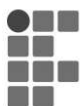


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA DE GOIÁS  
CAMPUS GOIÂNIA  
DEPARTAMENTO DE ÁREAS ACADÊMICAS III  
ÁREA DE CONSTRUÇÃO CIVIL  
CURSO BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

Rodrigo José dos Santos Majewski

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
UTILIZANDO O MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ PARA  
VIGAS**

Goiânia  
2026



**INSTITUTO FEDERAL**  
Goiás

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA**  
**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS**

### **TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

#### **Identificação da Produção Técnico-Científica**

- |                                                                      |                                                         |
|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Tese                                        | <input type="checkbox"/> Artigo Científico              |
| <input type="checkbox"/> Dissertação                                 | <input type="checkbox"/> Capítulo de Livro              |
| <input type="checkbox"/> Monografia – Especialização                 | <input type="checkbox"/> Livro                          |
| <input checked="" type="checkbox"/> TCC - Graduação                  | <input type="checkbox"/> Trabalho Apresentado em Evento |
| <input type="checkbox"/> Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ |                                                         |

Nome Completo do Autor: Rodrigo José dos Santos Majewski

Matrícula: 20191011050437

Título do Trabalho: FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO O MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ PARA VIGAS

#### **Autorização - Marque uma das opções**

1. ( x ) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ( ) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_ (Embargo);
3. ( ) Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ( ) O documento está sujeito a registro de patente.  
( ) O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.  
( ) Outra justificativa: \_\_\_\_\_

#### **DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA**

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

\_\_\_\_\_, Goiânia, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.  
Local Data



Documento assinado digitalmente

RODRIGO JOSE DOS SANTOS MAJEWSKI

Data: 09/06/2026 03:16:15-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Rodrigo José dos Santos Majewski

**Formulação do método dos elementos finitos  
utilizando o método de Rayleigh-Ritz para vigas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Engenharia Civil, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Campus Goiânia, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil. Área de concentração: Construção Civil.

Orientador: Prof. Dr. Elias Calixto Carrijo

Goiânia  
2026

M2883f Majewski, Rodrigo José dos Santos

Formulação do Método dos Elementos Finitos utilizando o método de Rayleigh-Ritz para vigas / Rodrigo José dos Santos Majewski. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2026.  
53 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Elias Calixto Carrijo.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Bacharelado em Engenharia Civil, Departamento de Áreas Acadêmicas III, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Método de Rayleigh-Ritz. 3. Cálculo Variacional. 4. Análise Estrutural. I. Carrijo, Elias Calixto (orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 624.171

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva CRB1/ 2.740  
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

## ATA DE DEFESA DE MONOGRAFIA

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa da Monografia intitulada **Formulação do método dos elementos finitos utilizando o método de Rayleigh-Ritz para vigas.**, sob orientação de Elias Calixto Carrijo, apresentada pelo aluno **Rodrigo Jose dos Santos Majewski (20191011050437)** do Curso **Bacharelado em Engenharia Civil (Câmpus Goiânia)**. Os trabalhos foram iniciados às **18:45** do dia **03/06/2026** pelo Professor presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

- **Elias Calixto Carrijo** (Presidente)
- **Matilde Batista Melo** (Examinadora Interna)
- **Claudio Marra Alves** (Examinador Interno)

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da Monografia, passou à arguição do candidato. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

☒ Aprovado

☐ Reprovado

Nota : 10,0

**Observação / Apreciações:**

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu **Elias Calixto Carrijo** lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Elias Calixto Carrijo**, em **03/06/2026 18:47:49** com chave **dd4b5b0c5f9511f18186005056a537a4**.
- **Claudio Marra Alves**, em **08/06/2026 12:01:11** com chave **e33b1c60634a11f1be7a005056a537a4**.
- **Matilde Batista Melo**, em **03/06/2026 21:46:53** com chave **e17a9d005fae11f1a738005056a537a4**.

Este documento foi emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse [https://suap.ifg.edu.br/comum/autenticar\\_documento/](https://suap.ifg.edu.br/comum/autenticar_documento/) e informe os dados a seguir.

**Tipo de Documento:** Ata de Projeto Final

**Data da Emissão:** 08/06/2026

**Código de Autenticação:** 991fe4



*Este trabalho é dedicado à minha mãe,  
Benedita Francisca dos Santos, meu amor.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus Pai, Filho e Espírito Santo. Que ELE me ajude, oriente e conduza para crescer na fé, no amor e em sabedoria.

Ao meu orientador Prof. Dr. Elias Calixto Carrijo, que sempre esteve disponível para tirar dúvidas e conversar sobre o assunto desse trabalho e sobre a vida.

Aos professores e técnicos do curso de Engenharia Civil do IFG Câmpus Goiânia, por transmitir o conhecimento e as experiências de vida.

Aos colegas do curso.

À minha mãe, Benedita Francisca dos Santos, simplesmente por tudo!

## RESUMO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma das ferramentas numéricas mais utilizadas na análise estrutural contemporânea, sendo a base de diversos *softwares* comerciais empregados em projetos de engenharia civil. Apesar de sua relevância, o estudo introdutório do MEF não é contemplado de forma sistemática nas disciplinas de graduação em Engenharia Civil de várias instituições brasileiras, o que motivou a elaboração deste trabalho como material de apoio ao aluno em início de estudos. O presente Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo apresentar, em caráter introdutório, a formulação matemática do MEF a partir do Método de Rayleigh-Ritz, abordando os conceitos do cálculo variacional necessários ao seu entendimento. Para isso, foram desenvolvidos sistematicamente os conceitos de funcional, operador variacional  $\delta$ , extremos de um funcional e a dedução da equação de Euler-Lagrange. Em seguida, o Método de Rayleigh-Ritz foi formulado e aplicado a uma viga biapoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído, recuperando-se a expressão analítica clássica da deflexão. Por fim, o método foi aplicado à formulação do elemento finito unidimensional de viga com quatro deslocamentos nodais, obtendo-se a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  de ordem  $4 \times 4$  e o vetor de forças nodais equivalentes  $\mathbf{f}^{(e)}$  característicos do elemento viga clássico do MEF. Os resultados obtidos demonstram a consistência teórica do Método de Rayleigh-Ritz como fundamento variacional do MEF e reforçam o seu papel como ponte didática entre os métodos clássicos da análise estrutural e os métodos numéricos modernos.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos. Método de Rayleigh-Ritz. Cálculo Variacional. Análise Estrutural.

## ***ABSTRACT***

The Finite Element Method (FEM) is one of the most widely used numerical tools in contemporary structural analysis, forming the basis of several commercial software packages employed in civil engineering projects. Despite its relevance, an introductory study of the FEM is not systematically addressed in the undergraduate curriculum of Civil Engineering at several Brazilian institutions, which motivated this work as a supporting material for students beginning their studies in the field. This Final Course Work aims to present, in an introductory manner, the mathematical formulation of the FEM based on the Rayleigh-Ritz Method, covering the concepts of variational calculus necessary for its understanding. To this end, the concepts of functional, variational operator  $\delta$ , extrema of a functional, and the derivation of the Euler-Lagrange equation were systematically developed. Subsequently, the Rayleigh-Ritz Method was formulated and applied to a simply supported beam subjected to a uniformly distributed load, recovering the classical analytical expression of the deflection. Finally, the method was applied to the formulation of the one-dimensional beam finite element with four nodal displacements, obtaining the  $4 \times 4$  stiffness matrix  $\mathbf{K}^{(e)}$  and the equivalent nodal force vector  $\mathbf{f}^{(e)}$  characteristic of the classical FEM beam element. The results obtained demonstrate the theoretical consistency of the Rayleigh-Ritz Method as the variational foundation of the FEM and reinforce its role as a didactic bridge between the classical methods of structural analysis and modern numerical methods.

**Keywords:** Finite Element Method. Rayleigh-Ritz Method. Variational Calculus. Structural Analysis.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Linha do tempo do desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos                                                                                                            | 14 |
| Figura 2 – Tipos de pontos de extremo de uma função $f(x)$                                                                                                                              | 18 |
| Figura 3 – Comparação entre função real $f(x)$ e funcional $Y(y)$                                                                                                                       | 19 |
| Figura 4 – Viga biapoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído                                                                                                            | 20 |
| Figura 5 – Função $y(x)$ e suas variações $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(x)$ que satisfazem as condições de contorno                                                                       | 21 |
| Figura 6 – Família de funções admissíveis $\bar{y}(x) = y(x) + \lambda \eta(x)$                                                                                                         | 22 |
| Figura 7 – Visualização geométrica da variação $\delta y = \lambda \eta(x)$                                                                                                             | 23 |
| Figura 8 – Infinitas maneiras de perturbar $y(x)$ – cada uma é uma “direção” diferente no espaço de funções                                                                             | 28 |
| Figura 9 – Paralelo completo: derivada normal $\times$ derivada de funcional                                                                                                            | 30 |
| Figura 10 – Gráfico de $\bar{Y}(\lambda)$ com reta tangente horizontal em $\lambda = 0$ (condição de estacionariedade satisfeita)                                                       | 32 |
| Figura 11 – Gráfico de $\bar{Y}(\lambda)$ com $\lambda \neq 0$ : reta tangente inclinada e $\delta \bar{Y} \neq 0$                                                                      | 33 |
| Figura 12 – Viga biapoiada com carregamento uniforme – aplicação da equação de Euler-Lagrange                                                                                           | 35 |
| Figura 13 – Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído $p$ e seu diagrama de corpo livre evidenciando o momento fletor $M$ e o esforço cortante $V$                      | 39 |
| Figura 14 – Representação unidimensional da viga com dois nós e quatro deslocamentos nodais $(u_1, u_2, u_3, u_4)$                                                                      | 41 |
| Figura 15 – Discretização de uma viga biapoiada em dois elementos finitos, com numeração global, numerações locais e esforços locais                                                    | 45 |
| Figura 16 – Espalhamento das duas matrizes de rigidez elementares $(4 \times 4)$ na matriz de rigidez global $(6 \times 6)$ , evidenciando o bloco somado correspondente ao nó global 2 | 46 |
| Figura 17 – Aba “Entrada de Dados” da planilha de aplicação, com os parâmetros da viga                                                                                                  | 49 |
| Figura 18 – Aba “2 Elementos” da planilha de aplicação, com as matrizes e os resultados                                                                                                 | 50 |
| Figura 19 – Resultados do programa em Fortran para a viga biapoiada                                                                                                                     | 51 |

# SUMÁRIO

|          |                                                                        |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>                                            | <b>11</b> |
| 1.1      | JUSTIFICATIVA . . . . .                                                | 11        |
| 1.2      | OBJETIVOS . . . . .                                                    | 11        |
| 1.2.1    | Objetivos Gerais . . . . .                                             | 11        |
| 1.2.2    | Objetivos Específicos . . . . .                                        | 11        |
| <b>2</b> | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .</b>                                 | <b>12</b> |
| <b>3</b> | <b>DESENVOLVIMENTO . . . . .</b>                                       | <b>15</b> |
| 3.1      | O QUE SIGNIFICA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) .                   | 15        |
| 3.2      | FUNCIONAIS . . . . .                                                   | 17        |
| 3.3      | OPERADOR VARIACIONAL $\delta$ . . . . .                                | 20        |
| 3.4      | OS EXTREMOS DE UM FUNCIONAL . . . . .                                  | 27        |
| 3.4.1    | Uma das funções admissíveis torna o funcional estacionário . . . .     | 27        |
| 3.5      | APLICAÇÃO DE EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE . . . . .                       | 34        |
| 3.6      | MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ . . . . .                                      | 37        |
| 3.7      | FORMULAÇÃO DO ELEMENTO VIGA PELO MÉTODO DE RAYLEIGH-<br>RITZ . . . . . | 41        |
| 3.7.1    | Matriz de Rigidez com 2 elementos finitos . . . . .                    | 45        |
| <b>4</b> | <b>RESULTADOS . . . . .</b>                                            | <b>49</b> |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÃO . . . . .</b>                                             | <b>52</b> |
| <b>6</b> | <b>PERSPECTIVAS FUTURAS . . . . .</b>                                  | <b>53</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                                           | <b>54</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Ao longo do curso de engenharia civil, cursam-se algumas disciplinas especificamente voltadas para o ensino da teoria das estruturas que, juntamente com as disciplinas de resistência dos materiais, fornecem juntas o referencial teórico para o estudo da análise estrutural dos elementos estruturais. A análise estrutural é realizada utilizando alguns métodos que se mostram mais adequados para cada tipo de situação. Para sistemas de geometria simples e condições de carregamento bem definida, os métodos clássicos como das forças e deslocamento são adequados para determinar, por exemplo, a deflexão e rotação de estruturas isostáticas e hiperestática. Para a análise de estruturas com formas complexas e condições de carregamento variadas, os métodos discretos, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos, MEF, é o mais adequado. Devido à grande quantidade de conteúdo e com carga horária restritiva, o MEF não faz parte das disciplinas do curso de graduação de engenharia civil em várias instituições de ensino superior. Por isso, o estudo desse trabalho se justifica, a fim de ser mais uma fonte de pesquisa e de aprendizado para o estudante que deseja ter as primeiras noções dos conceitos, como também das formulações matemáticas de alguns elementos estruturais utilizados nesse método.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivos Gerais

Aplicar o Método dos Elementos Finitos utilizando Rayleigh-Ritz, fornecendo um material de apoio aos estudantes de graduação do curso de engenharia civil para além dos métodos clássicos de análise estrutural.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Entre os objetivos específicos, busca-se introduzir os primeiros conceitos e a descrição matemática realizado pelo MEF de alguns elementos estruturais unidimensionais discretizados como a treliça e a viga, para que, uma vez modelados, eles possam ser utilizados nos projetos estruturais.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na concepção de uma estrutura, busca-se atender as necessidades humanas, adaptando e modificando o meio ambiente, satisfazendo os padrões de segurança, de utilização, de limitações econômicas, descritos em normas construtivas e legais (Martha, 2022). Em épocas antigas, para a construção de monumentos grandiosos, se utilizavam medidas empíricas, frutos de experiências anteriores de tentativas e erros (Karnovsky; Lebed, 2021). Atualmente, têm-se disponíveis vários métodos de análise estrutural, tanto clássicos como das forças e deslocamento, como também por análise discreta, por exemplo, o método dos elementos finitos, para subsidiarem o projetista na obtenção de parâmetros como tensões, deformações e deslocamentos, buscando garantir que a estrutura não estará sujeita a falhas sob as diversas condições de operação. Em todos esses métodos, as bases para a elaboração dos modelos estão em diversas áreas do conhecimento, como a mecânica dos sólidos, nos Teoremas da Mecânica Geral, em particular no estudo da estática, da Teoria Matemática da Elasticidade (Fenner; Reddy, 2012).

Com os métodos analíticos clássicos, busca-se obter expressões analíticas fechadas, ou seja, expressões matemáticas que permitem o cálculo da resposta exata dos deslocamentos, das deformações e tensões na estrutura em todos os pontos do elemento. Porém, essas respostas exatas somente são possíveis de serem obtidas para sistemas de geometria simples e com condições de carregamento e apoio “bem comportadas” (Alves Filho, 2013).

Com o desenvolvimento do método dos elementos finitos, pode-se aplicar procedimentos aproximados em caráter geral, ou seja, independente da forma da estrutura e da condição do carregamento, respeitando uma precisão aceitável para garantir segurança e funcionalidade (Alves Filho, 2013).

Para o desenvolvimento do MEF houve a contribuição de inúmeros cientistas que colaboraram com suas ideias e conhecimentos inovadores, dentre eles se destacam: R. Courant, B. G. Galerkin, R. W. Clough, I. Babuška, O. C. Zienkiewicz, M. J. Turner, J. H. Argyris, J. Barlow, B. M. Irons, E. L. Wilson, T. J. R. Hughes, J. T. Oden, G. J. Fix, G. Strang, Philippe G. Ciarlet, P. A. Raviart (Pinto Junior, 2022).

Ainda de acordo com esse autor, é difícil de precisar a origem do MEF, mas, na descrição história do MEF, o autor cita o trabalho de Richard Courant, que foi publicado no ano de 1942 no jornal científico *Transactions of American Mathematical Society* em que, implicitamente, aborda a noção de convergência para o problema de torção de Saint Venant, introduzindo a ideia de grau de liberdade de deformação torcional a pontos nodais pré-definidos (Pinto Junior, 2022).

O engenheiro civil grego, John Hadji Argyris, publicou em 1954, na revista científica *Aircraft Engineering* seu trabalho “Teoremas de Energia e Análise Estrutural”, em que aplica os Métodos Matriciais de Análise Estrutural para vários elementos discretos, obtendo

as matrizes de rigidez desses elementos (Pinto Junior, 2022).

Outro autor que destaca o trabalho de Argyris foi Soriano (2009), relatando que o trabalho desse pesquisador contribuiu na elaboração de recorrentes projetos de espaçonaves, mísseis e cápsulas espaciais, com aplicações presentes em diferentes áreas da Engenharia.

Samuel Levy, que introduziu o chamado método da rigidez, importante na moderna teoria das estruturas, consagrou a universalidade das aplicações do MEF, com a publicação de “Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings” no *Journal of Aeronautic Sciences* em 1953, em que aplicou os métodos matriciais em estruturas de aeroplanos, utilizando elementos discretos relativos à flexão, torção, cisalhamento e alongamento (Pinto Junior, 2022).

Ray William Clough, engenheiro civil americano, é descrito como o criador do termo Método dos Elementos Finitos, presente no seu artigo “The Finite Element Method in Plane Stress Analysis”, em 1960. A intenção de Clough em utilizar o termo “elemento finito” foi de distinguir o contínuo e o discreto no contexto dos métodos matriciais de análise estrutural (Pinto Junior, 2022).

Edward L. Wilson (1931–2005) é creditado com o mérito de ter implementado o primeiro programa baseado no método dos elementos finitos, abreviado como SAP – *Structural Analysis Program*, em 1970. Esse feito foi atribuído a Edward L. Wilson durante o seu doutorado, sob a orientação de Ray W. Clough, em 1963 com a tese “*Finite Element Analysis of Two-Dimensional Structures*” pela Universidade da Califórnia em Berkeley, nos Estados Unidos da América (Pinto Junior, 2022).

Ainda segundo Pinto Junior (2022), para a construção do rigor matemático do Método dos Elementos Finitos, juntamente com a Teoria Matricial das Estruturas, a teoria matemática foi sendo desenvolvida durante o século XX, com destaque na evolução e combinação de vários campos de estudos como a Teoria da Interpolação, Cálculo Variacional, Equações Diferenciais, Análise Funcional, Espaços de Hilbert e Sobolev e Teoria das Distribuições. Esses estudos formularam a Análise Numérica do Método dos Elementos Finitos. Nesse processo, destacam-se os nomes de Philippe Gaston Ciarlet, Pierre-Arnaud Raviart, John T. Oden, Ivo M. Babuška, Franco Brezzi, J. A. Nitsche, além de outros.

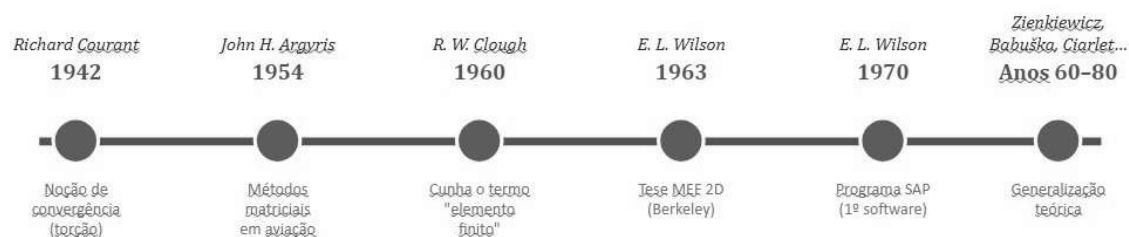
Para Soriano (2009, p. 3), no início da década de 60, observou-se que o MEF pode ser compreendido como um caso particular do Método de Rayleigh-Ritz e, por isso, ser formulado a partir de funcionais. Isso ampliou a aplicabilidade deste método a problemas não estruturais, como de fluidos, meios porosos, termodinâmica e eletromagnetismo, e conduziu ao estabelecimento de critérios de convergência. Nos anos finais dessa década, observou que o MEF pode ser formulado a partir de equações diferenciais com condições de contorno, o que é característico do Método de Galerkin. Com isso, MEF passou a não requerer a existência de um funcional, o que levou a uma nova ampliação de seu uso (Soriano, 2009, p. 3).

Na década de 70, observou-se que o MEF pode ser também formulado e compreendido

como um caso particular dos métodos dos resíduos ponderados em geral, e não apenas a partir do Método de Galerkin. Nessa década também contou-se com o surgimento dos primeiros programas automáticos, possibilitou-se a análise de uma ampla variedade de sistemas físicos, a partir da geração de modelos discretos, com o uso de eficientes algoritmos de resolução dos sistemas de equações algébricas e dos problemas de autovalor decorrentes desses modelos (Soriano, 2009, p. 3).

Já na década de 90 até os dias atuais, ocorreu uma grande disponibilidade de microcomputadores e programas comerciais de custo mais acessíveis, possibilitando que o método se popularizasse com eficientes ferramentas de pré e de pós-processamento. Dentre os *softwares* amplamente utilizados em projetos de engenharia estão: ANSYS®, NASTRAN, COSMOS, ABAQUS, ALGOR, SAP® e ADINA® (Soriano, 2009, p. 4).

Figura 1 – Linha do tempo do desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3 DESENVOLVIMENTO

#### 3.1 O QUE SIGNIFICA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Uma maneira de compreender o comportamento complexo da natureza e da matéria, seria a realização de experimentos físicos, como construir uma estrutura, na tentativa de analisar o papel de cada parâmetro ou variável. Mas isso, obviamente, se mostra muito dispendioso e praticamente impossível. Para contornar essa dificuldade, os cientistas e pesquisadores desenvolvem estudos analíticos, com modelos matemáticos baseados em hipóteses teóricas, que simulam e/ou aproximam o comportamento do sistema em estudo. Quando esse modelo de sistema é formado por matéria, ela é idealizada como uma distribuição contínua, constituída de infinitos “pontos materiais” que, ao afastarem não formam vazios, e ao se aproximarem, não se sobrepõem. A essa hipótese denomina-se meio contínuo (Soriano, 2009, p. 4–5).

Assim como se mostrou inviável o estudo da natureza e da matéria apenas por experimentos físicos, a compreensão e resolução dos modelos matemáticos de meios contínuos também apresentam dificuldades, sendo impossível em alguns casos. Como alternativa, desenvolveu-se uma nova aproximação para além do modelo contínuo, ou seja, buscou-se um método aproximado que substitua os infinitos graus de liberdade do modelo contínuo por um número finito de parâmetros a ser determinados. Com isso, onde se tinha a necessidade de resolver equações diferenciais que surgem nos modelos do contínuo, surge um sistema de equações algébricas, usualmente polinômios, advindas desse número finito de parâmetros (Soriano, 2009, p. 8).

Para a compreensão do que é grau de liberdade, é necessário esclarecer que, na construção dos modelos, adota-se um referencial conveniente a esse espaço, normalmente o plano cartesiano. As coordenadas, no plano cartesiano, necessárias a uma configuração do fenômeno, são ditas variáveis independentes, comumente o eixo  $x$ , a variável tempo, etc. As funções que precisam ser determinadas em um modelo matemático, a partir das variáveis independentes são denominadas variáveis dependentes. Variáveis dependentes primárias dão origem a outras através de derivações. Variáveis (dependentes) secundárias ou variáveis derivadas são essas outras. Os graus de liberdade são as variáveis primárias em cada um dos pontos da região de um modelo matemático (Soriano, 2009, p. 5).

Por exemplo, em uma barra metálica sob tração, a variável independente seria a coordenada  $x$  do plano cartesiano, ou eixo  $x$ , que informa a localização de cada ponto da barra na direção  $x$ . Para cada ponto  $x$ , busca-se analisar, por exemplo, o deslocamento desse ponto, uma vez que, sob tensão, os pontos se movem. Esse movimento é o deslocamento  $u$ , que depende de cada ponto  $x$ , ou seja, é a variável dependente primária, denominado

de  $u(x)$ . Os graus de Liberdade (GDL) são os valores das variáveis primárias nos pontos específicos (nós), por exemplo  $u_1$  (deslocamento no início da barra) e  $u_2$  (deslocamento no fim da barra)<sup>1</sup>.

Da variável dependente primária, derivam-se as variáveis secundárias (derivadas). Por exemplo, a deformação e a tensão. Primeiro, encontra-se o deslocamento  $u_2$ . Em seguida, calcula-se o quanto o material alongou, que é a deformação. A partir da deformação, multiplica-se pela rigidez do material e chega-se na tensão (o “esforço” interno)<sup>2</sup>.

Em relação aos métodos aproximados que foram desenvolvidos, pode-se citar os métodos aproximados analíticos clássicos, como os variacionais e os de resíduos ponderados. Apesar de possibilitarem a solução de vários problemas, esses métodos clássicos fazem uso de soluções propositivas (as aproximações) que sejam válidas em todo o domínio, ou seja, não podem ter sua expressão modificada para diferentes pontos de uma viga, elas têm que ser válidas tanto para  $x = 0$ , para  $x = L/2$ , etc. Se há uma mudança na composição da viga, ou se há uma geometria irregular, como um furo, os métodos aproximados analíticos clássicos são inviáveis. Para alguns casos em que a geometria e o material são uniformes, essas soluções propositivas conseguem aproximar as variáveis primárias originais contínuas (que não conhecemos) (Soriano, 2009, p. 8 e 115)<sup>3</sup>.

Há também os métodos numéricos que buscam soluções aproximadas a partir de pontos específicos do domínio (os subdomínios) ou do contorno, que são: o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno e diversos Métodos sem Malha (Soriano, 2009, p. 8).

A história colocou o MEF como o mais utilizado, devido à sua eficiência e robustez, como se pode notar pelo número de *softwares* comerciais que o utilizam, em relação aos demais métodos. Na aplicação do MEF, há uma mudança do domínio em que se está estudando. Pega-se, por exemplo, o caso de uma barra que é considerada, no mundo real, constituída de um meio contínuo de infinitos pontos ao longo do seu comprimento, ou seja, seu domínio. Esse domínio contínuo será transformado em um domínio discreto, com a utilização de uma quantidade finita de pontos para representar o domínio da barra, que é o domínio aproximado da barra como se ela fosse formada por apenas alguns conjuntos finitos de pontos. A região do domínio que é agora formada por vários pontos é chamada de elementos finitos que se conectam em pontos chamados de nós ou pontos nodais. Esse processo de passar do contínuo para o discreto é chamado de processo de discretização. Com isso, as variáveis dependentes primárias que descrevem alguma função que se deseja estudar nesses elementos finitos, passam a ser, usualmente, descritas utilizando-se expressões polinomiais. Essas variáveis dependentes primárias, que antes eram funções de infinitos pontos, passam

<sup>1</sup> Esta sistematização didática foi elaborada com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Google Gemini (2026), tendo como base os conceitos apresentados em Soriano (2009).

<sup>2</sup> Sequência didática elaborada com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Google Gemini (2026), partindo da relação clássica entre deslocamento, deformação e tensão da Resistência dos Materiais.

<sup>3</sup> Exemplo ilustrativo das condições de aplicação da viga foi elaborado com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Google Gemini (2026).

a ser funções de uma quantidade discreta e finita de pontos, facilitando a obtenção das soluções, aproximadas, das variáveis dependentes primárias e secundárias (Soriano, 2009, p. 8).

A robustez do MEF garante que a solução aproximada obtida convirja para a solução do modelo matemático original, na medida em que o tamanho dos elementos finitos seja reduzido e sua quantidade aumentada (Soriano, 2009, p. 8).

Como dito anteriormente na parte 2 – Revisão Bibliográfica, tanto Soriano (2009, p. 3), como Assan (2020, p. 35), citam que o MEF teve como referência os Métodos de Rayleigh-Ritz e Galerkin. Por isso, parte-se das formulações, em caráter introdutório, desses dois métodos, para que, após isso, possa-se melhor compreender os aspectos também introdutórios da formulação do MEF.

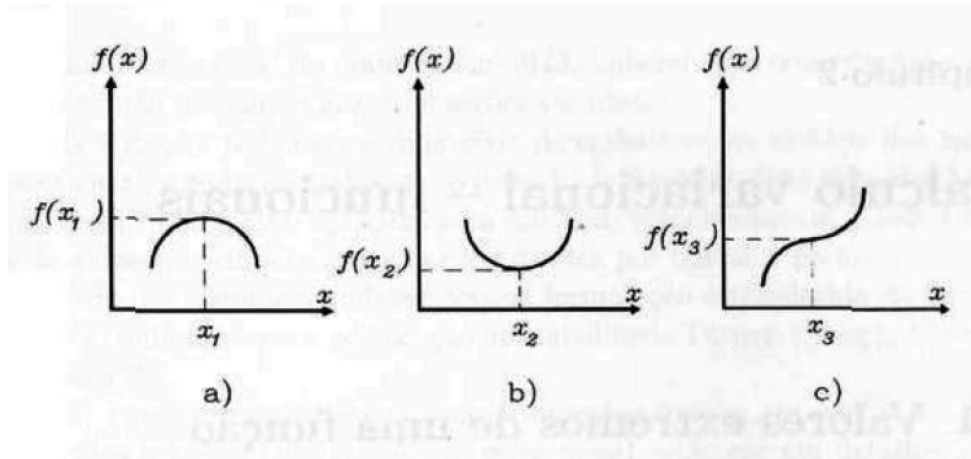
## 3.2 FUNCIONAIS

Uma abordagem que pode facilitar o entendimento do cálculo variacional é fazer-se um paralelo das propriedades de uma função  $f(x)$  comum que depende de um número real  $x$ , com as propriedades de um funcional  $Y$  que depende de uma função e de suas derivadas. Do cálculo diferencial no domínio dos reais, tem-se que, para uma função  $f(x)$ , diferenciável em  $x_1 < x < x_2$ , apresentar um valor extremo no ponto  $(x_0, f(x_0))$ , a condição necessária é que a derivada primeira de  $f(x)$ , no ponto  $(x_0, f(x_0))$  seja nula (Assan, 2020, p. 17–18).

$$f'(x_0) = \left( \frac{df(x)}{dx} \right) = \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0} = 0 \quad (3.1)$$

Isso significa, geometricamente, que a reta tangente é horizontal à curva  $f(x)$  no ponto  $x_0$ , levando a três possibilidades possíveis:

- a) o ponto  $x_0$  é um ponto de máximo relativo da função  $f(x)$  (Figura 2 a);
- b) o ponto  $x_0$  é um ponto de mínimo relativo da função  $f(x)$  (Figura 2 b);
- c) o ponto  $x_0$  é um ponto de inflexão da função  $f(x)$  (Figura 2 c).

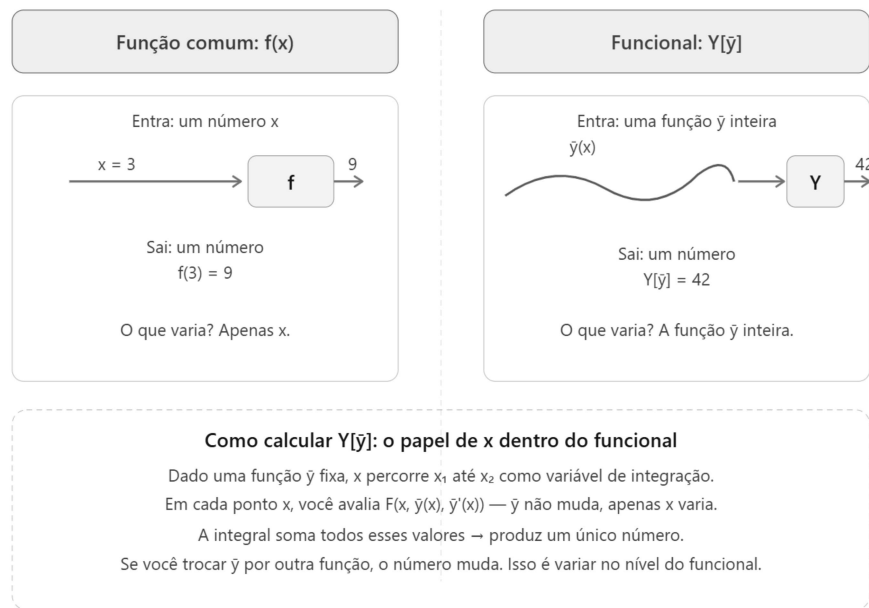
Figura 2 – Tipos de pontos de extremo de uma função  $f(x)$ 

Fonte: Assan (2020, p. 18).

Será a derivada segunda da função  $f(x)$  no ponto  $x_0$  que irá identificar qual o valor extremo dessa função está ocorrendo no ponto  $x_0$ . Se  $f_{,xx}(x_0) > 0$ , tem-se um mínimo relativo, como mostrado na Figura 2b. Se  $f_{,xx}(x_0) < 0$ , tem-se um máximo relativo, como mostrado na Figura 2a. Se  $f_{,xx}(x_0) = 0$ , o ponto  $x_0$  pode ser um ponto de inflexão, como mostrado na Figura 2c, caso os valores de  $f_{,xx}$  sejam diferentes à direita e à esquerda de  $x_0$  (Assan, 2020, p. 17–18).

No cálculo variacional ou cálculo de variações, diferentemente do cálculo diferencial no domínio dos reais que estuda funções reais dependentes de um número real  $x$ , utiliza-se funcionais, que são funções que dependem de outras funções (Assan, 2020, p. 19).

Uma definição semelhante é dada por Soriano (2009, p. 67), sendo que, para esse autor, um funcional é uma função, denotada por exemplo de  $Y$ , cuja variável é outra função  $y(x)$  e/ou suas derivadas, sob a forma de equação integral, e por isso, o funcional é denotado de  $Y(y(x))$  ou simplesmente de  $Y(y)$ . A Figura 3 (a seguir) ilustra a comparação entre uma função comum  $f(x)$  e um funcional.

Figura 3 – Comparação entre função real  $f(x)$  e funcional  $Y(y)$ 

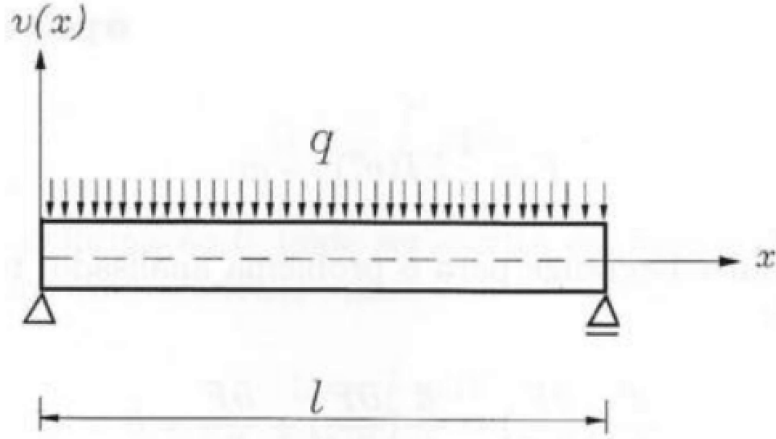
Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Claude (Anthropic, modelo Sonnet 4.6).

O cálculo variacional desenvolve métodos que permitem estudar os funcionais para encontrar seus valores extremos. As leis da Física e da Engenharia que utilizam esses métodos, como as leis da mecânica, são chamadas de princípios variacionais. Um exemplo desse princípio, amplamente utilizado na engenharia estrutural, é o chamado princípio da mínima energia potencial (Assan, 2020, p. 19).

Como exemplo de um funcional, tem-se a Equação 3.2, onde o funcional, denominado de  $Y$  por Assan (2020, p. 25), é chamado energia potencial total de uma viga, mostrada na Figura 4, sendo  $E$  o módulo de Young do material e  $I$  o momento de inércia da seção transversal da viga em relação ao eixo baricêntrico,  $q$  é o carregamento uniformemente distribuído.

Pelo próprio nome, entende-se que, a partir do funcional  $Y$  que mede a energia potencial total dessa viga biapoada, busca-se utilizando o cálculo variacional com os princípios variacionais, encontrar a função  $v(x)$ , que são as deflexões do eixo baricêntrico da viga, que torna o valor desse funcional mínimo, ou seja, que torna a energia mínima, o que caracteriza um valor de extremo (Assan, 2020, p. 25–26).

Figura 4 – Viga biapoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído



Fonte: Assan (2020, p. 25).

$$Y = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[ \frac{d^2 v}{dx^2} \right]^2 dx - \int_0^L q v dx \quad (3.2)$$

Foi descrito nos parágrafos acima e utilizada a Equação 3.1 que, para encontrar o valor extremo de uma função  $f(x)$ , diferenciável em  $x_1 < x < x_2$ , no ponto  $(x_0, f(x_0))$ , a condição necessária é que a derivada primeira de  $f(x)$ , no ponto  $(x_0, f(x_0))$  seja nula. Assim, utiliza-se o operador diferencial, que é a técnica de se obter derivadas para encontrar a condição ou propriedade de extremo da função (Assan, 2020, p. 22).

Continuando com o paralelo entre o cálculo diferencial e o cálculo variacional, neste também tem-se um operador que permite encontrar a condição ou a propriedade de extremo de um funcional, que é denominado operador variacional  $\delta$  (Assan, 2020, p. 20 e 22).

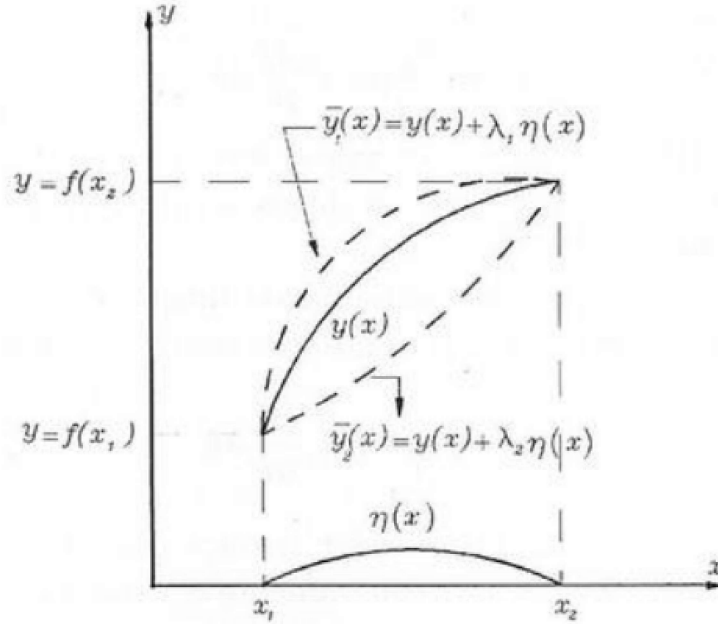
### 3.3 OPERADOR VARIACIONAL $\delta$

A ideia central do operador variacional vem do próprio nome *variacional* que remete a variação, e variação remete a mudança. Por exemplo, seja uma função  $F(x, y, y')$  que depende de  $x$ , da função  $y(x)$  e de sua derivada, representada pela notação  $y'(x)$ . Se realizar-se uma modificação ou variação de  $y(x)$  para  $\bar{y}(x)$  e  $y'(x)$  para  $\bar{y}'(x)$ , e substituirmos em  $F$ , ter-se-á uma outra função  $F(x, \bar{y}, \bar{y}')$  que depende agora de  $x$ , da função  $\bar{y}(x)$  e de sua derivada  $\bar{y}'(x)$ . Nota-se que houve uma variação da função  $F$  devido à variação ou mudança de suas variáveis, ou seja: variação de  $F(x, y, y')$  para  $F(x, \bar{y}, \bar{y}')$ .

No estudo do cálculo variacional, essas mudanças ou variações de  $y(x)$  para  $\bar{y}(x)$  e  $y'(x)$  para  $\bar{y}'(x)$  devem satisfazer algumas condições para que essas variações sejam úteis no estudo do funcional e na determinação dos extremos do funcional. Por exemplo, se  $y(x)$  representa a deflexão exata de uma viga, em que essa deflexão é zero nos apoios, a

variação  $\bar{y}(x)$  também deve apresentar deflexão zero nos apoios. Esse comportamento é representado na Figura 5.

Figura 5 – Função  $y(x)$  e suas variações  $\bar{y}_1(x)$  e  $\bar{y}_2(x)$  que satisfazem as condições de contorno



Fonte: Assan (2020, p. 20).

Nota-se na Figura 5 que a função  $y(x)$ , linha contínua, possui duas variações, linhas pontilhadas, representadas por  $\bar{y}_1(x)$  e  $\bar{y}_2(x)$ , e ambas possuem o mesmo valor nos pontos  $x_1$  e  $x_2$ , que são denominados condições de contorno que devem ser satisfeitas pelas variações de  $y(x)$ , e que são condições impostas pelas próprias condições físicas e mecânicas do apoio, como por exemplo, de impedir deslocamentos verticais em apoios fixos (Assan, 2020, p. 20).

Também da Figura 5, observa-se que ambas as funções  $\bar{y}_1(x)$  e  $\bar{y}_2(x)$  são obtidas de  $y(x)$  através de uma lei de formação que, genericamente, pode ser representada pela expressão:

$$\bar{y}(x) = y(x) + \lambda \eta(x) \quad (3.3)$$

onde  $\eta(x)$  é uma função arbitrária que satisfaz as condições de contorno:

$$\eta(x_1) = 0 \quad \text{para } x = x_1 \quad \text{e} \quad \eta(x_2) = 0 \quad \text{para } x = x_2.$$

Ou seja, quando se substitui  $x = x_1$  na Equação 3.3, obtém-se:

$$\bar{y}(x_1) = y(x_1) + \lambda \eta(x_1)$$

Mas como  $\eta(x_1) = 0$ , implica que  $\bar{y}(x_1) = y(x_1)$ , satisfazendo as condições de contorno, exemplificadas na Figura 6. O mesmo ocorre para  $x = x_2$ .

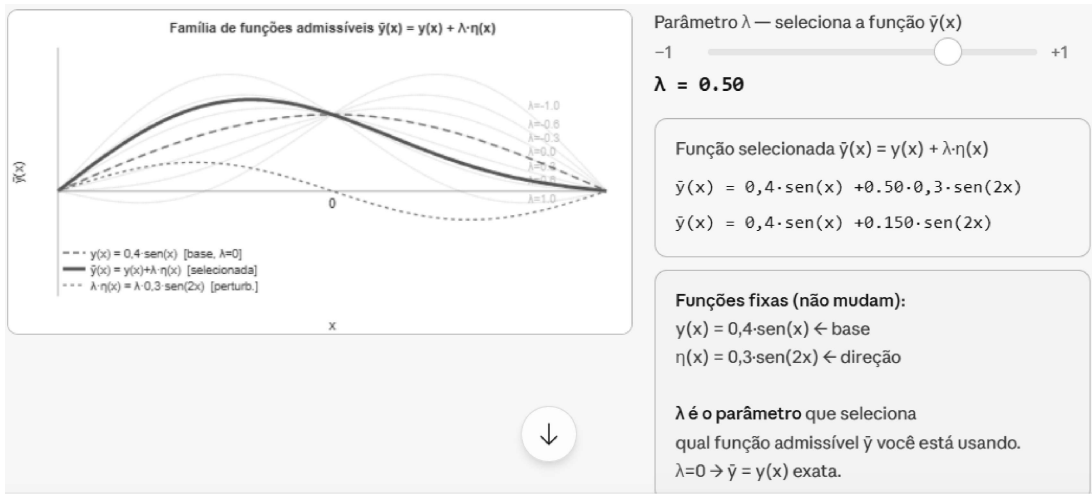
Na adoção de uma função fixa  $\eta(x)$  na Equação 3.3, obtém-se uma família de funções  $\bar{y}(x)$  obtidas pela variação de  $\lambda$  que é um número pequeno (Assan, 2020, p. 21). Assim, para:

a)  $\lambda_1$ , implica em  $\bar{y}_1(x)$  obtido por  $\bar{y}_1(x) = y(x) + \lambda_1 \eta(x)$ ;

b)  $\lambda_2$ , implica em  $\bar{y}_2(x)$  obtido por  $\bar{y}_2(x) = y(x) + \lambda_2 \eta(x)$ ;

e assim por diante. A esse conjunto de  $\bar{y}(x)$  denomina-se de funções admissíveis, como ilustrado pela Figura 6, pois satisfazem as mesmas condições de contorno de  $y(x)$  e representam a função  $y(x)$  dentro de uma tolerância (Assan, 2020, p. 20).

Figura 6 – Família de funções admissíveis  $\bar{y}(x) = y(x) + \lambda \eta(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Claude (Anthropic, modelo Sonnet 4.5).

Na Figura 6, tem-se, por exemplo, que:

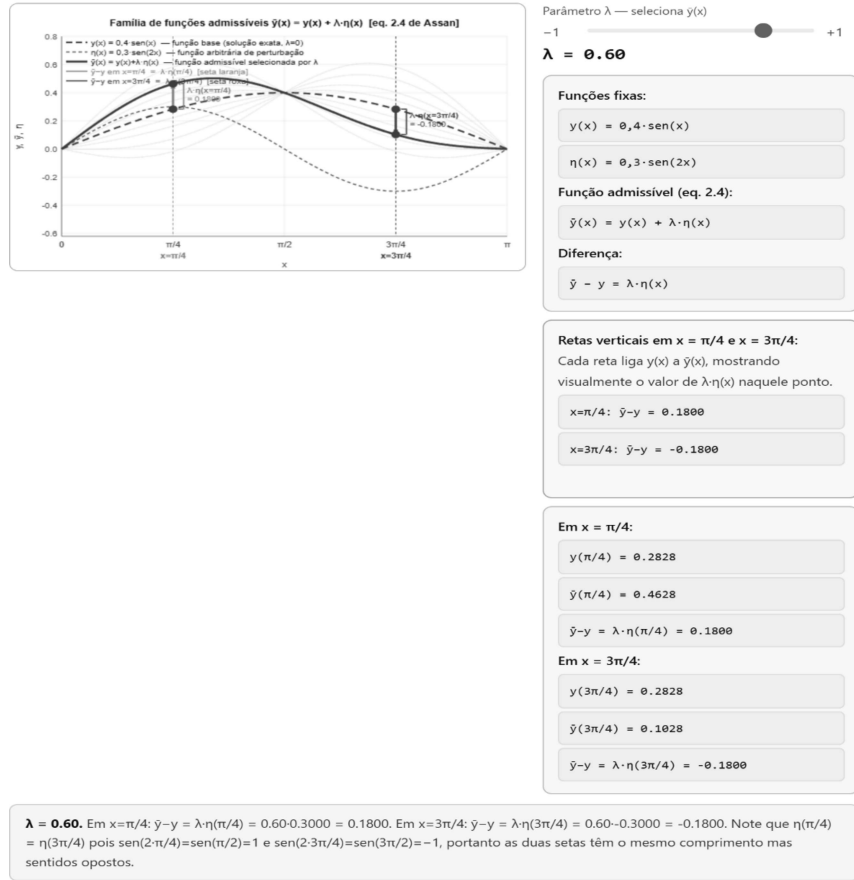
- $y(x) = 0,4 \cdot \text{sen}(x)$  é a função base.
- $\eta(x) = 0,3 \cdot \text{sen}(2x)$  é a função fixa que dá a direção da variação de  $y(x)$ .
- $\lambda$  é o parâmetro para gerar a função admissível  $\bar{y}(x)$ . Assim, variando  $\lambda$ , obtém-se uma família de funções admissíveis  $\bar{y}(x)$  que apresentam as mesmas condições de contorno e são uma aproximação de  $y(x)$ . Quando  $\lambda = 0$ ,  $\bar{y}(x)$  é igual a  $y(x)$ .

Da Equação 3.3,  $\bar{y}(x) = y(x) + \lambda \eta(x)$ , tem-se que:

$$\bar{y}(x) - y(x) = \lambda \eta(x)$$

A essa diferença denomina-se de variação da função  $y(x)$ , como mostrada na Figura 7 que fornece uma visualização geométrica dessa variação. Essa variação de  $y(x)$  é simbolizada por:

$$\delta y = \lambda \eta(x) \quad (3.4)$$

Figura 7 – Visualização geométrica da variação  $\delta y = \lambda \eta(x)$ 

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Claude (Anthropic, modelo Sonnet 4.6).

Se se pegarem, por exemplo, os números do domínio  $x_1 = \pi/4$  e  $x_2 = 3\pi/4$ , o fator que modifica ou que varia a função  $y(x)$  é justamente  $\lambda \eta(x_1)$  e  $\lambda \eta(x_2)$ , pois para esses valores de  $x$ , faz-se o procedimento  $y(x) + \lambda \eta(x)$ . Assim, o valor ou imagem que antes era  $y(x)$  é agora  $y(x) + \lambda \eta(x)$ . Por isso diz-se que houve uma variação de  $y$  dada por  $\lambda \eta(x)$ , e simbolizada por:

$$\delta y = \lambda \eta(x) \quad (3.5)$$

Da Equação 3.3,  $\bar{y}(x) = y(x) + \lambda \eta(x)$ , calcula-se a sua derivada em relação a  $x$ , obtendo:

$\bar{y}'(x) = y'(x) + \lambda \eta'(x)$ , o que implica em:

$$\delta y' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \lambda \eta'(x), \text{ ou seja}$$

$$\delta y' = \lambda \eta'(x) \quad (3.6)$$

que representa a variação da derivada de  $y(x)$ .

Assim, esse operador de variação  $\delta$  quando aplicado a uma função real, por exemplo  $y(x)$ , promove a mudança dessa função  $y(x)$  e que é quantificada pela diferença  $\bar{y}(x) - y(x) = \lambda \eta(x)$ .

Com a compreensão do que significa as variações das funções reais  $y(x)$  para  $\bar{y}(x)$  e  $y'(x)$  para  $\bar{y}'(x)$ , surge a questão de como pode-se avaliar a variação em um funcional, já que essa variação do funcional é função dessas funções que sofreram as variações  $\delta y$ , ou seja, aplica-se essas variações na própria função  $F$ , obtendo a sua variação de  $F(x, y, y')$  para  $F(x, \bar{y}, \bar{y}')$ , denotada de  $\Delta F$ , devido à variação de  $y(x)$  para  $\bar{y}(x)$  e  $y'(x)$  para  $\bar{y}'(x)$ . Por ser uma função de funções, o caminho para se obter a sua variação não é estritamente igual ao de uma função real comum, uma vez que na função real, a variação é em apenas uma direção dada pelo eixo real, e a direção da variação de uma função pode ser infinitas, pois há infinitos caminhos e direções para se variar uma função!

Dada uma variação no valor de  $F$ , sendo:

$$\Delta F = F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y')$$

A estratégia de se estudar  $\Delta F$  vem da questão que, em muitos problemas de engenharia, até tem-se a forma explícita de  $F(x, y, y')$  e suas derivadas parciais  $\partial F/\partial y$  e  $\partial F/\partial y'$ , por exemplo, em modelos matemáticos de algum fenômeno físico, como a Equação 3.2 da viga biapoiada. Porém, mesmo com essas informações em mãos, ainda não se pode conhecer os seus valores, pois não se conhece a função  $y(x)$  explicitamente. Assim, a estratégia é estudar não  $F$  diretamente, mas a sua variação  $\Delta F$ .

Como:

$$\begin{aligned}\bar{y}(x) &= y(x) + \lambda \eta(x), & \delta y &= \lambda \eta(x) \\ \bar{y}'(x) &= y'(x) + \lambda \eta'(x), & \delta y' &= \lambda \eta'(x)\end{aligned}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned}\bar{y}(x) &= y(x) + \delta y(x) \\ \bar{y}'(x) &= y'(x) + \delta y'(x)\end{aligned}$$

Logo,  $\Delta F$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y') \\ &= F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') \\ &= F(x, y + \lambda \eta, y' + \lambda \eta') - F(x, y, y')\end{aligned}$$

Pode-se aprofundar ainda mais o estudo e conhecimento de  $F(x, y + \lambda \eta, y' + \lambda \eta')$  através da sua expansão em série de Taylor. Assim,  $\Delta F$  pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}\Delta F &= \left[ F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \lambda \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \lambda \eta' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\lambda \eta)^2 + \dots \right] - F(x, y, y') \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} \lambda \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \lambda \eta' + \dots\end{aligned}$$

Como  $\delta y = \lambda \eta(x)$  e  $\delta y' = \lambda \eta'(x)$ , tem-se que:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \dots \quad (3.7)$$

Dos estudos do cálculo diferencial total de uma função  $f(u, v)$  com variáveis reais  $u$  e  $v$ , tem-se que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad (3.8)$$

$(\partial f / \partial u) \cdot du$  é quanto  $f$  muda por causa de  $u$  variando, e  $(\partial f / \partial v) \cdot dv$  é quanto  $f$  muda por causa de  $v$  variando. O diferencial total é a **soma das contribuições independentes** de cada variável.

Observa-se que, das Equações 3.7 e 3.8:

- $\delta y = \lambda \eta$ ,  $\delta y' = \lambda \eta'$  são **variações funcionais**;
- $du, dv$  são **incrementos numéricos infinitesimais**.

Ao comparar os dois primeiros termos da Equação 3.7 com os termos da Equação 3.8, observa-se que  $\Delta F$  é análogo ao diferencial total expresso na Equação 3.8. Isso permite tratar a expressão de  $\Delta F$  como sendo um diferencial total dessa mesma função  $F$ , e assim obter importantes propriedades como a capacidade de se conhecer os extremos de um funcional, visto mais adiante.

Adota-se a notação  $\delta F$  para representar esse diferencial total de  $F$ , expresso por:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'$$

Assim, se para uma função real calcula-se a sua variação por:

$$\delta y = \bar{y}(x) - y(x) = \lambda \eta(x)$$

para o funcional, calcula-se a sua variação por:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'$$

e essa expressão irá permitir obter importantes características e propriedades do funcional, como por exemplo, obter os extremos de um funcional, visto mais adiante.

O símbolo  $\delta$  é chamado de operador variacional, e possui as mesmas propriedades do operador diferencial, como por exemplo:

$$\frac{d}{dx}(\delta F) = \delta \left( \frac{dF}{dx} \right) \quad (3.9)$$

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx \quad (3.10)$$

Assim, com o funcional do tipo:

$$Y = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (3.11)$$

e utilizando as propriedades vistas acima, pode-se dizer que sua primeira variação é dada por:

$$\delta Y = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (3.12)$$

Um exemplo da aplicação do operador  $\delta$  pode ser feito utilizando a Equação 3.2:

$$Y = \frac{1}{2} \int EI \left[ \frac{d^2 v}{dx^2} \right]^2 dx - \int q v dx$$

Como:

$$\delta Y = \int \delta F dx = \int \left( \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v''} \delta v'' \right) dx$$

onde  $F$  é dado por:

$$F(x, v, v'') = \frac{1}{2} EI (v'')^2 - q(x) v$$

e pela propriedade da Equação 3.10, a aplicação do operador variacional resulta em:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial F}{\partial v''} \delta v'' \quad (3.13)$$

Para uma função  $F$  que possui derivada de segunda ordem, o operador  $\delta$  é dado pelos seguintes termos:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial F}{\partial v''} \delta v'' \quad (3.14)$$

Identificando cada termo de  $F(x, v, v'')$ , tem-se:

**Termo 1:**  $\frac{\partial F}{\partial v} \delta v$ . Busca derivar  $F$  em relação a  $v$ , considerando  $v''$  como constante:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{1}{2} EI (v'')^2 - q v \right] = -q$$

e portanto, tem-se:  $-q \delta v$ .

**Termo 2:**  $\frac{\partial F}{\partial v'} \delta v'$ . Busca derivar  $F$  em relação a  $v'$ , considerando  $v$  e  $v''$  como constantes. Como não aparece derivada de primeira ordem ( $v'$ ) em  $F$ , tem-se que:

$$\frac{\partial F}{\partial v'} = 0$$

**Termo 3:**  $\frac{\partial F}{\partial v''} \delta v''$ . Busca derivar  $F$  em relação a  $v''$ , considerando  $v$  como constante:

$$\frac{\partial F}{\partial v''} = \frac{\partial}{\partial v''} \left[ \frac{1}{2} EI (v'')^2 - q v \right] = \frac{1}{2} EI \cdot 2v'' = EI v''$$

Portanto, tem-se:  $EI v'' \delta v''$ .

O que leva ao seguinte resultado:

$$\delta Y = \int_{x_1}^{x_2} [(-q) \delta v + (EI v'') \delta v''] dx \quad (3.15)$$

escrevendo  $v''$  na forma de derivada explícita  $\frac{d^2 v}{dx^2}$ , tem-se:

$$\delta Y = \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx - \int_{x_1}^{x_2} q \delta v dx \quad (3.16)$$

### 3.4 OS EXTREMOS DE UM FUNCIONAL

Como mencionado anteriormente, o cálculo variacional desenvolve métodos que permitem estudar os funcionais para encontrar seus valores extremos, que são funções que minimizam ou maximizam o funcional, ou seja, que fazem o funcional estacionário e, ao mesmo tempo, satisfazem as condições de contorno. Dentre as funções admissíveis, existe uma que torna o funcional estacionário.

#### 3.4.1 Uma das funções admissíveis torna o funcional estacionário

Busca-se uma função  $y(x)$  que satisfaz as condições de contorno, em que  $y_1$  e  $y_2$  são essas condições, ou seja,  $y_1 = y(x_1)$  e  $y_2 = y(x_2)$ . Essa função  $y(x)$  torna o funcional genérico  $Y$  estacionário, onde:

$$Y = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (3.17)$$

Como não se sabe, a princípio, qual é a forma explícita de  $y(x)$  vem a questão de como encontrar  $y(x)$  ou qual estratégia utilizar para achar uma condição que  $y(x)$  deve satisfazer para que ela estacione o funcional, ou seja, para que o valor do funcional  $Y$  não se altere, ou altere minimamente com a alteração ou perturbação de  $y(x)$ .

Partindo do que ocorre em uma função comum no domínio dos reais, tendo o conhecimento de como calcular uma derivada dessa função comum, sabe-se que  $f'(x_0) = 0$  é a condição para um extremo em  $x_0$ .

Desenvolvendo a série de Taylor para  $f(x)$  em  $x_0$  tem-se:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0) \Delta x^2 + \dots$$

Se  $f'(x_0)$  é diferente de zero, ao dar o “passo” ou fazer uma “perturbação” em  $x$  de valor  $\Delta x$ , o valor de  $f$  muda proporcionalmente a esse passo.

Se  $f'(x_0) = 0$ , a mudança  $f'(x_0) \Delta x$ , chamada de variação de primeira ordem, é zero,  $f'(x_0) \Delta x = 0$ , mesmo o passo ou perturbação  $\Delta x$  sendo diferente de zero. Com isso, o valor em  $f(x_0)$  “estaciona” momentaneamente, ou seja, pode-se alterar o valor de  $x$  por uma

perturbação de  $\Delta x$ , que mesmo assim, o valor de  $f(x_0)$  não se altera,  $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ . A mudança só será percebida em termos de  $\frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2$ , chamada de segunda ordem, que são muito menores quando o passo  $\Delta x$  é pequeno e tende a zero.

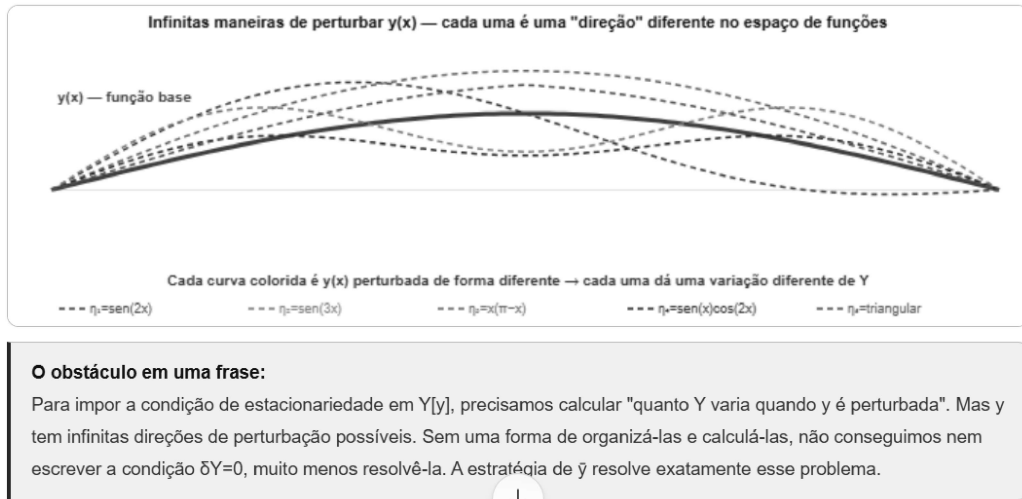
Daqui vem a estratégia de buscar um caminho semelhante para se obter uma condição que a função  $y(x)$  deve satisfazer para que “estacione” momentaneamente o funcional  $Y$ . Se para a função comum o ato de perturbar  $x$  era apenas acrescentar um passo, em uma única direção, de tamanho  $\Delta x$  no eixo  $x$ , no caso dos funcionais, perturbar uma função  $y(x)$  é mais desafiador, pois não há um único caminho ou direção para isso, aliás há infinitos caminhos. Pode-se alterar  $y(x)$  para cima no meio, nas bordas, suavemente, abruptamente. Cada perturbação diferente gera uma variação diferente no funcional  $Y$ , denominada  $\delta\bar{Y} = \bar{Y} - Y$ , já que  $Y$  é função da função  $y(x)$  e  $\bar{Y}$  é função de  $\bar{y}(x)$ . Aplicando  $\bar{y}(x)$  e a Equação 3.3 no funcional,  $Y$  se torna  $\bar{Y}$ .

$$\bar{Y}(\lambda) = \int F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = \int F(x, y + \lambda\eta, y' + \lambda\eta') dx \quad (3.18)$$

$$\bar{Y} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \quad (3.19)$$

A Figura 8 ilustra algumas das perturbações ou variações em  $y(x)$ .

Figura 8 – Infinitas maneiras de perturbar  $y(x)$  – cada uma é uma “direção” diferente no espaço de funções



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Claude (Anthropic, modelo Sonnet 4.5).

Essa dificuldade de dar uma direção para se alterar  $y(x)$  é contornada utilizando a função  $\eta(x)$ , para gerar a função alterada ou perturbada  $\bar{y}(x)$ . Na Figura 9, mostra-se uma comparação entre a derivada de uma função comum obtida fazendo o limite de  $h$  tendendo a zero, ou seja, aproxima-se a variável independente  $(x_0 + h)$  para  $x_0$  que é o ponto base, pela única direção possível que é pelo eixo  $x$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.20)$$

com  $h$  tendendo a zero.

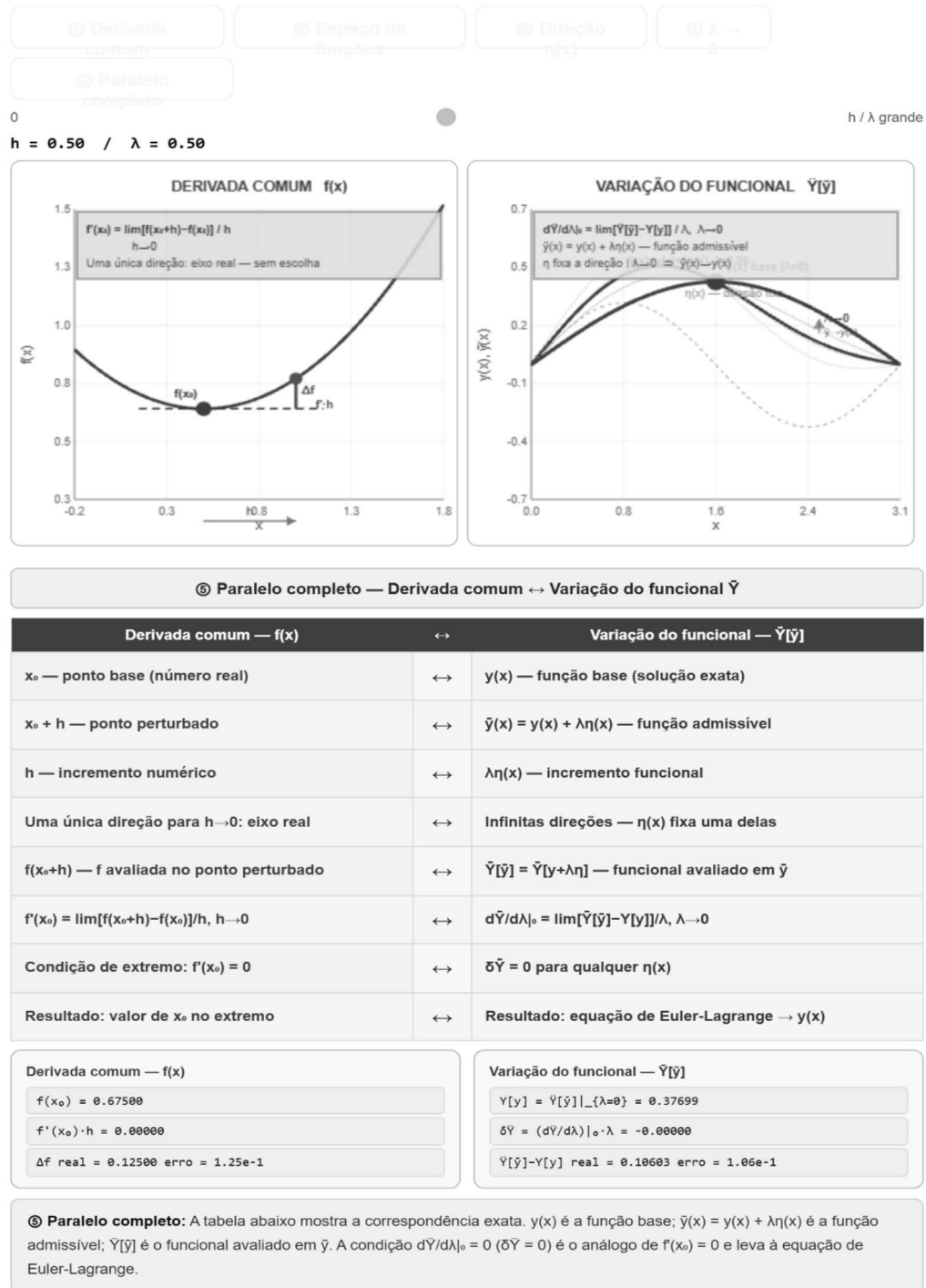
Para se definir a derivada em um funcional, tem-se que fazer a aproximação da variável independente  $\bar{y}(x)$ , que é uma função, para a função base  $y(x)$ , ou seja, a distância entre  $\bar{y}(x)$  e  $y(x)$  tem que tender a zero. Essa aproximação tem que ser bem definida, ou seja, ser feita com uma direção específica, como é na função comum dos reais. Isso é obtido adotando como direção específica uma função auxiliar  $\eta(x)$ , o que permite obter a Equação 3.3, vista anteriormente:

$$\bar{y}(x) = y(x) + \lambda \eta(x)$$

Com isso, ao fazer  $\lambda$  tendendo a zero, é possível aproximar  $\bar{y}(x)$  de  $y(x)$ , e com isso obter a derivada do funcional  $\bar{Y}$ , tendo como função base  $y(x)$ :

$$\frac{d\bar{Y}}{d\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\bar{Y}[\bar{y}] - Y[y]}{\lambda} \quad (3.21)$$

com  $\lambda \rightarrow 0$ .

Figura 9 – Paralelo completo: derivada normal  $\times$  derivada de funcional

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Claude (Anthropic, modelo Sonnet 4.5).

Com a expansão em série de Taylor de  $\bar{Y}$ , tem-se:

$$\bar{Y} = Y + \lambda \left( \frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} + \frac{1}{2!} \lambda^2 \left( \frac{d^2 \bar{Y}}{d\lambda^2} \right)_{\lambda=0} + \dots \quad (3.22)$$

Como  $f'(x_0) = 0$  é a condição para um extremo em  $x_0$  para uma função comum, para um funcional  $\bar{Y}$  atingir um valor extremo a condição necessária é que sua primeira variação

seja nula.

Como  $\delta\bar{Y} = \bar{Y} - Y$ , essa diferença é a primeira variação do funcional  $\bar{Y}$ , Equação 3.23:

$$\delta\bar{Y} = \frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \delta\lambda \quad (3.23)$$

Onde  $\delta\lambda$  representa um incremento infinitesimal desse parâmetro, e  $\frac{d\bar{Y}}{d\lambda}$  representa a taxa de variação de  $\bar{Y}$  em  $\lambda = 0$ , similarmente a quando se faz a derivada de uma função comum  $f(x)$  e calcula-se o seu diferencial  $df$ , que é a mudança real (aproximada) que a função  $f(x)$  é submetida quando se desloca  $x$  para  $(x + dx)$ , ou seja,  $df = f'(x) \cdot dx$ .

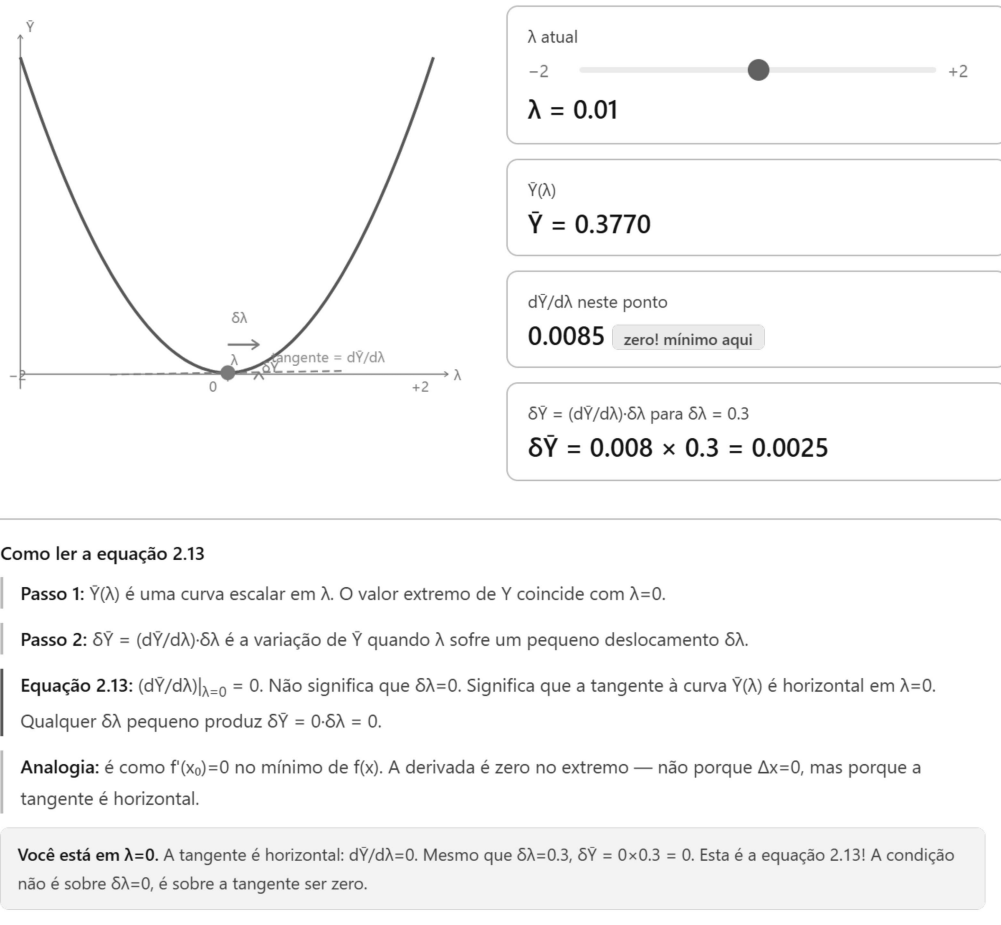
Da Equação 3.23, tem-se que a condição que estaciona o funcional  $\bar{Y}$  em  $\lambda = 0$  (ou seja, para que  $\bar{y} = y(x)$  minimize  $\bar{Y}$ ), é necessário que a derivada de  $\bar{Y}$  em relação a  $\lambda$  seja zero em  $\lambda = 0$ . Isso é a condição de extremo — idêntica a  $f'(x_0) = 0$  para funções comuns:

$$\left( \frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = 0 \quad (3.24)$$

em torno de  $\lambda = 0$ .

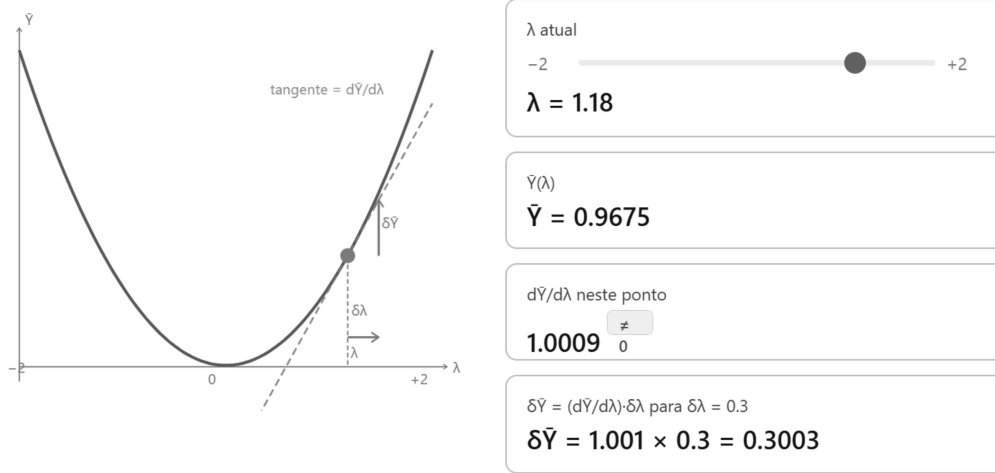
Ou seja, da Equação 3.24, implica  $\delta\bar{Y} = 0$ : o funcional está estacionário, e na visão geométrica, a tangente à curva  $\bar{Y}(\lambda)$  é horizontal em  $\lambda = 0$ . A Figura 10 representa o gráfico de  $\bar{Y}(\lambda)$  evidenciando a reta tangente que é horizontal em  $\lambda = 0$ .

Figura 10 – Gráfico de  $\bar{Y}(\lambda)$  com reta tangente horizontal em  $\lambda = 0$  (condição de estacionariedade satisfeita)



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Claude (Anthropic).

Já para a Figura 11, tem-se a representação do gráfico de  $\bar{Y}(\lambda)$  evidenciando a reta tangente que não é mais horizontal, pois foi utilizado um  $\lambda$  diferente de 0, com uma variação de  $\lambda$  dada por  $\delta\lambda$ , o que originou um  $\delta\bar{Y}$  diferente de 0.

Figura 11 – Gráfico de  $\bar{Y}(\lambda)$  com  $\lambda \neq 0$ : reta tangente inclinada e  $\delta\bar{Y} \neq 0$ **Como ler a equação 2.13**

**Passo 1:**  $\bar{Y}(\lambda)$  é uma curva escalar em  $\lambda$ . O valor extremo de  $\bar{Y}$  coincide com  $\lambda=0$ .

**Passo 2:**  $\delta\bar{Y} = (d\bar{Y}/d\lambda) \cdot \delta\lambda$  é a variação de  $\bar{Y}$  quando  $\lambda$  sofre um pequeno deslocamento  $\delta\lambda$ .

**Equação 2.13:**  $(d\bar{Y}/d\lambda)|_{\lambda=0} = 0$ . Não significa que  $\delta\lambda=0$ . Significa que a tangente à curva  $\bar{Y}(\lambda)$  é horizontal em  $\lambda=0$ . Qualquer  $\delta\lambda$  pequeno produz  $\delta\bar{Y} = 0 \cdot \delta\lambda = 0$ .

**Analogia:** é como  $f'(x_0)=0$  no mínimo de  $f(x)$ . A derivada é zero no extremo — não porque  $\Delta x=0$ , mas porque a tangente é horizontal.

**λ longe de zero.**  $\bar{y}$  se afastou muito da solução exata.  $\bar{Y}$  é maior que o mínimo e  $d\bar{Y}/d\lambda \neq 0$  — a condição 2.13 não está satisfeita aqui.

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Claude (Anthropic, modelo Sonnet 4.5).

Da Equação 3.24 e da Equação 3.19, aplicando a regra da cadeia, tem-se:

$$\left( \frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{d\lambda} dx \right)_{\lambda=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \frac{d\bar{y}'}{d\lambda} \right) dx \quad (3.25)$$

Utilizando a Equação 3.3 na Equação 3.25, tem-se:

$$\left[ \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx \right]_{\lambda=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx \quad (3.26)$$

Que apresenta as mesmas informações dadas pela Equação 3.12.

Na Equação 3.26 observa-se a presença de  $\eta'$ , que foi obtida quando se realizou a derivada de  $\bar{y}(x) = y(x) + \lambda\eta(x)$ . Para aplicar o **Lema Fundamental do Cálculo Variacional** — que diz que se  $\int [\dots] \cdot \eta dx = 0$  para todo  $\eta$ , então o integrando é zero — o  $\eta$  precisa estar na forma sem derivadas, o que é obtido aplicando a técnica da integração por partes, obtendo:

$$\left( \frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right|_{x_1}^{x_2} \quad (3.27)$$

Da condição de que  $\eta(x)$  tem que satisfazer as condições de contorno, pois é uma função admissível,  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , a Equação 3.27 se resume em:

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta \, dx = 0 \quad (3.28)$$

A condição da Equação 3.28 ser igual a zero vem da condição de estacionariedade:

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$$

em torno de  $\lambda = 0$ , visto anteriormente.

Assim, para anular  $\frac{d\bar{Y}}{d\lambda}$  em torno de  $\lambda = 0$ , tem-se que o termo do integrando deve ser zero:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0} \quad (3.29)$$

Essa Equação 3.29 é conhecida como **equação de Euler-Lagrange** e é a condição necessária para que  $y(x)$  seja uma função extrema.

Para funcionais cujas variáveis dependentes são funções e suas derivadas de ordem maior, do tipo:

$$Y = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) \, dx \quad (3.30)$$

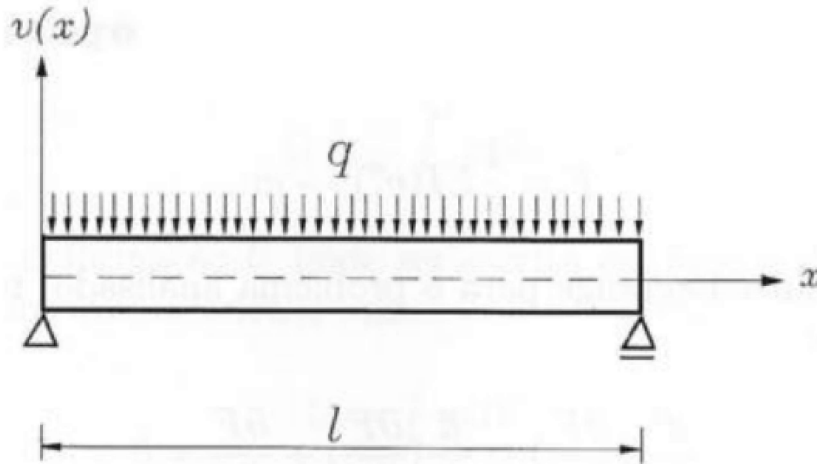
a expressão da equação de Euler-Lagrange passa a ter a forma:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0} \quad (3.31)$$

### 3.5 APLICAÇÃO DE EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Como uma aplicação da equação de Euler-Lagrange, considera-se a viga biapoiada com carregamento uniforme mostrada na Figura 12.

Figura 12 – Viga biapoiada com carregamento uniforme – aplicação da equação de Euler-Lagrange



Fonte: Assan (2020, p. 25).

Para esse caso, o funcional  $Y$  que representa a energia potencial total é dado pela Equação 3.2 vista anteriormente:

$$Y = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[ \frac{d^2 v}{dx^2} \right]^2 dx - \int_0^L q v dx$$

Onde  $F$  é da forma:

$$F(x, v, v'') = \frac{1}{2} EI (v'')^2 - q v \quad (3.32)$$

Com a representação de  $F$  contendo derivada de segunda ordem, e tendo a Equação 3.31 como formato para a expressão da equação de Euler-Lagrange, tem-se que:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial v''} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial v'} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \quad (3.33)$$

Assim tem-se que:

$$\frac{\partial F}{\partial v''} = EI v''$$

$$\frac{\partial F}{\partial v'} = 0, \quad \text{pois } F \text{ não depende de } v'$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -q$$

Com isso, tem-se que:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI v'') - \frac{d}{dx} (0) - q = 0$$

$$\boxed{EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q = 0} \quad (3.34)$$

Essa Equação 3.34 é a que descreve o equilíbrio da viga obtida a partir da equação de Euler-Lagrange. Ela estabelece a condição que a variável  $v(x)$  deve satisfazer para que seja uma função extrema.

Busca-se, agora, compreender que a condição de estacionariedade do funcional  $Y$  representa a condição de mínimo do funcional energia potencial total. Do funcional  $Y$  representado pela Equação 3.2, nota-se que ele é formado por duas parcelas.

A primeira, representada por  $U$ , que é a energia de deformação, indica a energia armazenada em virtude da deformação  $\varepsilon$  que ocorre em cada ponto da viga:

$$U = \frac{1}{2} \int EI \left[ \frac{d^2 v}{dx^2} \right]^2 dx \quad (3.35)$$

A segunda parte, representada por  $\Omega$ , que é a energia potencial das cargas:

$$\Omega = - \int q v dx \quad (3.36)$$

é a energia advinda do trabalho externo realizado pelas cargas, trabalho esse verificado pelo deslocamento  $v$ .

Pelo fato de tanto a deformação  $\varepsilon$ , quanto o deslocamento  $v$  serem funções de  $x$ , pois ambas não são constantes ao longo da viga, e por isso, para cada ponto tem-se um  $\varepsilon(x)$  e  $v(x)$ . Como cada ponto do corpo se deforma de maneira diferente, é conveniente tratar a energia não de maneira uniforme, mas como energia por unidade de volume, pois para cada  $dV$  tem-se uma energia  $u$  diferente, pois cada ponto se deforma de maneira diferente. Assim tem-se:

$$U = \int u dV \quad (3.37)$$

sendo  $dV$  o volume infinitesimal.

Na configuração de equilíbrio, a energia potencial total,  $Y_\varepsilon$ , corresponde a um determinado campo de deslocamentos  $v$ , e de deformação  $\varepsilon$ . Procedendo à obtenção de uma configuração admissível, ou seja, de uma configuração na vizinhança de  $Y_\varepsilon$ , obtido fazendo o deslocamento  $v + \delta v$  e de deformação  $\varepsilon + \delta \varepsilon$ , obtém-se a energia potencial total  $Y_{\varepsilon+\delta \varepsilon}$ .

Fazendo  $Y_{\varepsilon+\delta \varepsilon} - Y_\varepsilon$ , tem-se:

$$Y_{\varepsilon+\delta \varepsilon} - Y_\varepsilon = \int (u_{\varepsilon+\delta \varepsilon} - u_\varepsilon) dV - \int q \delta v dx \quad (3.38)$$

Realizando a expansão em série de Taylor de  $u_{\varepsilon+\delta \varepsilon}$ , tem-se:

$$u_{\varepsilon+\delta \varepsilon} = u_\varepsilon + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} (\delta \varepsilon)^2 + \dots \quad (3.39)$$

Substituindo a Equação 3.39 na Equação 3.38, tem-se:

$$Y_{\varepsilon+\delta\varepsilon} - Y_{\varepsilon} = \int \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon dV - \int q \delta v dx + \frac{1}{2!} \int \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} (\delta\varepsilon)^2 dV + \dots \quad (3.40)$$

Como o sistema está na condição de equilíbrio, as duas primeiras integrais depois da igualdade são zero para as configurações admissíveis, ou seja, configurações obtidas por variar, ou modificar, a deformação  $\delta\varepsilon$  e o deslocamento  $\delta v$ . Como se está na configuração de equilíbrio, a derivada primeira da energia é zero, a inclinação da reta tangente é zero no ponto de equilíbrio, levando à variação de primeira ordem,  $\delta Y = 0$ .

Isso implica que resta a variação de segunda ordem  $\delta^2 Y$ , expressa pela integral:

$$\delta^2 Y = \frac{1}{2!} \int \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} (\delta\varepsilon)^2 dV \quad (3.41)$$

De acordo com Assan (2020, p. 28), essa energia de deformação é uma função definida positiva da deformação, o que leva a energia potencial total a ser um mínimo para o estado de equilíbrio.

### 3.6 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

O Método de Rayleigh-Ritz utiliza princípios variacionais vistos anteriormente em caráter introdutório, além de conceitos, também definidos, como: condição de estacionariedade de um funcional; funções admissíveis  $u(x)$ ; funções propositivas  $\tilde{u}(x)$ ; funções base  $\psi(x)$ ; operador de variação  $\delta$  (Soriano, 2009, p. 80).

O objetivo é buscar soluções aproximadas propositivas  $\tilde{u}(x)$  das variáveis primárias admissíveis, por exemplo, deslocamento  $u(x)$ , obtidas pela combinação linear de funções base  $\psi(x)$  linearmente independentes entre si, respeitando as condições essenciais de contorno, onde se tem:

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \psi_0(x) + \sum_{j=1}^{j'} \alpha_j \psi_j(x) \quad \longrightarrow \quad \tilde{u} = \psi_0 + \begin{bmatrix} \cdots & \psi_j & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = \psi_0 + \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.42)$$

Da Equação 3.42, tem-se que (Soriano, 2009, p. 80–81):

- $\psi_0$  é uma função que atende às formas não homogêneas das condições essenciais de contorno;
- $\psi_j$  são  $j$  funções linearmente independentes que atendem às formas homogêneas das condições de contorno, isto é,  $\psi_j(x_i) = 0$ , e que formam a matriz  $\boldsymbol{\psi}$ . As funções  $\psi_j$  são denominadas **funções de base, de forma ou de aproximação**;
- $\alpha_j$ , que formam o vetor  $\boldsymbol{\alpha}$ , são  $j$  parâmetros generalizados a serem determinados, chamados de **graus de liberdade** ou **coeficientes de Ritz**.

Assim, tendo um funcional, por exemplo  $J(u)$ , realiza-se a substituição de  $u(x)$  por  $\tilde{u}(x)$ , obtendo o funcional  $J(\tilde{u}) = J(\alpha_j)$ , de maneira a se poder aplicar as condições de estacionariedade:

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial \alpha_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, j' \quad (3.43)$$

Da Equação 3.43, obtém-se um sistema com a forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial \alpha_j} \\ \vdots \end{array} \right\} = \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f} \quad (3.44)$$

Da Equação 3.44, obtém-se a solução do vetor  $\boldsymbol{\alpha}$ :

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}} \quad (3.45)$$

onde se tem que  $\mathbf{K}$  é uma matriz quadrada simétrica de ordem  $j$  e  $\mathbf{f}$  é um vetor, ambos de coeficientes constantes, Soriano (2009, p. 81).

O Método de Rayleigh-Ritz segue a sistemática descrita por Soriano (2009, p. 82):

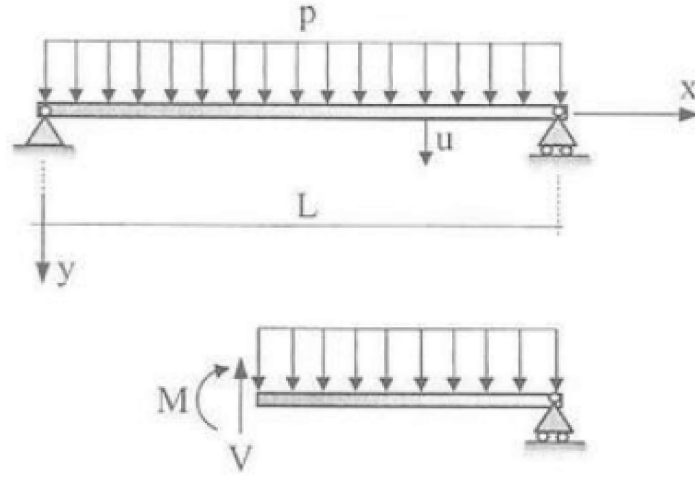
1. Arbitra-se uma solução propositiva para cada uma das variáveis primárias, como soma de uma função que atende às formas não homogêneas das condições essenciais de contorno mais uma combinação linear de funções de base que atendam às condições essenciais de contorno e que sejam suficientemente contínuas e deriváveis;
2. Substitui-se as soluções aproximadas no funcional, com a sua transformação em uma função em termos dos parâmetros generalizados adotados nessas soluções;
3. Da condição de estacionariedade dessa função chega-se a um sistema de equações algébricas;
4. Resolve-se esse sistema para obter os parâmetros generalizados;
5. Substitui-se esses parâmetros nas soluções propositivas, o que define soluções aproximadas, funções contínuas no domínio.

Por exemplo, dado o funcional  $J(u)$  de uma viga biapoada, como mostra a Figura 13:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L EI u_{,x}^2 dx - \int_0^L M u dx \quad (3.46)$$

onde  $M = \frac{p L x}{2} - \frac{p x^2}{2}$ .

Figura 13 – Viga biapoada com carregamento uniformemente distribuído  $p$  e seu diagrama de corpo livre evidenciando o momento fletor  $M$  e o esforço cortante  $V$



Fonte: Soriano (2009, p. 82).

Utilizando como função forma  $\tilde{u}(x)$  a função polinomial:

$$\tilde{u} = \alpha_0 + \alpha_0^* x + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^4 \quad (3.47)$$

Aplicam-se as condições de contorno  $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(L) = 0$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0 \\ \alpha_0^* &= -(\alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3), \end{aligned}$$

que forma:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} x^2 - Lx & x^3 - L^2x & x^4 - L^3x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.48)$$

$$\tilde{u}_{,x} = \begin{bmatrix} 2x - L & 3x^2 - L^2 & 4x^3 - L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\psi}_{,x} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.49)$$

Aplicando  $\tilde{u}(x)$  em  $J$ , obtém-se:

$$J(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_0^L EI (\boldsymbol{\psi}_{,x} \boldsymbol{\alpha})^2 dx - \int_0^L \left( \frac{pLx}{2} - \frac{px^2}{2} \right) \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha} dx \quad (3.50)$$

Com a Equação 3.50, pode-se aplicar a condição de estacionariedade, dada pela Equação 3.43, obtendo o sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} \frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial \alpha_1} = \int_0^L EI (\boldsymbol{\psi}_{,x} \boldsymbol{\alpha}) \psi_{1,x} dx - \int_0^L \left( \frac{p L x}{2} - \frac{p x^2}{2} \right) \psi_1 dx = 0 \\ \frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial \alpha_2} = \int_0^L EI (\boldsymbol{\psi}_{,x} \boldsymbol{\alpha}) \psi_{2,x} dx - \int_0^L \left( \frac{p L x}{2} - \frac{p x^2}{2} \right) \psi_2 dx = 0 \\ \frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial \alpha_3} = \int_0^L EI (\boldsymbol{\psi}_{,x} \boldsymbol{\alpha}) \psi_{3,x} dx - \int_0^L \left( \frac{p L x}{2} - \frac{p x^2}{2} \right) \psi_3 dx = 0 \end{cases}$$

O formato desse sistema, mostrado acima, pode ser compactado utilizando o formato matricial:

$$\left( \int_0^L \boldsymbol{\psi}_{,x}^T EI \boldsymbol{\psi}_{,x} dx \right) \boldsymbol{\alpha} - \int_0^L \boldsymbol{\psi}^T \left( \frac{p L x}{2} - \frac{p x^2}{2} \right) dx = \mathbf{0} \quad (3.51)$$

Da Equação 3.51, pode-se identificar as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{f}$  como:

$$\mathbf{K} = \int_0^L \boldsymbol{\psi}_{,x}^T EI \boldsymbol{\psi}_{,x} dx \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \int_0^L \boldsymbol{\psi}^T \left( \frac{p L x}{2} - \frac{p x^2}{2} \right) dx$$

que, nesse exemplo, podem ser calculadas:

$$\mathbf{K} = \int_0^L \begin{Bmatrix} 2x - L \\ 3x^2 - L^2 \\ 4x^3 - L^3 \end{Bmatrix} EI \begin{bmatrix} 2x - L & 3x^2 - L^2 & 4x^3 - L^3 \end{bmatrix} dx = EI \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} & \frac{L^4}{2} & \frac{3L^5}{5} \\ \frac{L^4}{2} & \frac{4L^5}{5} & L^6 \\ \frac{3L^5}{5} & L^6 & \frac{9L^7}{7} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \int_0^L \begin{Bmatrix} x^2 - Lx \\ x^3 - L^2x \\ x^4 - L^3x \end{Bmatrix} \left( \frac{p L x}{2} - \frac{p x^2}{2} \right) dx \longrightarrow \mathbf{f} = -p \begin{Bmatrix} \frac{L^5}{60} \\ \frac{L^6}{40} \\ \frac{5L^7}{168} \end{Bmatrix}$$

Com as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{f}$ , utiliza-se a Equação 3.45 para obter o vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  dos parâmetros generalizados:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} = -\frac{p}{EI} \begin{bmatrix} \frac{300}{L^3} & \frac{-450}{L^4} & \frac{210}{L^5} \\ \frac{-450}{L^4} & \frac{720}{L^5} & \frac{-350}{L^6} \\ \frac{210}{L^5} & \frac{-350}{L^6} & \frac{175}{L^7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{L^5}{60} \\ \frac{L^6}{40} \\ \frac{5L^7}{168} \end{Bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\alpha} = -\frac{p}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{L}{12} \\ -\frac{1}{24} \end{Bmatrix}$$

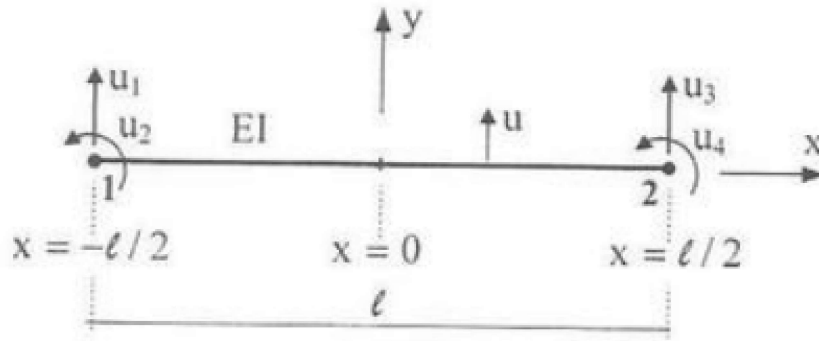
Aplicando essa solução na Equação 3.48, leva à solução final:

$$\boxed{\tilde{u} \equiv u = \frac{p(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)}{24EI}} \quad (3.52)$$

### 3.7 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO VIGA PELO MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Busca-se a formulação do elemento finito unidimensional de uma viga com 4 deslocamentos nodais utilizando o Método de Rayleigh-Ritz. A representação da viga é mostrada na Figura 14, onde observa-se dois nós numerados de 1 e 2, com os deslocamentos transversais  $u_1$  para o nó 1 e  $u_3$  para o nó 2. Também foram representados os deslocamentos angulares ou rotação  $u_2$  para o nó 1 e  $u_4$  para o nó 2.

Figura 14 – Representação unidimensional da viga com dois nós e quatro deslocamentos nodais ( $u_1, u_2, u_3, u_4$ )



Fonte: Soriano (2009, p. 131).

Como visto na Seção 3.6, o Método de Rayleigh-Ritz utiliza a função propositiva  $\tilde{u}(x)$  como aproximação da solução  $u(x)$ , como esquematizada na Equação 3.42. Nessa viga da Figura 14, tem-se dois nós, 1 e 2, com dois deslocamentos nodais por nó, o que totalizam 4 deslocamentos nodais. A solução propositiva será utilizando uma forma polinomial de terceiro grau (Soriano, 2009, p. 131):

$$u = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \psi \alpha \quad (3.53)$$

Pelo sistema de referência, os nós estão localizados em  $x = -\ell/2$  e  $x = \ell/2$ . Particularizando a solução dada pela Equação 3.42 a esses pontos nodais, e sabendo que o deslocamento angular ( $u'$  ou  $u_{,x}$ ) é obtido pela derivada do deslocamento transversal ( $u$ ), pode-se construir o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u|_{x=-\ell/2} \\ u,x|_{x=-\ell/2} \\ u|_{x=\ell/2} \\ u,x|_{x=\ell/2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\ell/2 & \ell^2/4 & -\ell^3/8 \\ 0 & 1 & -\ell & 3\ell^2/4 \\ 1 & \ell/2 & \ell^2/4 & \ell^3/8 \\ 0 & 1 & \ell & 3\ell^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\psi}_0 \boldsymbol{\alpha} \quad (3.54)$$

Isolando o vetor dos parâmetros generalizados  $\boldsymbol{\alpha}$ , tem-se:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\psi}_0^{-1} \mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1/2 & \ell/8 & 1/2 & -\ell/8 \\ -3/(2\ell) & -1/4 & 3/(2\ell) & -1/4 \\ 0 & -1/(2\ell) & 0 & 1/(2\ell) \\ 2/\ell^3 & 1/\ell^2 & -2/\ell^3 & 2/\ell^2 \end{bmatrix} \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.55)$$

Substituindo a Equação 3.55 na Equação 3.53, obtém-se o campo de deslocamento:

$$u = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}_0^{-1} \mathbf{u}^{(e)}$$

O que permite, do produto matricial de  $\boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}_0^{-1}$ , identificar as funções de interpolação  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  e  $N_4$ :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2} - \frac{3x}{2\ell} + \frac{2x^3}{\ell^3} \\ N_2 = \frac{\ell}{8} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \\ N_3 = \frac{1}{2} + \frac{3x}{2\ell} - \frac{2x^3}{\ell^3} \\ N_4 = -\frac{\ell}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \end{cases} \quad (3.56)$$

Que em forma vetorial, pode-se escrever:

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N} \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.57)$$

Essas equações serão utilizadas para obter a formulação de deslocamento do elemento viga pelo Método de Rayleigh-Ritz que utiliza, para isso, o funcional energia potencial total da viga dado por Soriano (2009, p. 133):

$$J(u)^{(e)} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left( \frac{EI}{2} u_{,xx}^2 - p u \right) dx - V_1 u|_{x=-\ell/2} + M_1 u,x|_{x=-\ell/2} + V_2 u|_{x=\ell/2} - M_2 u,x|_{x=\ell/2} \quad (3.58)$$

Utilizando a condição de estacionariedade dada pela Equação 3.43, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta J(u)^{(e)} = & \int_{-\ell/2}^{\ell/2} EI u_{,xx} \delta u_{,xx} dx - \int_{-\ell/2}^{\ell/2} p \delta u dx \\ & - V_1 \delta u \Big|_{x=-\ell/2} + M_1 \delta u_{,x} \Big|_{x=-\ell/2} + V_2 \delta u \Big|_{x=\ell/2} - M_2 \delta u_{,x} \Big|_{x=\ell/2} = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Da Equação 3.57, obtém-se  $u_{,xx}$ :

$$u_{,xx} = \mathbf{N}_{,xx} \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.60)$$

$$u_{,xx} = \left[ \frac{12x}{\ell^3} \quad -\frac{1}{2} + \frac{6x}{\ell^2} \quad -\frac{12x}{\ell^3} \quad \frac{1}{2} + \frac{6x}{\ell^2} \right] \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.61)$$

Onde  $\mathbf{B}$  é uma **matriz linha** ( $1 \times 4$ ) que depende de  $x$ , e  $\mathbf{u}^{(e)}$  um **vetor coluna** ( $4 \times 1$ ) de constantes como mostrado na Equação 3.54.

Também tem-se que:

$$\delta u_{,xx} = \mathbf{N}_{,xx} \delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.62)$$

$\delta u_{,xx}$  **não é** a derivada de  $\delta \mathbf{u}^{(e)}$  em relação a  $x$ , é a derivada de  $\mathbf{N}(x)$  aplicada sobre o vetor constante  $\delta \mathbf{u}^{(e)}$  que são apenas pequenas perturbações nos valores nodais, são constantes.

A primeira integral da Equação 3.59 é:

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} EI u_{,xx} \delta u_{,xx} dx \quad (3.63)$$

Como  $u_{,xx} = \mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)}$  (escalar) e  $\delta u_{,xx} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)}$  (também escalar), o produto de dois escalares pode ser reescrito como produto matricial:

$$u_{,xx} \cdot \delta u_{,xx} = (\mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)}) (\mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)}) = (\mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)}) (\mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)})$$

Calculando a transposta do termo  $(\mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)})$ , e multiplicando por  $(\mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)})$ , tem-se:

$$(\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)}) \quad (3.64)$$

Com isso, a integral dada na Equação 3.63 se torna:

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} EI (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)} dx \quad (3.65)$$

Como  $(\delta \mathbf{u}^{(e)})^T$  é um termo constante, ele pode sair da integral, resultando em:

$$(\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \left( \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx \right) \mathbf{u}^{(e)} \quad (3.66)$$

Utilizando o mesmo raciocínio para cada parte presente na Equação 3.59, e colocando  $(\delta \mathbf{u}^{(e)})^T$  em evidência, tem-se:

$$\delta(\mathbf{u}^{(e)})^T \left[ \left( \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx \right) \mathbf{u}^{(e)} - \left( \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \mathbf{N}^T p dx \right) - \delta(\mathbf{u}^{(e)})^T \begin{Bmatrix} V_1 \\ -M_1 \\ -V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \right] = 0 \quad (3.67)$$

O que leva às seguintes matrizes:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx \quad (3.68)$$

$$\mathbf{f}_p^{(e)} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \mathbf{N}^T p dx \quad (3.69)$$

Que em forma compacta, tem-se:

$$\boxed{\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)}} \quad (3.70)$$

Com as expressões contidas nas Equações 3.68 e 3.69, pode-se calcular a matriz de rigidez da viga mostrada na Figura 14.

Dado que  $\mathbf{B}$  está representado como um vetor linha ( $1 \times 4$ ) na Equação 3.61, calcula-se a sua transposta obtendo o vetor coluna ( $4 \times 1$ ). Para um elemento com seção transversal constante, o produto  $EI$  sai da integral da Equação 3.68, restando o produto  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  que dará uma matriz ( $4 \times 4$ ).

Para ilustrar, será mostrado o cálculo do elemento  $K_{11}$  da matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  da Equação 3.68.

Dado  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \left[ \frac{12x}{\ell^3} \quad -\frac{1}{2} + \frac{6x}{\ell^2} \quad -\frac{12x}{\ell^3} \quad \frac{1}{2} + \frac{6x}{\ell^2} \right]$$

$$K_{11} = EI \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{12x}{\ell^3} \cdot \frac{12x}{\ell^3} dx = EI \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{144x^2}{\ell^6} dx = \frac{144EI}{\ell^6} \cdot \frac{\ell^3}{12} = \frac{12EI}{\ell^3}$$

Fazendo o mesmo procedimento para todos os termos de  $\mathbf{K}$ , obtém-se a matriz de rigidez da viga unidimensional:

$$\boxed{\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ \cdot & 4 & -6/\ell & 2 \\ \cdot & \cdot & 12/\ell^2 & -6/\ell \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix}} \quad (3.71)$$

E com as formas de  $\mathbf{N}$  dadas pelas Equações 3.56 e 3.57, obtém-se a força distribuída aplicada ao elemento, utilizando a Equação 3.69:

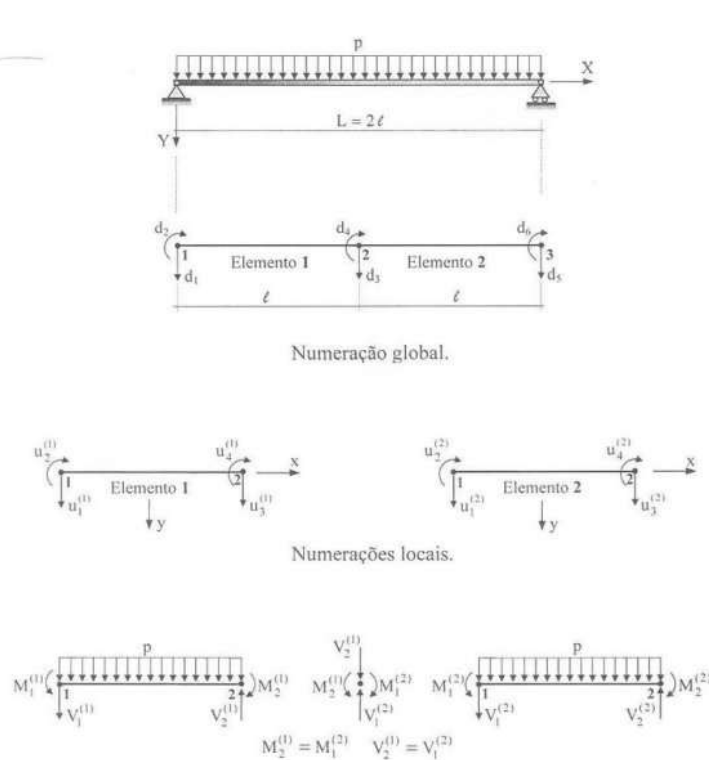
$$\mathbf{f}_p^{(e)} = \frac{p\ell}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \ell/6 \\ 1 \\ -\ell/6 \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

### 3.7.1 Matriz de Rigidez com 2 elementos finitos

Para obter a matriz de rigidez com 2 elementos finitos, parte-se da mesma matriz de rigidez formulada no item 3.7.1<sup>4</sup>, uma vez que a matriz depende apenas de três fatores: o material, a geometria da seção e o comprimento do elemento ( $\ell$ ). Não depende de como a viga inteira está apoiada.

Com isso, adota-se como modelo uma viga biapoiada, como mostra a Figura 15. Na viga biapoiada de comprimento  $L = 2\ell$ , tem-se que a mesma foi dividida em 2 elementos finitos, cada um de comprimento  $\ell$ .

Figura 15 – Discretização de uma viga biapoiada em dois elementos finitos, com numeração global, numerações locais e esforços locais



Fonte: Soriano (2009, p. 136).

Na Figura 15, observa-se que a viga inteira tem 3 nós, cada nó com 2 graus de liberdade (GDLs), uma translação e uma rotação, totalizando 6 GDLs globais, que dará origem a

<sup>4</sup> A matriz de rigidez do elemento foi formulada na seção anterior (Seção 3.6 e seguintes), culminando na Equação 3.71.

uma matriz de rigidez  $6 \times 6$ . A numeração global é  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ . Essa numeração global se relaciona com a numeração local da seguinte maneira, como visto na Figura 15.

Para o Elemento 1 (nó local 1 = global 1; nó local 2 = global 2):

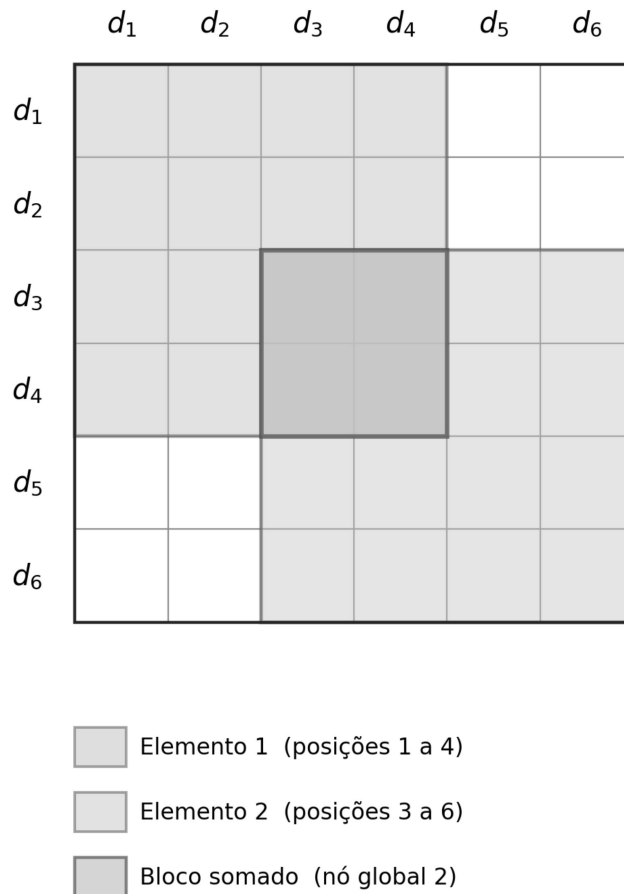
$$u_1^{(1)} \rightarrow d_1, \quad u_2^{(1)} \rightarrow d_2, \quad u_3^{(1)} \rightarrow d_3, \quad u_4^{(1)} \rightarrow d_4$$

Para o Elemento 2 (nó local 1 = global 2; nó local 2 = global 3):

$$u_1^{(2)} \rightarrow d_3, \quad u_2^{(2)} \rightarrow d_4, \quad u_3^{(2)} \rightarrow d_5, \quad u_4^{(2)} \rightarrow d_6$$

Nas posições 3 e 4 — que correspondem justamente ao nó global 2 — tem-se o nó compartilhado. Nesse ponto, as duas matrizes vão somar, como mostrado na Figura 16.

Figura 16 – Espalhamento das duas matrizes de rigidez elementares ( $4 \times 4$ ) na matriz de rigidez global ( $6 \times 6$ ), evidenciando o bloco somado correspondente ao nó global 2



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Claude (Anthropic, modelo Opus 4.7).

Com isso, obtém-se o sistema de equações, em formato matricial:

$$\frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} & -\frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} & 0 & 0 \\ \cdot & 4 & -\frac{6}{\ell} & 2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \left(\frac{12}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^2}\right) & \left(-\frac{6}{\ell} + \frac{6}{\ell}\right) & -\frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ \cdot & \cdot & \cdot & (4+4) & -\frac{6}{\ell} & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \frac{p\ell}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{\ell}{6} \\ 1+1 \\ -\frac{\ell}{6} + \frac{\ell}{6} \\ 1 \\ -\frac{\ell}{6} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_1^{(1)} \\ -M_1^{(1)} \\ -V_2^{(1)} + V_1^{(2)} \\ M_2^{(1)} - M_1^{(2)} \\ -V_2^{(2)} \\ M_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

Considerando que:

1. no nó global  $d_2$  tem-se o ponto em comum entre os elementos 1 e 2, resulta que  $V_2^{(1)} = V_1^{(2)}$  e  $M_2^{(1)} = M_1^{(2)}$ , por formarem o par ação–reação;
2. também tem-se que, por considerar os apoios como rótulas,  $M_1^{(1)} = 0$  e  $M_2^{(2)} = 0$ ;
3. por ser apoio de primeira ordem, o deslocamento em  $y$  é igual a 0, fazendo com que  $d_1$  e  $d_5$  sejam nulos.

Isso leva a que o sistema de equações 3.73 seja reduzido a:

$$\frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{6}{\ell} & 2 & 0 \\ \cdot & \frac{24}{\ell^2} & 0 & \frac{6}{\ell} \\ \cdot & \cdot & 8 & 2 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \frac{p\ell}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\ell}{6} \\ 2 \\ 0 \\ -\frac{\ell}{6} \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

Resolvendo o sistema da Equação 3.74, isto é, isolando o vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{d}$ , obtém-se:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \frac{p\ell^3}{EI} \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 5\ell/24 \\ 0 \\ -1/3 \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Como a viga foi dividida em dois elementos de comprimento  $\ell$ , e o vão total é  $L = 2\ell$ , tem-se que  $\ell = L/2$ . Substituindo essa relação na Equação 3.75, o vetor de deslocamentos pode ser reescrito em função do comprimento total  $L$ :

$$\mathbf{d} = \frac{p L^3}{8 EI} \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 5L/48 \\ 0 \\ -1/3 \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

## 4 RESULTADOS

Com as equações e sistemas de equações obtidos na Seção 3.7.1, pode-se elaborar uma planilha em Excel como um exemplo de aplicação para o cálculo dos deslocamentos e rotações nos nós de uma viga biapoada com carregamento uniforme. Essa viga foi discretizada com 2 elementos finitos, uma vez que se possui essa matriz de rigidez.

Na planilha, tem-se a aba “Entrada de Dados”, em que se fornecem os parâmetros da viga, como mostrado na Figura 17. Há também a aba “2 Elementos”, onde se obtêm os dados necessários das matrizes e os resultados, como mostrado na Figura 18.

Figura 17 – Aba “Entrada de Dados” da planilha de aplicação, com os parâmetros da viga

### PROGRAMA MEF — VIGA BIAPOIADA

Método dos Elementos Finitos — Elemento de viga de Euler-Bernoulli (2 GDL/nó)

#### 1) DADOS DE ENTRADA (preencha as células amarelas)

| Grandeza               | Símbolo | Valor        | Unidade / observação                                               |
|------------------------|---------|--------------|--------------------------------------------------------------------|
| Vão total da viga      | L       | 4            | m — Comprimento total entre apoios                                 |
| Módulo de elasticidade | E       | 200000000000 | Pa — Ex.: aço ≈ 200×10 <sup>9</sup> Pa (200 GPa)                   |
| Momento de inércia     | I       | 0.000000013  | m <sup>4</sup> — Propriedade da seção transversal                  |
| Carga distribuída      | p       | 10           | N/m — Carga uniformemente distribuída (Sistema Internacional base) |

#### 2) RIGIDEZ DE FLEXÃO E SOLUÇÃO EXATA (referência teórica)

|                                   |          |                                                   |
|-----------------------------------|----------|---------------------------------------------------|
| Rigidez de flexão EI              | 2600.000 | N·m <sup>2</sup> (EI = E × I)                     |
| Flecha máxima EXATA (meio do vão) | 0.012821 | m → fórmula clássica $v_{máx} = 5pL^4 / (384 EI)$ |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 – Aba “2 Elementos” da planilha de aplicação, com as matrizes e os resultados

**CÁLCULO MEF — 2 ELEMENTOS****GEOMETRIA**

|                         |                                                  |
|-------------------------|--------------------------------------------------|
| Nº de elementos         | 2                                                |
| Nº de nós               | 3                                                |
| GDL totais              | 6                                                |
| Comprimento do elemento | 2.0000 m ( $l = L / n^\circ \text{ elementos}$ ) |

**MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO K(e) — Eq. 3.71 do TCC***K(e) = (E/I/l) × matriz abaixo. Cada termo é uma fórmula.*

|    | u1 (v <sub>1</sub> ) | u2 (θ <sub>1</sub> ) | u3 (v <sub>2</sub> ) | u4 (θ <sub>2</sub> ) |
|----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| v1 | 3900.00              | 3900.00              | -3900.00             | 3900.00              |
| θ1 | 3900.00              | 5200.00              | -3900.00             | 2600.00              |
| v2 | -3900.00             | -3900.00             | 3900.00              | -3900.00             |
| θ2 | 3900.00              | 2600.00              | -3900.00             | 5200.00              |

**MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL (6×6) — montagem (assembly)***Espalhamento dos K(e). No nó compartilhado as contribuições SOMAM.*

|    | d1      | d2      | d3      | d4      | d5      | d6      |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| d1 | 3900.0  | 3900.0  | -3900.0 | 3900.0  | 0.0     | 0.0     |
| d2 | 3900.0  | 5200.0  | -3900.0 | 2600.0  | 0.0     | 0.0     |
| d3 | -3900.0 | -3900.0 | 7800.0  | 0.0     | -3900.0 | 3900.0  |
| d4 | 3900.0  | 2600.0  | 0.0     | 10400.0 | -3900.0 | 2600.0  |
| d5 | 0.0     | 0.0     | -3900.0 | -3900.0 | 3900.0  | -3900.0 |
| d6 | 0.0     | 0.0     | 3900.0  | 2600.0  | -3900.0 | 5200.0  |

**VETOR DE FORÇAS NODAIS f — Eq. 3.72 do TCC***f(e) = (p/l/2) × {1 ; l/6 ; 1 ; -l/6}. No nó comum os termos somam.*

| GDL | f (global) |
|-----|------------|
| d1  | 10.000     |
| d2  | 3.333      |
| d3  | 20.000     |
| d4  | 0.000      |
| d5  | 10.000     |
| d6  | -3.333     |

**CONDIÇÕES DE CONTORNO — apoios simples: d1=0 e d5=0***GDL livres: d2, d3, d4, d6 → sistema reduzido 4×4**Matriz reduzida Kr (4×4)*

|    | d2      | d3      | d4      | d6     |
|----|---------|---------|---------|--------|
| d2 | 5200.0  | -3900.0 | 2600.0  | 0.0    |
| d3 | -3900.0 | 7800.0  | 0.0     | 3900.0 |
| d4 | 2600.0  | 0.0     | 10400.0 | 2600.0 |
| d6 | 0.0     | 3900.0  | 2600.0  | 5200.0 |

*Vetor reduzido fr*

| GDL | fr     |
|-----|--------|
| d2  | 3.333  |
| d3  | 20.000 |
| d4  | 0.000  |
| d6  | -3.333 |

**SOLUÇÃO DO SISTEMA d = Kr<sup>-1</sup> · fr***Kr<sup>-1</sup> (matriz inversa — função MINVERSE/MATRIZ.INVERSO)*

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| 5.128E-04  | 3.846E-04  | -6.410E-05 | -2.564E-04 |
| 3.846E-04  | 5.128E-04  | 0.000E+00  | -3.846E-04 |
| -6.410E-05 | 0.000E+00  | 1.282E-04  | -6.410E-05 |
| -2.564E-04 | -3.846E-04 | -6.410E-05 | 5.128E-04  |

*Vetor de deslocamentos/rotações nos GDL livres*

| GDL | valor     | tipo             |
|-----|-----------|------------------|
| d2  | 0.010256  | rotação θ (rad)  |
| d3  | 0.012821  | translação v (m) |
| d4  | 0.000000  | rotação θ (rad)  |
| d6  | -0.010256 | rotação θ (rad)  |

**DESLOCAMENTOS EM TODOS OS NÓS (apoios = 0)**

| Nó | x (m) | r — flecha (m) — rotação (rad) |
|----|-------|--------------------------------|
| 1  | 0.000 | 0.000000 0.010256              |
| 2  | 2.000 | 0.012821 0.000000              |
| 3  | 4.000 | 0.000000 -0.010256             |

*Flecha máxima obtida pelo MEF (meio do vão)*

v\_MEF (meio) 0.012821 m

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esses resultados foram comparados com os obtidos utilizando o programa em Fortran, disponibilizado pelo orientador, mostrando os resultados para uma viga biapoiada, conforme a Figura 19.

Figura 19 – Resultados do programa em Fortran para a viga biapoada

```
SAIDA - Viga Biapoada (programa Fortran)
```

```
#####
PROGRAMA PARA CALCULO DE VIGA CONTINUA
#####

*****

NOME DA VIGA (ARQUIVO) =          vigadado
NUMERO DE ELEMENTOS =          2
NUMERO DE PONTOS NODAIS =        3
NUMERO DE NOS VINCULADOS =        2

*****

O NUMERO DE TIPOS DE MATERIAIS DA VIGA E =    1

TIPO          VALOR
1             *****

O NUMERO DE TIPOS DE MOMENTOS DE INERCIA E =    1

TIPO          VALOR
1             .0000000

*****

DADOS SOBRE OS NOS
*****
NO    COORD.X    VINC.Y    VINC.Z    CARGA Y    CARGA Z
1      .000      1        0      .000      .000
2     2.000      0        0      .000      .000
3     4.000      1        0      .000      .000

*****

DADOS SOBRE AS BARRAS
*****
NOS
BARRA  INICIAL  FINAL    INERCIA  MOD.ELAST.  CARREG. DISTRIBUIDO
                ESQUERDA  DIREITA
1       1       2      .0000000  *****    -10.000    -10.000
2       2       3      .0000000  *****    -10.000    -10.000

*****

VETOR DE CARGAS NODAIS
*****
F( 1)=      .0000
F( 2)=     -3.3333
F( 3)=    -20.0000
F( 4)=      .0000
F( 5)=      .0000
F( 6)=      3.3333

*****

RESULTADOS - DESLOCAMENTOS DOS NOS
*****
NO          VERTICAL          ROTACAO
1          .0000000000        -.0102564100
2          -.0128205100        .0000000000
3          .0000000000        .0102564100

*****

RESULTADOS - ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS
*****
ELEMENTO  CORT.ESQUERDA/DIREITA  MOM.ESQUERDA  MOM.DIREITA
1          -10.00000          -3.33333        -23.33334
2           10.00000          -23.33333         -3.33333
```

Fonte: Programa em Fortran disponibilizado pelo orientador.

## 5 CONCLUSÃO

O Método dos Elementos Finitos mostrou-se uma ferramenta de grande importância no estudo e na modelagem de elementos estruturais, trazendo vantagens significativas frente às limitações dos métodos clássicos, especialmente quanto à possibilidade de discretizar o domínio e tratar geometrias e carregamentos diversos de forma sistemática.

A aplicação desenvolvida neste trabalho — uma viga biapoiada com carregamento uniforme, discretizada em dois elementos finitos — permitiu comparar os deslocamentos nodais obtidos por três caminhos distintos: a solução clássica de resistência dos materiais, a planilha em Excel elaborada a partir da formulação de Rayleigh-Ritz e o programa em Fortran disponibilizado pelo orientador. Os resultados mostraram-se concordantes entre si, validando a formulação apresentada.

Para a flecha vertical, o nó 1 e o nó 3 (apoios) apresentaram deslocamento nulo (0,000 m) nas três abordagens, como esperado pelas condições de contorno. No nó 2, situado no meio do vão, obteve-se a flecha máxima de 0,012821 m tanto pela fórmula clássica ( $5pL^4/384EI$ ) quanto pela planilha em Excel, e de 0,0128205 m pelo programa em Fortran — diferença restrita ao arredondamento. A coincidência dos valores confirma que o modelo de elementos finitos implementado reproduz fielmente a solução analítica e o resultado do programa de referência, conforme sintetizado na Tabela 1.

Tabela 1 – Flecha vertical nos nós: comparação entre as três abordagens

| Nó        | Clássico/Exato (m) | Excel/MEF (m) | Fortran/MEF (m) |
|-----------|--------------------|---------------|-----------------|
| 1 (apoio) | 0,000              | 0,000000      | 0,0000000       |
| 2 (meio)  | 0,012821           | 0,012821      | 0,0128205       |
| 3 (apoio) | 0,000              | 0,000000      | 0,0000000       |

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 6 PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho teve um caráter introdutório aos conceitos e formulações do Método dos Elementos Finitos. Há uma grande variedade de temas interessantes para serem desenvolvidos em trabalhos futuros, como:

- a) ampliar a matriz de rigidez para 3 elementos unidimensionais e, posteriormente, generalizar para um número qualquer de elementos;
- b) desenvolver a formulação para outros elementos finitos bidimensionais e tridimensionais;
- c) desenvolver programas computacionais de implementação, buscando otimizar as técnicas de fatoração e resolução de sistemas lineares, úteis para sistemas matriciais com dezenas de linhas e colunas.

## REFERÊNCIAS

- ALVES FILHO, A. *Elementos finitos: a base da tecnologia CAE*. 6. ed. São Paulo: Érica, 2013.
- ASSAN, A. E. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2020.
- FENNER, R. T.; REDDY, J. N. *Mechanics of Solids and Structures*. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2012.
- KARNOVSKY, I. A.; LEBED, O. *Advanced Methods of Structural Analysis*. 2. ed. Cham: Springer, 2021.
- MARTHA, L. F. *Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2022.
- PINTO JUNIOR, D. S. *Noções da Teoria Matemática do Método de Elementos Finitos na Engenharia Estrutural*. Aracaju: Criação Editora, 2022.
- SORIANO, H. L. *Elementos finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.