



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Câmpus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS
DE NÚMEROS REAIS**

CARLOS HENRIQUE MESQUITA DA SILVA

VALPARAÍSO DE GOIÁS

2025



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Carlos Henrique Mesquita da Silva

Matrícula: 20191150040023

Título do Trabalho: Teoremas de Convergência de Sequências de Números Reais

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Valparaíso de Goiás, 01/10/2025.

Local

Data

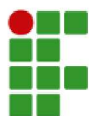


Documento assinado digitalmente
CARLOS HENRIQUE MESQUITA DA SILVA
Data: 01/10/2025 10:49:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S586t	Silva, Carlos Henrique Mesquita da Teoremas de convergência de sequências de números reais [recurso eletrônico] / Carlos Henrique Mesquita da Silva. 2025. Dados eletrônicos (1 arquivo). 38 f. : il. color. Orientadora: Profa. Dra. Maristela Barbosa Cardoso. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, campus Valparaíso, 2025. Modo de acesso: World Wide Web. Arquivo de texto em formato PDF. Disponível em: https://repositorio.ifg.edu.br. 1. Análise Real. 2. Convergência de sequências 3. Critério de Cauchy. I. Título. II. Cardoso, Maristela Barbosa, orient. CDD 512.72
-------	---



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS VALPARAÍSO

Termo de Aprovação

CARLOS HENRIQUE MESQUITA DA SILVA

TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Valparaíso de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Monografia defendida e aprovada em 19 de agosto de 2025 pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maristela Barbosa Cardoso
Presidente da banca / Orientadora
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Bruno de Paula Miranda
Membro Interno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Profa. Dr. Hercules de Carvalho Bezerra
Membro Externo

Valparaíso de Goiás – GO
2025

Documento assinado eletronicamente por:

- Bruno de Paula Miranda, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 29/09/2025 10:26:38.
- Maristela Barbosa Cardoso, PROF ENS BAS TEC TECNOLOGICO-SUBSTITUTO, em 29/09/2025 08:53:36.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 25/09/2025. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 696211
Código de Autenticação: 688d742ef3



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
BR 040, KM 6, Avenida Saia Velha, S/Nº, Área 8, None, Parque Esplanada V, VALPARAÍSO DE GOIÁS / GO, CEP 72876-601
(61) 3615-9210 (ramal: 9210)



Documento assinado digitalmente
HERCULES DE CARVALHO BEZERRA
Data: 03/10/2025 12:52:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar e discutir os principais teoremas de convergência de sequências de números reais, constituindo-se como estudo essencial para a Análise Real.

O primeiro capítulo introduz os conceitos fundamentais do conjunto dos números reais como corpo ordenado completo, com ênfase em valor absoluto (ou módulo), limitação de conjuntos, cota inferior, cota superior, ínfimo e supremo, e caracterização de ínfimo e supremo via axioma da completude. Esses conceitos fornecem a base teórica necessária para a compreensão do comportamento de sequências numéricas.

O segundo capítulo desenvolve sistematicamente a teoria de convergência de sequências, partindo da definição de limite para demonstrar três classes de resultados fundamentais: teoremas operacionais (unicidade do limite, álgebra de limites), teoremas de convergência (Confronto, Convergência Monótona, Bolzano-Weierstrass), e o Critério de Cauchy como caracterização de completude. Cada teorema é acompanhado de exemplos e contraexemplos elucidativos.

Metodologicamente, adotamos uma abordagem dedutiva baseada em [[2], Elon Lages Lima, 2006], integrando rigor formal com aplicações selecionadas que mostram a relevância desses teoremas na análise do comportamento de sequências.

Palavras-chave: Análise Real. Convergência de sequências. Critério de Cauchy. Ínfimo. Supremo.

Abstract

This work aims to present and discuss the main convergence theorems of sequences of real numbers, constituting an essential study for Real Analysis.

The first chapter introduces the fundamental concepts of the set of real numbers as a complete ordered field, with emphasis on absolute value (or modulus), set limitation, lower bound, upper bound, infimum and supremum, and characterization of infimum and supremum via the completeness axiom. These concepts provide the theoretical basis necessary for understanding the behavior of numerical sequences.

The second chapter systematically develops the theory of convergence of sequences, starting from the definition of limit to demonstrate three classes of fundamental results: operational theorems (uniqueness of limit, algebra of limits), convergence theorems (Comparison, Monotone Convergence, Bolzano-Weierstrass), and the Cauchy Criterion as a characterization of completeness. Each theorem is accompanied by illustrative examples and counterexamples.

Methodologically, we adopt a deductive approach based on [[2], Elon Lages Lima, 2006], integrating formal rigor with selected applications that show the relevance of these theorems in the analysis of sequence behavior.

Keywords: Real analysis. Convergence of sequences. Cauchy criterion. Infimum. Sequence. Supreme.

Sumário

Introdução	1
1 Números Reais	2
1.1 $\mathbb{R}$ é um corpo	2
1.2 Corpos Ordenados	4
1.3 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo	6
2 Sequências de Números Reais	8
2.1 Noções de sequências	8
2.2 Limite de uma sequência	11
2.3 Propriedades aritméticas dos limites	14
2.4 Teoremas de Convergência	16
2.5 Sequências de Cauchy	21
3 Exercícios Resolvidos	24
Conclusão	30
Referências Bibliográficas	31

Introdução

A Análise Real é um dos pilares da matemática moderna, estabelecendo as bases rigorosas sobre as quais o Cálculo e outras áreas avançadas são construídos, o estudo das sequências e da convergência nos permite compreender o comportamento infinito de processos de uma maneira lógica e precisa.

Neste trabalho, focaremos especificamente nos principais teoremas de convergência para sequências de números reais. Esses teoremas, como o Teorema do Confronto, o Teorema da Convergência Monótona e o Critério de Cauchy, permitem estabelecer condições sob as quais se pode garantir a convergência de uma sequência. Para isso, começaremos revisando conceitos básicos como a definição de sequência, subsequência, limitação e monotonicidade, conceitos que são indispensáveis para a compreensão e demonstração dos resultados principais que apresentaremos neste estudo.

Realizaremos uma compilação dos principais teoremas e também de suas demonstrações, inspiradas na obra de Elon Lages Lima, referenciada na bibliografia, este trabalho busca não só apresentar esses teoremas em detalhe, mas também destacar seu papel como fundamento indispensável da Análise Matemática.

Capítulo 1

Números Reais

Este capítulo estabelece os fundamentos necessários para o estudo dos teoremas de convergência de sequências, que serão o cerne deste trabalho. Aqui, abordaremos as propriedades essenciais do conjunto $\mathbb{R}$, destacando sua estrutura de **corpo ordenado completo** e conceitos como cotas, ínfimo e supremo.

Nosso objetivo é demonstrar como a completude de $\mathbb{R}$ garante resultados fundamentais para a análise de sequências, como a existência de limites. Além disso, o fato de $\mathbb{R}$ ser completo é a base para teoremas como Bolzano-Weierstrass e a convergência de sequências monótonas limitadas. Sem ela, resultados centrais da análise real não se sustentariam. Optamos por omitir demonstrações detalhadas dos teoremas preliminares, que podem ser encontradas em [3], [2] e [1]. Na seção seguinte, aplicaremos esses conceitos para definir sequências numéricas e explorar seus comportamentos.

1.1 $\mathbb{R}$ é um corpo

Definição 1.1.1. Dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo, significa que nele estão definidas duas operações, **adição** (+) e **multiplicação** ($\cdot$), cada uma satisfazendo as cinco condições enumeradas abaixo. Aqui, usamos $*$ para representar qualquer uma das operações.

Propriedade de um corpo:

1. **Associatividade:** Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos $(x * y) * z = x * (y * z)$.

2. **Elemento neutro:** Existe $e \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a * e = e * a = a$.

- Adição ($*$ = $+$): Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

- Multiplicação ($*$ = $\cdot$): Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a = e \cdot a = a$

3. **Inverso:** Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, onde e é o elemento neutro.

- Adição ($*$ = $+$): Existe um simétrico $-a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + (-a) = a - a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

- Multiplicação ($*$ = $\cdot$): Para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

4. **Comutatividade:** Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a * b = b * a.$$

5. **Axioma da distributividade:** Dados x, y, z quaisquer $\in \mathbb{R}$, temos que vale a seguinte relação $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, sua soma $x + y \in \mathbb{R}$, já a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$, das condições acima conseguimos extrair resultados interessantes, como a lei do corte, dado $x, y, z \in \mathbb{R}$ vale $x * z = y * z \Rightarrow x = y$, no caso da operação de multiplicação a lei do corte vale desde que $z \neq 0$.

Concluimos o primeiro passo do nosso objetivo, mostrar que o conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo, levando em consideração que o mesmo satisfaz as condições acima para as duas operações, adição e multiplicação, agora partimos para o próximo passo que é mostrar que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado.

1.2 Corpos Ordenados

Dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, significa que existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ (números reais positivos), satisfazendo:

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos. Ou seja, dado quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ tem-se $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

P2. Dado $x \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das três alternativas a seguir, $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Definindo $\mathbb{R}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{R}^+\}$ o conjunto dos números negativos, temos a partição:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\},$$

onde os conjuntos são dois a dois disjuntos.

Quando temos a relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$, vale as seguintes propriedades:

1. Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.
2. Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas: $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.
3. Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, temos que $x + z < y + z$.
4. Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$, temos que $xz < yz$. Porém caso $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$, ou seja, temos uma inversão da desigualdade.

A relação de ordem em $\mathbb{R}$ permite definir o valor absoluto (ou módulo) de um número real:

1. $|x| = x$ se $x > 0$
2. $|x| = -x$ se $x < 0$

3. $|0| = 0$

Em outras palavras, $|x| = \max\{x, -x\}$ é o maior dos números reais x e $-x$, portanto temos $-|x| \leq x \leq |x|$.

Teorema 1.1. *Sejam x, a elementos de um corpo ordenado, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) $-a \leq x \leq a$;

(ii) $|x| \leq a$.

Corolário 1.1. *Dados $a, x, b \in \mathbb{R}$, temos que $|x-a| \leq b$ se, e somente se, $a-b \leq x \leq a+b$.*

Importante ressaltar que todas as afirmações permanecem válidas se substituirmos a desigualdade não estrita $\leq$ pela estrita $<$.

Dessa forma temos a seguinte equivalência, que iremos utilizar nos estudos dos limites de sequência.

$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon$$

As desigualdades serão ferramentas importantes para o nosso estudo de sequências, portanto logo abaixo iniciamos apresentando a Desigualdade de Bernoulli, em seguida apresentaremos outras desigualdades utilizando o conceito de módulo (valor absoluto).

Teorema 1.2. *(Desigualdade de Bernoulli) Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $(1+x)^n \geq 1+nx$.*

Teorema 1.3. *Dados x, y e z elementos arbitrários de um corpo ordenado, vale as seguintes relações:*

1. $|x+y| \leq |x|+|y|$

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

3. $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$

$$4. |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

Finalizamos concluindo que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, também vimos no final as relações de desigualdade como a desigualdade triangular, vamos utilizar as desigualdades no decorrer do trabalho em várias demonstrações.

1.3 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

Chegamos ao último passo e agora veremos noções importantes de cota inferior, cota superior, ínfimo e supremo. Essas definições serão necessárias para o desenvolvimento do nosso trabalho e para a conclusão de diversos teoremas de convergência.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, é *limitado superiormente* quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$, neste caso dizemos que b é uma *cota superior* do conjunto X . Analogamente, dizemos que conjunto $X \subset \mathbb{R}$, é *limitado inferiormente* quando existe algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$, neste caso dizemos que a é uma *cota inferior* de X .

Se X é limitado superior e inferiormente, dizemos que X é um *conjunto limitado*, em outras palavras, significa dizer que X está contido em algum intervalo limitado $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe algum $C \geq 0$ tal que $x \in X \Rightarrow |x| \leq C$.

Decorre diretamente da definição de cota inferior e superior as noções de ínfimo e supremo apresentadas a seguir.

Definição 1.3.1. (Supremo) Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não vazio, um número real $b \in \mathbb{R}$ é chamado de supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X , portanto, necessariamente precisa cumprir as duas condições abaixo.

1. Para todo $x \in X$, temos $x \leq b$;
2. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$

Escrevemos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X .

Definição 1.3.2. (Ínfimo) Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não vazio, um número real $a \in \mathbb{R}$ é chamado de ínfimo do conjunto X quando é a maior das cotas inferiores de X , portanto, necessariamente precisa cumprir as duas condições abaixo.

1. Para todo $x \in X$, temos $a \leq x$;
2. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$

Escrevemos $a = \inf X$ para indicar que a é o ínfimo do conjunto X .

Um dos resultados mais importantes dessa seção é o axioma da completude enunciado logo abaixo.

Axioma 1.3.1. *Todo conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$, limitado superiormente, possui um supremo que também pertence a $\mathbb{R}$.*

Uma consequência do Axioma da Completude, é que todo conjunto não vazio, limitado inferiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui ínfimo.

Concluimos nosso capítulo que apresenta os principais resultados sobre os números reais, todas as informações apresentadas serão úteis no decorrer do nosso trabalho, especialmente as noções de ínfimo e supremo apresentadas nessa última seção do capítulo.

Capítulo 2

Sequências de Números Reais

2.1 Noções de sequências

Neste capítulo, estudaremos as sequências de números reais de forma rigorosa, começando pelas definições básicas até os principais teoremas de convergência. Diferentemente do capítulo anterior, que tratou das propriedades de $\mathbb{R}$, aqui focaremos nos limites e suas propriedades; teoremas como o do Confronto e Convergência Monótona; e o Critério de Cauchy. Todos os conceitos serão acompanhados de exemplos para fixação do conteúdo.

Definição 2.1.1. Uma *sequência* de números reais é uma função x que associa a cada número natural n um número real x_n . Formalmente, podemos escrever:

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto x(n) = x_n$$

onde $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \dots\}$, e x_n é o n -ésimo termo da sequência.

A sequência pode ser denotada por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, simplesmente (x_n) , ou $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ para representar explicitamente os termos da sequência.

Uma sequência (x_n) é dita *injetiva*, ou de termos dois a dois disjuntos, quando $m \neq n$ implicar $x_m \neq x_n$.

Observação 2.1. Importante ressaltar que a função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ não é necessariamente injetiva, ou seja, podemos ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$. Além disso, apesar da notação, o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ pode ser finito, infinito, ou até mesmo ser composto por apenas um elemento, caso a sequência seja constante, isto é, $x_n = a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Para ilustrar essa propriedade, considere o seguinte exemplo de uma sequência não injetiva.

Exemplo 2.1. Um exemplo de uma sequência não é injetiva é dado por

$$x_n = \frac{\cos(n \cdot \pi)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Os primeiros termos dessa sequência são:

$$x_1 = \frac{\cos(\pi)}{2} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{\cos(2\pi)}{2} = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{\cos(3\pi)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Note que $x_1 = x_3$ e $1 \neq 3$. Portanto, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é injetiva, pois existem índices m e n distintos tais que $x_n = x_m$, pois a sequência alterna entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ conforme n varia entre ímpar e par.

Exemplo 2.2. A sequência constante $x_n = 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é dada por:

$$(x_n) = (5, 5, 5, 5, \dots).$$

Neste caso, o conjunto imagem é unitário: $\{5\}$.

Outra propriedade fundamental no estudo de sequências é a limitação, que determina se os termos da sequência estão compreendida em um intervalo real. Vejamos agora sua definição e um exemplo.

Definição 2.1.2. Dizemos que uma sequência (x_n) é *limitada inferiormente*, quando existe um número real $C > 0$ tal que $C \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, (x_n) é *limitada superiormente*, quando existe um número real $C > 0$ tal que $C \geq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A sequência (x_n) é dita *limitada* quando ela é limitada superior e inferiormente, ou equivalentemente, existe $C > 0$ tal que $|x_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.3. Um exemplo de sequência limitada é dada por

$$x_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $-1 \leq x_n \leq 1$.

Exemplo 2.4. Um exemplo de sequência limitada inferiormente, mas não superiormente é dada por

$$x_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De fato, temos uma sequência crescente onde $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois toda sequência crescente é limitada inferiormente pelo primeiro termo (x_1) , no caso $1 \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora que vimos a definição e exemplos de limitação de sequências, outra definição importante é o de subsequências, que utilizaremos para determinar o comportamento da sequência principal e suas limitações.

Definição 2.1.3. Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma subsequência é a restrição do domínio de x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$, e denotamos por $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Exemplo 2.5. A sequência (x_n) apresentada no Exemplo 2.3, definida em (2.2), possui duas subsequências, a saber

$$x_{2n} = 1, \text{ quando } n \text{ é par} \quad \text{e} \quad x_{2n+1} = -1, \text{ quando } n \text{ é ímpar}.$$

Exemplo 2.6. A sequência $(x_n) = n = (1, 2, 3, \dots)$, possui a sequência $(x_{2n}) = (2, 4, 6, \dots)$.

Subsequências são especialmente úteis para analisar sequências monótonas, que será definida a seguir.

Dizemos que uma sequência é *crescente* quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Quando $x_{n+1} \geq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ela é chamada de *não-decrescente*.

De maneira análoga, uma sequência é *decrecente* quando $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Quando $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ela é chamada de *não-crescente*.

Com base nos dois parágrafos podemos definir o conceito de sequências monótonas, ou seja, dizemos que uma sequência é monótona quando ela é crescente, decrescente, não-crescente ou não-decrescente.

Proposição 1. *Seja (x_n) uma sequência monótona com $n \in \mathbb{N}$ e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência limitada, teremos que (x_n) também é limitada.*

Demonstração. De fato, sem perda de generalidade, considere (x_n) uma sequência monótona não-crescente, portanto temos $x_n \geq x_{n+1}$. Suponha que exista uma subsequência (x_{n_k}) limitada, isso implica que existe um número real b tal que $x_{n_k} \geq b$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo temos

$$x_n \geq x_{n_k} \geq b$$

para todo $n \leq n_k$, desta forma todos os termos da sequência (x_n) estão limitados por x_1 e b , portanto concluímos que (x_n) é limitada. $\square$

2.2 Limite de uma sequência

O conceito de limite é fundamental na Análise Real, sendo a base para o estudo das sequências. Nesta seção, apresentaremos a definição formal de convergência e exploraremos suas implicações imediatas. A definição de limite, que discutiremos a seguir, formaliza a ideia de que os termos de uma sequência se aproximam arbitrariamente de um valor à medida que n cresce. A partir dessa definição, discutiremos suas implicações imediatas, demonstraremos o Teorema da Unicidade do Limite, que formaliza a intuição de que uma sequência não pode se aproximar de dois valores distintos simultaneamente.

Definição 2.2.1. Dizemos que um número real a é **limite** da sequência (x_n) , quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Simbolicamente,

$$\lim x_n = a := \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Quando $\lim x_n = a$, qualquer intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, chamado de ε -vizinhança de a , contém todos os termos da sequência exceto possivelmente um número finito deles $(x_1, x_2, \dots, x_{n_0})$.

Exemplo 2.7. Considere a sequência constante $x_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Queremos mostrar que $\lim x_n = c$, logo pela definição de limite dado qualquer $\varepsilon > 0$, temos que, $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, todos os termos da sequência estão dentro da vizinhança $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$ o que equivale a dizer que $\lim x_n = c$.

Observação 2.2. Dizemos que uma sequência é convergente se possuir limite, caso contrário chamamos de sequência divergente.

Observe que quando uma sequência não converge para um número real a quando existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ exista $n > n_0$ com $|x_n - a| \geq \varepsilon$. Simbolicamente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \geq \varepsilon$$

Exemplo 2.8. A sequência

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

converge para zero.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Temos então $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Mas se $n \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$, então $x_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = x_{n_0}$. Logo podemos escrever

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim \frac{1}{n} = 0$. □

Exemplo 2.9. A sequência $x_n = n$ é divergente pois para qualquer $a \in \mathbb{R}$, tomando $\varepsilon = 1$, para todo n_0 existe $n > \max\{n_0, a + 1\}$ com $|x_n - a| \geq 1$.

Teorema 2.1 (Unicidade do limite). Se $\lim(x_n) = a$ e $\lim(x_n) = b$ então $a = b$.

Demonstração. Seguem direto da definição de limite as duas afirmativas abaixo:

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}; n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N}; n > n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Considerando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$. Suponha $a \neq b$, segue de (i) e (ii) que para $n > n_0$

$$\begin{aligned} |a - b| &\leq |x_n - a| + |x_n - b| \\ |a - b| &< 2\varepsilon = \frac{2|b - a|}{2} = |b - a| \end{aligned}$$

um absurdo, portanto $a=b$. □

Teorema 2.2. *Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a .*

Demonstração. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$ uma subsequência de (x_n) , por hipótese, temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Dado que os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, então existe $n_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{i_0} > n_0$, portanto segue disso que

$$i > i_0 \Rightarrow n_i > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Concluimos que caso (x_n) seja convergente para um número real a , obrigatoriamente toda subsequência converge para a . □

Teorema 2.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Por hipótese $\lim x_n = a$, logo pela definição de limite dado $\varepsilon > 0$ existe um $n > n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Consideremos o conjunto finito definido por $F = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$. Seja c o menor e d o maior elemento de F , então todos os termos da sequência x_n estão contidos no intervalo $[c, d]$, logo concluimos que a sequência é limitada. □

Observação 2.3. A recíproca do teorema não é válida: a sequência $(0, 1, 0, 1, \dots)$ é limitada, pois $|x_n| \leq 1$ para todo n , mas não é convergente, já que possui duas subsequências com limites diferentes, a saber 0 e 1.

2.3 Propriedades aritméticas dos limites

Nesta seção, estudaremos o comportamento dos limites de seqüências em relação às operações algébricas e às desigualdades, serão apresentadas as propriedades que permitem calcular limites de seqüências a partir dos limites de suas partes.

Teorema 2.4. *Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma seqüência limitada, então $\lim x_n \cdot y_n = 0$ (mesmo que não exista $\lim(y_n)$).*

Demonstração. Como (y_n) é limitada, existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos provar que $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim x_n = 0$, por definição, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{c}$. Logo, para todo $n > n_0$, temos:

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

Portanto, concluímos que $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$. □

Exemplo 2.10. A seqüência $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge para 0, pois podemos escrever x_n como o produto de duas seqüências:

$$x_n = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n$$

Note que a seqüência $a_n = \frac{1}{n}$ converge para 0, ou seja, $\lim a_n = 0$. Já a seqüência $b_n = (-1)^n$ é limitada, pois seus valores estão entre -1 e 1 conforme visto no capítulo anterior.

Teorema 2.5. *Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então*

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$; $\lim(x_n - y_n) = a - b$;
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
3. $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$ se $b \neq 0$.

Demonstração. 1. Dado $\varepsilon > 0$ existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Logo $n > n_0$ implica

$$|(x_n - y_n) - (a - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concluimos que:

$$\lim(x_n - y_n) = a - b.$$

O caso da soma $\lim(x_n + y_n) = a + b$ se trata do mesmo modo.

2. Queremos mostrar que $\lim(x_n \cdot y_n - ab) = 0$, podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$x_n \cdot y_n - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$$

Como a sequência (x_n) é limitada, pelo Teorema 2.3, e $(y_n - b) \rightarrow 0$, segue do Teorema 2.4 que:

$$\lim[x_n(y_n - b)] = 0.$$

De forma semelhante, como $x_n \rightarrow a$ e b é constante, então:

$$\lim[(x_n - a)b] = 0.$$

Portanto:

$$\lim(x_n \cdot y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a)b] = 0 + 0 = 0$$

Concluimos que:

$$\lim x_n \cdot y_n = ab.$$

3. Sabemos que $y_n \rightarrow b$, então $y_n b \rightarrow b^2$. Como $b \neq 0$, então $b^2 > 0$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$:

$$y_n b > \frac{b^2}{2}.$$

Considerando $\varepsilon = \frac{b^2}{2}$ e aplicando na definição de limite.)

Para todo $n > n_0$, temos: $\frac{1}{y_n b} < \frac{2}{b^2}$, ou seja, a sequência $\left(\frac{1}{y_n b}\right)$ é limitada.

Manipulando a expressão temos:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{y_n b} = (bx_n - ay_n) \cdot \frac{1}{y_n b}.$$

Sabemos que $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow b$, então $bx_n - ay_n \rightarrow ab - ab = 0$. Como $\left(\frac{1}{y_nb}\right)$ é limitada e $(bx_n - ay_n) \rightarrow 0$, segue do Teorema 2.4 que:

$$(bx_n - ay_n) \cdot \frac{1}{y_nb} \rightarrow 0.$$

Logo concluímos,

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

□

Um resultado fundamental na análise de sequências é a relação entre o sinal do limite e o sinal dos termos da sequência. O Teorema de Permanência do Sinal estabelece que, se uma sequência converge para um limite positivo (respectivamente, negativo), então todos os seus termos, a partir de certo índice, devem necessariamente ser positivos (respectivamente, negativos).

Teorema 2.6. (*Permanência do sinal*) *Seja (x_n) uma sequência convergente com $\lim x_n = a > 0$. Então, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos são positivos, ou seja, $x_n > 0$ para todo $n > n_0$.*

Demonstração. Como $\lim x_n = a > 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Escolhemos $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$. Com isso, temos:

$$|x_n - a| < \frac{a}{2} \Rightarrow x_n \in \left(a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right).$$

Portanto, para todo $n > n_0$, temos $x_n > \frac{a}{2} > 0$

Logo concluímos, que os termos x_n da sequência são positivos.

□

2.4 Teoremas de Convergência

Na análise de sequências numéricas, os teoremas de convergência constituem ferramentas que permitem estabelecer a existência de limites mesmo quando estes não são imediatamente evidentes. Esta seção apresenta três resultados fundamentais que, sob diferentes

condições garantem a convergência de sequências: o Teorema do Sanduíche, que estabelece convergência por comparação; o Teorema da Convergência Monótona, que explora o comportamento ordenado das sequências; e o Teorema de Bolzano-Weierstrass, que mostra uma relação entre limitação e existência de subsequências convergentes. Cada um desses teoremas são indispensáveis para analisar o comportamento das sequências e estabelecer se convergem para um limite específico.

Teorema 2.7 (Teorema da convergência monótona). *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Sem perda de generalidade seja (x_n) uma sequência não-crescente, isto é $(x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots)$, e limitada. Tomemos $a = \inf\{x_n; n = 1, 2, \cdots\}$.

Como (x_n) é limitada inferiormente, pela completude de $\mathbb{R}$, existe o ínfimo a em $\mathbb{R}$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Para todo $\varepsilon > 0$, como $a + \varepsilon > a$, temos que o número $a + \varepsilon$ não é cota inferior do conjuntos dos x_n . Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a + \varepsilon > x_{n_0}.$$

Pela monotonicidade, para todo $n > n_0$, temos $x_{n_0} \geq x_n$ e portanto, $a + \varepsilon > x_n > a$. Além disso, como a é ínfimo, $x_n \geq a$ para todo n . Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon \leq x_n \leq a + \varepsilon$$

Portanto, $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, o que conclui que $\lim x_n = a$. □

Observação 2.4. Se (x_n) fosse não-decrescente, usaríamos $\lim x_n = \sup\{x_n; n = 1, 2, \cdots\}$ na demonstração acima.

Exemplo 2.11. Um exemplo de uma sequência monótona limitada convergente é dado por $x_n = 2 + \frac{1}{n}$.

De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1} < 2 + \frac{1}{n} = x_n.$$

Logo, (x_n) é uma sequência estritamente decrescente. Segue disso que, todos os termos satisfazem $x_n > 2$, pois $\frac{1}{n} > 0$. Além disso, $\inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = 2$. Como (x_n) é monótona decrescente e limitada inferiormente por 2, pelo Teorema 2.7, ela converge para o ínfimo dos seus termos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = 2.$$

O resultado deste teorema é importante, pois garante a convergência das sequências monótonas desde que limitadas. Anteriormente vimos que uma sequência ser limitada não garante sua convergência, exemplo a sequência $x_n = (-1)^n$ que tem seus termos variando entre -1 e 1 . Além disso, uma sequência ser monótona também não garante sua convergência, tome como exemplo a sequência $x_n = n$, uma sequência estritamente crescente porém divergente.

Corolário 2.1. *Se uma sequência monótona (x_n) possui uma subsequência convergente, então (x_n) é convergente.*

De fato, nesse caso a sequência monótona (x_n) é limitada porque possui uma subsequência convergente, pelo Teorema 2.7 toda sequência monótona limitada é convergente.

Exemplo 2.12. Considere a sequência: $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

A sequência (x_n) é monótona crescente. Para ver isso, observe que

$$x_{n+1} - x_n = \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] - \left[1 - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

para todo n . Portanto, $x_n < x_{n+1}$, e a sequência é crescente.

Considere a subsequência $x_{n_2} = 1 - \frac{1}{2n}$. Podemos mostrar que a subsequência (x_{n_2}) converge para 1:

$$\lim x_{n_2} = \lim \left[1 - \frac{1}{2n}\right] = 1 - 0 = 1$$

Portanto, a subsequência (x_{n_2}) converge para 1. Pelo corolário 2.1, como (x_n) é uma sequência monótona e possui uma subsequência (x_{n_2}) que converge, então a própria sequência (x_n) também converge. De fato, a sequência (x_n) converge para 1, pois mostramos sua convergência no exemplo anterior.

O corolário apresentado é igualmente importante ao teorema da convergência monótona, pois podemos garantir a existência do limite da sequência principal em casos mais complexos desde que ela seja monótona, além disso podemos inferir que o limite da subsequência será o mesmo da sequência principal, já que vimos anteriormente a unicidade do limite, porém caso não tenhamos a hipótese da monotonicidade, considere novamente a sequência $x_n = (-1)^n$ obviamente não monótona, pois seus valores variam entre -1 e 1 , podemos obter duas subsequências convergentes uma quando temos n par e outra quando ímpar, porém não conseguimos concluir que (x_n) é convergente.

Teorema 2.8. *(Teorema de Bolzano - Weierstrass) Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Para demonstrar esse teorema vamos mostrar que toda sequência limitada (x_n) possui uma subsequência monótona. Diremos que um termo x_n de sequência dado é destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja

$$D = \{n \in \mathbb{N}; x_n \text{ é destacado} \} \subset \mathbb{N}.$$

Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$, então a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente. De fato, para todo $n \in D$, ou seja, x_n destacado, podemos concluir que $x_{n+1} \leq x_n$. E então pelo Teorema 2.7 concluímos que $(x_n)_{n \in D}$ é convergente.

Agora, se D é um conjunto finito, podemos escrever

$$D = \{N_1, N_2, \dots, N_k\}.$$

Seja $n_1 > \max\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$ natural. Logo $x_{n_1} \notin D$, ou seja x_{n_1} não é destacado. Dessa forma, existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por outro lado,

$$n_2 > n_1 > N_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Analogamente, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_2} < x_{n_3}$. Portanto, indutivamente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é uma subsequência de (x_n) tal que $x_{n_1} < x_{n_2} < \dots < x_{n_j} < \dots$, em que

$\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots\} \subset \mathbb{N}$ é infinito. Ou seja, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é uma sequência monótona crescente. Pelo mesmo motivo que $(x_n)_{n \in D}$, quando D é infinito, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é limitada. Por fim, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é uma subsequência de (x_n) convergente, pelo Teorema 2.7. $\square$

Exemplo 2.13. Considere a sequência $x_n = \cos(n\pi)$, sabemos que a sequência é limitada e assume valores alternados -1 e 1 , conforme n varia entre ímpar e par, de fato o exemplo escolhido reforça a validade do Teorema de Bolzano-Weierstrass, pois conseguimos obter duas subsequências convergentes e o teorema garante a existência de pelo menos uma subsequência convergente.

Teorema 2.9 (Teorema do Sanduíche). *Sejam $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ então $\lim z_n = a$*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_1 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

$$n > n_2 \Rightarrow y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, para todo $n > n_0$, temos:

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$$

Logo, $\lim z_n = a$, e o teorema está demonstrado. $\square$

Exemplo 2.14. Considere a sequência (x_n) definida por $x_n = \frac{\sin(n)}{n}$. Para determinar seu limite quando, utilizaremos o Teorema do Sanduíche.

Sabemos que a função seno é limitada, ou seja, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$. Logo, podemos criar duas novas sequências, (y_n) e (z_n) , que servirão como nossas sequências limitantes:

$$1. \ y_n = -\frac{1}{n} \text{ e } \lim y_n = 0$$

$$2. \ z_n = \frac{1}{n} \text{ e } \lim z_n = 0$$

Como a sequência (x_n) está compreendida entre duas sequências que convergem para o mesmo limite 0, pelo Teorema do Sanduíche, podemos concluir que (x_n) também converge para 0.

O Teorema do Sanduíche é bastante útil quando estamos estudando sequências que oscilam seus valores como o exemplo da sequência $\frac{\sin(n)}{n}$ apresentada, pois conhecemos outras sequências limitantes que auxiliam encontrar o limite da x_n sem a necessidade de realizar cálculos exaustivos.

2.5 Sequências de Cauchy

Em nosso estudo já nos deparamos com diversos teoremas e critérios que buscam garantir a convergência de uma sequência de números reais, agora vamos estudar o critério de Cauchy, que nos dará uma condição suficiente e necessária para a convergência de uma sequência de números reais com base no comportamento dos termos da sequência, garantindo que, a partir de um certo ponto, os termos se aproximam cada vez mais uns dos outros.

Definição 2.5.1. Denominamos sequência de Cauchy, a sequência de números reais que cumpre a seguinte condição: Dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, pode se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; m > n_0, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Exemplo 2.15. A sequência $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, donde $n > n_0 \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, para todo $n, m \geq n_0$, tem-se que

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{m} \right| + \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Teorema 2.10. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente, digamos, $\lim x_n = a$. Diretamente da definição de limite podemos concluir que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(i) \quad m > n_0 \Rightarrow |x_m - a| < \varepsilon/2$$

(ii) $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2$

Logo, para $m, n > n_0$ obtemos

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Portanto concluímos que toda sequência convergente é de Cauchy.

□

Agora demonstraremos a recíproca do Teorema 2.10, que consideramos o principal resultado sobre sequências de Cauchy.

Lema 1. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Sem perda de generalidade adotaremos $\varepsilon = 1$. Pela definição de sequência de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0$ implica que $|x_m - x_n| < 1$. Em particular, para $n \geq n_0$ temos $|x_{n_0} - x_n| < 1$, ou seja, $n \geq n_0$ implica que $x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}$. Então $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo (x_n) é limitada. □

Lema 2. *Se uma sequência de Cauchy (x_n) possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$ então $\lim x_n = a$*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pelo Lema 1 temos que a sequência (x_n) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Digamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Dessa forma, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, tem-se $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Agora, seja $n > n_0$. Escolhemos um índice k tal que $k > k_0$ e $n_k > n_0$. Então, temos que

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, $\lim x_n = a$.

□

Teorema 2.11. *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Pelo Lema 1, ela é limitada. Pelo Teorema de Bolzano - Weierstrass ela possui uma subsequência convergente, desta maneira segue diretamente do Lema 2 que a sequência (x_n) converge. $\square$

O critério de Cauchy é fundamental na análise, pois auxilia na definição de espaços completos, espaços onde toda sequência de Cauchy converge para um ponto dentro do próprio espaço. Esse critério é amplamente utilizado no estudo de séries e é especialmente útil para garantir a convergência de processos de aproximação numérica, sem a necessidade de conhecer previamente o resultado final. Essas aproximações, frequentemente realizadas por meio de iterações, são amplamente estudadas na disciplina de Cálculo Numérico.

Capítulo 3

Exercícios Resolvidos

Nesta seção, serão apresentados exercícios resolvidos com o objetivo de consolidar os conceitos apresentados anteriormente. Os exercícios abordam diferentes níveis de dificuldade, dessa forma podemos aprofundar a compreensão dos métodos de resolução e identificar estratégias adequadas para cada tipo de problema.

1. Se $\lim x_n = a$ então $\lim |x_n| = |a|$. Dê um contra-exemplo mostrando que a recíproca é falsa, salvo quando $a = 0$.

Demonstração. Usando a definição de limite, temos que

$$\lim x_n = a := \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Queremos mostrar que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| |x_n| - |a| \right| < \varepsilon.$$

Pelas propriedades do módulo, temos que

$$\left| |x_n| - |a| \right| \leq |x_n - a|.$$

Assim, se $n > n_0$, então

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left| |x_n| - |a| \right| < \varepsilon,$$

o que conclui que $\lim |x_n| = |a|$.

A recíproca diz que se $\lim |x_n| = |a|$, então $\lim x_n = a$.

Considere a sequência $x_n = (-1)^n$. Temos $x_n = -1, 1, -1, 1, \dots$. O valor absoluto é $|x_n| = 1$ para todo n . Logo, $\lim |x_n| = 1$. No entanto, a sequência x_n não converge (ela oscila), portanto $\lim x_n$ não existe.

Se $\lim |x_n| = 0$, então $\lim x_n = 0$, temos que

$|x_n - 0| = |x_n| = ||x_n| - 0|$. Se $|x_n| \rightarrow 0$, então a distância de x_n a 0 tende a zero, logo $x_n \rightarrow 0$. $\square$

2. Se $\lim x_{2n} = a$ e $\lim x_{2n-1} = a$, prove que $\lim x_n = a$.

Demonstração. A sequência (x_n) é composta pelos termos pares (x_{2n}) e ímpares (x_{2n-1}) .

Como $\lim x_{2n} = a$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > N_1$, temos $|x_{2k} - a| < \varepsilon$. Como $\lim x_{2n-1} = a$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > N_2$, temos $|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$. Seja $N_0 = \max\{2N_1, 2N_2\}$.

Se $n > N_0$:

Se n for par ($n = 2k$), então $2k > 2N_1 \Rightarrow k > N_1$, logo $|x_n - a| < \varepsilon$. Se n for ímpar ($n = 2k - 1$), então $2k - 1 > 2N_2 \Rightarrow k > N_2$, logo $|x_n - a| < \varepsilon$.

Portanto, para todo $n > N_0$, $|x_n - a| < \varepsilon$. Logo, $\lim x_n = a$. $\square$

3. Se $\lim x_n = a$ e $\lim(x_n - y_n) = 0$ então $\lim y_n$ é igual a a .

Demonstração. Podemos escrever y_n como uma combinação algébrica das sequências dadas:

$$y_n = x_n - (x_n - y_n)$$

Usando a propriedade de que o limite da diferença é a diferença dos limites:

$$\lim y_n = \lim(x_n - (x_n - y_n))$$

$$\lim y_n = \lim x_n - \lim(x_n - y_n)$$

Substituindo os valores:

$$\lim y_n = a - 0 = a$$

□

4. Seja $a \neq 0$. Se $\lim \frac{y_n}{a} = 1$ então $\lim y_n$ é igual a a .

Demonstração. Podemos escrever $y_n = a \cdot \frac{y_n}{a}$. Usando a propriedade do limite do produto:

$$\lim y_n = \lim \left(a \cdot \frac{y_n}{a} \right)$$

$$\lim y_n = a \cdot \lim \left(\frac{y_n}{a} \right)$$

Substituindo o limite dado:

$$\lim y_n = a \cdot 1 = a$$

□

5. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Se $a \leq x_n \leq n^k$ para todo n , então $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.

Demonstração. Tomando a raiz n -ésima em cada termo da desigualdade, temos

$$a^{1/n} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq (n^k)^{1/n}.$$

E então, passando o limite,

$$\lim a^{1/n} \leq \lim \sqrt[n]{x_n} \leq \lim (n^k)^{1/n}.$$

Como

$$\lim a^{1/n} = 1 \quad \text{e} \quad \lim (n^k)^{1/n} = 1,$$

obtemos

$$1 \leq \lim \sqrt[n]{x_n} \leq 1.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, concluímos que

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

□

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq t_n \leq 1$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim[t_n x_n + (1 - t_n)y_n] = a$.

Demonstração. Queremos calcular $L = \lim[t_n x_n + (1 - t_n)y_n]$. Considere a expressão dentro do limite como a sequência z_n escrita abaixo.

$$z_n = t_n x_n + y_n - t_n y_n = y_n + t_n(x_n - y_n)$$

Sabemos que $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = a$. Logo, a sequência diferença converge para zero: $\lim(x_n - y_n) = a - a = 0$.

A sequência (t_n) é limitada, pois $0 \leq t_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como o limite do produto de uma sequência limitada (t_n) por uma sequência que tende a zero $(x_n - y_n)$ é zero, temos que $\lim[t_n(x_n - y_n)] = 0$.

Substituindo os valores na expressão z_n :

$$\lim z_n = \lim y_n + \lim[t_n(x_n - y_n)]$$

$$\lim z_n = a + 0 = a$$

□

7. Seja $x_1 = 1$ e ponha $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Verifique que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$. Conclua que existe $a = \lim x_n$ e determine a .

Demonstração.

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}x_n} = -\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}x_n} \end{aligned}$$

Aplicando o módulo:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{x_{n+1}x_n} |x_{n+1} - x_n|$$

Precisamos mostrar que $\frac{1}{x_{n+1}x_n} \leq \frac{1}{2}$, ou seja, $x_{n+1}x_n \geq 2$. Note que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Desta forma, $x_n \geq 1$. Substituindo x_{n+1} :

$$x_{n+1}x_n = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)x_n = x_n + 1$$

Como $x_n \geq 1$ para todo $n \geq 1$, temos $x_n + 1 \geq 2$. Logo, $\frac{1}{x_{n+1}x_n} \leq \frac{1}{2}$. A desigualdade está verificada.

A desigualdade mostra que a sequência é uma contração, portanto é uma sequência de Cauchy e converge para um limite a . Para achar a , tomamos o limite na recorrência:

$$a = 1 + \frac{1}{a} \implies a^2 - a - 1 = 0$$

As raízes são $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Como $x_n > 0$, o limite deve ser positivo.

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

□

8. Ponha $x_1 = 1$ e defina $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$. Mostre que a sequência (x_n) , assim obtida, é limitada. Determine $a = \lim x_n$.

Demonstração. A sequência é crescente. Além disso, supondo $x_n \leq 4$, temos

$$x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n} \leq 1 + 2 = 3 < 4.$$

Como $x_1 = 1$, por indução $1 \leq x_n \leq 4$. Logo, (x_n) é crescente e limitada, portanto converge.

Seja $a = \lim x_n$. Então

$$a = 1 + \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = a - 1$$

Elevando ao quadrado:

$$a = (a - 1)^2 \Rightarrow a^2 - 3a + 1 = 0$$

Como $a > 1$, concluímos que $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. □

9. Se $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ e $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prove que $|a - b| \geq \varepsilon$.

Demonstração. Sabemos que a função módulo é contínua e que o limite da diferença é a diferença dos limites.

Seja $z_n = |x_n - y_n|$. Como $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow b$, então $(x_n - y_n) \rightarrow (a - b)$. Consequentemente, $z_n \rightarrow |a - b|$.

Se $z_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z_n \rightarrow L$, então $L \geq c$. Aqui, temos $z_n \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, o limite $|a - b| \geq \varepsilon$. □

10. Sejam $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Se $a < b$, prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n$.

Demonstração. Seja $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Como $a < b$, temos $\varepsilon > 0$.

Se $x_n \rightarrow a$, existe N_1 tal que para $n > N_1$: $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Se $y_n \rightarrow b$, existe N_2 tal que para $n > N_2$: $|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow y_n > b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Tome $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Para todo $n > n_0$, temos simultaneamente:

$$x_n < \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad y_n > \frac{a+b}{2}$$

Portanto, $x_n < y_n$. □

Conclusão

Os teoremas de convergência estudados revelam que os teoremas de convergência de sequências não são apenas fundamentais para o desenvolvimento da Análise, mas também oferecem uma poderosa ferramenta para investigar e explorar as relações entre sequências, funções e seus comportamentos no infinito.

Dentre esses resultados, três merecem especial destaque pela sua profundidade e aplicabilidade: O Critério de Cauchy, que é uma caracterização refinada de convergência e mostra como a completude se manifesta no comportamento intrínseco das sequências. O seu estudo prepara o terreno para o estudo de espaços métricos completos e análise funcional.

O Teorema da convergência Monótona destaca-se pela simplicidade de suas hipóteses e a eficácia em estabelecer a existência de limites, conectando diretamente a ordem dos reais como estrutura topológica. Este resultado é a peça-chave para o Teorema de Bolzano-Weierstrass completa os três principais deste trabalho, e ele revela a profunda relação entre limitação e convergência através da análise de subsequências.

Juntos, esses teoremas não apenas respondem à questão central sobre quando uma sequência converge, mas também abrem caminho para desenvolvimentos mais avançados na Análise Matemática, desde o estudo de séries até a investigação de espaços funcionais. A compreensão desses resultados fundamentais é essencial tanto para a teoria pura quanto para aplicação em equações diferenciais, análise numérica e outras áreas da matemática aplicada.

Referências Bibliográficas

- [1] D. G. d. Figueiredo. *Análise I*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [2] E. L. Lima. *Análise real volume 1: funções de uma variável*. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [3] E. L. Lima. *Análise real, volume 1. Funções de uma Variável*, 12, 2009.