma vez que os níveis de saturação magnética atingidos estão dentro dos parâmetros desejáveis para o funcionamento adequado do sistema.

Figura 8 – Gráfico da FCEM em função do ângulo elétrico na fase A.



Observa-se que os valores da FCEM a vazio e da FCEM onload são bastante próximos, o que indica uma boa regulação de tensão da máquina simulada. Essa pequena variação entre os dois regimes sugere que a impedância síncrona é relativamente baixa e que a excitação aplicada no modelo foi suficiente para manter

o fluxo magnético praticamente constante, mesmo com a aplicação da carga. Esse comportamento é típico de máquinas síncronas bem projetadas.

Além disso, verifica-se que a corrente obtida na simulação se apresenta aproximadamente em fase com a FCEM, caracterizando um fator de potência próximo da unidade. Essa condição pode ser interpretada como indicativa de um controle adequado da excitação durante a simulação, garantindo uma operação eficiente e com mínima circulação de potência reativa.

Figura 9 – Gráfico da FCEM em função do ângulo elétrico na fase B.

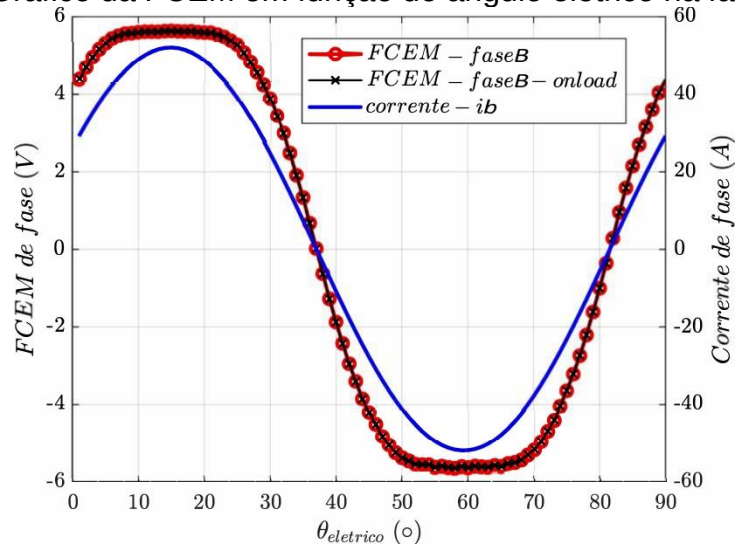
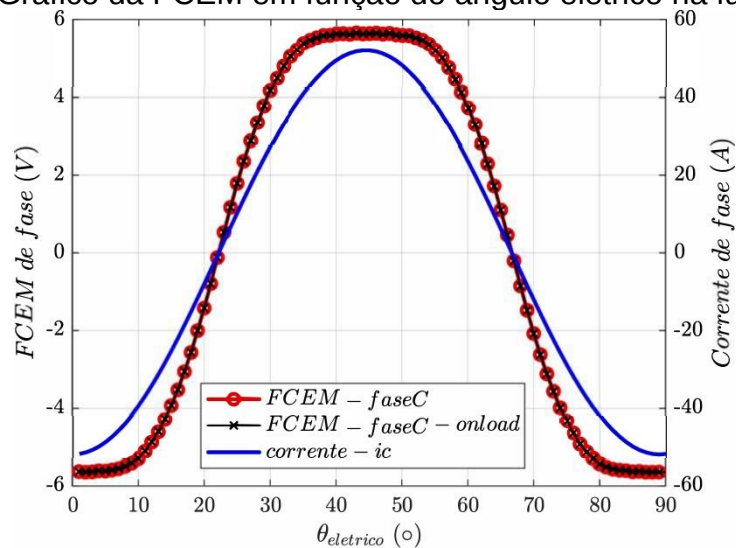


Figura 10 – Gráfico da FCEM em função do ângulo elétrico na fase C.

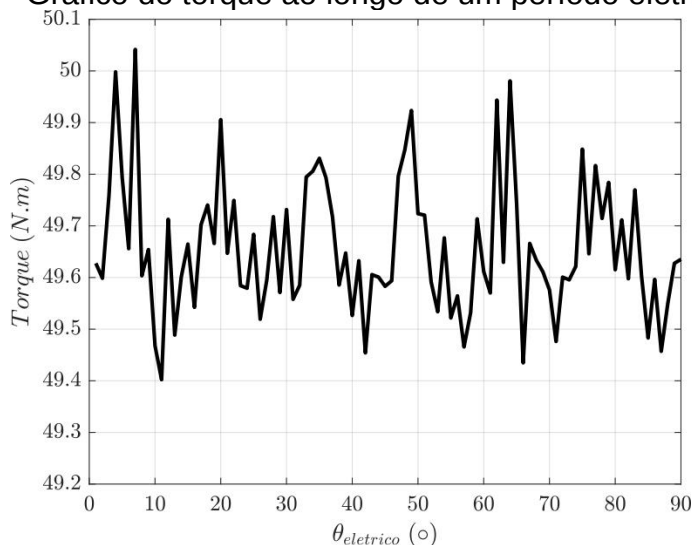


Os resultados da simulação evidenciam o bom desempenho do modelo da máquina síncrona implementado no FEMM, destacando a estabilidade da FCEM frente à aplicação de carga e a correta sincronização entre corrente e tensão. Esses fatores são fundamentais para validar o comportamento eletromagnético do sistema modelado, assim como a confiabilidade do método de elementos finitos aplicado na análise.

A metodologia de simulação empregada para a obtenção dos resultados apresentados neste trabalho fundamenta-se nos parâmetros previamente descritos e calculados no capítulo anterior, os quais servem como base para o projeto da MSIP. Após o dimensionamento da máquina, realiza-se o cálculo da força contraeletromotriz (FCEM) em condição de vazio, considerando o rotor acionado mecanicamente, de forma que a máquina opere como gerador. Assim, a FCEM obtida corresponde à força contraeletromotriz gerada na condição de operação a vazio.

Posteriormente, aplica-se à máquina a corrente necessária para que sejam atingidas as condições nominais de projeto, adotando-se uma corrente eficaz (RMS) de 35,36 A e corrente de pico de 50 A, em fase com a FCEM. Os valores de corrente e torque eletromagnético desenvolvidos pela máquina são obtidos por meio de simulações numéricas fundamentadas no método dos elementos finitos, conforme apresentado na Figura 10.

Figura 11 – Gráfico do torque ao longo de um período elétrico.



A Figura 11 apresenta o perfil do torque desenvolvido pela máquina ao longo de um período elétrico. Para isso, o período mecânico foi dividido pela quantidade de pares de polos, a fim de se determinar o tempo correspondente a um ciclo do campo elétrico gerado pela rotação do rotor.

Considerando a quantidade de pares de polos, uma corrente instantânea foi aplicada, por meio da simulação por elementos finitos, para cada posição angular do rotor da MSIP. Em cada uma dessas posições, o torque no eixo foi medido, associando-se o valor obtido à corrente instantânea correspondente.

O torque de borda é um fenômeno indesejado presente em máquinas síncronas de ímã permanente, caracterizado pela presença de torque mesmo na ausência de corrente elétrica no estator. Esse torque resulta da interação entre os polos magnéticos dos ímãs permanentes do rotor e a variação da relutância provocada pela geometria dos entalhes do estator.

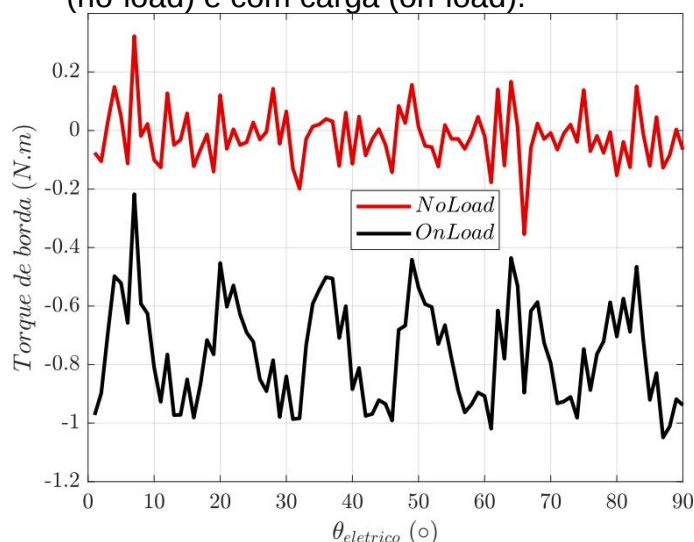
Esse fenômeno é particularmente perceptível em baixas velocidades, causando oscilações de torque, vibrações mecânicas e ruído acústico, o que compromete a suavidade de operação da máquina, além de prejudicar aplicações que demandam elevado grau de precisão no controle de posição ou velocidade. Quando calculado a vazio — ou seja, sem alimentação elétrica no estator — o torque de borda não apresenta valor médio diferente de zero ao longo de um ciclo completo de rotação. Isso ocorre porque as forças de atração magnética entre os ímãs do rotor e os dentes do estator se distribuem de forma simétrica ao longo do entreferro, fazendo com que os torques positivos e negativos se anulem em média. No entanto, apesar de sua média ser nula, o torque de borda ainda exerce influência significativa no desempenho dinâmico da máquina, devido às suas variações instantâneas.

A Figura 12 apresenta o torque de borda da PMSM projetada neste trabalho. Observa-se que o valor do torque de borda foi reduzido, atingindo níveis considerados satisfatórios para a aplicação à qual a máquina se destina.

Na condição de operação com carga (onload), o torque de borda, conforme ilustrado na Figura 12, apresenta um valor médio negativo. Esse comportamento

está relacionado ao nível de saturação magnética da máquina. Contudo, o valor obtido por meio da simulação foi baixo, servindo como indicativo de que o projeto da máquina apresenta bom desempenho.

Figura 12 – Comparação do torque de borda nas condições de operação sem carga (no-load) e com carga (on-load).



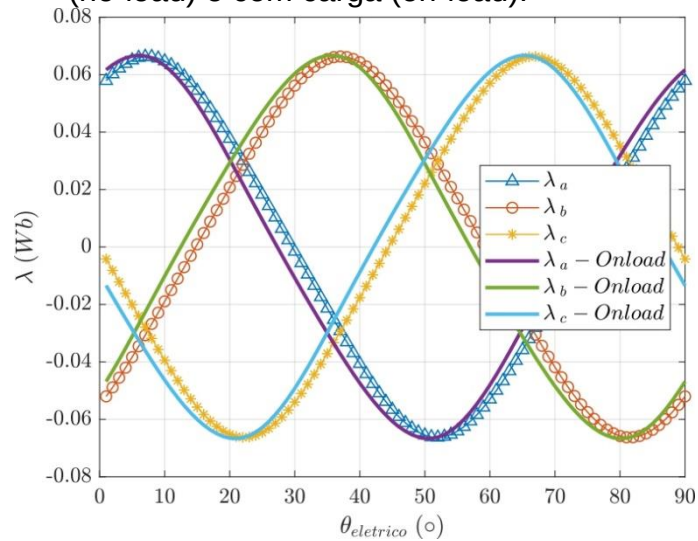
O gráfico da figura 13 representa o fluxo magnético em função do ângulo elétrico em uma MSIP com ímãs na superfície do rotor e fornece informações relevantes sobre a distribuição espacial do fluxo no entreferro da máquina. Nesse tipo de topologia, devido à simetria geométrica e à distribuição uniforme do campo magnético dos ímãs permanentes, espera-se que a forma de onda do fluxo apresente comportamento aproximadamente senoidal ao longo de um ciclo elétrico completo.

A análise dessa variação do fluxo em relação ao ângulo elétrico é fundamental para a caracterização do desempenho eletromagnético da máquina, permitindo a identificação de distorções harmônicas, efeitos de saturação ou assimetrias no circuito magnético. Além disso, tal gráfico constitui a base para o cálculo da força contraeletromotriz (FCEM), uma vez que esta é proporcional à derivada temporal do fluxo concatenado por fase. Dessa forma, a avaliação do fluxo magnético em função do ângulo elétrico é uma etapa essencial na validação do projeto magnético da MSIP.

A proximidade entre os perfis de fluxo magnético a vazio e onload indica que o nível de saturação do circuito magnético é reduzido e que o enrolamento do estator, mesmo sob condição de carga, não introduz perturbações significativas no

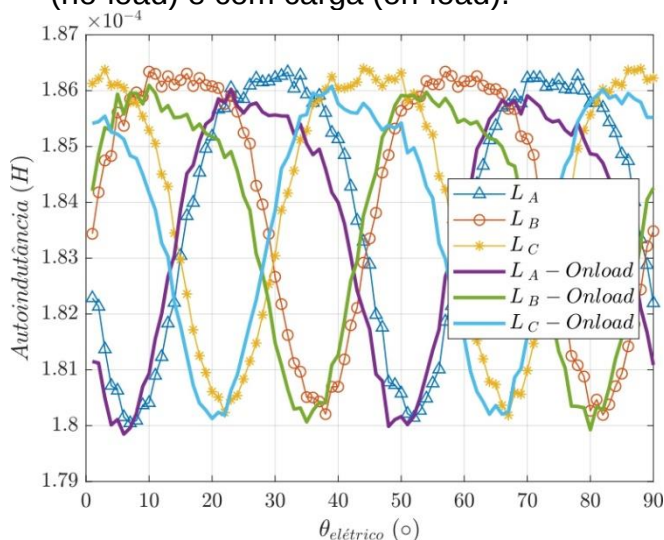
campo magnético principal. Esse resultado é desejável, pois evidencia que a máquina opera de forma linear em termos magnéticos, mantendo o formato senoidal do fluxo e minimizando a presença de harmônicos indesejáveis.

Figura 13 – Comparação do fluxo magnético nas condições de operação sem carga (no-load) e com carga (on-load).



Além disso, tal característica impacta diretamente no comportamento da força contraeletromotriz (FCEM) e na qualidade do torque gerado, contribuindo para a estabilidade da operação e eficiência do sistema. Portanto, a análise do gráfico reforça a adequação do projeto eletromagnético adotado para a MSIP, confirmando que a topologia com ímãs na superfície proporciona uma distribuição de fluxo estável, mesmo em condições de carga.

Figura 14 – Comparação da autoindutância nas condições de operação sem carga (no-load) e com carga (on-load).

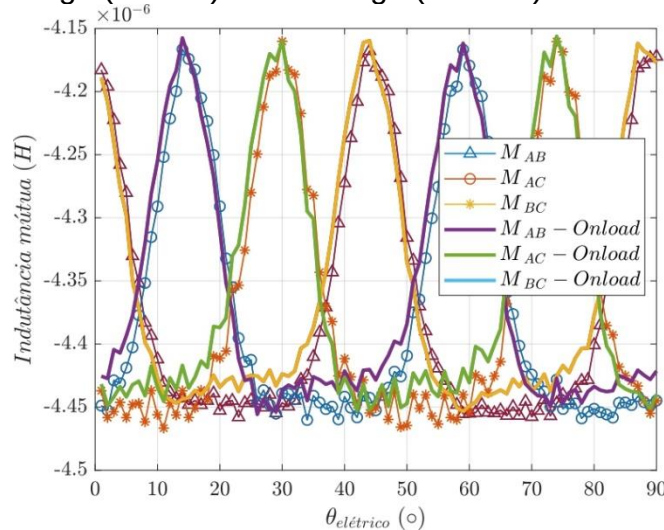


Observa-se, a partir dos resultados obtidos por meio da simulação, que os valores de autoindutância a vazio e sob carga da MSIP projetada apresentam-se bastante próximos. Este comportamento confirma a baixa influência da reação de armadura sobre o circuito magnético da máquina, característica inerente às topologias com ímãs posicionados na superfície do rotor. Devido ao entreferro constante e à ausência de saliência, a relutância do caminho magnético permanece praticamente inalterada em função da posição angular do rotor, o que resulta em uma distribuição de fluxo estável, mesmo em regime on-load, conforme figura 14.

A manutenção da autoindutância em diferentes condições de carga indica, ainda, que os níveis de saturação magnética permanecem baixos ao longo da operação, favorecendo a linearidade do modelo eletromagnético da máquina. Tal comportamento contribui para a fidelidade dos modelos utilizados na simulação e facilita o desenvolvimento de estratégias de controle baseadas em parâmetros fixos, com impacto positivo na robustez e previsibilidade do desempenho dinâmico da MSIP.

A Figura 15 apresenta o gráfico da indutância mútua em função do ângulo elétrico obtido por meio de simulação computacional da MSIP desenvolvida neste trabalho. A simulação foi realizada para duas condições de operação: sem carga (no-load) e com carga (on-load).

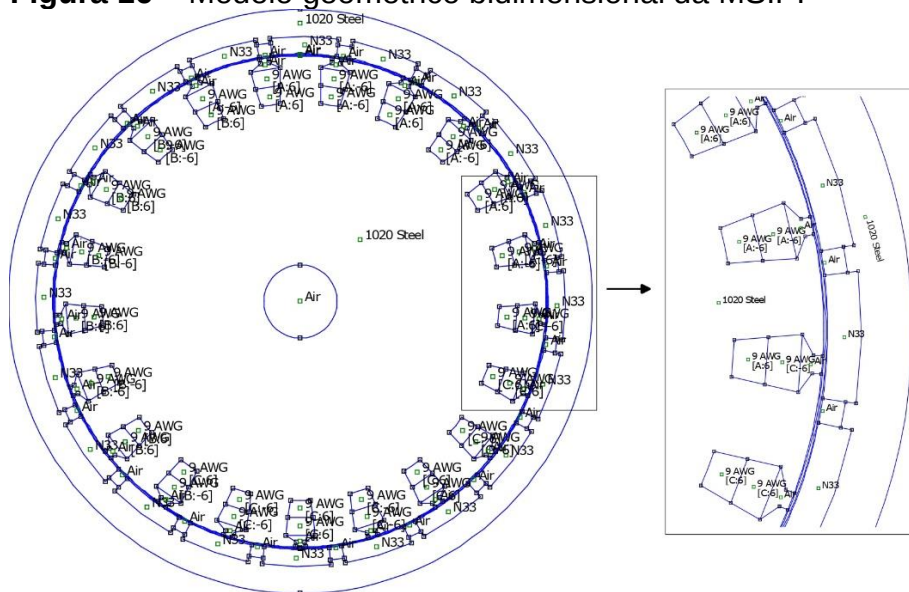
Figura 15 – Comparação da indutância mútua nas condições de operação sem carga (noload) e com carga (on-load).



Os resultados mostram que as curvas de indutância mútua para ambas as condições apresentam valores muito próximos ao longo de todo o ciclo elétrico. Esse comportamento indica que a aplicação da corrente de carga não provocou alterações significativas no acoplamento magnético entre os enrolamentos das fases. Tal resultado é coerente com as características da topologia da MSIP com ímãs na superfície, que apresenta entreferro constante e fluxo magnético predominantemente fixo, pouco influenciado pela corrente de armadura.

A baixa diferença entre os valores simulados nas condições de carga e sem carga também sugere que o nível de saturação magnética da máquina permanece reduzido durante a operação, mantendo o circuito magnético em regime praticamente linear. Isso significa que o fluxo adicional gerado pela corrente não modifica substancialmente o caminho do fluxo principal, fazendo com que a indutância mútua se mantenha praticamente inalterada.

Figura 16 – Modelo geométrico bidimensional da MSIP.



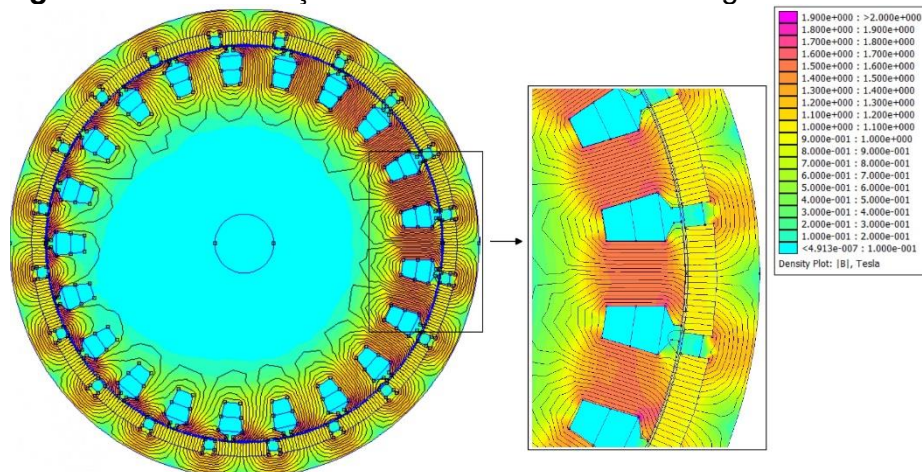
A figura 16 apresenta o modelo geométrico bidimensional da MSIP, desenvolvido em ambiente de simulação computacional do software FEMM. No centro da estrutura está localizado o núcleo do estator, confeccionado em aço 1020 laminado, no qual são inseridos os condutores do enrolamento trifásico, identificados como “9 AWG” e organizados de acordo com as fases A, B e C. O estator é responsável pela geração do campo magnético girante quando alimentado por correntes alternadas.

Na região periférica encontra-se o rotor externo, onde os ímãs permanentes de especificação "N33" são fixados superficialmente. Esses elementos magnéticos estabelecem o campo principal da máquina, o qual interage com o campo girante do estator, resultando na produção do torque eletromagnético.

O detalhe ampliado à direita da figura evidencia a disposição dos condutores nos entalhes do estator, bem como a proximidade entre enrolamentos, ímãs e o entreferro. Essa representação permite a análise da distribuição do fluxo magnético e da densidade de corrente, aspectos fundamentais para a verificação do acoplamento eletromagnético entre rotor e estator.

A adequada distribuição da densidade de fluxo magnético entre as duas partes ativas da máquina é de extrema importância para o desempenho do equipamento, pois contribui para a redução da ondulação de torque, a diminuição das perdas por saturação e a elevação da eficiência global, requisitos essenciais para aplicações em sistemas de tração elétrica, como scooters elétricas.

Figura 17 – Distribuição da densidade de fluxo magnético.



A análise da figura 17 evidencia a distribuição da densidade de fluxo magnético da MSIP. Nota-se que o fluxo magnético se estabelece a partir dos ímãs do rotor, atravessa o entreferro e se concentra nos dentes do estator, retornando pelo núcleo do estator até o fechamento do circuito magnético.

A correta distribuição da densidade de fluxo magnético entre o rotor e o estator é um aspecto fundamental para o desempenho eletromagnético da máquina. Uma distribuição homogênea do fluxo no entreferro contribui para a geração de forças magnéticas equilibradas, garantindo a produção de torque constante e minimizando oscilações indesejadas. Além disso, reduz o torque de borda, melhora a forma de onda da força contraeletromotriz e diminui a presença de harmônicos, o que resulta em maior eficiência e menor nível de vibração e ruído.

Outro ponto relevante é que uma densidade de fluxo bem distribuída permite o melhor aproveitamento do material magnético, evitando regiões de saturação excessiva no estator e, consequentemente, reduzindo as perdas por histerese e correntes parasitas. Esse equilíbrio assegura não apenas maior rendimento energético, mas também maior confiabilidade operacional e vida útil da máquina.

A análise evidencia que o projeto geométrico do rotor externo favorece uma elevada densidade de fluxo magnético na periferia do estator, promovendo maior

eficiência e torque consistente, aspectos essenciais para aplicações de tração elétrica.

A ampliação da figura 17 à direita mostra a maior concentração de fluxo magnético nos ímãs do rotor e nos enrolamentos do estator. Esse detalhe evidencia que a MSIP foi bem projetada porque a concentração de fluxo magnético no rotor e nos enrolamentos do estator é um dos principais parâmetros a ser otimizado no processo de dimensionamento de máquinas síncronas de ímã permanente. A eficiência do motor depende diretamente da qualidade dessa distribuição, o que influencia a geração de torque, a indução de corrente elétrica e as perdas no sistema.

Portanto, os resultados obtidos através da simulação computacional confirmam que a MSIP projetada apresenta um comportamento eletromagnético estável, com variações mínimas de indutância mútua entre as fases mesmo com a aplicação de carga. Esse desempenho é desejável em aplicações que requerem controle preciso e resposta dinâmica eficiente da máquina. O comportamento da densidade de fluxo magnético é outro dado que confirma a resposta positiva da simulação pois a distribuição do fluxo magnético entre o rotor e o estator influencia diretamente a densidade de corrente nos enrolamentos do estator e a geração do campo magnético.

Como perspectiva para a continuidade deste trabalho, propõe-se o desenvolvimento de estudos comparativos entre a máquina síncrona de ímã permanente apresentada nesta pesquisa e um motor de corrente contínua com características nominais equivalentes. Tal abordagem mostra-se relevante, uma vez que ambas as tecnologias possuem ampla aplicação em sistemas de acionamento elétrico, apresentando particularidades construtivas e operacionais que influenciam diretamente o desempenho, a eficiência energética e a viabilidade de utilização em diferentes cenários industriais e tecnológicos.

Nesse contexto, recomenda-se que futuras investigações contemplem uma análise detalhada dos principais parâmetros elétricos, magnéticos, térmicos e mecânicos das duas máquinas, permitindo avaliar de maneira criteriosa aspectos como rendimento, densidade de potência, torque desenvolvido, estabilidade operacional, resposta dinâmica, capacidade de sobrecarga e comportamento sob diferentes condições de funcionamento. Além disso, a comparação entre as

tecnologias poderá abranger fatores relacionados às perdas elétricas e magnéticas, níveis de aquecimento, vibração mecânica e emissão de ruídos, parâmetros estes que possuem influência significativa no desempenho global e na vida útil dos equipamentos.

Outro aspecto de grande relevância consiste na avaliação dos custos associados à fabricação, operação e manutenção de cada máquina. Enquanto os motores de corrente contínua apresentam vantagens relacionadas à simplicidade do controle de velocidade, sua estrutura baseada em escovas e comutadores pode resultar em maior desgaste mecânico e necessidade de manutenção periódica. Em contrapartida, as máquinas síncronas de ímã permanente destacam-se pela elevada eficiência energética, maior densidade de potência e redução de perdas associadas ao sistema de excitação, características que as tornam alternativas promissoras para aplicações modernas que demandam alto desempenho e confiabilidade operacional.

Adicionalmente, sugere-se que trabalhos futuros incluam a implementação experimental de ambas as máquinas em bancada de testes, possibilitando a validação prática dos resultados teóricos e computacionais obtidos. A realização de ensaios experimentais permitirá analisar o comportamento das máquinas em diferentes condições de carga, regimes transitórios e variações de velocidade, fornecendo resultados mais precisos acerca do desempenho eletromecânico de cada tecnologia. Dessa forma, será possível estabelecer critérios técnicos mais sólidos para a seleção da máquina elétrica mais adequada em aplicações específicas.

Por fim, espera-se que os estudos propostos contribuam para ampliar o conhecimento sobre as vantagens e limitações da máquina síncrona de ímã permanente em relação aos motores de corrente contínua, possibilitando a identificação de soluções mais eficientes, econômicas e adequadas para aplicações industriais e acionamentos de alto desempenho.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo principal o desenvolvimento completo do projeto de uma máquina síncrona de ímã permanente com rotor externo, voltada à aplicação em veículos elétricos de duas rodas, com foco específico em scooters elétricas. Essa topologia foi selecionada com o intuito de eliminar a necessidade de sistemas de redução mecânica, reduzindo perdas, peso e custo, ao mesmo tempo em que se proporciona maior eficiência por meio da montagem direta do rotor na roda motriz.

Para a consecução desse objetivo, foram definidos três objetivos específicos: apresentar os fundamentos matemáticos e computacionais do método dos elementos finitos (MEF) aplicados à análise eletromagnética da máquina; descrever detalhadamente a modelagem e o dimensionamento físico da MSIP, correlacionando parâmetros construtivos com desempenho; e, por fim, implementar simulações da máquina projetada, a fim de obter curvas de desempenho que validem sua aplicabilidade prática.

Com base nos resultados obtidos por meio das simulações computacionais realizadas com o software FEMM, verificou-se que o modelo da MSIP apresentou comportamento eletromagnético estável e condizente com os parâmetros projetados. A força contraeletromotriz (FCEM), tanto a vazio quanto sob carga, apresentou pequena variação, demonstrando boa regulação de tensão e baixa impedância síncrona, características essenciais para aplicações em sistemas de tração com controle vetorial por orientação de campo (FOC).

O torque desenvolvido pela máquina confirmou o funcionamento esperado de topologias com ímãs montados na superfície, onde o torque é oriundo exclusivamente da interação magnética entre estator e rotor, sem contribuição por relutância. O torque de borda foi reduzido a níveis satisfatórios, o que favorece a operação em baixas velocidades, condição comum em veículos urbanos como scooters elétricas.

Adicionalmente, os perfis de fluxo magnético e as curvas de indutância mostraram-se lineares e com mínima influência da corrente de armadura, indicando baixos níveis de saturação magnética mesmo sob carga. A proximidade entre os valores de autoindutância e indutância mútua nos regimes a vazio e onload

demonstra que a máquina projetada possui boa estabilidade magnética, fundamental para estratégias de controle precisas e robustas.

Tendo em vista o exposto, conclui-se que o projeto proposto cumpre com êxito os requisitos eletromagnéticos e estruturais para a aplicação em tração de scooters elétricas. A metodologia adotada — envolvendo modelagem matemática, dimensionamento físico e simulações baseadas em MEF — mostrou-se eficaz para o desenvolvimento de máquinas de alta eficiência e controle refinado, sendo aplicável a futuros projetos no campo da mobilidade elétrica.

REFERÊNCIAS

- AFFANNI, A. et al. Battery choice and management for new-generation electric vehicles. *IEEE transactions on industrial electronics*, IEEE, v. 52, n. 5, p. 1343–1349, 2005. Citado na página 16.
- BIANCHI, N.; BOLOGNANI, S.; ZIGLIOTTO, M. High-performance pm synchronous motor drive for an electrical scooter. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 37, n. 5, p. 1348–1355, 2001. Citado na página 17.
- CARDOSO, J. R. Electromagnetics through the finite element method: A simplified approach using Maxwell's equations. [S.l.]: Crc Press, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- CASTRO, A. G. d. Controle preditivo Finite Control-Set aplicado à máquina síncrona com ímã permanente no rotor. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017. Citado na página 15.
- CHAN, C. C.; BOUSCAYROL, A.; CHEN, K. Electric, hybrid, and fuel-cell vehicles: Architectures and modeling. *IEEE transactions on vehicular technology*, IEEE, v. 59, n. 2, p. 589–598, 2009. Citado na página 13.
- CHAU, K. T.; CHAN, C. C.; LIU, C. Overview of permanent-magnet brushless drives for electric and hybrid electric vehicles. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 55, n. 6, p. 2246–2257, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 15.
- CHU, W.; ZHU, Z. Average torque separation in permanent magnet synchronous machines using frozen permeability. *IEEE Transactions on Magnetics*, IEEE, v. 49, n. 3, p. 1202–1210, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- DEBORTOLI, M. J. Extensions to the finite element method for the electromechanical analysis of electric machines. [S.l.]: Rensselaer Polytechnic Institute, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 39.
- DEMERDASH, N.; WANG, R.; SECUNDE, R. Three dimensional magnetic fields in extra high speed modified lundell alternators computed by a combined vector-scalar magnetic potential finite element method. *IEEE transactions on energy conversion*, IEEE, v. 7, n. 2, p. 353–366, 1992. Citado na página 34.
- DENDY JR, J. Galerkin's method for some highly nonlinear problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 14, n. 2, p. 327–347, 1977. Citado na página 25.
- DHATT, G.; LEFRANÇOIS, E.; TOUZOT, G. Finite element method. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. Citado na página 23.
- DONGARRA, J. J. et al. A set of level 3 basic linear algebra subprograms. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ACM New York, NY, USA, v. 16, n. 1, p. 1–17, 1990. Citado na página 24.

DRIVES; CONTROLS. Switched reluctance motors power electric Land Rovers. 2013. Disponível em: <https://drivesncontrols.com/news/fullstory.php/aid/3872/Switched_reluctance_motors_power_electric_Land_Rovers.html>. Acesso em: 13 jan 2023. Citado na página 14.

DULAR, P. et al. An evolutive software environment for teaching the finite element method in electromagnetism. IEEE Transactions on Magnetics, IEEE, v. 35, n. 3, p. 1682–1685, 1999. Citado na página 24.

DULAR, P. et al. A general environment for the treatment of discrete problems and its application to the finite element method. IEEE Transactions on Magnetics, IEEE, v. 34, n. 5, p. 3395–3398, 1998. Citado na página 24.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. International journal for numerical methods in engineering, Wiley Online Library, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009. Citado na página 24.

GRUBER, W.; BÄCK, W.; AMRHEIN, W. Design and implementation of a wheel hub motor for an electric scooter. In: IEEE. 2011 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference. [S.l.], 2011. p. 1–6. Citado na página 16.

GYSELINCK, J. et al. Two-dimensional harmonic balance finite element modelling of electrical machines taking motion into account. COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, MCB UP Ltd, v. 22, n. 4, p. 1021–1036, 2003. Citado na página 29.

HENDERSHOT, J. R.; MILLER, T. J. E. Design of brushless permanent-magnet motors. [S.l.]: Oxford university press, 1995. Citado na página 15.

IDA, N.; BASTOS, J. P. Electromagnetics and calculation of fields. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1997. Citado na página 23.

IONEL, D. M. et al. Assessment of torque components in brushless permanent-magnet machines through numerical analysis of the electromagnetic field. IEEE Transactions on Industry Applications, IEEE, v. 41, n. 5, p. 1149–1158, 2005. Citado na página 34.

KIYOTA, K.; CHIBA, A. Design of switched reluctance motor competitive to 60-kw ipmsm in third-generation hybrid electric vehicle. IEEE Transactions on Industry Applications, IEEE, v. 48, n. 6, p. 2303–2309, 2012. Citado na página 14.

MARINESCU, M.; MARINESCU, N. Numerical computation of torques in permanent magnet motors by maxwell stresses and energy method. IEEE Transactions on Magnetism, IEEE, v. 24, n. 1, p. 463–466, 1988. Citado na página 34.

MILLER, T. Brushless permanent-magnet and reluctance motor drives. Oxford google schola, v. 2, p. 55–60, 1989. Citado na página 15.

MIYAMASU, M.; AKATSU, K. Efficiency comparison between brushless dc motor and brushless ac motor considering driving method and machine design. In: IECON 2011 - 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. [S.l.: s.n.], 2011. p. 1830–1835. Citado na página 15.

MULLER, W. Comparison of different methods of force calculation. IEEE Transactions on magnetism, IEEE, v. 26, n. 2, p. 1058–1061, 1990. Citado na página 34.

MUTLUER, M.; BILGIN, O. Design optimization of pmsm by particle swarm optimization and genetic algorithm. In: IEEE. 2012 International Symposium on Innovations in Intelligent Systems and Applications. [S.l.], 2012. p. 1–4. Citado na página 13.

OMAÇ, Z. et al. Design, analysis, and control of in-wheel switched reluctance motor for electric vehicles. Electrical Engineering, Springer, v. 100, p. 865–876, 2018. Citado na página 14.

PANG, J.-S. Newton's method for b-differentiable equations. Mathematics of operations research, INFORMS, v. 15, n. 2, p. 311–341, 1990. Citado na página 33.

PAULA, G. T. D. Projeto de uma máquina síncrona com ímã permanente no rotor. 2011. Citado na página 19.

PAULA, G. T. d. Cálculo da força contra eletromotriz em máquinas síncronas com ímãs na superfície do rotor. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

PELLEGRINO, G.; ARMANDO, E.; GUGLIELMI, P. An integral battery charger with power factor correction for electric scooter. IEEE transactions on power electronics, IEEE, v. 25, n. 3, p. 751–759, 2009. Citado na página 16.

PELLEGRINO, G. et al. Comparison of induction and pm synchronous motor drives for ev application including design examples. IEEE Transactions on Industry Applications, v. 48, n. 6, p. 2322–2332, 2012. Citado na página 14.

PROFUMO, F.; ZHANG, Z.; TENCONI, A. Axial flux machines drives: a new viable solution for electric cars. IEEE Transactions on Industrial Electronics, v. 44, n. 1, p. 39–45, 1997. Citado na página 14.

RASHID, M. H. Power electronics handbook. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2017. Citado na página 13.

RAVI, N.; EKRAM, S.; MAHAJAN, D. Design and development of a in-wheel brushless d.c. motor drive for an electric scooter. In: 2006 International Conference on Power Electronic, Drives and Energy Systems. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1–4. Citado na página 16.

SALON, S.; BHATIA, S.; BUROW, D. Some aspects of torque calculations in electrical machines. IEEE Transactions on Magnetics, IEEE, v. 33, n. 2, p. 2018–2021, 1997. Citado na página 34.

SALON, S. J. Finite element analysis of electrical machines. [S.l.]: Kluwer academic publishers Boston, 1995. v. 101. Citado 8 vezes nas páginas 23, 25, 26, 31, 32, 34, 35 e 39.

SANDESH, B. B. et al. Design and optimization of an external-rotor switched reluctance motor for an electric scooter. Materials Today: Proceedings, Elsevier, 2023. Citado na página 17.

SILVESTER, P.; CABAYAN, H.; BROWNE, B. Efficient techniques for finite element analysis of electric machines. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, IEEE, n. 4, p. 1274–1281, 1973. Citado na página 23.

SILVESTER, P.; CHARI, M. V. Finite element solution of saturable magnetic field problems. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, IEEE, n. 7, p. 1642–1651, 1970. Citado na página 23.

SILVESTER, P. P.; FERRARI, R. L. Finite elements for electrical engineers. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 23, 25 e 29.

SONG, B.-M.; CHANG, K.-C.; CHOI, J.-Y. Design of an outer-rotor-type permanent magnet motor for electric scooter propulsion systems. In: The 2010 International Power Electronics Conference - ECCE ASIA -. [S.l.: s.n.], 2010. p. 2763–2742. Citado na página 16.

SOYGENC, O.; ERGENE, L. T. Particle swarm optimization implementation on pmsm design. In: IEEE. 2020 21st International Symposium on Electrical Apparatus & Technologies (SIELA). [S.l.], 2020. p. 1–4. Citado na página 13.

TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. journal of the Aeronautical Sciences, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956. Citado na página 23.

UEMATSU, T.; WALLACE, R. Design of a 100 kw switched reluctance motor for electric vehicle propulsion. In: Proceedings of 1995 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition - APEC'95. [S.l.: s.n.], 1995. v. 1, p. 411–415 vol.1. Citado na página 14.

ULU, C.; KORMAN, O.; KöMÜRGÖZ, G. Electromagnetic and thermal analysis/design of an induction motor for electric vehicles. In: 2017 8th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE). [S.l.: s.n.], 2017. p. 6–10. Citado na página 14.

WU, D. et al. Design considerations of outer-rotor permanent magnet synchronous machines for in-wheel electric drivetrain using particle swarm optimization. IET, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. [S.l.]: Elsevier, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.