

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Curso de Especialização em Matemática

Geometria Diferencial com Python: Modelagem de evolutas e involutas de curvas

por

Wilton Caldeiras Nunes

Goiânia
2026

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Wilton Caldeiras Nunes

Matrícula: 20242011160001

Título do Trabalho: Geometria Diferencial com Python: Modelagem de evolutas e involutas de curvas

Autorização - Marque uma das opções

- ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
- ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
- ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

_____, _____, _____, _____, _____, _____
Goiânia, 08 / 02 / 2026
Local Data
Documento assinado digitalmente
**gov.br**
WILTON CALDEIRAS NUNES
Data: 08/02/2026 15:42:41-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Wilton Caldeiras Nunes

Geometria Diferencial com Python: Modelagem de evolutas e involutas de curvas

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação lato sensu em Matemática - Departamento de Áreas Acadêmicas II - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Karoline Victor Fernandes

Goiânia
2026

N972g Nunes, Wilton Cadeiras.

Geometria diferencial com Python: modelagem de evolutas e involutas de curvas / Wilton Cadeiras Nunes. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2026.

76 f.: il.

Orientadora: Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes.

Monografia – Curso de Pós-Graduação *lato sensu* em Matemática, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Geometria diferencial. 2. Curvas regulares - evolutas e involutas. 3. Python (Linguagem de programação). I. Fernandes, Karoline Victor (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 516.36

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

ATA DE DEFESA DE MONOGRAFIA

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa da Monografia intitulada **Geometria Diferencial com Python: modelagem de evolutas e involutas de curvas**, sob orientação de Karoline Victor Fernandes, apresentada pelo aluno **Wilton Caldeiras Nunes (20242011160001)** do Curso **Especialização em Matemática (Câmpus Goiânia)**. Os trabalhos foram iniciados às **14:30** do dia **04/02/2026** pela Professora presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

- **Karoline Victor Fernandes** (Presidente)
- **Marcio Dias de Lima** (Examinador Interno)
- **Uender Barbosa de Souza** (Examinador Interno)

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da Monografia, passou à arguição do candidato. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

☒ Aprovado

☐ Reprovado

Nota :

Observação / Apreciações:

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu **Karoline Victor Fernandes** lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Uender Barbosa de Souza**, em **04/02/2026 15:59:16** com chave **9a6b49ac01fb11f19c83005056a537a4**.
- **Marcio Dias de Lima**, em **04/02/2026 15:58:05** com chave **6fdda20201fb11f1b3f3005056a537a4**.
- **Karoline Victor Fernandes**, em **04/02/2026 15:57:54** com chave **696b43de01fb11f1bcfe005056a537a4**.

Este documento foi emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifg.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Ata de Projeto Final

Data da Emissão: 04/02/2026

Código de Autenticação: e03588



Resumo

O presente trabalho aborda o tema Geometria Diferencial com Python: modelagem de evolutas e involutas de curvas, inserido no contexto de Geometria Diferencial, buscando compreender o seguinte problema de pesquisa: "De que forma a implementação de códigos de programação em Python pode contribuir para a visualização e compreensão de conceitos da Geometria Diferencial, em especial sobre as evolutas e involutas de curvas regulares nos espaços euclidianos?". Dessa forma, o objetivo geral do estudo foi implementar modelos matemáticos de curvas planas e espaciais, bem como de suas evolutas e involutas, utilizando códigos de programação em Python como estratégia de apoio ao estudo teórico da Geometria Diferencial. Para alcançar esse objetivo, foi realizada uma pesquisa de natureza qualitativa e exploratória, com abordagem teórico-computacional, utilizando como procedimentos metodológicos o levantamento bibliográfico, estudo conceitual da Geometria Diferencial e a implementação de códigos de programação em Python para simulação e visualização gráfica de curvas regulares. Conclui-se, portanto, que a implementação de códigos em Python de evolutas e involutas de curvas constitui um recurso eficaz para o estudo e o aprofundamento de conceitos, contribuindo para uma aprendizagem mais intuitiva, além da possibilidade de uso em outras pesquisas que investiguem diferentes tipos de curvas e propriedades.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Programação em Python; Evolutas e Involutas de curvas.

Abstract

The present work addresses the theme Differential Geometry with Python: modeling of evolutes and involutes of curves, inserted in the context of Differential Geometry, seeking to understand the following research problem: “In what way can the implementation of programming codes in Python contribute to the visualization and understanding of concepts of Differential Geometry, especially regarding the evolutes and involutes of regular curves in Euclidean spaces?”. Thus, the general objective of the study was to implement mathematical models of plane and spatial curves, as well as their evolutes and involutes, using programming codes in Python as a support strategy for the theoretical study of Differential Geometry. To achieve this objective, a qualitative and exploratory research was carried out, with a theoretical-computational approach, using as methodological procedures the bibliographic survey, conceptual study of Differential Geometry, and the implementation of programming codes in Python for simulation and graphical visualization of regular curves. It is therefore concluded that the implementation of Python codes for the evolutes and involutes of curves constitutes an effective resource for the study and deepening of concepts, contributing to a more intuitive learning process, in addition to the possibility of use in other research that investigates different types of curves and properties.

Keywords: Differential Geometry; Python Programming; Evolutes and Involutives of curves.

Lista de Figuras

4.1	Representação de involuta de um círculo	41
4.2	Involutas de uma curva em $\mathbb{R}^3$	41
4.3	Cicloide de Huygens	43
4.4	Curva Cissoide de Diocles	44
4.5	curva Limaçon com laço e sua evoluta	47
4.6	Curva Tractriz e sua evoluta	48
4.7	Curva Ciclóide e sua evoluta	48
4.8	Curva Hélice circular e sua involuta	49
4.9	Curva Hélice cônica circular e sua Involuta	50

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	REFERENCIAL TEÓRICO	11
2.1	Derivadas	11
2.2	Teoria local das curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$	21
2.2.1	Cálculo vetorial no espaço euclidiano	21
2.2.2	Cálculo diferencial no espaço euclidiano	24
3	CURVAS PLANAS E ESPACIAIS	27
3.1	Curvas no Plano Euclidiano	27
3.1.1	Vetor tangente e curva regular	27
3.1.2	Mudança de parametro e comprimento de arco	28
3.1.3	Diedro de Frenet	30
3.2	Curvas no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$	31
3.2.1	Vetor tangente, curva regular e mudança de parâmetros	32
3.2.2	Teoria local das curvas parametrizadas pelo comprimento de arco e triedro de Frenet	33
4	EVOLUTAS E INVOLUTAS	40
4.1	Definições e Propriedades	40
4.2	Historicidade das Evolutas e Involutas	43
4.3	Programação em Python de Evolutas e Involutas de curvas no Plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ e no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$	46
4.3.1	Curva Limaçon com laço e evoluta da curva	46
4.3.2	Curva Tractriz e sua evoluta	47
4.3.3	Curva Ciclóide e evoluta da curva	48
4.3.4	Curva Hélice circular e involuta da curva	49
4.3.5	Curva Hélice cônica circular e involuta da curva	49

5	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	52
6	APÊNDICES	53
6.1	APÊNDICE A	53
6.2	APÊNDICE B	55
6.3	APÊNDICE C	57
6.4	APÊNDICE D	59
6.5	APÊNDICE E	63
6.6	APÊNDICE F	64
6.7	APÊNDICE G	67
6.8	APÊNDICE H	70
6.9	APÊNDICE I	73
6.10	APÊNDICE J	75

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda o tema Geometria Diferencial com Python: modelagem de evolutas e involutas de curvas, inserido no contexto de Geometria Diferencial, buscando compreender o seguinte problema de pesquisa: "De que forma a implementação de códigos de programação em Python pode contribuir para a visualização e compreensão geométrica de conceitos da Geometria Diferencial, em especial sobre as evolutas e involutas de curvas regulares nos espaços euclidianos?". Dessa forma, o objetivo geral do estudo foi implementar modelos matemáticos de curvas planas e espaciais, bem como de suas evolutas e involutas, utilizando códigos de programação em Python como estratégia de apoio ao estudo teórico da Geometria Diferencial. Para alcançar esse objetivo, foi realizada uma pesquisa de natureza qualitativa e exploratória, com abordagem teórico-computacional, utilizando como procedimentos metodológicos o levantamento bibliográfico, estudo conceitual da Geometria Diferencial e a implementação de códigos de programação em Python para simulação e visualização gráfica das curvas estudadas.

De acordo com Roque (2012), o conceito de curva envolve três dimensões principais: a curva entendida como uma expressão algébrica, possivelmente infinita; como o caminho descrito por um ponto em movimento; e como um polígono formado por um número infinito de lados. Essas três ideias foram fundamentais para o avanço dos métodos infinitesimais, nos quais Huygens e Leibniz contribuíram para as bases da Geometria Diferencial que temos atualmente.

Segundo Carmo (2012), a Geometria Diferencial Clássica, estuda as propriedades locais das curvas, ou seja, as propriedades que dependem apenas do comportamento da curva nas proximidades de um ponto. Sendo que os métodos de estudo destas propriedades foram os métodos do cálculo diferencial, com isso as curvas consideradas na Geometria Diferencial são definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes.

No capítulo inicial abordamos derivadas, cálculo vetorial e cálculo diferencial nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Em seguida apresentamos curvas planas e espaciais, vetor tangente, curvas regulares, mudança de parâmetro, diedro e triedro de Frenet. No último capítulo abordamos as evolutas e involutas de curvas regulares, historicidade e programação em Python.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O texto ao longo do capítulo é baseado em Análise Real: Funções de 1 variável de Lima (2014) e Um Curso de Cálculo: Volume 1 de Guidorizzi (2013). A seguir abordaremos a noção de derivadas, regras operacionais e crescimento local.

2.1 Derivadas

Definição 2.1. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a é o limite:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2.1)$$

Se o limite existir, diz-se que f é derivável no ponto a . E quando existe a derivada $f'(x)$ em todos os pontos $x \in X \cap X'$ diz-se que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no conjunto X e obtém-se uma nova função $f' : X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f'(x)$, chamada a função derivada de f . Se f é contínua, diz-se que f é de classe C^1 .

Definição 2.2. Seja $X \subset \mathbb{R}^3$, diz-se que o número real a é um ponto de acumulação à direita para X , e escreve-se $a \in X'_+$, quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$. Equivalentemente, para todo $\epsilon > 0$ tem-se $X \cap (a, a + \epsilon) \neq \emptyset$. A fim de que $a \in X'_+$ é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de pontos $x_n > a$, pertencentes a X . Finalmente, a é um ponto de acumulação à direita para o conjunto X se, e somente se, é um ponto de acumulação do conjunto $Y = X \cap (a, +\infty)$.

Analogamente, se define ponto de acumulação à esquerda. Por definição, $a \in X'_-$ significa que, para todo $\epsilon > 0$, tem-se $X \cap (a - \epsilon, a) \neq \emptyset$, ou seja, $a \in Z'$ onde $Z = (-\infty, a) \cap X$. Para que isto aconteça, é necessário e suficiente que $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma sequência cujos termos $x_n < a$ pertencem a X . Quando $a \in X'_+ \cap X'_-$ diz-se que a é um ponto de acumulação bilateral de X .

Definição 2.3. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'_+$. Diz-se que o número real L é limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a , e escreve-se $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$, ou seja, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \cong \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \quad (2.2)$$

Analogamente, se define o limite à esquerda $L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, no caso de $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com $a \in X'_-$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se escolher $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Proposição 2.4. *A fim de que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in X \Rightarrow f(a + h) = f(a) + c.h + r(h)$, onde $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. No caso afirmativo tem-se $c = f'(a)$.*

Demonstração. Seja $Y = \{h \in \mathbb{R} \mid a + h \in X\}$. Então $0 \in Y \cap Y'$. Supondo que $f'(a)$ exista, definimos $r : Y \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$r(h) = f(a + h) - f(a) - f'(a)h. \quad (2.3)$$

então:

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a). \quad (2.4)$$

logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad (2.5)$$

A condição é, portanto, necessária. Reciprocamente, se vale a condição, então:

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - c, \quad (2.6)$$

logo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (2.7)$$

Portanto, $f'(a)$ existe e é igual a c . □

Proposição 2.5. *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. As funções $f \pm g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ (caso $g(a) \neq 0$) são também deriváveis no ponto a , com:*

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a), \\
(fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Como f e g são deriváveis no ponto a obtemos as igualdades:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \pm g)(a+h) - (f \pm g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+h) - f(a)] \pm [g(a+h) - g(a)]}{h} \\
&= f'(a) \pm g'(a).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
(f.g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f.g)(a+h) - (f.g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h).g(a+h) - f(a+h).g(a) + f(a+h).g(a) - f(a).g(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(a+h) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + g(a) \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] \\
&= f(a).g'(a) + f'(a).g(a).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f/g)(a+h) - (f/g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h) \pm f(a)g(a)}{g(a+h)g(a)} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a) - f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] \\
&= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

□

Proposição 2.6. (Regra da Cadeia). Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Demonstração. Consideremos uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, e ponhamos $y_n = f(x_n)$. Logo, $\lim y_n = b$. Sejam $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} ; f(x_n) \neq f(a)\}$ e $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} ; f(x_n) = f(a)\}$. Se $n \in \mathbb{N}_1$, então $y_n \in Y - \{b\}$ e

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}. \quad (2.11)$$

Portanto, se $\mathbb{N}_1$ é infinito, tem-se:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a). \quad (2.12)$$

Se $\mathbb{N}_2$ é infinito tem-se:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = 0. \quad (2.13)$$

Logo $f'(a) = 0$. Ainda neste caso, tem-se:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a). \quad (2.14)$$

Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, resulta daí que, em qualquer hipótese, vale:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a). \quad (2.15)$$

□

Proposição 2.7. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, com inversa $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo, tem-se $g'(b) = 1/f'(a)$.

Demonstração. Se $x_n \in X - \{a\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$ então, como f é injetiva e contínua no ponto a , tem-se:

$$y_n = f(x_n) \in Y - \{b\} \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b. \quad (2.16)$$

Portanto, $b \in Y \cap Y'$. Se g é derivável no ponto b , a igualdade $g(f(x)) = x$, válida para todo $x \in X$, juntamente com a Regra da Cadeia, fornece $g'(b) \cdot f'(a) = 1$. Em particular, $f'(a) \neq 0$. Reciprocamente, se $f'(a) \neq 0$ então, para qualquer sequência de pontos $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$ com $\lim y_n = b$, a continuidade de g no ponto b nos dá $\lim x_n = a$, portanto $g'(b)$ é igual a:

$$\lim \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \lim \left[\frac{y_n - b}{g(y_n) - g(b)} \right]^{-1} = \lim \left[\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right]^{-1} = \frac{1}{f'(a)}. \quad (2.17)$$

□

Proposição 2.8. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$ implica $f(a) < f(x)$.*

Demonstração. De fato, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) \quad (2.18)$$

se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tais que $a < x < a + \delta$ implica em:

$$f'_+(a) - \epsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'_+(a) + \epsilon \quad (2.19)$$

assim, tomemos $\epsilon = f'_+(a)$; logo $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$.

Analogamente, se $f'_+(a) < 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ com $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) > f(x)$. Equivalentemente, temos: Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à esquerda no ponto $a \in X \cap X'_-$ com $f'_-(a) > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a \Rightarrow f(a) > f(x)$. De fato,

$$a - \delta < x < a \Rightarrow f'_-(a) - \epsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'_-(a) + \epsilon$$

Tomando $\epsilon = f'_-(a)$, tem-se:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \quad \text{e} \quad x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < f(a).$$

E se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à esquerda no ponto $a \in X \cap X'_-$ com $f'_-(a) < 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a \Rightarrow f(a) < f(x)$. □

Definição 2.9. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se monótona não decrescente quando para $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, f diz-se monótona

não crescente. Se vale a implicação mais estrita $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ dizemos que a função f é crescente. E se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, dizemos que f é uma função decrescente.

Proposição 2.10. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente então suas derivadas laterais, onde existem, são maiores ou iguais a 0.*

Demonstração. De fato, se alguma derivada lateral digamos $f'_+(a)$ fosse negativa então nos daria $x \in X$ com $a < x$ e $f(x) < f(a)$, uma contradição. Portanto suas derivadas laterais, onde existem, são maiores ou iguais a 0. $\square$

Proposição 2.11. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X, a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Demonstração. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em a com $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X, a - \delta < x < a < y < a + \delta \Rightarrow f(y) < f(a) < f(x)$. $\square$

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se um máximo local no ponto $a \in X$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a)$.

Quando $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a)$, diz-se que f tem um máximo local estrito no ponto a .

Quando $a \in X$ é tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de mínimo absoluto para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se vale $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de máximo absoluto.

Proposição 2.12. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e tem aí um máximo local então $f'_+(a) \leq 0$.*

Demonstração. De fato, se fosse $f'_+(a) > 0$ então teríamos $f(a) < f(x)$ para todo $x \in X$ à direita e suficientemente próximo de a , logo f não teria máximo local no ponto a .

Analogamente, se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à esquerda no ponto $a \in X \cap X'_-$ e tem um máximo local então $f'_-(a) \geq 0$, e para mínimo local temos $f'_-(a) \leq 0$. $\square$

Proposição 2.13. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui aí um máximo ou mínimo local então $f'(a) = 0$.*

Demonstração. De fato, tem-se que $f'_+(a) \leq 0$ e $f'_-(a) \geq 0$. Como $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$, segue-se que $f'(a) = 0$. $\square$

Definição 2.14. Um ponto $c \in X$ chama-se ponto crítico da função derivável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando $f'(c) = 0$.

Se $c \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ é um ponto de mínimo ou de máximo local, então c é crítico; mas a recíproca é falsa, pois a bijeção crescente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, não pode ter máximo nem mínimo local, mas admite o ponto crítico $x = 0$.

Proposição 2.15. (*Darboux*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável. Se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente $d = 0$. A função contínua f , pelo teorema de Weierstrass, atinge seu valor mínimo em algum ponto c do conjunto compacto $[a, b]$. Como $f'(a) < 0$, existe pontos $x \in (a, b)$ tais que $f(x) < f(a)$, logo esse mínimo não é atingido no ponto a , ou seja, $a < c$. Analogamente, tem-se $c < b$, logo temos $f'(c) = 0$. Para o caso geral considera-se a função auxiliar $g(x) = f(x) - dx$, então $g'(x) = f'(x) - d$, donde $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = d$ e $g'(a) < 0 < g'(b) \Leftrightarrow f'(a) < d < f'(b)$. □

Proposição 2.16. (*Teorema de Weierstrass*) Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. De fato, um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se compacto quando é limitado e fechado, logo seja um compacto $f(X)$ então possui um menor elemento $f(x_0)$ e um maior elemento $f(x_1)$, logo existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$. □

Proposição 2.17. (*Rolle*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. De fato, pelo teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo m e seu valor máximo M em pontos de $[a, b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se um desses pontos, qualquer c , estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$. □

Proposição 2.18. (*Teorema do Valor Médio de Lagrange*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.20)$$

Demonstração. Vamos considerar a função auxiliar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - dx$, onde d é escolhido de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja:

$$d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.21)$$

Assim, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, ou seja:

$$f'(c) = d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.22)$$

Analogamente, seja $f : [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em $(a, a + h)$, logo existe um número β donde temos $0 < \beta < 1$ tal que $f(a + h) = f(a) + f'(a + \beta h) \cdot h$

□

Proposição 2.19. *Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, contínua no intervalo I , com derivada $f'(x) = 0$ para todo $x \in \text{int}I$, é constante.*

Demonstração. Dados $x, y \in I$ quaisquer, existe c entre x e y tal que $f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x) = 0$, $(y - x) \neq 0$, logo temos $f(x) = f(y)$. □

Proposição 2.20. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I . Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ então $x, y \in I \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$*

Demonstração. Dados $x, y \in I$, f é contínua no intervalo fechado cujos extremos são x e y , e derivável no seu interior. Logo, existe z entre x e y tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(z) (y - x) \Rightarrow \quad (2.23)$$

$$|f(y) - f(x)| = |f'(z)| |y - x| \leq k |y - x|. \quad (2.24)$$

□

Proposição 2.21. *A fim de que a função derivável $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ seja monótona não-decrescente no intervalo I é necessário e suficiente que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é uma bijeção crescente de I sobre um intervalo J e sua inversa $g = f^{-1} : J \rightarrow I$ é derivável, com $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ para todo $y = f(x) \in J$.*

Demonstração. Se f é monótona não decrescente então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Reciprocamente, se vale esta condição, então, para quaisquer $x, y \in I$, tem-se:

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x) \quad (2.25)$$

onde $z \in I$ e está entre x e y . Como $f'(z) \geq 0$, vemos que $f(y) - f(x) \geq 0$, ou seja, tem-se que:

$$x < y \in I \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (2.26)$$

Analogamente, supondo $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, tem-se f crescente. $\square$

Proposição 2.22. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b) .*

- (i) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$*
- (ii) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.*

Demonstração. Sejam x_1, x_2 , dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2) . Logo tem-se que:

$$\exists c \in (x_1, x_2) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(i) Por hipótese, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $f'(c) > 0$, como $x_1 < x_2$ então $x_2 - x_1 > 0$. Analisando a igualdade, na equação anterior, conclui-se que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$, logo f é crescente no intervalo $[a, b]$.

(ii) Por hipótese, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, Então temos que $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$. Analisando a igualdade, na equação anterior, conclui-se que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e dessa forma $f(x_2) < f(x_1)$ logo f é decrescente no intervalo $[a, b]$

$\square$

Proposição 2.23. *(Critério da derivada primeira para determinação de extremos)*
Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todos os pontos do intervalo (a, b) , exceto provavelmente num ponto c .

(i) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c .*

(ii) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c .*

Demonstração. (i) Pela proposição anterior, temos que f é crescente no intervalo $[a, c]$ e decrescente no intervalo $[c, b]$, logo $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ no intervalo (a, b) e com isso f tem um máximo relativo em c .

(ii) Pela proposição anterior, temos que f é decrescente no intervalo $[a, c]$ e crescente no intervalo $[c, b]$, logo $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ no intervalo (a, b) e com isso f tem um mínimo relativo em c .

□

Proposição 2.24. (*Cr terio da derivada segunda para determinação de extremos de uma função*) Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, ou seja, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b) , temos:

(i) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c .

(ii) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c .

Demonstração. (i) Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$, logo temos

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0 \quad (2.27)$$

Neste caso existe um intervalo aberto I , contendo c , tal que:

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \quad \text{para todo } x \in I \quad (2.28)$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$, logo c   o extremo direito do intervalo aberto A . Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$, logo c   o extremo esquerdo do intervalo aberto B . Se $x \in A$, temos $x - c < 0$, logo temos $f'(x) > f'(c)$. Se $x \in B$ temos $x - c > 0$, logo temos $f'(x) < f'(c)$. Como $f'(c) = 0$, logo temos que se $x \in A$  nt o $f'(x) > 0$ e se $x \in B$  nt o $f'(x) < 0$,  nt o pela proposição anterior, f tem um valor máximo relativo em c .

(ii) Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) > 0$, e

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \quad (2.29)$$

logo existe um intervalo aberto I contendo c , tal que:

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0, \quad \text{para todo } x \in I \quad (2.30)$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$, logo c   o extremo esquerdo do intervalo aberto A . Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$, logo c   o extremo direito do intervalo aberto B . Se $x \in A$, tem-se $x - c < 0$, logo $f'(x) < f'(c)$. Se $x \in B$ tem-se $x - c > 0$,

logo $f'(x) > f'(c)$. Como $f'(c) = 0$, logo se $x \in A$ então $f'(x) < 0$ e se $x \in B$ então $f'(x) > 0$, então pela proposição anterior, f tem um valor mínimo relativo em c . $\square$

2.2 Teoria local das curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

O texto ao longo do capítulo é baseado em Introdução à Geometria Diferencial de Tenenblat (2008) e Geometria Diferencial de Carmo (2012). Conceitos fundamentais do cálculo vetorial de funções de uma ou mais variáveis serão essenciais para o estudo de curvas.

2.2.1 Cálculo vetorial no espaço euclidiano

Denotamos por $\mathbb{R}^3$ o espaço euclidiano de dimensão três, ou seja, o conjunto de termos ordenados de números reais $p = (x, y, z)$, chamados pontos de $\mathbb{R}^3$. A distância entre dois pontos $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ é dada por:

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (2.31)$$

Dados dois pontos distintos p_1 e p_2 de $\mathbb{R}^3$, o segmento orientado de p_1 a p_2 é chamado vetor. O comprimento do segmento é dito módulo do vetor. Portanto, a cada vetor podemos associar uma direção, um sentido e o módulo.

Definição 2.25. Dois vetores são iguais se têm o mesmo módulo, direção e sentido. Portanto dois vetores são iguais se, e só se, têm as mesmas componentes.

Vamos incluir o vetor nulo, de componentes nulas, que denotamos por 0 . Observa-se que existe uma correspondência bijetora entre os pontos e os vetores de $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.26. Dados dois vetores w_1 e w_2 de componentes $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$, definimos soma a $w_1 + w_2$ como sendo o vetor de componentes $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Se λ é um número real, definimos o produto λw como sendo o vetor de componentes $\lambda w = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Sejam w_1, w_2, w_3 vetores, e se $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $-w_1$ indica o vetor de componentes $-w_1 = (-x_1, -y_1, -z_1)$. Além disso, sejam λ_1 e λ_2 números reais, o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ com essas operações é um espaço vetorial, se são satisfeitas as seguintes propriedades:

$$w_1 + w_2 = w_2 + w_1 \quad (\text{i})$$

$$(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3) \quad (\text{ii})$$

$$0 + w_1 = w_1 \quad (\text{iii})$$

$$w_1 + (-w_1) = 0 \quad (\text{iv})$$

$$\lambda_1(\lambda_2 w_1) = (\lambda_1 \lambda_2) w_1 \quad (\text{v})$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) w_1 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_1 \quad (\text{vi})$$

$$\lambda_1(w_1 + w_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_1 w_2 \quad (\text{vii})$$

$$1 \cdot w_1 = w_1 \quad (\text{viii})$$

Além disso, temos que o módulo de um vetor $w = (x, y, z)$ é dado por: $|w| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Um vetor é dito unitário se $|w| = 1$.

Definição 2.27. Os vetores $w_1, w_2, \dots, w_n$ são linearmente dependentes se existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nem todos nulos, tais que: $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0$

Definição 2.28. Os vetores $w_1, w_2, \dots, w_n$ são linearmente independentes se, para toda combinação linear desses vetores da forma: $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0$, tem-se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Definição 2.29. Um conjunto B é dito uma base de $\mathbb{R}^3$ se todo vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores de B , sendo B um conjunto de vetores linearmente independentes.

O conjunto $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ é denominado base canônica de $\mathbb{R}^3$. Observa-se que quaisquer três vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Reciprocamente, toda base de $\mathbb{R}^3$ é formada por três vetores linearmente independentes.

Se $\{w_1, w_2, w_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, e se $w = aw_1 + bw_2 + cw_3$, então os números reais a, b, c são ditas coordenadas do vetor w na base $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Definição 2.30. Dados dois vetores w_1, w_2 de componentes $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$, o produto escalar (produto interno) de w_1 e w_2 é definido como sendo o número real dado por:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Se w_1, w_2 são vetores não nulos, o ângulo θ entre w_1 e w_2 é a solução da equação:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = |w_1| |w_2| \cos \theta,$$

satisfazendo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Definição 2.31. Dois vetores w_1, w_2 são ditos ortogonais se $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$.

Observa-se que dois vetores w_1, w_2 são ortogonais se, e somente se, $w_1 = 0$ ou $w_2 = 0$ ou o ângulo θ formado entre eles é $\pi/2$.

Vale ressaltar que a base canônica $e_1 = \{1, 0, 0\}$, $e_2 = \{0, 1, 0\}$, $e_3 = \{0, 0, 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ é formada por vetores unitários e dois a dois ortogonais. Uma base formada por vetores unitários e dois a dois ortogonais é dita uma base ortonormal ou referencial ortonormal.

Definição 2.32. Dados dois vetores w_1 e w_2 de componentes $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$, o produto vetorial de w_1 por w_2 , denotado por $w_1 \times w_2$, é definido como sendo o vetor de componentes $w_1 \times w_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -x_1 z_2 + x_2 z_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

Observa-se que o produto vetorial $u \times v \neq 0$ é ortogonal ao plano gerado pelos vetores u e v .

Definição 2.33. Dado um ponto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ de $\mathbb{R}^3$ e um vetor não nulo $w = (a, b, c)$, a reta que passa pelo ponto p_0 paralela ao vetor w é o conjunto de pontos p de $\mathbb{R}^3$, tais que: $p = p_0 + tw$, $-\infty < t < \infty$, ou seja, o conjunto dos pontos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tais que: $(x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$, $-\infty < t < \infty$.

Definição 2.34. Dado um ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathbb{R}^3$ e dois vetores linearmente independentes $w_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $w_2 = (a_2, b_2, c_2)$, o plano ortogonal ao vetor $w_1 \times w_2$ que passa por p_0 é o conjunto de pontos p de $\mathbb{R}^3$ tais que: $\langle p - p_0, w_1 \times w_2 \rangle = 0$.

Analogamente, se p_0, p_1, p_2 são três pontos não-colineares de $\mathbb{R}^3$, então o plano que passa por esses pontos é o conjunto dos pontos $p \in \mathbb{R}^3$ tais que:

$$\langle (p - p_0), (p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0) \rangle = 0.$$

Dizemos que um subconjunto não vazio W de $\mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se, para cada par de vetores $w_1, w_2 \in W$ e λ número real, os vetores $w_1 + w_2$ e λw_1 pertencem a W . Logo todo plano de $\mathbb{R}^3$ que contém a origem é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, analogamente, toda reta que passa pela origem é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Observa-se que uma base de um subespaço de W de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto de vetores linearmente independentes de W tal que todo vetor de W é uma combinação linear desses vetores. Se W é um plano de $\mathbb{R}^3$ passando pela origem, então dois vetores linearmente independentes de W formam uma base do plano, no caso de uma reta em $\mathbb{R}^3$, passando pela origem, qualquer vetor não-nulo da reta é uma base. De forma análoga, podemos introduzir os conceitos apresentados em $\mathbb{R}^3$ para um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ de dimensão n , todavia, para este estudo da teoria local de curvas, utilizaremos apenas os espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

2.2.2 Cálculo diferencial no espaço euclidiano

Nesta seção vamos rever os conceitos básicos do cálculo diferencial em espaços euclidianos e enunciar os resultados relevantes para o estudo de curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.35. Uma função vetorial α de um subconjunto I de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$, denotada por $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma correspondência que, para cada $t \in I$, associa $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$. Uma função vetorial $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode ser representada por: $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde as funções reais $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ são denominadas funções coordenadas de α .

Daqui por diante, vamos considerar as funções vetoriais definidas em um intervalo aberto I de $\mathbb{R}$. Se f é uma função real e α e β são funções vetoriais definidas em I , então as funções $\alpha + \beta$, $f(\alpha)$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \times \beta$ são definidas da forma usual, ou seja, para todo $t \in I$ tem-se:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(t) &= \alpha(t) + \beta(t) \\ f(\alpha)(t) &= f(t) \alpha(t) \\ \langle \alpha, \beta \rangle(t) &= \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle \\ (\alpha \times \beta)(t) &= \alpha(t) \times \beta(t) \end{aligned} \tag{2.32}$$

Definição 2.36. O limite de uma função vetorial $\alpha(t)$ é L quando t se aproxima de t_0 , e denotamos por:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = L \tag{2.33}$$

Quando, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |t - t_0| < \delta$, então $|\alpha(t) - L| < \epsilon$. Se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $L = (l_1, l_2, l_3)$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = L$ se,

e so se, $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = l_1$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = l_2$, $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = l_3$. As propriedades usuais de limite para funções reais verificam-se para funções vetoriais.

Definição 2.37. Uma função vetorial $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é contínua em $t_0 \in I$ se $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0)$. Dizemos que α é contínua se α é contínua em t , para todo $t \in I$. Uma função vetorial é contínua em t_0 se, e so se, as funções coordenadas de α são contínuas em t_0 . Se α e β são funções vetoriais contínuas em I e f é uma função real contínua, então as funções $\alpha + \beta$, $f(\alpha)$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \times \beta$ são contínuas.

Definição 2.38. Uma função vetorial $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita diferenciável em $t_0 \in I$ se existe:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}$$

que denotamos por $\alpha'(t_0)$.

Assim, diz-se que α é diferenciável se α é diferenciável para todo $t \in I$. Uma função $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é diferenciável em t_0 se, e so se, as funções coordenadas de α são diferenciáveis em t_0 .

Neste caso tem-se:

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \quad (2.34)$$

Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável, então a função $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, para cada $t \in I$, associa $\alpha'(t)$ é também uma função vetorial chamada derivada de primeira ordem de α . Se a função α' é também diferenciável, temos uma nova função vetorial, chamada derivada de segunda ordem de α , que denotaremos por α'' . Analogamente, definimos as derivadas de ordem superior.

Logo tem-se que uma função vetorial α é dita diferenciável de classe C^∞ se existirem as derivadas de todas as ordens de α . Observa-se que se α é diferenciável em t_0 , então α é contínua em t_0 . Se α e β são funções vetoriais diferenciáveis em I e f é uma função real diferenciável em I , então $\alpha + \beta$, $f(\alpha)$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \times \beta$ são diferenciáveis. E tem-se que:

$$\frac{d(\alpha + \beta)}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \quad (2.35)$$

$$\frac{d(f\alpha)}{dt} = f \frac{d\alpha}{dt} + \frac{df}{dt} \alpha \quad (2.36)$$

$$\frac{d\langle \alpha, \beta \rangle}{dt} = \left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \beta \right\rangle + \left\langle \alpha, \frac{d\beta}{dt} \right\rangle \quad (2.37)$$

$$\frac{d(\alpha \times \beta)}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \times \beta + \alpha \times \frac{d\beta}{dt} \quad (2.38)$$

Seja $\alpha(t)$ uma função vetorial diferenciável em I e $t = f(r)$, onde f é uma função real diferenciável em um intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ tal que $f(J) \subset I$. Então a função composta $(\alpha \circ f)(r) = \alpha(f(r))$ é diferenciável em J e tem-se que:

$$\frac{d(\alpha \circ f)}{dr} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{dr}$$

Esta propriedade é denominada regra da cadeia.

Se α é uma função vetorial diferenciável C^∞ em I , então para todo inteiro $n > 0$ e $t_0 \in I$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & \alpha(t_0) + \alpha'(t_0)(t - t_0) + \frac{\alpha''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \cdots + \\ & + \cdots + \frac{\alpha^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + R_n(t, t_0). \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R_n(t, t_0)}{(t - t_0)^n} = 0, t \in I. \quad (2.40)$$

Esta expressão é denominada desenvolvimento de α na fórmula de Taylor em t_0 .

3 CURVAS PLANAS E ESPACIAIS

3.1 Curvas no Plano Euclidiano

O texto ao longo do capítulo é baseado em Introdução à Geometria Diferencial de Tenenblat (2008) e Geometria Diferencial de Carmo (2012). Uma curva no plano é descrita dando-se as coordenadas de seus pontos como funções de uma variável independente. Assim vamos introduzir os conceitos para curvas no Plano Euclidiano.

Definição 3.1. Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dos pontos $\alpha(t), t \in I$, é chamado traço da curva.

Observa-se que uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que, para cada t , associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis de classe C^∞ .

3.1.1 Vetor tangente e curva regular

Definição 3.2. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que, a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado vetor tangente a α em t .

A definição de vetor tangente coincide com a noção intuitiva que temos de um vetor tangente a uma curva, ou seja, um vetor cuja direção é a direção limite de cordas, determinadas por um ponto $\alpha(t)$ e pontos próximos $\alpha(t + h)$, quando h tende para zero. De fato, fixado $t \in I$, para $h \neq 0$ tal que $t + h \in I$, tem-se:

$$\frac{\alpha(t + h) - \alpha(t)}{h} \tag{3.1}$$

Observa-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + h) - \alpha(t)}{h}$$

que é exatamente a definição da derivada da função α em t .

Para o desenvolvimento da teoria local das curvas, é preciso que exista uma reta tangente a uma curva α para cada valor do parâmetro t , para isso é suficiente que o vetor tangente a α seja não nulo para todo t . Portanto, este estudo se restringe apenas às curvas que satisfazem essa condição.

Definição 3.3. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita regular se para todo $t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Definição 3.4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. A reta tangente a α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, ou seja, a reta dada pela função:

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0), r \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

3.1.2 Mudança de parametro e comprimento de arco

Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável (C^∞), cuja derivada de primeira ordem é não-nula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então a função composta:

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.3)$$

é uma curva regular que possui o mesmo traço que α , chamada reparametrização de α por h . A função h é dita mudança de parâmetro.

Uma mudança de parâmetro h é uma função estritamente crescente ou decrescente, portanto é bijetora. Além disso, se β é uma reparametrização de α por h , então α é uma reparametrização de β por h^{-1} . A orientação de uma curva regular α é o sentido de percurso do traço de α .

Seja β uma reparametrização de α por h . Se h é estritamente crescente, então β e α têm a mesma orientação. Se h é estritamente decrescente, então β e α têm orientações opostas.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e fixemos t_0 e t_1 do intervalo I , subdividindo o intervalo $[t_0, t_1]$ nos pontos $t_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = t_1$, e ligando retilinearmente os pontos $\alpha(a_0), \alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)$, obtemos uma linha poligonal chamada poligonal inscrita à curva entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$. Essa poligonal tem um comprimento. Consideremos agora todas as poligonais inscritas à curva entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$. Como α é uma curva regular (é suficiente que a derivada de primeira ordem da função α exista e seja contínua), pode-se verificar que existe o limite superior do conjunto dos comprimentos dessas linhas poligonais, e é igual a:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt,$$

que é chamado comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 . A aplicação:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt \quad (3.4)$$

é denominada função comprimento de arco da curva α a partir de t_0 . Essa função é diferenciável de classe C^∞ , pois α é uma curva regular.

Definição 3.5. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$, ou seja:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0 \quad (3.5)$$

Proposição 3.6. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e so se, $\forall t \in I, |\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. Suponhamos α parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t_0 \in I$. Consideremos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada $t \in I$, associa

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt.$$

Se $t_0 \leq t$, então, por hipótese,

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0,$$

e, se $t \leq t_0$, então

$$-s(t) = \int_t^{t_0} |\alpha'(t)| dt = t - t_0. \quad (3.6)$$

logo, para todo $t \in I$,

$$s(t) = t - t_0, \quad s'(t) = 1 \quad (3.7)$$

como

$$s'(t) = |\alpha'(t)| \quad (3.8)$$

logo

$$|\alpha'(t)| = 1, \quad \text{para todo } t \in I \quad (3.9)$$

A recíproca é imediata. $\square$

Na proposição seguinte, tem-se que toda curva regular α admite uma reparametrização β , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Proposição 3.7. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Sendo α uma curva regular então temos: $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$, ou seja, s é uma função estritamente crescente, logo, existe uma função inversa de s , $h : J \rightarrow I$. Como para todo $t \in I$, $h(s(t)) = t$. temos que:

$$\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1 \quad (3.10)$$

portanto:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0 \quad (3.11)$$

conclui-se que $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, com $s \in J$, é uma reparametrização de α , e

$$\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dh}{ds} \right| = \left| \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = 1, \quad (3.12)$$

portanto, β está parametrizada pelo comprimento de arco.

□

Nesta proposição, a aplicação β é dita uma parametrização de α pelo comprimento de arco, observa-se que essa parametrização não é única, pois depende da função comprimento de arco, que por sua vez, depende de t_0 fixado.

3.1.3 Diedro de Frenet

Definição 3.8. Consideremos uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, parametrizada pelo comprimento de arco s . Para cada $s \in I$, $\alpha'(s)$ é um vetor unitário, que denotamos por $t(s)$, ou seja, $t(s) = (x'(s), y'(s))$. Seja $n(s)$ um vetor unitário ortogonal a $t(s)$, tal que a base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por $t(s)$ e $n(s)$ tem a mesma orientação que a base canônica $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $n(s) = (-y'(s), x'(s))$. O conjunto de vetores $t(s)$ e $n(s)$ é dito referencial de Frenet da curva α em s .

Observa-se que $t(s)$ e $n(s)$ são funções de I em $\mathbb{R}^2$, diferenciáveis de classe C^∞ e para cada $s \in I$ os vetores de $\mathbb{R}^2$, $t'(s), n'(s)$ podem ser escritos como combinação linear de $t(s)$ e $n(s)$. Como $t(s)$ é unitário, temos que $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$ e portanto $t'(s)$ é proporcional a $n(s)$. Este fator de proporcionalidade, denotado por $k(s)$, é chamado curvatura de α em s , ou seja, $t'(s) = k(s)n(s)$. Considerando a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, segue da definição que:

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle .$$

Portanto $k(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s)$. Analogamente, como $n(s)$ é unitário, temos que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e portanto $n'(s)$ é proporcional a $t(s)$. Como $\langle n'(s), t(s) \rangle = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s)$. Concluimos que $n'(s) = -k(s)t(s)$.

Assim, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco s , então o referencial de Frenet $t(s), n(s)$ satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s) n(s) \\ n'(s) &= -k(s) t(s) \end{aligned} \tag{3.13}$$

que são as fórmulas do diedro de Frenet de uma curva plana. A função $|k(s)| = |\alpha''(s)|$ indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção.

3.2 Curvas no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$

Dados os conjuntos de ternos ordenados de números reais $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pode-se destacar alguns subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ nos quais possa ser aplicado o cálculo diferencial. Lembrando que uma função de varável real será diferenciável, se ela possuir em todos os pontos derivadas de todas as ordens (contínuas).

Definição 3.9. Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável α , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. A variável $t \in I$ é o parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é o traço da curva.

A palavra diferenciável significa que α é uma correspondência que leva cada $t \in I$ em um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, de tal modo que as funções reais $x(t), y(t), z(t)$ são diferenciáveis, donde t é o parâmetro da curva. O intervalo I é

considerado em sentido amplo, sem desconsiderar os casos de $\alpha = -\infty$ e $b = +\infty$ e vice-versa. A imagem $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ é chamada o traço da curva α .

Definição 3.10. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita plana se existe um plano de $\mathbb{R}^3$ que contém $\alpha(I)$

3.2.1 Vetor tangente, curva regular e mudança de parâmetros

Definição 3.11. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente a α em $t \in I$ é o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. A curva α é regular se $\forall t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Temos que a reta tangente à curva regular α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, isto é, a reta dada pela função $g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0)$, $r \in \mathbb{R}$.

Dado $t_0 \in I$, o comprimento de arco de uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, a partir do ponto t_0 por definição é:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \quad (3.14)$$

donde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \quad (3.15)$$

Definição 3.12. Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável C^∞ , cuja derivada de primeira ordem é não-nula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então, a função composta:

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.16)$$

É uma curva regular, que tem o mesmo traço que α , chamada reparametrização de α por h . A função h é chamada mudança de parâmetro.

Proposição 3.13. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e so se, $\forall t \in I$, $|\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. Análogo a demonstração anterior para espaço euclidiano em $\mathbb{R}^2$. $\square$

Proposição 3.14. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então, existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Demonstração. Análogo a demonstração anterior para espaço euclidiano em $\mathbb{R}^2$. $\square$

A aplicação β desta proposição é denominada uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

3.2.2 Teoria local das curvas parametrizadas pelo comprimento de arco e triedro de Frenet

Considere uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s , $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Temos que $\alpha'(s)$ é um vetor tangente unitário e o módulo da derivada segunda $|\alpha''(s)|$ mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente de s . Ou seja, $|\alpha''(s)|$ mede quão rápido a curva se afasta da tangente de s em uma vizinhança de s .

Definição 3.15. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ chama-se curvatura de α em s .

Observa-se que mudando a orientação, o vetor tangente muda de sentido, ou seja, se $\beta(-s) = \alpha(s)$, então:

$$\frac{d\beta}{d(-s)}(-s) = -\frac{d\alpha}{ds}(s) \quad (3.17)$$

Portanto, $\alpha''(t)$ e a curvatura permanecem invariantes por uma mudança de orientação.

Proposição 3.16. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e so se, $k(s) = 0, \forall s \in I$.*

Demonstração. Se $\alpha(I)$ é um segmento de reta, então $\alpha(s) = p + vs$ onde $p \in \mathbb{R}^3$ e v é um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$. Portanto, $\forall s \in I$, $\alpha'(s) = v$ e $\alpha''(s) = 0$, donde $k(s) = |\alpha''(s)| = 0$. Reciprocamente, se $|\alpha''(s)| = 0, \forall s \in I$, então $\alpha''(s) = 0$. Integrando, temos que $\alpha'(s) = v$ e $|v| = 1$. Integrando novamente, obtemos $\alpha(s) = p + vs$, cujo traço é um segmento de reta. $\square$

Assim, se $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então $|\alpha'(s)| = 1$ implica que $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$. Portanto, $\forall s \in I$ onde $k(s) \neq 0$, ou seja, $\alpha''(s) \neq 0$, podemos definir um vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$.

Definição 3.17. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. O vetor:

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$$

é denominado vetor normal a α em s . A reta normal a α em $s_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(s_0)$ na direção do vetor normal $n(s_0)$.

Denotado por $t(s)$ o vetor unitário $\alpha'(s)$, temos que $t(s)$ e $n(s)$ são vetores ortonormais e $t'(s) = k(s)n(s)$.

Definição 3.18. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. O vetor binormal a α em s é: $b(s) = t(s) \times n(s)$.

Os vetores $t(s), n(s), b(s)$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, cada par de vetores determina um plano. O plano de $\mathbb{R}^3$ que contém $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $t(s)$ é o plano normal à curva α em s . O plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $b(s)$ é denominado plano osculador, o plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $n(s)$ é o plano retificante da curva α em s .

O referencial ortonormal $t(s), n(s), b(s)$ é denominado o triedro de Frenet da curva α em s .

Além disso, vale ressaltar que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$, pois derivando $b(s) = t(s) \times n(s)$, obtem-se:

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ b'(s) &= t(s) \times n'(s) \end{aligned} \tag{3.18}$$

logo, $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$, como $|b(s)| = 1$, temos que $b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$, donde temos que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$, ou seja, $b'(s)$ é igual ao produto de $n(s)$ por um número real.

Observa-se que o vetor unitário $b(s) = t(s) \times n(s)$ é normal ao plano osculador sendo vetor binormal em s . Como $b(s)$ é unitário, o módulo $|b'(s)|$ mede a taxa de variação do ângulo do plano osculador em s com os planos osculadores vizinhos, ou seja, $|b'(s)|$ indica quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de s , do plano osculador em s .

Definição 3.19. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de

arco s tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é chamado torção de α em s .

Assim, se α é uma curva plana, ou seja, $\alpha(I)$ está contido em um plano, então o plano da curva coincide com o plano osculador, conseqüentemente, $\tau \cong 0$. Reciprocamente, se $\tau \cong 0$ e $k \neq 0$ temos que $b(s) = b_0 = \text{constante}$.

Com isso, $\alpha(s) \cdot b_0 = \text{constante}$, assim, $\alpha(s)$ está contida em um plano normal a b_0 . Vale ressaltar que a condição $k \neq 0$ por todo o intervalo da curva é essencial.

Diferentemente da curvatura a torção pode ser positiva ou negativa, assim mudando-se a orientação, o vetor binormal muda de sinal, pois $b = t \times n$, decorre daí que $b'(s)$ e conseqüentemente a torção permanecem invariantes por uma mudança de orientação.

Proposição 3.20. *Se $\alpha : I \subset \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e tal que $k(s) > 0, \forall s \in I$, então o triedro de Frenet da curva α em s é um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Portanto podemos obter os vetores $t'(s), n'(s), b'(s)$ como combinação linear de $t(s), n(s), b(s)$.*

Demonstração. De fato, tem-se que: $t'(s) = k(s)n(s)$ e $b'(s) = \tau(s)n(s)$. Para obter a expressão de $n'(s)$, como $n(s) = b(s) \times t(s)$, derivando temos: $n'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s)$ substituindo b', t' pelas expressões acima, obtemos: $n'(s) = -\tau(s)b(s) - k(s)t(s)$, logo, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, e tal que $k(s) > 0, \forall s \in I$, então o triedro de Frenet definido por:

$$t(s) = \alpha'(s), \quad n(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}, \quad b(s) = t(s) \times n(s), \quad (3.19)$$

satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s), \\ n'(s) &= -k(s)t(s) + \tau(s)b(s), \\ b'(s) &= \tau(s)n(s). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.21. *(Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas). Dadas as funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I$, existe uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que s é o comprimento de arco, $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α . Além disso, qualquer outra curva $\tilde{\alpha}$, satisfazendo às mesmas condições, difere*

de α por um movimento rígido, ou seja, existe uma transformação linear ortogonal p de $\mathbb{R}^3$, com determinante positivo, e um vetor c tal que $\tilde{\alpha} = p \circ \alpha + c$

Demonstração. Prova da unicidade do Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas: Primeiramente, observa-se que o comprimento de arco, curvatura e torção são invariantes por movimentos rígidos, isto quer dizer, por exemplo, se $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um movimento rígido e $\alpha = \alpha(s)$ é uma curva parametrizada, então temos que:

$$\int_a^b \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt = \int_a^b \left| \frac{d(M \circ \alpha)}{dt} \right| dt \quad (3.20)$$

Observa-se que estes conceitos são definidos utilizando o produto interno e o produto vetorial de certas derivadas, as derivadas são invariantes por translações e os produtos interno e vetorial são expressos em termos de movimentos rígidos.

Agora, admita que as duas curvas $\alpha = \alpha(s)$ e $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(s)$ satisfaçam às condições $k(s) = \tilde{k}(s)$ e $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$, $s \in I$.

Sejam, respectivamente, t_0, n_0, b_0 e $\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0$ os triedros de Frenet em $s = s_0 \in I$ de α e $\tilde{\alpha}$. Logo existe um movimento rígido que leva $\tilde{\alpha}(s_0)$ em $\alpha(s_0)$ e $\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0$ em t_0, n_0, b_0 .

Então, depois de aplicarmos este movimento rígido sobre $\tilde{\alpha}$, teremos $\tilde{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ e os triedros de Frenet $t(s), n(s), b(s)$ e $\tilde{t}(s), \tilde{n}(s), \tilde{b}(s)$ de α e $\tilde{\alpha}$, respectivamente, satisfazendo as equações de Frenet:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= kn & \frac{d\tilde{t}}{ds} &= k\tilde{n} \\ \frac{dn}{ds} &= -kt - \tau b & \frac{d\tilde{n}}{ds} &= -k\tilde{t} - \tau\tilde{b} \\ \frac{db}{ds} &= \tau n & \frac{d\tilde{b}}{ds} &= \tau\tilde{n} \end{aligned}$$

com $t(s_0) = \tilde{t}(s_0), n(s_0) = \tilde{n}(s_0), b(s_0) = \tilde{b}(s_0)$. Observa-se agora que usando as equações de Frenet, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{ds} [|t - \tilde{t}|^2 + |n - \tilde{n}|^2 + |b - \tilde{b}|^2] &= \langle t - \tilde{t}, t' - \tilde{t}' \rangle \\
&\quad + \langle n - \tilde{n}, n' - \tilde{n}' \rangle + \langle b - \tilde{b}, b' - \tilde{b}' \rangle \\
&= k \langle t - \tilde{t}, n - \tilde{n} \rangle + \tau \langle b - \tilde{b}, n - \tilde{n} \rangle \\
&\quad - k \langle n - \tilde{n}, t - \tilde{t} \rangle - \tau \langle n - \tilde{n}, b - \tilde{b} \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $s \in I$. Logo, a equação acima é constante e como é nula para $s = s_0$, então é de fato identicamente nula. Segue-se que $t(s) = \tilde{t}(s), n(s) = \tilde{n}(s), b(s) = \tilde{b}(s)$ para todo $s \in I$. Como:

$$\frac{d\alpha}{ds} = t = \tilde{t} = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds}, \quad (3.21)$$

então, tem-se que:

$$\frac{d}{ds}(\alpha - \tilde{\alpha}) = 0, \quad (3.22)$$

decorre daí que $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s) + \alpha$, onde α é um vetor constante. Mas já que $\alpha(s_0) = \tilde{\alpha}(s_0)$, temos que $\alpha = 0$, logo temos que $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s)$ para todo $s \in I$

□

Proposição 3.22. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco, ou seja, $\beta(s(t)) = (\alpha(t), \forall t \in I$. Sejam $k(s) > 0$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção de β em $s \in J$, então:*

$$\begin{aligned}
k(s(t)) &= \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \\
\tau(s(t)) &= \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}
\end{aligned} \quad (3.23)$$

Demonstração. Seja $\beta(s(t)) = \alpha(t)$. Derivando em relação a t , obtem-se:

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(t), \quad (3.24)$$

derivando novamente, temos:

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = \alpha''(t), \quad (3.25)$$

como:

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|, \quad (3.26)$$

tem-se que:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|}, \quad (3.27)$$

segue das duas primeiras equações que:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \quad (3.28)$$

portanto,

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right|. \quad (3.29)$$

onde usa-se o fato de que β está parametrizada pelo comprimento de arco e, portanto, $\frac{d\beta}{ds}$ é ortogonal a $\frac{d^2\beta}{ds^2}$ e usando a equação: $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$ conclui-se que

$$k(s(t)) = \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right| = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad (3.30)$$

para obter a expressão da torção, utiliza-se os vetores normal e binormal de β , que são dados por:

$$n(s(t)) = \frac{1}{k(s(t))} \frac{d^2\beta}{ds^2}. \quad (3.31)$$

$$b(s(t)) = \frac{d\beta}{ds} \times n(s(t)) \quad (3.32)$$

Substituindo as equações e usando a expressão de curvatura $k(s(t))$, obtêm-se:

$$n(s(t)) = \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t) \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)| |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}, \quad (3.33)$$

$$b(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}. \quad (3.34)$$

Derivando esta última equação em relação a t , tem-se:

$$\frac{db}{ds}(s(t)) = \frac{\alpha' \times \alpha'''}{|\alpha'| |\alpha' \times \alpha''|} - \frac{\langle \alpha' \times \alpha''', \alpha \times \alpha'' \rangle \alpha' \times \alpha''}{|\alpha'| |\alpha' \times \alpha''|^3}, \quad (3.35)$$

como

$$\tau(s(t)) = \left\langle \frac{db}{ds}(s(t)), n(s(t)) \right\rangle, \quad (3.36)$$

conclui-se que:

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}. \quad (3.37)$$

As expressões $k(s(t))$ e $\tau(s(t))$ são, respectivamente, a curvatura e a torção de α em um parâmetro t .

□

Observa-se que nesta proposição permite obter a curvatura e a torção de uma curva regular com qualquer parâmetro, sem precisar reparametrizá-la pelo comprimento de arco.

4 EVOLUTAS E INVOLUTAS

O texto ao longo do capítulo é baseado em Introdução à Geometria Diferencial de Tenenblat (2008) e Geometria Diferencial de Carmo (2012).

4.1 Definições e Propriedades

Uma curva α de $\mathbb{R}^3$ determina duas famílias de curvas, que são as involutas e evolutas de α . Temos que uma curva plana tem uma única evoluta descrita pelos centros de curvatura, enquanto que uma curva no espaço tem uma família infinita de evolutas.

Definição 4.1. Seja $\alpha(s)$, $s \in I$, uma curva regular de $\mathbb{R}^3$, uma involuta de α é uma curva $\beta(s)$ tal que, $\forall s \in I$, $\beta(s)$ intercepta a reta tangente a α em s ortogonalmente.

Suponhamos que $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco, daí vamos obter a família das involutas de α .

Como $\beta(s)$ pertence à reta tangente a α em s , então:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)t(s), \quad (4.1)$$

além disso, $\beta'(s)$ deve ser ortogonal a $t(s)$, ou seja:

$$(t + \lambda't + \lambda t', t) = 0, \quad (4.2)$$

portanto,

$$1 + \lambda'(s) = 0, \quad (4.3)$$

ou seja:

$$\lambda(s) = a - s, \quad (4.4)$$

onde a é uma constante arbitrária. Daí concluímos que uma involuta de α é dada por:

$$\beta(s) = \alpha(s) + (a - s)t(s), \quad (4.5)$$

como a é arbitrária, essa equação representa uma família infinita de involutas de α .

Assim, a família de involutas de uma curva pode ser interpretada geometricamente de modo que se desenrolarmos uma corda que está sobre a curva, de tal forma que a parte desenrolada é mantida esticada na direção da tangente à curva e o restante da corda permanece sobre a curva, então nesse movimento todo ponto da corda descreve uma involuta da curva.

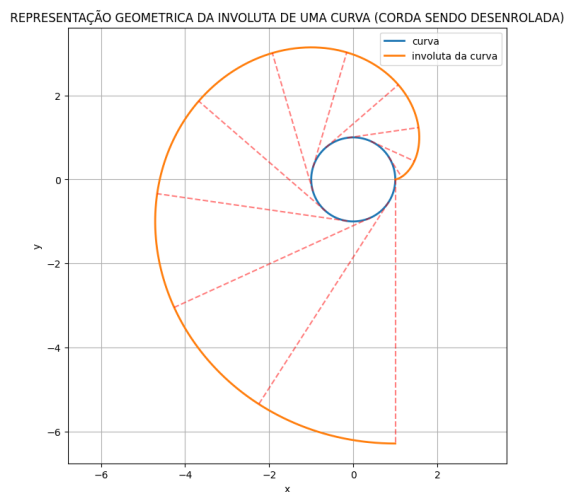


Figura 4.1: Representação de involuta de um círculo

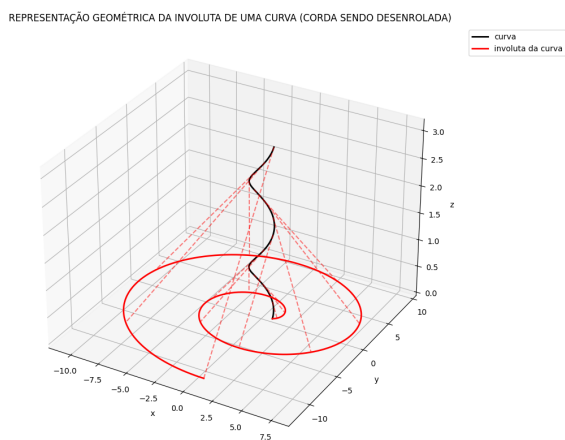


Figura 4.2: Involutas de uma curva em $\mathbb{R}^3$

Se β é uma curva involuta de α , então definimos α como sendo uma curva evoluta de β .

Assim, suponhamos que $\beta(s)$ é parametrizada pelo comprimento de arco tal que a curvatura $k(s) \neq 0, \forall s$. Denotemos por t, n, b o triedro de Frenet de β .

Para obter a evoluta α de β , pela definição de involuta de α , para cada s , o segmento de reta determinado por $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ é ortogonal a $\beta(s)$ em s , tangente a α em s .

Assim,

$$\langle \alpha(s) - \beta(s), t(s) \rangle = 0, \quad (4.6)$$

logo

$$\alpha(s) = \beta(s) + \lambda(s)n(s) + \mu(s)b(s), \quad (4.7)$$

para determinar as funções λ e μ , derivamos e usamos as fórmulas de Frenet. Logo:

$$\alpha' = (1 - \lambda k)t + (\lambda' + \mu\tau)n + (\mu' - \lambda\tau)b. \quad (4.8)$$

Como α' é paralelo a $\lambda n + \mu b$, obtemos:

$$\lambda = \frac{1}{k}, \quad \mu(\lambda' + \mu\tau) = \lambda(\mu' - \lambda\tau). \quad (4.9)$$

Portanto:

$$\tau = \frac{\lambda\mu' - \mu\lambda'}{\mu^2 + \lambda^2} = \frac{d}{ds} \left[\arctan \left(\frac{-\lambda}{\mu} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Logo:

$$\lambda = \mu \tan \left(\int \tau ds + a \right), \quad (4.11)$$

onde a é uma constante arbitrária. Como $\lambda = \frac{1}{k}$, obtemos:

$$\mu = \frac{1}{k} \cot \left(\int \tau ds + a \right), \quad (4.12)$$

concluindo:

$$\alpha(s) = \beta(s) + \frac{1}{k(s)}n(s) + \frac{1}{k(s)} \cot \left(\int \tau ds + a \right) b(s), \quad (4.13)$$

que representa a família infinita de evolutas α de uma involuta β .

Vale ressaltar que se a torção $\tau(s)$ não é nula, então segue-se que a curva determinada pelos centros de curvatura de β não é uma evoluta de β .

4.2 Historicidade das Evolutas e Involutas

O texto ao longo deste capítulo é baseado em Introdução à História da Matemática de Eves (2011) e História da Matemática de Boyer (2012)

Os conceitos de raio de curvatura e evoluta tinham sido sugeridos na obra puramente teórica Cônicas de Apolônio, mas somente pelo interesse de Huygens em horologia é que os conceitos finalmente encontraram lugar permanente na matemática. A geometria analítica fora um produto de considerações essencialmente teóricas, mas o desenvolvimento dado por Huygens à ideia de curvatura foi estimulado por preocupações práticas. Um jogo entre os dois pontos de vista, o prático e o teórico, frequentemente se mostra produtivo em matemática, como a obra de Huygens bem exemplifica.

Seu pêndulo cicloidal foi uma evidente retificação da cicloide, resultado que Roberval achara antes, mas não publicara. O fato do arco QS ser formado a medida que a corda do pêndulo se enrola na curva QP, mostra que o comprimento do segmento PS é exatamente igual ao comprimento do arco QP. Como PS é duas vezes o diâmetro do círculo que gera a cicloide QSR, o comprimento de um arco completo de cicloide deve ser quatro vezes o diâmetro de círculo gerador.

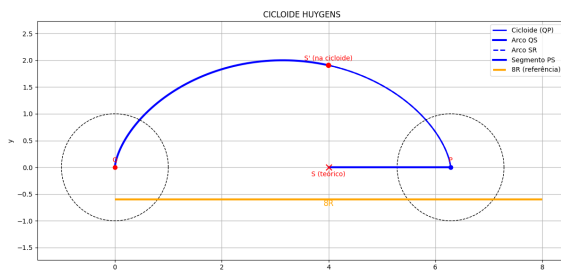


Figura 4.3: Cicloide de Huygens

A principal de suas publicações, *Horologium oscillatorium*, apareceu em Paris em 1673. Trata-se de um trabalho em cinco partes. A primeira parte diz respeito ao relógio de pêndulo que o autor inventara em 1656. A segunda parte se dedica à discussão de corpos em queda livre no vácuo, deslizando num plano inclinado liso ou ao longo de uma curva lisa. Sendo nesta parte provada a propriedade de que uma cicloide invertida é tautócrona, ou seja, se um ponto material deslizar por um arco de cicloide invertida, ele alcançará o ponto mais baixo do arco num espaço de tempo que não depende do ponto onde começou a descida. A terceira parte inclui um tratamento de evolutas e evolventes.

Donde explica que a evoluta de uma curva plana é a envoltória das normais à curva; se a evoluta de uma curva C é uma curva E , então C se diz evolvente de E .

Vale destacar que a obra de Huygens serviu como introdução a obra *Principia*, de Newton, um pouco mais de uma década depois. Nas últimas partes dele continuam treze teoremas relacionados com a força centrífuga num movimento circular, sendo demonstrado, entre outras coisas, o fato de que num movimento circular uniforme a intensidade da força centrífuga é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade linear e inversamente proporcional ao raio do círculo, ou seja, a lei da força centrípeta para movimentos circulares, além de demonstrar também a lei de Huygens para movimento pendular, donde encontra-se um tratamento do pêndulo composto com a demonstração de que o centro de oscilação e o ponto de suspensão são permutáveis. Huygens teve notável interesse nas áreas de matemática e física, mas especialmente por curvas planas de grau superior. Tendo como destaque que ele retificou a curva "Cissoide de Diocles" e estudou a curva Tractriz.

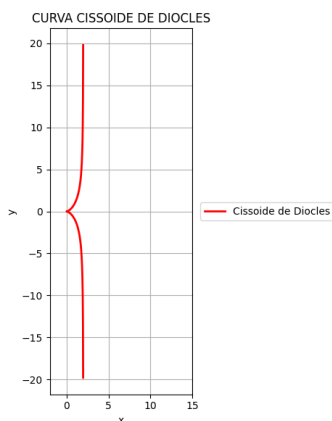


Figura 4.4: Curva Cissoide de Diocles

Como muitas das demonstrações dadas por Newton, Huygens elaborava suas provas, quase que inteiramente, com grande rigor, pelo método geométrico dos gregos. A teoria de involutas e evolutas levou, de modo semelhante, à retificação de muitas outras curvas, e o dogma peripatético-cartesiano da não retificabilidade das curvas algébricas foi mais seriamente questionado.

Em 1658, um dos associados de Huygens, Heinrich van Heuraet (1633- 1660), descobriu que a parábola semicúbica pode ser retificada por meios euclidianos. O resultado tinha sido obtido independentemente um pouco antes pelo inglês William Neil (1637- 1670) e independentemente um pouco depois por Fermat na França, constituindo outro caso notável de simultaneidade de descoberta.

Vale ressaltar que de todas as descobertas de Fermat em matemática, só a retificação da parábola semicúbica, usualmente chamada parábola de Neil, foi publicada por ele. A solução apareceu em 1660, como suplemento no *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris* (Geometria dos antigos promovida em sete livros sobre a cicloide) de Antoine de Lalouvière (1600- 1664). A retificação de Fermat foi obtida comparando um pequeno arco da curva com a figura circunscrita formada pelas tangentes nas extremidades do arco. O método de Van Heuraet se baseava na taxa de variação no arco.

A retificação de Neil dependia da observação, já feita por Wallis em *Arithmetica infinitorum*, de que um arco pequeno é praticamente a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados são os incrementos na abscissa e ordenada. A retificação de Neil foi publicada, em 1659, por John Wallis, em um tratado intitulado *Tractatus duo, prior de cycloide*, posterior de cissoide (Dois tratados, o primeiro sobre a cicloide, o segundo sobre a cissoide). Essa obra veio poucos meses depois da obra de Pascal sobre a cicloide, indicando até que ponto a febre cicloidial tinha atingido os matemáticos logo antes da invenção do cálculo diferencial.

Temos como destaque as contribuições de G. Mainardi (1800- 1879) e D. Codazzi (1824- 1875) a cujos nomes estão associados importantes equações sobre o assunto, o físico belga cego J. Plateau (1801- 1883); C. G. J. Jacobi (1804- 1851); O. Bonnet (1819- 1892); E. B. Christoffel (1829-1901); E. Beltrami (1835- 1900); J. D. Darboux (1842- 1917) em homenagem a quem se deu nome a um vetor especial associado a cada ponto de uma curva do espaço e que, entre outras coisas, completou o trabalho empreendido por Dupin com as famílias de superfícies triplamente ortogonais, em que cada família é ortogonal às outras duas; entre outras que deram sua contribuição à teoria clássica das curvas e superfícies do espaço.

Temos como destaque o período da história da geometria diferencial que se iniciou com Georg Bernhard Riemann (1826-1866), donde houve a afirmação da tendência da matemática moderna no sentido do empenho pela maior generalização possível. O espaço tridimensional usual é deixado para trás, concentrando-se o estudo em propriedades como variedades m-dimensionais imersas em espaços n-dimensionais. Dois requisitos se faziam necessários para esse desenvolvimento adicional: uma notação aperfeiçoada e um procedimento que dependesse apenas da natureza da variedade e não do particular sistema de coordenadas usado.

Para isso desenvolveu-se o cálculo tensorial, matéria de caráter geral que foi desenvolvida por matemáticos como G. Ricci-Curbastro (1853– 1925), T. Levi-Civita (1873-1941) e A. Einstein (1879-1955). Exploraram-se então intensivamente geome-

trias diferenciais generalizadas, conhecidas como geometrias riemannianas, as quais, por sua vez, abriram caminho para as geometrias não riemannianas.

Observa-se que as pesquisas atualmente em geometria diferencial guardam pouca semelhança com o estudo clássico, fortemente ligado ao concreto.

Portanto, a evolução dos conceitos de curvas evolutas e involutas está profundamente ligada ao desenvolvimento da geometria diferencial, do cálculo e das aplicações práticas, mostrando como a matemática avança pela interação entre teoria, prática e inovação.

4.3 Programação em Python de Evolutas e Involutas de curvas no Plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ e no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$

As representações gráficas deste capítulo foram feitas com uso de Programação em Python usando o ambiente de programação online Google Colab, ressalta-se que a escolha deste ambiente de programação ocorreu por ele ser gratuito e de fácil visualização, como referencial teórico de Programação em Python, o livro: Aprendendo Python: Programação orientada a objetos de Lutz e Ascher (2007)

O modelo de script para cada caso foi gerado com uso da ferramenta Gemini, ferramenta esta que se encontra atualmente integrada ao ambiente de programação no Google Colab, todavia com ajustes e correções feitas pelo autor, ressalta-se que foram muitas correções. A tradução do conteúdo da língua inglesa para a língua portuguesa no intuito de possibilitar a melhor exemplificação foi realizada usando a ferramenta chatgpt, também nesta parte foram realizados ajustes do autor, no aspecto de coerência e coesão da tradução, para se alinhar aos objetivos da pesquisa e gerar a melhor representação gráfica possível.

Delimitou-se a representação gráfica de conteúdos da Geometria Diferencial usando a programação Python relacionadas a cinco curvas e suas respectivas evolutas e involutas, no caso das curvas em $\mathbb{R}^2$ foram as evolutas e no caso das curvas em $\mathbb{R}^3$ foram as involutas, sendo as seguintes curvas: Limaçon com laço, Tractriz, Ciclóide, Hélice circular e Hélice cônica circular.

4.3.1 Curva Limaçon com laço e evoluta da curva

Equação da curva Limaçon com laço $\alpha(t)$ e de sua evoluta $\beta(t)$:

$$\alpha(t) = (b \cos(t) + a \cos^2(t), b \sin(t) + a \cos(t) \sin(t)), \quad (4.14)$$

onde, o parâmetro t varia no intervalo $[0, 2\pi]$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < b < a$.

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \left((\cos(t)) (2 \cos(t) - 1) + \left(\frac{5 - 4 \cos(t)}{9 - 6 \cos(t)} \right) (\cos(t) - 2 \cos(2t)), \right. \\ & \left. (\sin(t)) (2 \cos(2t) - 1) + \left(\frac{5 - 4 \cos(t)}{9 - 6 \cos(t)} \right) (\sin(t) - 2 \sin(2t)) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Representação Geométrica da curva e de sua evoluta:

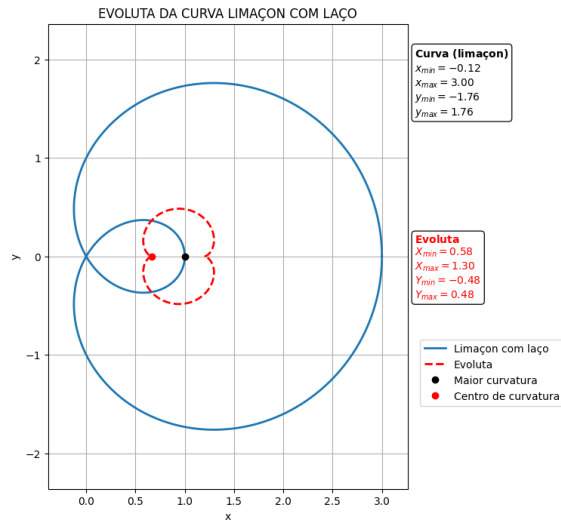


Figura 4.5: curva Limaçon com laço e sua evoluta

4.3.2 Curva Tractriz e sua evoluta

Equações da curva Tractriz $\alpha(t)$ e de sua evoluta $\beta(t)$:

$$\alpha(t) = \left(\sin(t), \cos(t) + \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right) \right) \quad (4.16)$$

$$\beta(t) = \left(\left(\frac{1}{\sin(t)} \right), \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right) \right) \quad (4.17)$$

Representação Geométrica da curva Tractriz e de sua evoluta:

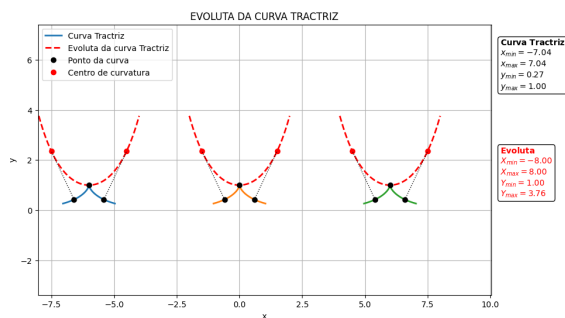


Figura 4.6: Curva Tractriz e sua evoluta

4.3.3 Curva Ciclóide e evoluta da curva

Equações da curva Ciclóide $\alpha(t)$ e de sua evoluta $\beta(t)$:

$$\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \quad (4.18)$$

$$\beta(t) = (t + \sin(t), \cos(t) - 1) \quad (4.19)$$

Representação Geométrica da Ciclóide e de sua evoluta:

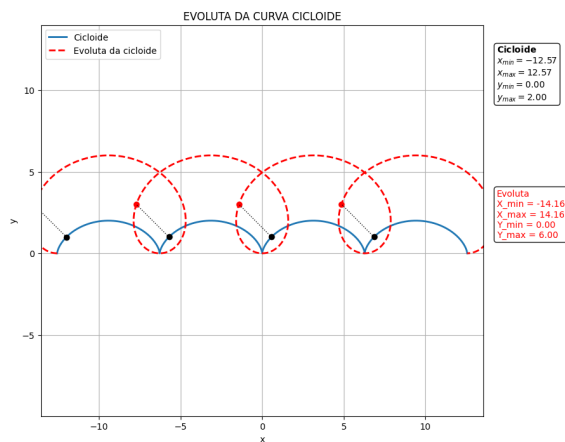


Figura 4.7: Curva Ciclóide e sua evoluta

4.3.4 Curva Hélice circular e involuta da curva

Equações da curva Hélice circular $\alpha(t)$ e de sua involuta $\beta(t)$:

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \left(\cos\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right) - (a-t)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right), \right. \\ & \sin\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right) + (a-t)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right), \\ & \left. \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right) + (a-t)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Representação Geométrica da curva Hélice circular e de sua involuta:

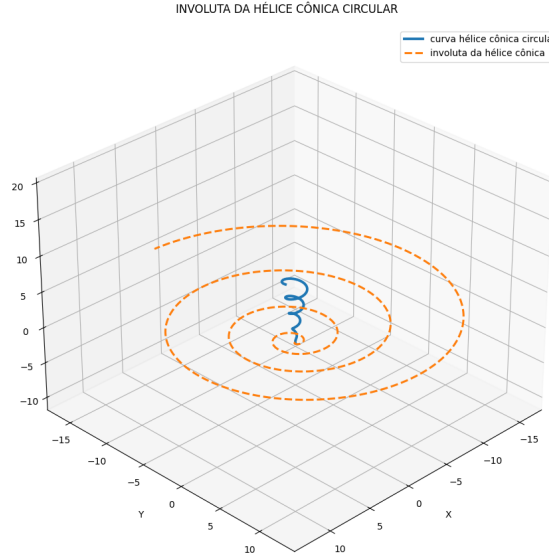


Figura 4.8: Curva Hélice circular e sua involuta

4.3.5 Curva Hélice cônica circular e involuta da curva

Equações da curva Hélice cônica circular $\alpha(t)$ e de sua evoluta $\beta(t)$:

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
\beta = & \left(e^t \cos(t) + (a - \sqrt{3}(e^t - 1)) \left(\frac{\cos(t) - \sin(t)}{\sqrt{3}} \right), \right. \\
& e^t \sin(t) + (a - \sqrt{3}(e^t - 1)) \left(\frac{\cos(t) + \sin(t)}{\sqrt{3}} \right), \\
& \left. e^t + \left(\frac{(a - \sqrt{3})(e^t - 1)}{\sqrt{3}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Representação Geométrica da curva Hélice circular e de sua involuta:

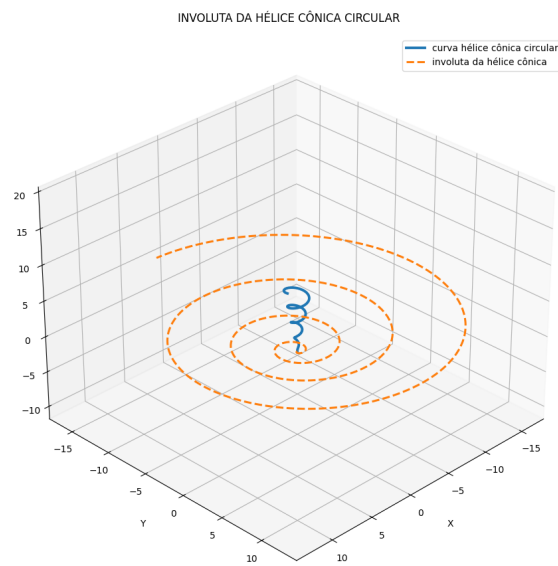


Figura 4.9: Curva Hélice cônica circular e sua Involuta

5 CONCLUSÃO

Observa-se que os resultados demonstram que a implementação de códigos em Python como ferramenta computacional facilita significativamente a compreensão dos conceitos da Geometria Diferencial, evidenciando o potencial da programação para integrar teoria e prática por meio da visualização gráfica.

Para as curvas pesquisadas no plano e espaço euclidiano, os cálculos de curvatura, torção e determinar as equações de Frenet se tornariam complicados, sem o uso dos códigos em Python, de forma que atenda a todas as propriedades das curvas e de suas evolutas e involutas, além disso o uso da programação em Python permitiu inclusive fazer a reparametrização das curvas por um parâmetro qualquer sem a necessidade de aplicar a reparametrização por comprimento de arco, observa-se que curvas não regulares podem ser estudadas na Geometria Diferencial dentro de um intervalo regular, ou seja, por suas características locais. Além disso, os traços das curvas são classes de equivalências de variadas funções vetoriais reparametrizadas por parâmetros diferente e que sendo classes de equivalência então atendem as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

Portanto, considero satisfatória a implementação de códigos em Python para representação gráfica de curvas e de suas evolutas e involutas, destaco que a ferramenta computacional constituiu um recurso eficaz para realizar o estudo e o aprofundamento de conceitos de forma intuitiva, assim contribuindo para uma aprendizagem significativa.

Como desdobramento deste trabalho temos a possibilidade de implementação de códigos de programação em Python para investigar outras curvas e propriedades, explorar as singularidades nas classes de equivalências dos traços das curvas, fazer a representação gráfica em outros espaços euclidianos e investigar como se comportam as funções curvatura e torção e qual a relação com as bases ortonormais neles.

REFERÊNCIAS

BOYER, U. C. M. C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo, SP: Blucher, 2012.

CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo volume 1**. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2013.

LIMA, E. L. **Análise real volume 1: Funções de uma variável**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2014.

LUTZ, M.; ASCHER, D. **Aprendendo Python: Programação orientada a objetos**. 2. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2007.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: ZAHAR, 2012.

TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008.

6 APÊNDICES

6.1 APÊNDICE A

Listing 6.1: Vetores tangentes à curva Tractriz

```
#Biblioteca
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Variável paramétrica
t = sp.symbols('t')
# curva Tractriz
x_t = t - sp.tanh(t)
y_t = 1 / sp.cosh(t)
# Derivadas
dx_dt = sp.diff(x_t, t)
dy_dt = sp.diff(y_t, t)
# Convertendo para funções numéricas
x_func = sp.lambdify(t, x_t, 'numpy')
y_func = sp.lambdify(t, y_t, 'numpy')
dx_func = sp.lambdify(t, dx_dt, 'numpy')
dy_func = sp.lambdify(t, dy_dt, 'numpy')
# Região de maior curvatura (t pequeno)
T = np.linspace(0.01, 1, 400)
X = x_func(T)
Y = y_func(T)
# Vetores tangentes
T_samples = np.linspace(0.05, 1, 10)
Xs = x_func(T_samples)
Ys = y_func(T_samples)
DX = dx_func(T_samples)
DY = dy_func(T_samples)
# Normalização dos vetores
norm = np.sqrt(DX**2 + DY**2)
DXn = DX / norm
DYn = DY / norm
```

```
# Escala dos vetores
scale = 0.25
DXn *= scale
DYn *= scale
# Plotagem
plt.figure(figsize=(7,7))
plt.plot(X, Y, 'b', linewidth=2, label='curva')
plt.quiver(Xs, Ys, DXn, DYn,
           color='red', angles='xy', scale_units='xy', scale=1,
           label='vetores tangentes a curva')

plt.title("")
plt.xlabel("x(t)")
plt.ylabel("y(t)")
plt.axis('equal')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

6.2 APÊNDICE B

Listing 6.2: Representação de involutas de um círculo

```
#Bibliotecas
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#Curva base: círculo parametrizado
def circle(t, R=1):
    x = R * np.cos(t)
    y = R * np.sin(t)
    return x, y
#Derivada da curva (tangente)
def circle_prime(t, R=1):
    dx = -R * np.sin(t)
    dy = R * np.cos(t)
    return dx, dy
#Involuta da curva
def involute_circle(t, R=1):
    # Fórmula clássica da involuta do círculo
    x = R * (np.cos(t) + t * np.sin(t))
    y = R * (np.sin(t) - t * np.cos(t))
    return x, y
#Geração dos dados
t = np.linspace(0, 2*np.pi, 500)
#Curva geradora (círculo)
x_c, y_c = circle(t)
#Involuta
x_i, y_i = involute_circle(t)
#Representação gráfica
plt.figure(figsize=(8,8))
#Curva base
plt.plot(x_c, y_c, label="curva", linewidth=2)
#Involuta da curva
plt.plot(x_i, y_i, label="involuta da curva", linewidth=2)
#Representar a corda desenrolando em alguns pontos
for tt in np.linspace(0, 2*np.pi, 12):
    # Ponto na curva
    xc, yc = circle(tt)
```



```
# Vetor tangente
dx, dy = circle_prime(tt)
# Comprimento da corda até t
L = tt
# A ponta da corda (ponto da involuta)
xi, yi = involute_circle(tt)
#Desenhar a corda
plt.plot([xc, xi], [yc, yi], 'r--', alpha=0.5)

#Ajustes finais

plt.title("REPRESENTACAO GEOMETRICA DA INVOLUTA DE UMA CURVA (CORDA
SENDO DESENROLADA)")

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.axis("equal")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

6.3 APÊNDICE C

Listing 6.3: Involutas de uma curva em $\mathbb{R}^3$

```
#Bibliotecas
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

#Curva base em  $\mathbb{R}^n$ : exemplo de hélice circular
#\alpha (t) = (\cos t, \sin t, t/4)
def curve(t):
    x = np.cos(t)
    y = np.sin(t)
    z = t / 4
    return x, y, z
def curve_prime(t):
    dx = -np.sin(t)
    dy = np.cos(t)
    dz = 1/4
    return dx, dy, dz
#Involuta em  $\mathbb{R}^n$ 
def involute(t):
    x, y, z = curve(t)
    dx, dy, dz = curve_prime(t)
#Norma do vetor tangente
    norm = np.sqrt(dx**2 + dy**2 + dz**2)
#Involuta:  $I(t) = \alpha(t) - t * T(t)$ 
    xi = x - t * dx / norm
    yi = y - t * dy / norm
    zi = z - t * dz / norm
    return xi, yi, zi
#Geração dos dados
t = np.linspace(0, 4*np.pi, 800)
x_c, y_c, z_c = curve(t)
x_i, y_i, z_i = involute(t)
#Representação Gráfica
fig = plt.figure(figsize=(10,10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
```

```

#Curva original
ax.plot(x_c, y_c, z_c, 'k', linewidth=2, label='curva')
#Involuta da curva (AGORA EM VERMELHO)
ax.plot(x_i, y_i, z_i, 'r', linewidth=2, label='involuta da curva')
#Representação da corda desenrolando
for tt in np.linspace(0, 4*np.pi, 15):
    xc, yc, zc = curve(tt)
    xi, yi, zi = involute(tt)
    ax.plot([xc, xi], [yc, yi], [zc, zi],
            'r--', alpha=0.5, label='_nolegend_')
#Ajustes
ax.set_title("REPRESENTACAO GEOMETRICA DA INVOLUTA DE UMA CURVA (CORDA
    SENDO DESENROLADA)")

ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("z")
#Legenda fora do gráfico
ax.legend(loc='upper left', bbox_to_anchor=(1.05, 1))
plt.tight_layout()
plt.show()

```

6.4 APÊNDICE D

Listing 6.4: Ciclóide de Huygens

```
#bibliotecas
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#Configurações da cicloide
R = 1.0                                # Raio do círculo gerador
N = 2000
t = np.linspace(0, 2*np.pi, N)        # Um arco completo (uma crista)
#Parametrização da cicloide
x = R * (t - np.sin(t))
y = R * (1 - np.cos(t))
#Pontos Q e P (início e fim do arco t em [0,2pi])
Q = (float(x[0]), float(y[0]))
P = (float(x[-1]), float(y[-1]))
#Definindo S teórico: horizontalmente Q_x + 4R, mesma altura de Q (ponto
    "teórico")
S_theoretical = (Q[0] + 4*R, Q[1])
#Encontrar índice da cicloide cujo x é mais próximo de S_theoretical[0]
#Se S Teorico estiver fora do alcance de x, avisar e ajustar para o
    limite mais próximo.
if S_theoretical[0] < x.min():
    print("Aviso: S_teorico esta a esquerda de x.min(); ajustando para
        x.min().")

    s_x_target = x.min()
elif S_theoretical[0] > x.max():
    print("Aviso: S_teorico esta a direita de x.max(); ajustando para
        x.max().")

    s_x_target = x.max()
else:
    s_x_target = S_theoretical[0]
idx_s = int(np.argmin(np.abs(x - s_x_target)))
S_on_curve = (float(x[idx_s]), float(y[idx_s])) # ponto S' na cicloide
    mais próximo da posição teórica
#Cálculo numérico de comprimentos
```

```

#diferencial de arco ds/dt
dx_dt = np.gradient(x, t)
dy_dt = np.gradient(y, t)
ds = np.sqrt(dx_dt**2 + dy_dt**2) # ds/dt samples
#comprimento total QP (arco completo)
length_QP = float(np.trapezoid(ds, t))
#comprimento QS (desde índice 0 até idx_s) --> defensivo: garantir idx_s
    >= 1
if idx_s <= 0:
    length_QS = 0.0
    t_QS = t[:1]
    ds_QS = ds[:1]
else:
    t_QS = t[:idx_s+1]
    ds_QS = ds[:idx_s+1]
    length_QS = float(np.trapezoid(ds_QS, t_QS))
#comprimento SR (restante)
length_SR = float(length_QP - length_QS)
#comprimento do segmento PS (entre P e S_teorico)
PS_length = float(np.hypot(P[0] - S_theoretical[0], P[1] -
    S_theoretical[1]))
#Impressões
print("\n--- Comprimentos numéricos ---")
print(f"Comprimento arco QP (total) = {length_QP:.6f}")
print(f"Comprimento arco QS (até x ~ {s_x_target:.6f}) =
    {length_QS:.6f}")

print(f"Comprimento arco SR (restante) = {length_SR:.6f}")
print(f"Comprimento do segmento PS (P até S_teor) = {PS_length:.6f}")
print(f"8R (teórico para arco completo) = {8*R:.6f}")
print(f"4R (teórico para PS) = {4*R:.6f}")
print("Erro relativo (QP vs 8R) =", abs(length_QP - 8*R) / (8*R))
#Círculo gerador nas posições inicial (em Q) e final (em P)
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 300)
xc0 = Q[0] + R * np.cos(theta)
yc0 = Q[1] + R * np.sin(theta)
xc1 = P[0] + R * np.cos(theta)
yc1 = P[1] + R * np.sin(theta)

```

```

#Plotagem
plt.figure(figsize=(12, 6))
#cicloide inteira (QP)
plt.plot(x, y, color='blue', linewidth=2, label='Cicloide (QP)')
#destacar arco QS (desde início até idx_s)
if idx_s > 0:
    plt.plot(x[:idx_s+1], y[:idx_s+1], color='blue', linewidth=3,
             label='Arco QS')
else:
    plt.plot([Q[0]], [Q[1]], color='blue', linewidth=3, label='Arco QS
              (vazio)')
#destacar arco SR (remanescente) para formar QSR visualmente
plt.plot(x[idx_s:], y[idx_s:], color='blue', linewidth=2,
         linestyle='--', label='Arco SR')
#círculos geradores (inic e final)
plt.plot(xc0, yc0, '--', color='black', linewidth=1)
plt.plot(xc1, yc1, '--', color='black', linewidth=1)
#pontos Q, P, S (teórico) e S_on_curve (aproximação na curva)
plt.scatter([Q[0]], [Q[1]], color='red', zorder=6, s=40)
plt.annotate('Q', xy=Q, xytext=(0, 8), textcoords='offset points',
            color='red', ha='center')
plt.scatter([P[0]], [P[1]], color='blue', zorder=6, s=40)
plt.annotate('P', xy=P, xytext=(0, 8), textcoords='offset points',
            color='red', ha='center')
plt.scatter([S_theoretical[0]], [S_theoretical[1]], color='red',
            marker='x', s=80, zorder=7)
plt.annotate('S (teórico)', xy=S_theoretical, xytext=(0, -14),
            textcoords='offset points', color='red', ha='center')
plt.scatter([S_on_curve[0]], [S_on_curve[1]], color='red', marker='o',
            s=50, zorder=7)
plt.annotate("S' (na cicloide)", xy=S_on_curve, xytext=(0, 8),
            textcoords='offset points', color='red', ha='center')
#desenhar segmento PS (entre P e S_teor)
plt.plot([P[0], S_theoretical[0]], [P[1], S_theoretical[1]],
         color='blue', linewidth=3, label='Segmento PS')
#barra horizontal mostrando 8R (referência)
y_bar = min(y) - 0.6 # coloca abaixo da curva para não atrapalhar

```

```
plt.hlines(y_bar, Q[0], Q[0] + 8*R, colors='orange', linestyle='--',  
          linewidth=3, label='8R (referência)')  
plt.text(Q[0] + 4*R, y_bar - 0.12, "8R", ha='center', fontsize=12,  
         color='orange')  
plt.title("CICLOIDE HUYGENS")  
plt.xlabel("x")  
plt.ylabel("y")  
plt.legend()  
plt.grid(True)  
plt.axis('equal')  
plt.tight_layout()  
plt.show()
```

6.5 APÊNDICE E

Listing 6.5: Curva Cissoide de Diocles

```
#Bibliotecas
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy as sp
#Definindo o parâmetro
t = sp.Symbol('t')
#Cissoide de Diocles (paramétrica)
x = 2*t**2 / (1 + t**2)
y = 2*t**3 / (1 + t**2)
#Gerando pontos
t_values = np.linspace(-10, 10, 1200) # Mais pontos para suavidade
x_values = [float(x.subs(t, val)) for val in t_values]
y_values = [float(y.subs(t, val)) for val in t_values]
#Cor da curva
cor_curva = "red"
#Plotagem
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x_values, y_values, color=cor_curva, linewidth=2,
         label='Cissoide de Diocles')
#Ajuste do intervalo do eixo x
plt.xlim(-2, 15)
#Título e rótulos
plt.title('CURVA CISSOIDE DE DIOCLES')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
#Ajuste da posição da legenda
plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1.02, 0.5))
#Grade e aspecto
plt.grid(True)
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.tight_layout()
plt.show()
```


6.6 APÊNDICE F

Listing 6.6: Curva Limaçon com laço e sua evoluta

```
#Bibliotecas
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#Parâmetros da Curva Limaçon com laço
a = 1
b = 2
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 1000)
# Equação polar da curva
r = a + b * np.cos(theta)
#Derivadas
dr_dtheta = -b * np.sin(theta)
d2r_dtheta2 = -b * np.cos(theta)
# Curva (Plano Cartesiano)
x = r * np.cos(theta)
y = r * np.sin(theta)
#Evoluta da curva
r2 = r**2
dr2 = dr_dtheta**2
X = r*np.cos(theta) - ((r2 + dr2)*(r*np.cos(theta) +
    dr_dtheta*np.sin(theta))) / (r2 + 2*dr2 - r*d2r_dtheta2)
Y = r*np.sin(theta) - ((r2 + dr2)*(r*np.sin(theta) -
    dr_dtheta*np.cos(theta))) / (r2 + 2*dr2 - r*d2r_dtheta2)
#Cálculo do ponto de máxima curvatura
curvature = np.abs(r2 + 2*dr2 - r*d2r_dtheta2) / (r2 + dr2)**(3/2)
idx = np.argmax(curvature)
x_max_c, y_max_c = x[idx], y[idx]
X_center, Y_center = X[idx], Y[idx]
#Cálculo dos extremos da curva
xmin, xmax = x.min(), x.max()
ymin, ymax = y.min(), y.max()
Xmin, Xmax = X.min(), X.max()
Ymin, Ymax = Y.min(), Y.max()
#Representação gráfica
plt.figure(figsize=(8, 8))
# Curva e evoluta
```

```

plt.plot(x, y, linewidth=2, label='Limaçon com laço')
plt.plot(X, Y, '--', linewidth=2, color='red', label='Evoluta')
#Pontos especiais
plt.plot(x_max_c, y_max_c, 'ko', label='Maior curvatura')
plt.plot(X_center, Y_center, 'ro', label='Centro de curvatura')
#Ajustes dos eixos x,y
plt.axis('equal')
plt.grid(True)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('EVOLUTA DA CURVA LIMACON COM LACO')

#Ajuste da margem extra no gráfico
plt.xlim(xmin - 0.6, xmax + 0.6)
plt.ylim(ymin - 0.6, ymax + 0.6)
# Ajuste do espaco a direita

plt.subplots_adjust(right=0.72)
#Ajuste da Legenda
plt.legend(
    loc='center left',
    bbox_to_anchor=(1.02, 0.25),
    frameon=True
)
#Ajuste da legenda dos pontos máximos e mínimos da curva
text_curve = (
    r"$\bf{Curva\ (limaçon)}$" "\n"
    f"$x_{\{min\}} = {xmin:.2f}$\n"
    f"$x_{\{max\}} = {xmax:.2f}$\n"
    f"$y_{\{min\}} = {ymin:.2f}$\n"
    f"$y_{\{max\}} = {ymax:.2f}$"
)
plt.text(
    1.02, 0.95, text_curve,
    transform=plt.gca().transAxes,
    fontsize=10,
    verticalalignment='top',
    bbox=dict(boxstyle='round', facecolor='white', alpha=0.9)

```

```

)
#Ajuste da legenda dos pontos máximos e mínimos da evoluta da curva
text_evoluta = (
    r"$\bf{Evoluta}$" "\n"
    f"$X_{\{min\}} = {Xmin:.2f}$\n"
    f"$X_{\{max\}} = {Xmax:.2f}$\n"
    f"$Y_{\{min\}} = {Ymin:.2f}$\n"
    f"$Y_{\{max\}} = {Ymax:.2f}$"
)
plt.text(
    1.02, 0.55, text_evoluta,
    transform=plt.gca().transAxes,
    fontsize=10,
    color='red',
    verticalalignment='top',
    bbox=dict(boxstyle='round', facecolor='white', alpha=0.9)
)
plt.show()

```

6.7 APÊNDICE G

Listing 6.7: Curva Tractriz e sua evoluta

```
#Biblioteca
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy as sp
#Definições simbólicas
t = sp.Symbol('t', real=True)
#Curva tractriz
x = t - sp.tanh(t)
y = 1 / sp.cosh(t)
#Derivadas
x_p = sp.diff(x, t)
y_p = sp.diff(y, t)
x_pp = sp.diff(x_p, t)
y_pp = sp.diff(y_p, t)
#Raio de curvatura
rho = (x_p**2 + y_p**2)**sp.Rational(3, 2) / (x_p*y_pp - y_p*x_pp)
#Vetores
norm = sp.sqrt(x_p**2 + y_p**2)
sin_phi = y_p / norm
cos_phi = x_p / norm
#Evoluta
X = x - rho * sin_phi
Y = y + rho * cos_phi
#Intervalo
t_vals = np.linspace(-2, 2, 500)
shifts = [-6, 0, 6] # 3 repetições
#Pontos marcados
t_marks = [-1.5, 0.0, 1.5]
#Ajustes
all_x, all_y = [], []
all_X, all_Y = [], []
plt.figure(figsize=(10, 6))
#Plotagem
for k, shift in enumerate(shifts):
    x_vals = np.array([float(x.subs(t, v)) for v in t_vals]) + shift
```

```

y_vals = np.array([float(y.subs(t, v)) for v in t_vals])
X_vals = np.array([float(X.subs(t, v)) for v in t_vals]) + shift
Y_vals = np.array([float(Y.subs(t, v)) for v in t_vals])
all_x.extend(x_vals)
all_y.extend(y_vals)
all_X.extend(X_vals)
all_Y.extend(Y_vals)
plt.plot(x_vals, y_vals, linewidth=2,
         label='Curva Tractriz' if k == 0 else "")
plt.plot(X_vals, Y_vals, '--', linewidth=2, color='red',
         label='Evoluta da curva Tractriz' if k == 0 else "")
# Pontos de curvatura
for j, tm in enumerate(t_marks):
    x_pt = float(x.subs(t, tm)) + shift
    y_pt = float(y.subs(t, tm))
    X_pt = float(X.subs(t, tm)) + shift
    Y_pt = float(Y.subs(t, tm))
    plt.plot(x_pt, y_pt, 'ko',
             label='Ponto da curva' if (k == 0 and j == 0) else "")
    plt.plot(X_pt, Y_pt, 'ro',
             label='Centro de curvatura' if (k == 0 and j == 0) else
             "")
    plt.plot([x_pt, X_pt], [y_pt, Y_pt], 'k:', linewidth=1)
#Cálculo de extremos
xmin, xmax = min(all_x), max(all_x)
ymin, ymax = min(all_y), max(all_y)
Xmin, Xmax = min(all_X), max(all_X)
Ymin, Ymax = min(all_Y), max(all_Y)
# Ajustes dos eixos do gráfico
plt.axis('equal')
plt.grid(True)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('EVOLUTA DA CURVA TRACTRIZ')
plt.legend(loc='upper left')
plt.xlim(xmin - 1, xmax + 3)
plt.ylim(min(ymin, Ymin) - 0.5, max(ymax, Ymax) + 0.5)
#Ajustes da legenda da curva no gráfico

```

```

text_curve = (
    r"$\bf{Curva\ Tractriz}$" "\n"
    f"$x_{\{min\}} = {xmin:.2f}$\n"
    f"$x_{\{max\}} = {xmax:.2f}$\n"
    f"$y_{\{min\}} = {ymin:.2f}$\n"
    f"$y_{\{max\}} = {ymax:.2f}$"
)
plt.text(
    1.02, 0.95, text_curve,
    transform=plt.gca().transAxes,
    fontsize=10,
    verticalalignment='top',
    bbox=dict(boxstyle='round', facecolor='white', alpha=0.95)
)
#Ajustes da legenda da evoluta no gráfico
text_evoluta = (
    r"$\bf{Evoluta}$" "\n"
    f"$X_{\{min\}} = {Xmin:.2f}$\n"
    f"$X_{\{max\}} = {Xmax:.2f}$\n"
    f"$Y_{\{min\}} = {Ymin:.2f}$\n"
    f"$Y_{\{max\}} = {Ymax:.2f}$"
)
plt.text(
    1.02, 0.55, text_evoluta,
    transform=plt.gca().transAxes,
    fontsize=10,
    color='red',
    verticalalignment='top',
    bbox=dict(boxstyle='round', facecolor='white', alpha=0.95)
)
plt.show()

```

6.8 APÊNDICE H

Listing 6.8: Curva Ciclóide e sua evoluta

```
#Bibliotecas
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Parâmetros da curva Ciclóide
a = 1.0
t = np.linspace(-4*np.pi, 4*np.pi, 3000) # intervalo simétrico
#Curva cicloide
x = a * (t - np.sin(t))
y = a * (1 - np.cos(t))
#Derivadas
dx = a * (1 - np.cos(t))
dy = a * np.sin(t)
ddx = a * np.sin(t)
ddy = a * np.cos(t)
#Curvatura e raio
speed = np.sqrt(dx**2 + dy**2)
curvature = np.abs(dx*ddy - dy*ddx) / speed**3
rho = 1 / curvature
#Vetor normal unitário
nx = -dy / speed
ny = dx / speed
#Evoluta
X = x + rho * nx
Y = y + rho * ny
#Pontos de curvatura alinhados por período
t0 = np.pi / 2
period = 2 * np.pi
cycles = np.arange(-2, 2) # ciclos negativos e positivos
t_pts = t0 + period * cycles
idx_pts = [np.argmin(np.abs(t - tp)) for tp in t_pts]
#Ajustes de extremos
xmin, xmax = x.min(), x.max()
ymin, ymax = y.min(), y.max()
Xf = X[np.isfinite(X)]
Yf = Y[np.isfinite(Y)]
```

```

Xmin, Xmax = Xf.min(), Xf.max()
Ymin, Ymax = Yf.min(), Yf.max()
#Plotagem
plt.figure(figsize=(9, 8))
#Curva e evoluta
plt.plot(x, y, linewidth=2, label='Cicloide')
plt.plot(X, Y, '--', linewidth=2, color='red', label='Evoluta da
cicloide')
#Pontos de curvatura e vetores normais
for i in idx_pts:
    plt.plot(x[i], y[i], 'ko')
    plt.plot(X[i], Y[i], 'ro')
    plt.plot([x[i], X[i]], [y[i], Y[i]], 'k:', linewidth=1)
#Ajustes do gráfico
plt.axis('equal')
plt.grid(True)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('EVOLUTA DA CURVA CICLOIDE')
plt.xlim(xmin - 1, xmax + 1)
plt.ylim(ymin - 1, ymax + 3)
plt.legend(loc='upper left')
#Ajustes na legenda- curva Ciclóide
text_curve = (
    r"$\bf{Cicloide}$" "\n"
    f"$x_{\{min\}} = {xmin:.2f}$\n"
    f"$x_{\{max\}} = {xmax:.2f}$\n"
    f"$y_{\{min\}} = {ymin:.2f}$\n"
    f"$y_{\{max\}} = {ymax:.2f}$"
)
plt.text(
    1.03, 0.95, text_curve,
    transform=plt.gca().transAxes,
    fontsize=10,
    verticalalignment='top',
    bbox=dict(boxstyle='round', facecolor='white', alpha=0.9)
)
#Ajustes da legenda- evoluta

```



```
text_evoluta = (  
    "Evoluta\n"  
    f"X_min = {Xmin:.2f}\n"  
    f"X_max = {Xmax:.2f}\n"  
    f"Y_min = {Ymin:.2f}\n"  
    f"Y_max = {Ymax:.2f}"  
)  
plt.text(  
    1.03, 0.58, text_evoluta,  
    transform=plt.gca().transAxes,  
    fontsize=10,  
    color='red',  
    verticalalignment='top',  
    bbox=dict(boxstyle='round', facecolor='white', alpha=0.9)  
)  
plt.show()
```

6.9 APÊNDICE I

Listing 6.9: Curva Hélice circular e sua involuta

```
#bibliotecas
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros
r = 1
h = 0.3
t = np.linspace(0, 8 * np.pi, 800)

# Curva Hélice circular
x = r * np.cos(t)
y = r * np.sin(t)
z = h * t

# Vetor tangente
vx = -r * np.sin(t)
vy = r * np.cos(t)
vz = h * np.ones_like(t)
mag_v = np.sqrt(vx**2 + vy**2 + vz**2)
tx = vx / mag_v
ty = vy / mag_v
tz = vz / mag_v

#Comprimento de arco
s = t * np.sqrt(r**2 + h**2)

# Involuta
ix = x - s * tx
iy = y - s * ty
iz = z - s * tz

#Gráfico
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(x, y, z, linewidth=2, label="curva hélice circular")
ax.plot(ix, iy, iz, linewidth=2, linestyle='--',
        label="involuta da hélice circular")
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
ax.set_title('INVOLUTA DA HELICE CIRCULAR')
```

```
ax.legend()  
#Ajustes  
X = np.concatenate([x, ix])  
Y = np.concatenate([y, iy])  
Z = np.concatenate([z, iz])  
set_axes_equal(ax, X, Y, Z)  
plt.show()
```

6.10 APÊNDICE J

Listing 6.10: Curva Hélice cônica circular e sua involuta

```
#Biblioteca
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Função para ajustar os eixos no gráfico
def set_axes_equal(ax, X, Y, Z):
    max_range = np.array([
        X.max() - X.min(),
        Y.max() - Y.min(),
        Z.max() - Z.min()
    ]).max() / 2
    mid_x = (X.max() + X.min()) / 2
    mid_y = (Y.max() + Y.min()) / 2
    mid_z = (Z.max() + Z.min()) / 2
    ax.set_xlim(mid_x - max_range, mid_x + max_range)
    ax.set_ylim(mid_y - max_range, mid_y + max_range)
    ax.set_zlim(mid_z - max_range, mid_z + max_range)

#Parâmetros na visualização do gráfico
a = 0.05      # abertura do cone (antes 0.2)
b = 0.35      # passo vertical
t = np.linspace(0, 8 * np.pi, 1800) # menos crescimento radial

#Curva Hélice cônica circular
x = a * t * np.cos(t)
y = a * t * np.sin(t)
z = b * t

#Vetores tangentes
cvx = a * np.cos(t) - a * t * np.sin(t)
cvy = a * np.sin(t) + a * t * np.cos(t)
cvz = b * np.ones_like(t)

#Módulo do vetor tangente
mag_cv = np.sqrt(cvx**2 + cvy**2 + cvz**2)

#Vetor tangente unitário
ctx = cvx / mag_cv
cty = cvy / mag_cv
ctz = cvz / mag_cv
```

```

#Comprimento de arco
s_conical = np.zeros_like(t)
dt = t[1] - t[0]
s_conical[1:] = np.cumsum(mag_cv[:-1] * dt)

#Involuta
icx = x - s_conical * ctx
icy = y - s_conical * cty
icz = z - s_conical * ctz

#Plotagem
fig = plt.figure(figsize=(11, 9))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(
    x, y, z,
    linewidth=2.8,
    label='curva hélice cônica circular'
)
ax.plot(
    icx, icy, icz,
    linestyle='--',
    linewidth=2.2,
    label='involuta da hélice cônica'
)
ax.set_xlabel('X', labelpad=10)
ax.set_ylabel('Y', labelpad=10)
ax.set_zlabel('Z', labelpad=10)
ax.set_title('INVOLUTA DA HELICE CONICA CIRCULAR', pad=15)

ax.legend()

#Ajuste de escala
X = np.concatenate([x, icx])
Y = np.concatenate([y, icy])
Z = np.concatenate([z, icz])
set_axes_equal(ax, X, Y, Z)

#Ajustes na visualização
ax.view_init(elev=30, azim=45)
plt.tight_layout()
plt.show()

```