



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Câmpus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

Introdução à Teoria dos Conjuntos de Cantor

Paulo Abraão Moreira Brandão

Trabalho de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvio Sandro Alves de Macedo

VALPARAÍSO DE GOIÁS - GO

2026

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor:

Matrícula:

Título do Trabalho:

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Valparaíso de Goiás, 05/03/2026.



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Câmpus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

Introdução à Teoria dos Conjuntos de Cantor

Paulo Abraão Moreira Brandão

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG), Câmpus Valparaíso de Goiás, como parte dos requisitos para a conclusão do Curso e obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Sandro Alves de Macedo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B817i

Brandão, Paulo Abraão Moreira

Introdução à teoria dos conjuntos de Cantor [recurso eletrônico]
/ Paulo Abraão Moreira Brandão.
2026.

Dados eletrônicos (1 arquivo).
48 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Sílvio Sandro Alves de Macedo.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) -
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, câmpus
Valparaíso, 2026.

Modo de acesso: World Wide Web.

Arquivo de texto em formato PDF.

Disponível em: <https://repositorio.ifg.edu.br>.

1. Teoria de conjuntos (matemática). 2. Teorema de Cantor. I.
Título. II. Macedo, Sílvio Sandro Alves de, orient.

CDD 514.32



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS VALPARAÍSO

Termo de Aprovação

PAULO ABRAÃO MOREIRA BRANDÃO

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS CONJUNTOS DE CANTOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Valparaíso de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Monografia defendida e aprovada em 06 de fevereiro de 2026 pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvio Sandro Alves de Macedo
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Bruno de Paula Miranda
Membro Interno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Me. Renno Santos Guedes
Membro Externo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano



Documento assinado digitalmente

RENNO SANTOS GUEDES

Data: 07/02/2026 20:34:16-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Valparaíso de Goiás – GO
2026

Documento assinado eletronicamente por:

- **Bruno de Paula Miranda**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 06/02/2026 18:18:16.
- **Silvio Sandro Alves de Macedo**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 06/02/2026 16:00:51.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 06/02/2026. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 743329

Código de Autenticação: 0f693c016c



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

BR 040, KM 6, Avenida Saia Velha, S/Nº, Área 8, s/n, Parque Esplanada V, VALPARAÍSO DE GOIÁS / GO, CEP 72876-601
(61) 3615-9210 (ramal: 9210)

*Dedico este trabalho ao Senhor Jesus Cristo,
à minha família e aos meus professores.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus que me sustentou até aqui e cuidou de cada detalhe; não me deixou sucumbir, mesmo nos dias mais escuros. Meus pais são os próximos a quem devo agradecimentos, eles me deram apoio material e espiritual para que eu pudesse concluir o curso. Sou grato ao meu orientador, Prof. Dr. Silvio Sandro Alves de Macedo, que cooperou de perto para o meu desenvolvimento; os meus professores em geral deram uma grande contribuição em minha caminhada. Agradeço aos membros da banca por aceitarem contribuir nessa importante parte do processo. Por fim, agradeço aos meus colegas que colaboraram de alguma forma em minha jornada.

RESUMO

A Teoria dos Conjuntos é uma área da Matemática fundada por Georg Cantor (1845-1918) e tornou-se o alicerce da matemática moderna ao permitir tratar todos os objetos matemáticos como coleções de elementos, sejam elas finitas ou infinitas. O objetivo principal deste trabalho é apresentar e demonstrar alguns teoremas de Cantor à luz do conceito de equipotência (um conjunto A é *equipotente* a um conjunto B se existir uma bijeção $f : A \rightarrow B$). O estudo foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica. O primeiro capítulo apresenta a biografia de Cantor e uma linha do tempo com momentos de sua trajetória acadêmica. No segundo capítulo, é exposto noções sobre conjuntos e funções. No terceiro capítulo, apresentamos os teoremas de Cantor relacionados a conjuntos equipotentes ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, bem como a conjuntos não-equipotentes a $\mathbb{N}$; por fim, exibimos a noção de número cardinal, a hipótese do contínuo e dois paradoxos da teoria dos conjuntos.

Palavras-chave: A Teoria dos Conjuntos; teoremas de Cantor; equipotência.

ABSTRACT

Set Theory is a branch of Mathematics founded by Georg Cantor (1845–1918) and became the foundation of modern mathematics by allowing all mathematical objects to be treated as collections of elements, whether finite or infinite. The main objective of this work is to present and prove some of Cantor's theorems in light of the concept of equipotence (a set A is said to be *equipotent* to a set B if there exists a bijection $f : A \longrightarrow B$). The study was carried out through bibliographical research. The first chapter presents Cantor's biography and a timeline highlighting key moments of his academic career. The second chapter introduces basic notions of sets and functions. In the third chapter, Cantor's theorems concerning sets equipotent to the set of natural numbers $\mathbb{N}$, as well as sets not equipotent to $\mathbb{N}$, are presented; finally, the notions of cardinal number, the Continuum Hypothesis, and two paradoxes of set theory are discussed.

Keywords: Set Theory; Cantor's theorems; equipotence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Georg Cantor.	13
Figura 2 – Conjunto A	19
Figura 3 – Diagrama de $A \subseteq B$	20
Figura 4 – Diferença entre A e B	22
Figura 5 – União dos conjuntos A e B	22
Figura 6 – Interseção dos conjuntos A e B	22
Figura 7 – Função f de A em B	24
Figura 8 – Função $g \circ f$	25
Figura 9 – Função χ_B de A em $\{0,1\}$	26
Figura 10 – Ilustração.	28
Figura 11 – Relação R em A	28
Figura 12 – Contagem dos pares até (m,n)	32
Figura 13 – Uma nova decomposição de $\mathbb{R}$	38

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	BIOGRAFIA DE CANTOR	13
2.1	Nascimento e formação	13
2.2	Trabalhos e Carreira	14
2.2.1	Linha do tempo profissional de Cantor	16
3	CONJUNTOS E FUNÇÕES	18
3.1	A linguagem dos conjuntos	18
3.1.1	Notações	18
3.1.2	Conjuntos e subconjuntos	19
3.5.1	Operações com conjuntos	21
3.8	Funções, famílias e relações	24
4	A TEORIA DE CONJUNTOS DE CANTOR	29
4.1	Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis	29
4.11	O conjunto dos números racionais é enumerável	31
4.16	O conjunto dos números reais não é enumerável	33
4.23	O conjunto dos números algébricos	36
4.27	A existência de números transcendentos	38
4.30	O conjunto das partes $\mathcal{P}(\mathbb{N})$	39
4.34	Números Cardinais	41
4.38	A hipótese do contínuo	42
4.39	Paradoxos na Teoria dos Conjuntos	43
4.39.1	O paradoxo de Cantor	43
4.39.2	O Paradoxo de Russel	43
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
	REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Conjuntos é uma área da Matemática fundada por Georg Cantor (1845-1918) e tornou-se o alicerce da matemática moderna (papel anteriormente desempenhado pelo conjunto dos números naturais) ao permitir tratar todos os objetos matemáticos como coleções de elementos, sejam elas finitas ou infinitas (Belna, 2011).

“Cantor formulou algumas questões totalmente originais [...], nesse momento assistia-se ao surgimento de uma nova teoria matemática” (Belna, 2011, p. 89).

Podemos considerar a dissertação de Cantor (1872) como “o registro de nascimento da teoria cantoriana dos conjuntos” (Belna, 2011), “[...] sob sua influência, em trinta anos, de 1870 a 1900, a matemática mudou radicalmente de aspecto” (Belna, 2011, p. 18).

Mas “[...] apesar de sua importância - por construir o próprio fundamento, amplamente aceito, da matemática -, ela ainda é pouco conhecida” (Belna, 2011, p. 129).

Nosso ponto de partida será esta observação: para saber se dois conjuntos finitos A e B têm a mesma quantidade de elementos basta realizarmos as contagens em cada um deles. Se A tiver n elementos e B tiver n , então concluímos que A e B têm a mesma quantidade de elementos.

A generalização da observação acima para conjuntos infinitos é feita a partir do conceito de equipotência, introduzido por Cantor: um conjunto A é *equipotente* a um conjunto B , designado por $A \sim B$, se existir uma bijeção $f : A \rightarrow B$.

Assim, conjuntos finitos com a mesma quantidade de elementos são equipotentes.

O conceito de conjuntos equipotentes permite a comparação de conjuntos sem a necessidade de contagem, que só é possível no caso de conjuntos finitos. Antes de Cantor, acreditava-se que todos os conjuntos infinitos eram equipotentes (Lipschutz, 1976).

Galileu já tinha observado a existência de uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos (Boyer; Merzbach, 2012), o que parecia contrariar uma das noções comuns nos Elementos de Euclides que o “todo é maior que sua parte”.

Mas a afirmação de Euclides é válida apenas no caso finito. Um conjunto é infinito precisamente quando ele estiver em bijeção com algum de seus subconjuntos próprios; essa definição foi primeiramente dada por Dedekind (Belna, 2011).

“Nas cartas enviadas a Dedekind no final do ano de 1873 é que Cantor se questionou, pela primeira vez, sobre a distinção entre enumerável e contínuo” (Belna, 2011, p. 95). Finito, enumerável e contínuo são as “três noções essenciais da matemática cantoriana” (Belna, 2011, p. 92).

Diz-se que um conjunto A é *enumerável*¹ quando existir uma bijeção $f : A \rightarrow \mathbb{N}$,

¹ O termo - tradução da expressão que se pode contar até o infinito - foi forjado por Cantor.

isto é, quando $A \sim \mathbb{N}$. Como veremos neste trabalho, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis.

“ [...] Cantor distinguia duas classes de conjuntos [...]: a primeira contém todos os conjuntos enumeráveis [...]; enquanto a segunda incluía todos aqueles capazes de serem colocados em bijeção com um intervalo contínuo” (Belna, 2011, p. 117-118).

Como veremos neste trabalho, $\mathbb{R}$ não é enumerável porque não existe uma bijeção entre o intervalo $[0, 1]$ e o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Esse é um dos importantes resultados obtidos por Cantor.

Se existir uma bijeção entre dois conjuntos A e B dizemos que eles têm o mesmo *número cardinal*.

O conceito de cardinal generaliza a ideia de número de elementos para conjuntos infinitos. Dizemos que o conjunto $\mathbb{N}$ possui cardinal $\aleph_0$, enquanto o conjunto $\mathbb{R}$ possui cardinal c . Todo conjunto equipotente a $\mathbb{N}$ possui cardinal $\aleph_0$, assim como todo conjunto equipotente a $\mathbb{R}$ possui cardinal c .

Vamos denotar a *cardinalidade* de um conjunto A qualquer por $|A|$. Assim, pelo que já dissemos, $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ e $|\mathbb{R}| = c$.

Diz-se que a família $\mathcal{P}(A)$ de todos os subconjuntos de um conjunto A é o *conjunto das partes* de A . Assim $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Veremos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é equipotente a $\mathbb{R}$, isto é $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$.

Dizemos que o cardinal de um conjunto A é menor do que o cardinal de um conjunto B , denotado por $|A| < |B|$, se existir uma função injetiva de A em B , mas A não for equipotente a B .

Conforme provado por Cantor, na segunda parte das *Beiträge* (Cantor, 1897), o cardinal de qualquer conjunto A é menor do que o cardinal de $\mathcal{P}(A)$.

Uma vez que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, podemos construir uma sequência infinita de conjuntos não-equipotentes:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \dots$$

Cantor “[...] descobriu que existe uma infinidade de diferentes infinitos numéricos” (Belna, 2011, p. 19).

Como $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, temos que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$. Portanto $\aleph_0 < c$. É natural questionar se existe algum número cardinal β tal que $\aleph_0 < \beta < c$.

Historicamente, Cantor defendeu a conjectura, conhecida como a *Hipótese do Contínuo*, segundo a qual não existe cardinal estritamente intermediário entre $\aleph_0$ e c , isto é, a resposta a essa questão seria negativa. “[...] na conclusão [de *Uma contribuição para a teoria dos conjuntos* (1878)], ele [Cantor] formulava pela primeira vez a hipótese do contínuo” (Belna, 2011, p. 106).

Em 1963, foi demonstrado que a Hipótese do Contínuo é independente dos axiomas da Teoria dos Conjuntos, de modo análogo ao fato de o Quinto Postulado de Euclides ser independente dos demais axiomas da geometria (Lipschutz, 1976), isto é, a

hipótese do contínuo não pode ser nem demonstrada nem refutada no âmbito dessa teoria.

“Ao inscrever o infinito no cerne da matemática, Cantor modificou radicalmente o aspecto desta disciplina, encontrando a solução para problemas antigos e suscitando novos questionamentos. Ninguém poderá ignorar suas contribuições relativamente à análise, à topologia e sobretudo ao fundamento da matemática: Cantor revolucionou sua disciplina, situando-se ao mesmo tempo em uma tradição, cujos primeiros atores haviam sido Bolzano e Weierstrass, além dos continuadores Zermelo, Hilbert e Gödel. Aliás, a pesquisa sobre a teoria dos conjuntos é um domínio da matemática que se mantém ativo e aqueles que trabalham atualmente sobre os cardinais inacessíveis, a axiomática da teoria dos conjuntos e a cardinalidade do contínuo, por exemplo, são os herdeiros de Cantor” (Belna, 2011, p. 257).

O objetivo principal deste trabalho é apresentar e demonstrar alguns teoremas fundamentais de Cantor. Esses teoremas decorrem de trabalhos publicados por Cantor, os quais deram origem à Teoria dos Conjuntos e à Teoria dos Números Transfinitos. Ao longo do texto, serão mencionados alguns desses trabalhos e resultados relevantes para o desenvolvimento deste TCC.

Adotamos como metodologia a pesquisa bibliográfica, incluindo, em alguns casos, a consulta às fontes originais. Todo o material em língua estrangeira foi traduzido com o auxílio do ChatGPT². O trabalho está dividido em três capítulos.

Considerando a importância de Cantor na história da matemática e para o desenvolvimento deste trabalho, o primeiro capítulo apresenta uma seção dedicada à sua biografia e outra contendo uma linha do tempo, com destaque para os principais momentos de sua trajetória acadêmica.

O segundo capítulo é dedicado à apresentação de noções sobre conjuntos e funções. Na primeira seção, expõem-se notações, alguns conjuntos que serão utilizados ao longo do trabalho e operações entre conjuntos. A segunda seção apresenta a definição de função, demonstra algumas de suas propriedades, as quais serão úteis na prova de proposições e teoremas, e define famílias e relações.

O terceiro capítulo expõe a definição de conjuntos equipotentes. Em seguida, são apresentados alguns teoremas de Cantor relacionados a conjuntos equipotentes ao conjunto dos números naturais, bem como a conjuntos que não são equipotentes a $\mathbb{N}$. Em seguida se enuncia e prova o teorema central deste trabalho: $\mathbb{R}$ é equivalente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Teorema 4.33); essa demonstração utiliza o Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein. Por fim, há três seções, uma traz uma noção de número cardinal para conjuntos infinitos, outra trata sobre a hipótese do contínuo e a última tem dois paradoxos famosos da teoria dos conjuntos.

“[...] a teoria cantoriana tem apenas um século e, certamente, ainda não produziu todos os seus frutos” (Belna, 2011, p. 21), ela se tornou “[...] um clássico e a obra de

² Disponível em: <https://chat.openai.com/>.

Cantor ainda é objeto de numerosos estudos de ordem histórica, epistemológica ou puramente matemática” (Belna, 2011, p. 258).

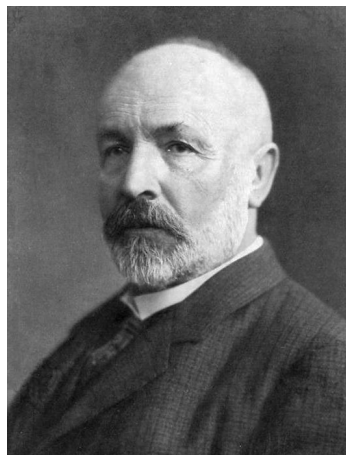
2 BIOGRAFIA DE CANTOR

Neste capítulo apresenta-se a trajetória de Cantor, com ênfase em sua atuação profissional, bem como em sua formação e nos trabalhos por ele desenvolvidos. As informações aqui apresentadas foram elaboradas com base no livro Cantor (Belna, 2011).

2.1 NASCIMENTO E FORMAÇÃO

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, mais conhecido como Georg Cantor, nasceu em São Petersburgo, na Rússia, em 1845. Seu pai, Georg Waldemar Cantor, era protestante, comerciante bem-sucedido e grande admirador da cultura e das artes; sua mãe, Maria Anna Böhm, era católica, convertida à religião do marido, e possuía habilidade musical, sendo provável que Cantor tenha herdado dela o talento para tocar violino. Observa-se, assim, que Cantor cresceu em um ambiente culturalmente rico, no qual seu pai não mediu esforços para lhe proporcionar uma sólida educação e formação escolar.

Figura 1 – Georg Cantor.



Fonte: Wikipédia, vista em 11 de nov. 2025.

O jovem Cantor recebeu a educação mais abrangente possível dentro das condições proporcionadas por seu pai, que reiterava a importância do cultivo do sentimento religioso, da aprendizagem de línguas estrangeiras, do valor das “humanidades” para o desenvolvimento do espírito e do estudo em diversas disciplinas científicas. Seu ensino médio foi cursado como interno no Liceu de Darmstadt. Reconhecendo a grande capacidade do filho, o pai de Cantor escreveu-lhe, em 1860, uma carta na qual declarava: “Se Deus quiser, [você será] mais tarde, talvez, uma estrela brilhante no firmamento da ciência”. Cantor submeteu-se à vontade paterna e conservou essa carta por toda a sua vida.

Em 1861, Cantor decidiu dedicar-se à matemática. Após concluir o bacharelado e obter o consentimento do pai, ingressou na Escola Politécnica de Zurique, em 1862. A morte do pai, em 1863, obrigou-o a abandonar Zurique e prosseguir seus estudos na Universidade de Berlim. À época, a Universidade de Berlim atraía numerosos estudantes, pois contava com um trio de renomados matemáticos — Kummer, Weierstrass e Kronecker — cujas palestras Cantor frequentou. Em Berlim, além de matemática, estudou também física e filosofia.

Cantor obteve o diploma universitário em 1867 e defendeu uma dissertação na área de teoria dos números, da qual se extrai a seguinte ideia: “Na matemática, a arte de formular questões é mais estimulante do que a de resolvê-las” (Cantor, 1867 apud Belna, 2011, p. 27). Seus trabalhos posteriores ainda se dedicaram à aritmética e à álgebra, incluindo a tese de doutorado, defendida em 1869. A decisão de abordar esses temas possivelmente se deveu à influência de Kronecker. Nesse mesmo período, em 1869, Cantor iniciou suas atividades em Halle, atuando como assistente remunerado pelos estudantes.

2.2 TRABALHOS E CARREIRA

Em 1870, Cantor voltou-se para a análise, em particular para o estudo das séries trigonométricas. A dissertação mais importante nesse tema — *Sobre a extensão de um teorema relativo à teoria das séries trigonométricas* — foi publicada em 1872. Nela é apresentada, também, a teoria de Cantor sobre os números reais, na qual, especificamente, os números irracionais são definidos como limites de determinadas sequências de números racionais.

Em seguida, Cantor tomou uma nova direção em suas pesquisas. Em 1873, formulou a questão: “como demonstrar a existência de dois infinitos distintos?” (Belna, 2011, p. 28–29), sem ainda se dar conta de sua grande importância. A prova dessa questão foi publicada no *Journal de Crelle*, em 1874. Por fim, Cantor esboçou a teoria dos conjuntos na introdução da dissertação publicada em 1878, intitulada *Uma contribuição para a teoria dos conjuntos*.

Cantor publicou uma série de seis artigos intitulada *Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos na revista Mathematische Annalen*, no período de 1879 a 1884. A quinta dessas dissertações foi posteriormente editada e publicada separadamente, recebendo o título *Grundlagen*.

Um encontro decisivo em sua carreira ocorreu durante suas férias na Suíça, em 1872, quando Cantor dialogou com o matemático Richard Dedekind (1831–1916). A partir desse encontro iniciou-se uma amizade e uma intensa troca de correspondências, cujo conteúdo é fundamental para a compreensão do surgimento da teoria dos conjuntos. Dedekind foi responsável por formular a primeira — e ainda hoje utilizada — definição de conjunto infinito: um conjunto diz-se infinito se puder ser colocado em bijeção com

algum de seus subconjuntos próprios.

Em 1881, Cantor entrou em contato com o matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846–1927), fundador da revista *Acta Mathematica*, que lhe propôs a publicação, em francês, da maior parte de seus artigos produzidos desde 1872. Sua última contribuição enviada à revista data de 1885.

As correspondências trocadas entre Cantor e o matemático sueco, no período de 1883 a 1884, revelam sua busca por solucionar a hipótese do contínuo; dessa tentativa surgiu a teoria dos tipos de ordem. Nesse período da década de 1880, os trabalhos de Cantor não eram bem acolhidos na Alemanha, ao contrário do que ocorria na França. O jovem Henri Poincaré foi um dos matemáticos que se apoiaram nas ideias de Cantor para o desenvolvimento de suas pesquisas.

Cantor passou um período dedicado ao estudo, mas sem publicar trabalhos na área da matemática; nessa fase, voltou-se também a outras áreas, como a filosofia e a religião, o que sua vasta formação lhe permitia. Em 1889, retornou publicamente à matemática e publicou, em 1891, o texto Sobre uma questão elementar da teoria dos conjuntos, no qual demonstrou a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$ de forma mais simples do que a apresentada em seu trabalho de 1874. Houve, entretanto, dificuldades para a publicação dessa prova, pois “[...] a primeira parte de *Contribuições para o fundamento da teoria dos conjuntos transfinitos* (as *Beiträge*) foi publicada apenas em 1895” (Belna, 2011, p. 46).

A teoria cantoriana apresentou paradoxos e deixou em aberto a solução de alguns problemas; isso, contudo, não desestimulou os pesquisadores, que, pelo contrário, prosseguiram na busca por respostas. O próprio Cantor apresentou algumas propostas, registradas em cartas enviadas a Dedekind em 1899, as quais constituem seus últimos escritos na área da matemática.

Em 1890, ainda não existia uma associação exclusivamente dedicada aos matemáticos alemães; estes estavam vinculados à Sociedade dos Especialistas em Ciências Naturais e dos Médicos Alemães (*Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* — GDNA). Cantor, então, levou adiante uma ideia originalmente proposta por Clebsch, da qual resultou a fundação da União dos Matemáticos Alemães (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung* — DMV), cuja sessão inaugural ocorreu em Halle, em 1891.

Cantor, contudo, não se deu por satisfeito, pois seu salário não lhe permitia realizar viagens com frequência, o que dificultava o estabelecimento de contatos internacionais. Nesse contexto, surgiu a ideia de criar uma organização mundial de matemáticos. A DMV recusou-se a aceitar seu projeto em 1895; entretanto, a Sociedade Matemática da França acolheu a proposta, e o primeiro Congresso Internacional de Matemáticos foi realizado em Zurique, em 1897.

Com isso, os trabalhos de Cantor ganharam maior notoriedade. O matemático David Hilbert incluiu a hipótese do contínuo entre os principais problemas à espera de

solução no início do século XX e destacou a obra de Cantor como “o melhor produto do gênio matemático e uma das maiores conquistas da atividade humana puramente intelectual”.

2.2.1 LINHA DO TEMPO PROFISSIONAL DE CANTOR

A seguir, apresenta-se uma referência cronológica, com destaque para os principais momentos da trajetória profissional de Cantor. Esse recorte foi elaborado com base no livro Cantor (Belna, 2011).

- 1845 – Nasce George Cantor, na cidade de São Petersburgo (Rússia).
- 1862 – Ingressa na Escola Politécnica de Zurique com o objetivo de dedicar-se à Matemática.
- 1863 – Cantor vai estudar matemática em Berlim, sob a direção de Kummer, Weierstrass e Kronecker.
- 1867 – Aquisição do diploma da universidade de Berlim.
- 1869 – Começa a ensinar na Universidade de Halle, perto de Leipzig, onde permanecerá por toda a vida.
- 1872 – Cantor publica sua “teoria dos irracionais”, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Sobre a extensão de uma proposição da teoria das séries trigonométricas), e exerce a função de professor adjunto. Conhece Dedekind, que tinha acabado de publicar *Continuidade e números racionais*.
- 1874 – Publica sua primeira demonstração da não enumerabilidade de $\mathbb{R}$ em *Ueber eine eigenschaft des inbegriffes aller reellen algebraischen zahlen* (Sobre uma propriedade do conjunto de todos os números reais algébricos).
- 1878 – Publica *Ein Beitrage zur Mannigfaltigkeitslehre* (Uma contribuição para a teoria dos conjuntos).
- 1879 – Inicia a publicação da série de textos *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos), concluída em 1884. Torna-se professor titular.
- 1882 – Começa uma amizade com Mittag-Leffler, que acabava de fundar a revista *Acta Mathematica*.
- 1884 – Viaja a Paris, cidade em que ele descobre ser reconhecido por jovens matemáticos, entre os quais Poincaré.
- 1890 – Cantor é cofundador da União dos Matemáticos Alemães (*Deutsch Mathematiker Vereinigung*)
- 1891 – Ocorreu a primeira reunião da Associação, em Halle. Cantor foi eleito presidente.

- 1892 – Publica uma nova demonstração da não enumerabilidade de $\mathbb{R}$, Über eine elementare Frage zur Mannigfaltigkeitslehre (Sobre uma questão elementar da teoria das multiplicidades).
- 1895-97 – Publica "*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (Contribuições para o futuro da teoria dos conjuntos transfinitos). Descoberta dos primeiros paradoxos da teoria dos conjuntos.
- 1897 – Ocorre o primeiro congresso internacional dos matemáticos. Várias comunicações referem-se aos trabalhos de Cantor.
- 1899 – Cantor propõe sua interpretação dos paradoxos.
- 1902 – Descoberta, por Russell, do "paradoxo" que leva seu nome ¹.
- 1908 – Axiomatização da teoria dos conjuntos por Zermelo ².
- 1913 – Cantor pede aposentadoria antecipada.
- 1918 – Cantor morre no dia 6 de janeiro na clínica psiquiátrica de Halle.

¹ Veja a seção 4.39.2

² "Seu objetivo consistia em fornecer uma lista de axiomas que permitisse determinar a noção de conjunto sem deixá-la exposta às antinomias [paradoxos], mas preservando suas diversas aplicações" (Belna, 2011, p. 174). Zermelo enunciou sete axiomas, um deles é o axioma da especificação, dado um conjunto A e uma propriedade $P(x)$, existe um conjunto M cujos elementos são os elementos de A que satisfazem a propriedade $P(x)$. Simbolicamente, $M = \{x \in A \mid P(x)\}$.

3 CONJUNTOS E FUNÇÕES

Neste capítulo apresentaremos algumas noções fundamentais da teoria elementar dos conjuntos que nos servirão de fundamento para todo o desenvolvimento do trabalho; definiremos função e provaremos algumas de suas propriedades necessárias para demonstrarmos o Teorema 4.33.

3.1 A LINGUAGEM DOS CONJUNTOS

A noção de conjunto alicerça toda a matemática, “a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos” (Lima et al., 2005). Na essência da matemática estão os números e o espaço, por essa razão os conjuntos mais comuns são os numéricos, o conjunto das figuras geométricas (conjunto de pontos) e os conjuntos gerados através destes (conjuntos de funções, de matrizes etc).

A matemática, de modo geral, é apresentada pela linguagem dos conjuntos, que “ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica.” (Lima et al., 2005).

Na segunda dissertação de uma série de seis artigos, denominada *Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos*¹ e publicada em 1880

“[...] Cantor introduziu certo número de notações para noções relativas aos conjuntos que se tornariam clássicas: identidade e equivalência de dois conjuntos, conjuntos disjuntos, reunião e interseção de um número finito ou infinito de conjuntos, inclusão de um conjunto em outro, criação - por pura comodidade - de um símbolo ('O') para o conjunto vazio que, 'rigorosamente falando, não é um verdadeiro conjunto', afirmava Cantor” (Belna, 2011, p. 118-119).

3.1.1 NOTAÇÕES

Geralmente os conjuntos são denotados por letras maiúsculas $A, B, C, X, Y, Z, \dots$ e elementos de um conjunto por letras minúsculas $a, b, c, x, y, z, \dots$. Há exceções, por exemplo, retas (que são conjuntos de pontos) são denotas por letras minúsculas $r, s, t, \dots$ e pontos por letras maiúsculas $A, B, C, \dots$.

Quando um elemento a pertence a um conjunto A , escrevemos $a \in A$. Por outro lado, se a não pertence a A , escrevemos $a \notin A$.

Cantor apresenta uma definição para conjuntos em seu trabalho *Grundlagen*²: “por conjunto, entendo, de maneira geral, qualquer pluraridade que possa ser pensada como uma unidade, ou seja, qualquer coleção de elementos determinados que possa ser combinada em um todo por uma lei” (Belna, 2011, p. 157-158).

¹ Título original, em alemão: Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten

² No livro de Belna não há uma tradução para o termo *Grundlagen*, o Chat GPT traduz como fundamentos, bases ou princípios fundamentais.

“O conceito de conjunto ‘abstrato’ aparece em Cantor apenas em 1882” (Belna, 2011, p. 130).

Há basicamente três maneiras de representar um conjunto. A primeira delas é escrever os elementos do conjunto entre chaves.

Por exemplo, o conjunto dos números naturais é denotado por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

“A importância dos números naturais provém do fato de que eles constituem o modelo matemático que torna possível o processo de contagem. Noutras palavras, eles respondem as perguntas do tipo: ‘quantos elementos tem esse conjunto?’” (Lima et al., 2005, p.38).

O conjunto dos números inteiros é denotado por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

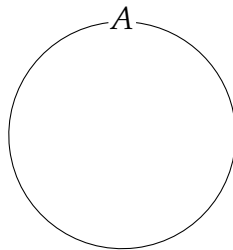
Também podemos representar um conjunto a partir de uma propriedade satisfeita por todos os seus elementos. Por exemplo $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é um quadrado perfeito}\}$ é o conjunto formado por todos os números naturais que são quadrados perfeitos.

O conjunto dos números racionais também é representado dessa forma:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\}.$$

Conjuntos também podem ser representados usando diagramas, que são figuras limitadas no plano:

Figura 2 – Conjunto A.



Fonte: elaborado pelo autor.

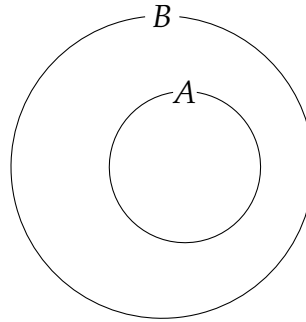
3.1.2 CONJUNTOS E SUBCONJUNTOS

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais quando eles possuem os mesmos elementos. Denotamos essa igualdade por $A = B$.

Exemplo 3.2. O conjunto $A = \{2, 3, 5, 7\}$ é igual ao conjunto $B = \{7, 3, 2, 5\}$ pois eles têm os mesmos elementos.

Se cada elemento que pertence ao conjunto A também pertence ao conjunto B , dizemos que A está contido em B . Denotamos isso por $A \subseteq B$.

Figura 3 – Diagrama de $A \subseteq B$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Exemplo 3.3. O conjunto dos naturais ímpares $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ está contido em $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

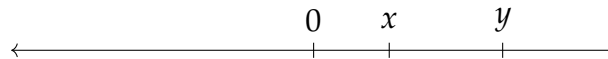
Decorre das definições acima que $A = B$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

É conveniente denotar por $\emptyset$ ao conjunto que não possui nenhum elemento. Ele é chamado de conjunto vazio.

Para qualquer conjunto A temos que $\emptyset \subseteq A$. De fato, se $\emptyset$ não estivesse contido em A , então existiria $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$, o que contraria a definição de $\emptyset$.

Uma consequência das observações anteriores é que só pode existir um único conjunto vazio. De fato, se $\emptyset$ e $\emptyset'$ são conjuntos vazios, então $\emptyset \subseteq \emptyset'$ e $\emptyset' \subseteq \emptyset$. Portanto $\emptyset = \emptyset'$.

Exemplo 3.4. O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbb{R}$ e é representado por um conjunto de pontos denominado reta real.



A representação de $\mathbb{R}$ como pontos sobre uma reta nos permite interpretar a desigualdade de números reais $x < y$ do seguinte modo: o ponto x está à esquerda do ponto y . Então, pomos $x \leq y$ para significar que $x < y$ ou $x = y$.

Uma propriedade importante da desigualdade $\leq$, que podemos visualizar diretamente na reta real é a seguinte:

Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

Aos segmentos de reta real correspondem subconjuntos de $\mathbb{R}$ denominados intervalos. Eles são assim definidos:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\} \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} & (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R}; x < b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} & (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}
\end{aligned}$$

Definição 3.5. O módulo de $x \in \mathbb{R}$, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Geometricamente, $|x|$ é a distância do ponto x à origem da reta real.

É conhecido desde a Grécia antiga que o número $\sqrt{2}$ não é racional, isto é, não pode ser representado como o quociente de dois números inteiros. Todo número natural é evidentemente um número inteiro, isto é $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Como todo inteiro $m \in \mathbb{Z}$ é da forma $\frac{m}{1}$, temos também $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Assim temos a seguinte cadeia de inclusões:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Diz-se que um conjunto B é um subconjunto *próprio* de A se $B \subseteq A$ e $B \neq A$. Por exemplo, os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$.

Diz-se que a família $\mathcal{P}(A)$ de todos os subconjuntos de um conjunto A é o *conjunto das partes* de A . Assim,

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

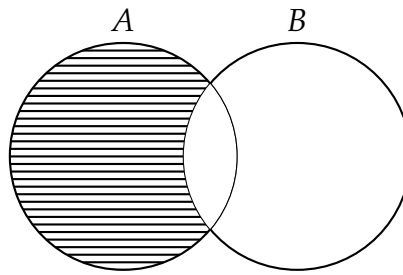
Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$, então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

3.5.1 OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

Nesta seção, definiremos as operações de diferença, união e interseção de conjuntos, isto é, atribuímos novos conjuntos a pares de conjuntos A e B .

A *diferença* entre os conjuntos A e B , denotada por $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A , mas que não pertencem a B . Assim

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

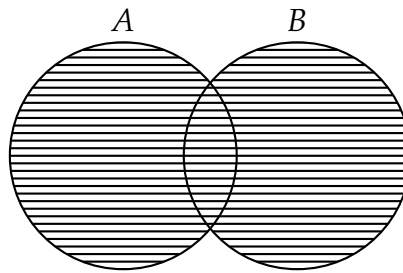
Figura 4 – Diferença entre A e B .

Fonte: elaborado pelo autor.

Exemplo 3.6. O conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais pode ser denotado por $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

A *união* de dois conjuntos A e B , denotada por $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou B . Assim

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

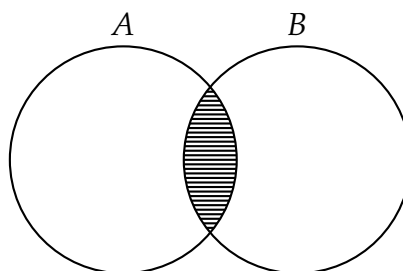
Figura 5 – União dos conjuntos A e B .

Fonte: elaborado pelo autor.

Exemplo 3.7. Como todo número real é racional ou irracional, temos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

A *interseção* dos conjuntos A e B , denotada por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também pertencem a B . Assim

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Figura 6 – Interseção dos conjuntos A e B .

Fonte: elaborado pelo autor.

Se os conjuntos A e B não têm elementos em comum, então diremos que A e B são disjuntos, e denotamos isso por $A \cap B = \emptyset$.

3.8 FUNÇÕES, FAMÍLIAS E RELAÇÕES

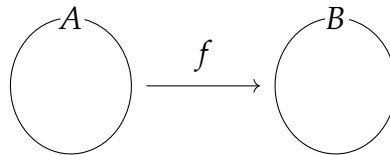
“Para contar os elementos de um conjunto é necessário usar a noção de correspondência biunívoca, ou bijeção. Trata-se de um caso particular do conceito de função” (Lima et al., 2005, p.38).

Definição 3.9. Dados os conjuntos A e B não vazios, uma função $f : A \rightarrow B$ é uma regra que associa, a cada elemento $a \in A$, um único elemento $b \in B$.

Como um exemplo negativo, a regra $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, g\left(\frac{m}{n}\right) = (m, n)$ não define uma função. De fato, $1/2 = 2/4$, porém $f(1/2) \neq f(2/4)$.

O conjunto A é chamado domínio e o conjunto B se chama contradomínio de f . Se f associa $a \in A$ ao elemento $b \in B$, escrevemos $b = f(a)$.

Figura 7 – Função f de A em B .



Fonte: elaborado pelo autor.

Quando as funções $f : A \rightarrow B$ e $g : A \rightarrow B$ são tais que $f(a) = g(a)$ para cada $a \in A$, dizemos que f e g são iguais e escrevemos $f = g$.

Definição 3.10. Uma função $f : A \rightarrow B$ diz-se injetiva se, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$,

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Por exemplo, a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n$ é injetiva pois, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $f(m) = f(n) \Rightarrow 2m = 2n \Rightarrow m = n$.

Outro exemplo de função injetiva. Seja A um conjunto qualquer; a função $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ definida por $g(a) = \{a\}$ é injetiva pois $\{a\} = \{b\}$ implica $a = b$.

Definição 3.11. Uma função $f : A \rightarrow B$ diz-se sobrejetiva se para todo $b \in B$ existir $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Por exemplo, a função $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $g(m, n) = \frac{m}{n}$ é sobrejetiva. Note que g não é injetiva pois $g(1, 2) = g(2, 4)$.

Definição 3.12. Uma função f diz-se bijetiva quando ela é injetiva e sobrejetiva.

Em outras palavras, uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetiva se para qualquer $b \in B$ existir um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Exemplo 3.13. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é bijetiva. De fato, $y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$. Assim, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 3.14. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função $f : \mathbb{N} \times \{n\} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(m, n) = m$, é uma bijeção. De fato, $f(m_1, n) = f(m_2, n) \Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow (m_1, n) = (m_2, n)$, logo f é injetiva. Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos $f(m, n) = m$, portanto f é sobrejetiva e, conseqüentemente, uma bijeção.

Exemplo 3.15. A função identidade $\text{id} : A \rightarrow A$ definida por $\text{id}(a) = a$, para todo $a \in A$, é uma bijeção.

Seja $f : A \rightarrow B$ uma bijeção. Defina $f^{-1} : B \rightarrow A$ pela seguinte regra: para cada $b \in B$, ponha $f^{-1}(b) = a$ quando $f(a) = b$. Afirmamos que f^{-1} é uma função bijetiva.

De fato, como f é uma bijeção, para cada $b \in B$ existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$, isto é, $f^{-1}(b) = a$. Logo f^{-1} é uma função.

Agora, como f é uma função, para cada $a \in A$ existe um único $b \in B$ tal que $f(a) = b$, isto é, $f^{-1}(b) = a$. Logo f^{-1} é uma bijeção.

A função f^{-1} é chamada de *função inversa* da função f .

Proposição 3.16. Se $f : A \rightarrow B$ é uma bijeção, então $f^{-1} : B \rightarrow A$ é uma função bijetiva.

Por exemplo, a inversa da função $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é a função $g(x) = \frac{x-b}{a}$. De fato, $y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$. Pondo x como variável livre, $g(x) = \frac{x-b}{a}$.

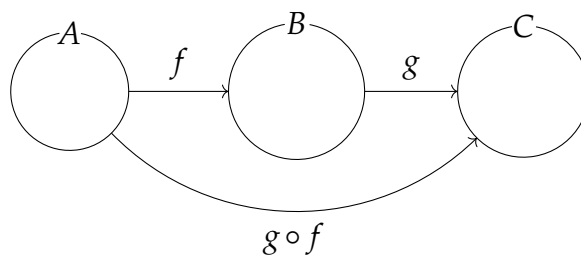
Dadas as funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$. A regra $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ define uma função $g \circ f : A \rightarrow C$, chamada *composição* de g com f .

De fato, como f e g são funções, dados quaisquer $a_1, a_2 \in A$ com $a_1 = a_2$, temos $f(a_1) = f(a_2)$ e $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Assim $g \circ f$ é uma função.

Assim podemos enunciar a

Proposição 3.17. Dadas duas funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$. A regra $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ define uma função $g \circ f : A \rightarrow C$, chamada *composição* de g com f .

Figura 8 – Função $g \circ f$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Proposição 3.18. *Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ funções quaisquer e $g \circ f : A \rightarrow C$ a função composta de g com f . Então vale o seguinte:*

(i) *Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.*

(ii) *Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.*

Em particular, se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva.

Demonstração. Mostremos (i); sejam $a, b \in A$ elementos quaisquer. Então $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b)) \Rightarrow f(a) = f(b)$, pois g é injetiva. Como f também é injetiva, temos que $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Portanto $g \circ f$ é injetiva. Agora provemos (ii); seja $c \in C$ um elemento qualquer. Como g é sobrejetiva, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$; e como f também é sobrejetiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Assim $g(f(a)) = g(b) = c$, logo $g \circ f$ é sobrejetiva. Como consequência de (i) e (ii), sendo f e g bijetivas, $g \circ f$ também é bijetiva. $\square$

Proposição 3.19. *Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ são tais que $f \circ g = id$ e $g \circ f = id$, então f é uma bijeção.*

Demonstração. Por definição, $f(g(b)) = b$ e $g(f(a)) = a$; caso $g(b) = a$, temos $f(a) = b$. Se $f(a_1) = f(a_2)$, então $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, isto é $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Como $g \circ f = id$, temos que $a_1 = a_2$. Logo f é injetiva. Agora, dado $b \in B$ qualquer, pondo $a = g(b)$, como $(f \circ g)(b) = b$, temos $f(g(b)) = b$, isto é, $f(a) = b$. Então f é sobrejetiva e, consequentemente, bijetiva. $\square$

Definição 3.20. *Seja A um subconjunto qualquer e $B \subseteq A$. A função $\chi_B : A \rightarrow \{1, 0\}$, definida por*

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in B \\ 0 & \text{se } a \notin B \end{cases}$$

é chamada de função característica de B .

Exemplo 3.21. *Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, d, e\}$. Assim a função de A em $\{1, 0\}$, definida pelo diagrama*

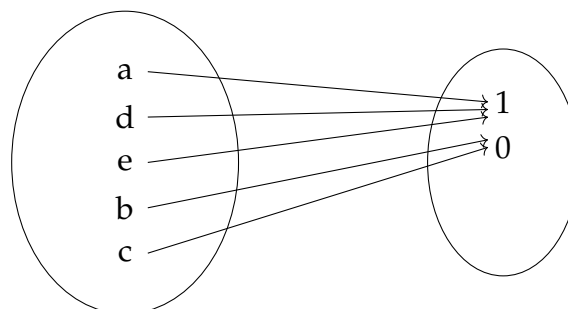


Figura 9 – Função χ_B de A em $\{0, 1\}$.

Fonte: elaborado pelo autor.

é a função característica χ_B .

Definição 3.22. Dada uma função $f : A \rightarrow B$ e $C \subseteq B$, chama-se pré-imagem de C ao conjunto $f^{-1}(C) = \{a \in A \mid f(a) \in C\}$.

Embora tenham a mesma notação, não se deve confundir a pré-imagem $f^{-1}(C)$ de um conjunto C com imagem de função inversa.

Pode ocorrer dos elementos de um conjunto serem eles próprios conjuntos. Evitaremos a expressão conjunto de conjuntos denominando-o por família de conjuntos.

Definição 3.23. Uma família de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ é uma função $f : I \rightarrow \mathcal{A}$, onde o domínio de f é o conjunto de índice I e a imagem de f é $\mathcal{A}$. Assim $f(i) = A_i$.

Por exemplo, dados os conjuntos $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}, \dots$, $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Se $I = \{1, 2, \dots, n\}$, temos a família $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ com n conjuntos. Se $I = \mathbb{N}$, então $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma família com infinitos conjuntos.

Exemplo 3.24. O conjunto das partes $\mathcal{P}(A)$ é família de todos os subconjuntos de A .

As operações de união e intersecção entre dois conjuntos podem ser estendidas a uma família qualquer de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$. Assim:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in J} A_i &= \{x \mid \text{existe } i \in J \text{ tal que } x \in A_i\}, \\ \bigcap_{i \in J} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ para cada } i \in J\}. \end{aligned}$$

Por exemplo, se $J = \{1, 2, \dots, n\}$ então

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in J} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \\ \bigcap_{i \in J} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n. \end{aligned}$$

Exemplo 3.25. Observe que $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right)$, uma união de intervalos que “cobrem” a reta real. Por exemplo, se $n = 1$, temos $\mathbb{R} = \dots \cup [-2, -1) \cup [-1, 0) \cup [0, 1) \cup [1, 2) \cup \dots$

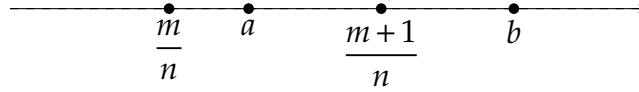
Proposição 3.26. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

Demonstração. Seja n um número natural tal que $\frac{1}{n} < b - a$. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right)$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right)$, isto é $\frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n}$. Como

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b,$$

obtemos $a < \frac{m+1}{n} < b$. Portanto $r = \frac{m+1}{n}$ é o racional desejado.

Figura 10 – Ilustração.



Fonte: elaborado pelo autor.

□

Definição 3.27. Dados dois conjuntos, A e B , não vazios, chama-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) , com $a \in A$ e $b \in B$. Denotamos por

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Exemplo 3.28. Dados $A = \{a, b\}$ e $B = \{0, 1\}$, o conjunto $A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}$ é o produto cartesiano de A por B .

Exemplo 3.29. Note que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = (\mathbb{N} \times \{1\}) \cup (\mathbb{N} \times \{2\}) \cup (\mathbb{N} \times \{3\}) \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{n\}$.

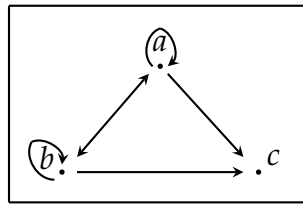
Definição 3.30. Chama-se relação de A em B a qualquer subconjunto $R \subseteq A \times B$.

Quando $R \subseteq A \times A$, dizemos simplesmente que R é uma relação em A .

Exemplo 3.31. O conjunto $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c)\}$ é uma relação em $A = \{a, b, c\}$.

O diagrama a seguir ilustra a relação $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c)\}$.

Figura 11 – Relação R em A .



Fonte: elaborado pelo autor.

Às vezes, é conveniente usar aRb para indicar que $(a, b) \in R$.

Exemplo 3.32. O gráfico $G(f) \subseteq A \times B$ de uma função $f : A \rightarrow B$ é uma relação de A em B com a seguinte propriedade: se (a, b) e (a, c) pertencem a $G(f)$, então $b = c$.

Vamos encerrar este capítulo enunciando o importante Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein. A demonstração foi colocada em um apêndice devido a sua extensão.

Teorema 3.33 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein). Se existem $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ injetivas, então existe uma bijeção $h : A \rightarrow B$.

Demonstração. Consulte o livro *How to prove it: A structured approach* (Velleman, 2019).

4 A TEORIA DE CONJUNTOS DE CANTOR

Nesse capítulo enunciaremos e provaremos alguns teoremas de Cantor à luz da definição de Cantor, dentre eles o teorema principal do trabalho (Teorema 4.33). Por fim, será exposta a noção de número cardinal para conjuntos infinitos, a hipótese do contínuo e alguns paradoxos da teoria dos conjuntos.

4.1 CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO-ENUMERÁVEIS

A seguinte definição é fundamental para compreendermos os teoremas de Cantor. Ela é atribuída ao próprio Cantor (Lipschutz, 1976).

Definição 4.2. Dizemos que um conjunto A é equipotente a um conjunto B , designado por $A \sim B$, se existir uma bijeção $f : A \longrightarrow B$.

Por exemplo, $\mathbb{N}$ é equipotente ao conjunto $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \dots\}$ dos números pares. De fato, a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{P}$, definida por $f(n) = 2n$, é uma bijeção.

A noção de conjuntos equipotentes constitui uma ferramenta importante para a comparação entre conjuntos. Antes de Cantor, acreditava-se que todos os conjuntos infinitos eram equipotentes (Lipschutz, 1976).

Galileu já tinha observado a existência de uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos (Boyer; Merzbach, 2012), o que parecia contrariar uma das noções comuns nos Elementos de Euclides que o “todo é maior que sua parte”.

Mas a afirmação de Euclides é válida apenas no caso finito. Um conjunto é infinito precisamente quando ele estiver em bijeção com algum de seus subconjuntos próprios; essa definição foi primeiramente dada por Dedekind (Belna, 2011).

Definição 4.3. Um conjunto diz-se infinito quando ele for equipotente a um de seus subconjuntos próprios, caso contrário será finito.

Assim, o aparente paradoxo de Galileu de que $\mathbb{N}$ é equipotente ao seu subconjunto $\{1, 4, \dots, n^2, \dots\}$ dos quadrados perfeitos passa a ser visto como uma caracterização de conjunto infinito.

Definição 4.4. Dizemos que um conjunto é enumerável quando ele for equipotente a $\mathbb{N}$. Um conjunto infinito e não equipotente a $\mathbb{N}$ é chamado de não-enumerável.

O termo enumerável foi criado por Cantor e significa “que se pode contar até o infinito” (Belna, 2011).

O conjunto $\mathbb{P}$ é enumerável porque, como vimos acima, $\mathbb{P}$ é equipotente a $\mathbb{N}$.

Proposição 4.5. O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Demonstração. Defina-se a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

A correspondência pode ser ilustrada da seguinte forma:

1	2	3	4	5	6	7	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	

Mostremos que f é bijetiva. Seja $a \in \mathbb{Z}$.

Se $a \leq 0$, então existe um único número natural ímpar $n = 2|a| + 1$ tal que

$$f(n) = -\frac{n-1}{2} = a.$$

Se $a > 0$, então existe um único número natural par $n = 2a$ tal que

$$f(n) = \frac{n}{2} = a.$$

Conclui-se, portanto, que f é uma bijeção e, conseqüentemente, $\mathbb{Z}$ é enumerável. $\square$

Proposição 4.6. A relação de equipotência $A \sim B$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $A \sim A$;
- (ii) Se $A \sim B$, então $B \sim A$;
- (iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

Demonstração. Vejamos (i). Como a função identidade $id : A \rightarrow A$ é uma bijeção, temos que $A \sim A$.

Vamos provar (ii). Se $A \sim B$, então existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$; logo, pela Proposição 3.16, existe a inversa de f , isto é $f^{-1} : B \rightarrow A$. Como f^{-1} é uma bijeção, concluímos que $B \sim A$. Provemos (iii). Se $A \sim B$ e $B \sim C$, existem as bijeções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$. Como a função composta $g \circ f : A \rightarrow C$ é uma bijeção (Proposição 3.18), segue que $A \sim C$. $\square$

Proposição 4.7. Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ infinito é enumerável.

Demonstração. Veja o Livro *Análise real volume 1* (Lima, 2014, p. 7).

Como consequência da proposição acima temos a seguinte

Corolário 4.8. Se A é enumerável e $B \subseteq A$ é um conjunto infinito, então B é enumerável.

Demonstração. Como A é enumerável, existe uma bijeção $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. Sendo $B \subseteq A$, a função $g : B \rightarrow A$ definida por $g(b) = b$ é injetiva. Portanto a função $f \circ g : B \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva (Proposição 3.17 - (i)). Como $g(B) \subseteq \mathbb{N}$ é enumerável (Proposição 4.7), segue que B é enumerável. $\square$

Proposição 4.9. *Sejam A e B conjuntos infinitos e $f : A \rightarrow B$ injetiva. Se B é enumerável então A também é.*

Demonstração. Com efeito, basta considerar o caso em que existe uma bijeção $g : B \rightarrow \mathbb{N}$. Então $g \circ f$ é uma bijeção de A sobre um subconjunto de $\mathbb{N}$ que é enumerável pela Proposição 4.8. Portanto A é enumerável. $\square$

Proposição 4.10. *Seja $f : A \rightarrow B$ sobrejetiva. Se A é enumerável então B também é.*

Demonstração. Defina uma função $g : B \rightarrow A$ do seguinte modo: para cada $b \in B$, escolha um único $a \in A$ tal que $b = f(a)$ e ponha $g(b) = a$. Como para cada $a \in A$ existe um único $b \in B$ tal que $f(a) = b$ segue que g é injetiva. Pela Proposição 4.9 B é enumerável. $\square$

4.11 O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS É ENUMERÁVEL

O Teorema Fundamental da Aritmética afirma que todo número natural maior do que 1 pode ser representado de maneira única como um produto de fatores primos, a menos da ordem. Decorre desse teorema que se a é um natural par, então ele pode ser escrito de maneira única como $a = 2^m(2n - 1)$. Se o único primo que aparecer na decomposição de n for 2, então $a = 2^m = 2^m \cdot (2 \cdot 1 - 1)$. Caso contrário, $a = 2^m(2n - 1)$ com $n > 1$. Essa observação será usada na demonstração da proposição seguinte.

Proposição 4.12. *O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$. Mostremos que f é uma bijeção. Dado $a \in \mathbb{N}$, se a é ímpar, existe um único $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2n - 1$. Assim existe um único par $(1, n)$ tal que $f(1, n) = 2n - 1 = a$. Se a for par, então pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existem e são únicos os naturais m e n tais que $a = 2^m(2n - 1)$. Portanto, existe um único par $(m + 1, n)$ tal que $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1) = a$. Portanto f é uma bijeção. $\square$

Proposição 4.13. *A união de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis (ou finitos) é enumerável.*

Demonstração. Seja $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ a união enumerável de uma família $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ de conjuntos enumeráveis (ou finitos). Então existem sobrejeções $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow X_1, f_2 : \mathbb{N} \rightarrow X_2, \dots, f_n : \mathbb{N} \rightarrow X_n, \dots$. A partir delas, definimos a sobrejeção $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$ pondo $f(m, n) = f_n(m)$. Segue da Proposição 4.10 que X é enumerável. $\square$

Como uma consequência da Proposição 4.13, obtemos outra demonstração da Proposição 4.12. De fato, observe que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{n\}$. Como $f : \mathbb{N} \times \{n\} \rightarrow \mathbb{N}$,

definida por $f(m, n) = m$ é uma bijeção para cada $n \in \mathbb{N}$ (veja o Exemplo 3.14), segue que $\mathbb{N} \times \{n\}$ é enumerável para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, como uma união enumerável de conjuntos enumeráveis.

Em um artigo publicado em 1878, Cantor fornece explicitamente uma bijeção entre o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$:

“Com efeito, a função $\mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}$ possui, como é fácil demonstrar, a notável propriedade de representar todos os números inteiros positivos, e cada um deles apenas uma vez, desde que em sua expressão μ e ν assumam, de forma independente, todos os valores inteiros positivos” (Cantor, 1878, p. 257).¹

A função apresentada por Cantor é $f(m, n) = m + \frac{(m + n - 1)(m + n - 2)}{2}$. O valor de $f(m, n)$ pode ser obtido contando todos os pares até (m, n) , conforme a Figura 12 abaixo:

Figura 12 – Contagem dos pares até (m, n)

1				
(1,1)				
2	3			
(1,2)	(2,1)			
4	5	6		
(1,3)	(2,2)	(3,1)		
7	8	9	10	
(1,4)	(2,3)	(3,2)	(4,1)	
11	12	13	14	15
(1,5)	(2,4)	(3,3)	(4,2)	(5,1)
⋮				

Fonte: elaborado pelo autor.

Primeiramente, observe que (m, n) está na linha $m + n - 1$ e existem $m + n - 2$ pares na linha $m + n - 2$. Assim, existem $1 + 2 + \dots + (m + n - 2) = \frac{[1 + (m + n - 2)](m + n - 2)}{2} = \frac{(m + n - 1)(m + n - 2)}{2}$ pares da linha 1 até a linha $m + n - 2$.

Agora, na linha $m + n - 1$, existem m pares até o par (m, n) . Portanto

$$f(m, n) = m + \frac{(m + n - 1)(m + n - 2)}{2}.$$

Usaremos a seguinte observação na demonstração do lema seguinte:

¹ “Es hat nämlich die Function $\mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}$, wie leicht zu zeigen, die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie alle positiven ganzen Zahlen und jede nur einmal darstellt, wenn in ihr μ und ν unabhängig von einander ebenfalls jeden positiven, ganzzahligen Werth erhalten” (Cantor, 1878, p. 257).

Sejam $A \sim C$ e $B \sim D$. Assim existem bijeções $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$. Defina a função $\varphi : A \times B \rightarrow C \times D$ por $\varphi(a, b) = (f(a), g(b))$. Não é difícil mostrar que φ é uma bijeção; assim $A \times B \sim C \times D$.

Lema 4.14. *O conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Pela Proposição 4.5 e pela Proposição 4.6 - (ii) temos que $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ (Proposição 4.6 - (i)), segue da observação logo acima que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 4.15 (Cantor). *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.*

Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(m, n) = m/n$. A função f é uma sobrejeção. Dado $m/n \in \mathbb{Q}$, é claro que podemos ter $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(m, n) = m/n$. Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ é enumerável (Lema 4.14), pela Proposição 4.10, $\mathbb{Q}$ é enumerável. $\square$

4.16 O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS NÃO É ENUMERÁVEL

Em 1873 Cantor enviou uma carta a Dedekind com a primeira demonstração de que $\mathbb{R}$ é não-enumerável. Em 1874 ele publicou a prova no estudo *Sobre uma propriedade do conjunto de todos os números algébricos reais* (Belna, 2011).

Teorema 4.17 (Cantor). *O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável.*

A demonstração do Teorema 4.17 que apresentaremos é aquela publicada em *Sobre uma questão elementar da teoria das multiplicidades* (1891). A técnica usada na demonstração é agora conhecida como *método da diagonal de Cantor*².

“Em 1891, [Cantor] propôs uma demonstração bastante geral, muito mais simples e baseada em um princípio completamente diferente. No caso particular [...], trata-se de mostrar que o intervalo $I = [0, 1]$ de $\mathbb{R}$ contém uma infinidade não enumerável de elementos” (Belna, 2011, p. 100).

Demonstração do Teorema 4.17. Como todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável (Proposição 4.8), para provar que $\mathbb{R}$ é não-enumerável é suficiente mostrar que o intervalo $[0, 1]$ não é enumerável.

Seja $A = [0, 1]$ e suponha que A seja enumerável, isto é $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Ou seja, os elementos de A podem ser escritos em uma sequência. Cada elemento de A pode ser escrito sob a forma de um decimal infinito como se segue:

² “ ‘O método da diagonal’ de Cantor desempenhou um papel capital no século XX; ele pode ser encontrado, em particular, na demonstração do teorema de Gödel[...]” (Belna, 2011, p. 100).

$$x_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots$$

$$x_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \dots$$

$$x_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \dots$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \dots$$

$$\vdots$$

onde $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Escreva aqui 1 sob a forma $0,9999\dots$, 0 sob a forma $0,0000\dots$ e para aqueles números que podem ser escritos de duas maneiras, por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0,5000\dots = 0,4999\dots$$

(em uma delas existe um número infinito de noves e na outra todos, exceto um conjunto finito de algarismos, são zeros) escreva na forma decimal infinita na qual um número infinito de noves apareça.

Construa agora o número real

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$$

que pertencerá a A , da seguinte maneira: escolha b_1 , tal que $b_1 \neq a_{11}$ e $b_1 \neq 0$, escolha b_2 tal que $b_2 \neq a_{22}$ e $b_2 \neq 0$ etc. Observe que $y \neq x_1$, pois $b_1 \neq a_{11}$, e $(b_1 \neq 0)$; $y \neq x_2$, pois $b_2 \neq a_{22}$ (e $b_2 \neq 0$) etc., isto é, $y \neq x_n$ para $n \in \mathbb{N}$; assim, $y \notin A$, que contradiz o fato de que $y \in A$. Desse modo, a suposição de que A é enumerável conduz a uma contradição. Consequentemente, A não é enumerável. Assim $\mathbb{R}$ não é enumerável. $\square$

“Ao provar a não enumerabilidade do conjunto dos reais, ele [Cantor] conseguiu estabelecer, com toda clareza, a distinção entre enumerável e contínuo” (Belna, 2011, p. 89).

Proposição 4.18. *O conjunto $(0, 1)$ é equivalente ao conjunto $[0, 1]$.*

Demonstração. Defina uma função injetiva $f : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = x$. Agora, considere a função $g : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ dada por $g(x) = \frac{x+1}{3}$. Como toda função afim é injetiva (Exemplo 3.13), basta verificar que se $0 \leq x \leq 1$ então $0 < g(x) < 1$. De fato, para $x \in [0, 1]$, temos que $0 \leq \frac{x}{3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{x}{3} + \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{x+1}{3} < \frac{2}{3}$. Portanto $g(x) \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \subseteq (0, 1)$. Pelo Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein (Teorema 3.33), concluímos que $[0, 1] \sim (0, 1)$. $\square$

Proposição 4.19. *O conjunto $(0, 1)$ é equipotente ao conjunto (a, b) .*

Demonstração. A função afim $f(x) = a + (b - a)x$ é uma bijeção (Exemplo 3.13.). Assim, precisamos apenas verificar que $0 < x < 1 \Leftrightarrow a < f(x) < b$.

De fato, $0 < x < 1 \Leftrightarrow (b-a)x < (b-a) \Leftrightarrow a + (b-a)x < a + (b-a) \Leftrightarrow a + (b-a)x < b \Leftrightarrow f(x) < b$. Como $f(x) > a$, segue que $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(x) \in (a, b)$. Portanto $f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ é uma bijeção. $\square$

Proposição 4.20. O conjunto $\mathbb{R}$ é equipotente ao intervalo $[0, 1]$.

Demonstração. Como $[0, 1]$ é equipotente a $(0, 1)$ (Proposição 4.18) e $(0, 1)$ é equipotente a $(-1, 1)$ (Proposição 4.19), segue da Proposição 4.6 - (iii) que $[0, 1]$ é equipotente a $(-1, 1)$. Assim, é suficiente provar que $\mathbb{R}$ é equipotente a $(-1, 1)$.

Vamos mostrar que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, dada por $f(x) = x/(1 + |x|)$ é uma bijeção.

Considere a função $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(y) = y/(1 - |y|)$. Se mostrarmos que $f \circ g = id$ e $g \circ f = id$, seguirá da Proposição 3.19 que f é uma bijeção. Temos que

$$f(g(y)) = \frac{g(y)}{1 + |g(y)|} = \frac{y/(1 - |y|)}{1 + |y/(1 - |y|)|}.$$

$$\text{Se } y < 0, \text{ então } f(g(y)) = \frac{y/(1 - (-y))}{1 + (-y/(1 - (-y)))} = \frac{y/(1 + y)}{((1 + y) - y)/(1 + y)} = \frac{y}{(1 + y)} \cdot \frac{(1 + y)}{1} = y.$$

$$\text{Se } y \geq 0 \text{ então } f(g(y)) = \frac{y/(1 - y)}{1 + (y/(1 - y))} = \frac{y/(1 - y)}{((1 - y) + y)/(1 - y)} = \frac{y}{(1 - y)} \cdot \frac{(1 - y)}{1} = y.$$

Portanto $f \circ g = id$, onde id é a função identidade em $(-1, 1)$. Agora, observe que

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{1 - |f(x)|} = \frac{x/(1 + |x|)}{1 - |x/(1 + |x|)|}.$$

$$\text{Se } x < 0, \text{ então } g(f(x)) = \frac{x/(1 + (-x))}{1 - (-x/(1 + (-x)))} = \frac{x/(1 - x)}{((1 - x) + x)/(1 - x)} = \frac{x}{1 - x} \cdot \frac{1 - x}{1} = x.$$

$$\text{Se } x \geq 0, \text{ então } g(f(x)) = \frac{x/(x + 1)}{1 - x/(x + 1)} = \frac{x/(1 + x)}{((1 + x) - x)/(1 + x)} = \frac{x}{1 + x} \cdot \frac{1 + x}{1} = x.$$

Logo $g \circ f = id$, onde id é a função identidade em $\mathbb{R}$. Portanto, podemos afirmar que f é bijeção. $\square$

Cantor questiona Dedekind: “Será que uma superfície (por exemplo, um quadrado, incluindo seus limites) pode ser posta [em bijeção] com uma curva (por exemplo, um segmento de reta, incluindo suas extremidades)?” (Belna, 2011, p. 102 apud Cavailles, 1962, p. 196). A seguir provaremos um caso particular desse questionamento de Cantor.

Proposição 4.21. O quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ é equipotente ao segmento unitário $[0, 1]$.

Demonstração. Sejam $x, y \in [0, 1]$. Convencionamos representar cada número real de $[0, 1]$ por uma expansão decimal infinita que não termine em uma sequência infinita de algarismos zero, onde cada um contém infinitos algarismos diferentes de zero. com exceção do número 0. Por exemplo, representamos $1/2$ pela expansão $0,4999\dots$, em vez de $0,5000\dots$

Com essa convenção, x e y podem ser escritos de maneira única sob a forma

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots, \quad y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots,$$

Defina-se a função $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$f(x, y) = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$$

Mostremos que f é bijetiva. Primeiramente, f é injetiva. De fato, se $f(x, y) = f(w, z)$. Então

$$0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots = 0, w_1 z_1 w_2 z_2 w_3 z_3 \dots,$$

o que implica $x_i = w_i$ e $y_i = z_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, $x = w$ e $y = z$, e consequentemente $(x, y) = (w, z)$.

Além disso, f é sobrejetiva. Dado $0, w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 \dots \in [0, 1]$, se pusermos

$$x = 0, w_1 w_3 w_5 \dots \quad \text{e} \quad y = 0, w_2 w_4 w_6 \dots$$

Pela convenção adotada, (x, y) pertence a $A \times A$ e satisfaz

$$f(x, y) = 0, w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 \dots$$

teremos $f(x, y) = w$. Portanto f é bijetiva e, consequentemente, $[0, 1] \times [0, 1] \sim [0, 1]$. $\square$

Proposição 4.22. Se A é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$, então $\mathbb{R} - A$ é equipotente a $\mathbb{R}$.

Demonstração. Por definição $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - A) \cup A$ (união disjunta). Seja B um subconjunto enumerável de $T = \mathbb{R} - A$. Escreva as seguintes uniões disjuntas:

$$\mathbb{R} = (T - B) \cup B \cup A \quad \text{e} \quad T = (T - B) \cup B.$$

Agora, sejam $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\}$ e $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$. Uma bijeção $f : \mathbb{R} \rightarrow T$ pode ser construída da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \text{ se } x \in T; \\ f(b_n) &= b_{2n-1}; \\ f(a_n) &= b_{2n}. \end{aligned}$$

Portanto $T \sim \mathbb{R}$, isto é $(\mathbb{R} - A) \sim \mathbb{R}$. $\square$

4.23 O CONJUNTO DOS NÚMEROS ALGÉBRICOS

Chama-se equação polinomial a uma equação da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde os números reais $a_0, a_1, \dots, a_n$ são os coeficientes. Diz-se que um número α é solução dessa equação se $a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0$.

Por exemplo, $\alpha = \sqrt{2}$ é solução da equação $x^2 - 2 = 0$ pois $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$.

Definição 4.24. Dizemos que um número real α é algébrico se ele for solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros.

Por exemplo, $\sqrt{2}$ é algébrico. Todo inteiro $m \in \mathbb{Z}$ é algébrico pois ele satisfaz a equação $x - m = 0$.

Exemplo 4.25. Todo número racional é algébrico.

De fato, se $x = \frac{p}{q}$ é racional, então $qx - p = 0$.

Em seu trabalho *Sobre uma propriedade do conjunto de todos os números algébricos reais* (Cantor, 1874), Cantor demonstra que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

A demonstração do Teorema 4.26 abaixo, é a original publicada em (Cantor, 1874).

Teorema 4.26 (Cantor). O conjunto $\mathbb{A}$ dos números algébricos é enumerável.

Demonstração. Dada uma equação polinomial de coeficientes inteiros

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (4.1)$$

defina o seu índice por $N = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|$.

Observe que para cada N fixado, há apenas um número finito de equações com índice N . Por exemplo, não existe equação de índice $N = 1$ e $x = 0$ é a única equação de índice $N = 2$. Para o índice $N = 3$ existem apenas as quatro equações abaixo:

$$x + 1 = 0, x - 1 = 0, 2x = 0 \text{ e } x^2 = 0.$$

Agora, segue do Teorema Fundamental da Álgebra que a equação 4.1 tem no máximo n raízes reais³. Portanto o conjunto R_n de todas as raízes de todas as equações de mesmo índice N é um conjunto finito. Assim $\mathbb{A} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} R_N$ é um conjunto enumerável porque é a união enumerável de conjuntos finitos (Proposição 4.13). $\square$

Como todo número racional é algébrico (Exemplo 4.25), segue do Teorema 4.26 que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável, como já havíamos visto no Teorema 4.15. "Eles [Cantor e Dedekind] só conseguiram demonstrar o seguinte [em cartas de 1873]: $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos números algébricos são enumeráveis" (Belna, 2011, p. 96).

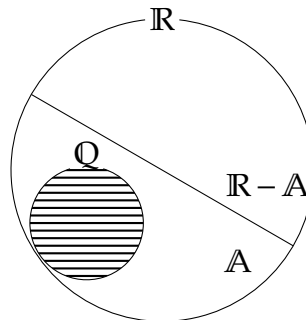
Como $\mathbb{Q}$ é enumerável (Teorema 4.15) e a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável (Proposição 4.13), segue da igualdade $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ que o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$ não é enumerável.

³ O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que para toda equação da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ existe um número complexo $z = a + bi$ tal que $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$. A partir desse teorema é possível concluir que essa equação possui no máximo n raízes reais.

4.27 A EXISTÊNCIA DE NÚMEROS TRANSCENDENTES

Como $\mathbb{A}$ é enumerável (Teorema 4.26) e $\mathbb{R}$ não é enumerável (Teorema 4.17), segue da igualdade $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{A})$ que o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{A}$ não é enumerável. Em particular, existem números reais que não são algébricos.

Figura 13 – Uma nova decomposição de $\mathbb{R}$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Definição 4.28. *Um número que não seja algébrico é chamado de transcendente.*

Podemos então concluir a seguinte

Proposição 4.29. *Existem números transcendentos.*

O número e , definido por

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, é chamado de número de Euler e é uma das constantes mais importantes da Matemática.

Em 1873 o matemático francês Hermite (1822-1901) demonstrou que o número e é transcendente. Em 1882 Lindemann (1852-1939) demonstrou que π também é transcendente.

“[...] [Cantor e Dedekind] não haviam apreendido as implicações do problema; para ambos, demonstrar que a resposta é negativa seria confirmar simplesmente a validade de um teorema estabelecido, havia já trinta anos, por Liouville, garantindo a existência de números transcendentos [...]” (Belna, 2011, p. 96).

Em 1851 Liouville (1809-1882), citado por Cantor em seu artigo de 1874, já havia demonstrado a existência de infinitos números transcendentos.

4.30 O CONJUNTO DAS PARTES $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Nesta seção mostraremos que o conjunto dos números reais é equipotente ao conjunto das partes dos números naturais, isto é $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Vamos precisar demonstrar alguns lemas. O próximo lema nos diz que os conjuntos das partes de conjuntos equipotentes são equipotentes.

Lema 4.31. *Se $A \sim B$ então $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.*

Demonstração. Pelo fato de $A \sim B$, existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$. Vamos mostrar que a função $\varphi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, definida por $\varphi(S) = f(S) = \{f(a) \mid a \in S \subseteq A\}$, é uma bijeção.

A função φ é injetiva. Suponha $\varphi(S_1) = \varphi(S_2)$. Se $a \in S_1$, então $f(a) \in \varphi(S_2)$, logo existe $a' \in S_2$ tal que $f(a) = f(a')$. Como f é injetiva $a = a'$, portanto $a \in S_2$. Assim $S_1 \subseteq S_2$. Pelo mesmo raciocínio, trocando S_1 e S_2 , obtemos $S_2 \subseteq S_1$. Logo $S_1 = S_2$. Portanto φ é injetiva.

A função φ é sobrejetiva. Seja $C \in \mathcal{P}(B)$, isto é $C \subseteq B$. Como f é bijetiva, existe $f^{-1} : B \rightarrow A$. Seja S a pré-imagem de $C \subseteq B$, isto é, $S = f^{-1}(C) = \{a \in A \mid f(a) \in C\}$. Então $\varphi(S) = \varphi(f^{-1}(C)) = f(f^{-1}(C)) = C$. Assim a função φ é sobrejetiva, e portanto bijetiva. Mostramos que $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$. $\square$

É bem conhecido que o número de subconjuntos de $A = \{1, 2, \dots, n\}$ é igual a 2^n .

Isso decorre do fato de que $\mathcal{P}(A)$ é equipotente ao conjunto formado por todas as sequências de comprimento n cujas entradas são 0 e 1.

De fato, para cada $B \subseteq A$ associamos uma sequência de zeros e uns de comprimento n , assim:

$$\emptyset \rightarrow (0, 0, \dots, 0), \{1, 2\} \rightarrow (1, 1, 0, \dots, 0), \dots, A \rightarrow (1, 1, \dots, 1).$$

Como o número de tais sequências é 2^n , temos que $\mathcal{P}(A)$ possui 2^n elementos.

Seja A um conjunto qualquer, a família das funções características de A , será denotada por $C(A)$.

Usando o conceito de função característica, o próximo lema generaliza esse resultado para um conjunto A qualquer.

Lema 4.32. $\mathcal{P}(A) \sim C(A)$.

Demonstração. Para cada $B \in \mathcal{P}(A)$, defina $\varphi : \mathcal{P}(A) \rightarrow C(A)$ por $\varphi(B) = \chi_B$, isto é, φ associa cada subconjunto $B \subseteq A$ a função característica de B , que é definida por

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in B \\ 0, & \text{se } a \notin B. \end{cases}$$

Vamos mostrar que φ é bijetiva. Sejam B e C em $\mathcal{P}(A)$ tais que $B \neq C$; não há perda de generalidade em supor que $C \not\subseteq B$. Assim, existe $a \in C$ tal que $a \notin B$. Como $\chi_B(a) = 0$ e $\chi_C(a) = 1$,

segue que $\chi_B(a) \neq \chi_C(a)$. Portanto φ é injetiva. Dado $\chi \in C(A)$, defina $B = \{a \in A \mid \chi(a) = 1\}$. Assim $\chi = \chi_B$ com $B \subseteq A$, e portanto $\varphi(B) = \chi_B$. Por conseguinte φ é sobrejetiva. Em vista disso φ é uma bijeção. $\square$

Agora estamos prontos para demonstrar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.33. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é equipotente ao conjunto das partes de $\mathbb{N}$, isto é*

$$\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Demonstração. Pelo Teorema de Schröder-Bernstein (Teorema 3.33), é suficiente mostrar a existência de funções injetivas $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$. Como $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ (Proposição 4.15), segue do Lema 4.31 que $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$, isto é, existe uma função bijetiva $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Afirmamos que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, definida por

$$g(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$$

é uma função injetiva. De fato, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com a diferente de b , digamos $a < b$. Pela Proposição 3.26, existe um número racional r tal que $a < r < b$. Temos assim que $r \in g(b)$ e $r \notin g(a)$, e portanto $g(a) \neq g(b)$. Isso mostra que g é injetiva. Segue da Proposição 3.18-(i) que a função composta $\varphi = f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ é injetiva. Isso conclui a primeira parte da demonstração.

Seja $C(\mathbb{N})$ a família das funções características $\chi : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Como $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é equipotente a $C(\mathbb{N})$ (Lema 4.32), existe uma bijeção $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow C(\mathbb{N})$. Agora, considere a função $\psi : C(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\psi(\chi) = 0, \chi(1)\chi(2)\chi(3)\dots$$

um decimal infinito composto de zeros e uns. Se $\chi_1, \chi_2 \in C(\mathbb{N})$ com $\chi_1 \neq \chi_2$, então $\psi(\chi_1) \neq \psi(\chi_2)$, pois os decimais serão diferentes; assim ψ é injetiva. Como $[0, 1] \sim \mathbb{R}$ (Proposição 4.20), existe uma bijeção $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Novamente pela Proposição 3.18, a função composta $\phi = f \circ \psi \circ g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R} \\ g \downarrow & \psi & \uparrow f \\ C(\mathbb{N}) & \longrightarrow & [0, 1] \end{array}$$

é injetiva. Isso conclui a demonstração de que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $\square$

4.34 NÚMEROS CARDINAIS

Quando um conjunto A possui n elementos, podemos escrevê-lo da forma $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Isso significa que $f(a_i) = i$ é uma bijeção entre o conjunto A e o conjunto

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Assim, a bijeção f “conta” o número de elementos do conjunto finito A .

Proposição 4.35. *Dois conjuntos finitos A e B têm o mesmo número de elementos se, e somente se, existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$.*

Demonstração. De fato, se A e B tem n elementos então existem bijeções $f : A \rightarrow I_n$ e $g : B \rightarrow I_n$. Como $g^{-1} : I_n \rightarrow B$ é uma bijeção (Proposição 3.16), segue que a composta $g^{-1}f : A \rightarrow B$ é uma bijeção.

Reciprocamente, seja A com m elementos e B com n elementos e suponha que exista uma bijeção $h : A \rightarrow B$. Como existem bijeções $f : A \rightarrow I_m$ e $g : B \rightarrow I_n$, segue que a composta $\varphi = g \circ h \circ f^{-1} : I_m \rightarrow I_n$ é uma bijeção. Daqui concluímos que $m = n$.

$$\begin{array}{ccc} I_m & \xrightarrow{\varphi} & I_n \\ f^{-1} \downarrow & h & \uparrow g \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

□

Definição 4.36. *Se existir uma bijeção entre dois conjuntos A e B dizemos que eles têm o mesmo número cardinal.*

“[...] Cantor acrescentava [nas *Beiträge*] que ‘a equivalência de dois conjuntos é a condição necessária e suficiente da igualdade de seus números cardinais’ ” (Belna, 2011, p. 140).

O conceito de cardinal generaliza a ideia de número de elementos para conjuntos infinitos. Dizemos que o conjunto $\mathbb{N}$ possui cardinal $\aleph_0$, enquanto o conjunto $\mathbb{R}$ possui cardinal c .

Todo conjunto equipotente a $\mathbb{N}$ possui cardinal $\aleph_0$, assim como todo conjunto equipotente a $\mathbb{R}$ possui cardinal c .

Vamos denotar a *cardinalidade* de um conjunto A qualquer por $|A|$.

Assim, pelo Teorema 4.5, temos que $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$. Pelo Teorema 4.15, temos $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Pelo Teorema 4.26, segue que $|\mathbb{A}| = \aleph_0$ e pela Proposição 4.22, temos $|\mathbb{R} - \mathbb{A}| = c$, onde $\mathbb{R} - \mathbb{A}$ é conjunto dos números transcendentos e têm cardinalidade c . Pelo Teorema 4.33, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$.

“[...] os primeiros quatro parágrafos [das *Beiträge*] são dedicados aos números cardinais[...]” (Belna, 2011, p. 138).

Dizemos que o cardinal de um conjunto A é menor do que o cardinal de um conjunto B , denotado por $|A| < |B|$, se existir uma função injetiva de A em B , mas A não for equipotente a B .

O próximo teorema foi publicado por Cantor na segunda parte das *Beiträge* (Cantor, 1897) e mostra que o cardinal de A é menor do que o cardinal de $\mathcal{P}(A)$.

Teorema 4.37 (Cantor). *Para qualquer conjunto A , temos que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Demonstração. Vamos mostrar que não existe função sobrejetiva de A em $\mathcal{P}(A)$. Seja $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ uma função qualquer. Defina $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Temos que $B \in \mathcal{P}(A)$. Suponha que exista $b \in A$ tal que $f(b) = B$. Observe que

Se $b \in B$, então $b \notin f(b)$, por definição. Mas $f(b) = B$, logo $b \notin B$. Contradição.

Se $b \notin B$, então $b \in f(b)$, por definição. Mas $f(b) = B$, logo $b \in B$. Contradição.

Assim, a existência de $b \in A$ tal que $f(b) = B$ nos levou a uma contradição, portanto não existe $b \in A$ tal que $f(b) = B$, logo f não é sobrejetiva. Como f foi qualquer, podemos concluir que não existe função sobrejetiva de A em $\mathcal{P}(A)$. A $f(x) = \{x\}$ define uma função injetiva de A em $\mathcal{P}(A)$. $\square$

Assim, pelo Teorema 4.37, tem-se $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$ (Teorema 4.33), temos que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$. Portanto $\aleph_0 < c$.

Observe que o Teorema 4.37 permite construir uma sequência infinita de conjuntos não-equipotentes:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \dots$$

Cantor “[...] descobriu que existe uma infinidade de diferentes infinitos numéricos” (Belna, 2011, p. 19).

4.38 A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

É natural questionar se existe algum número cardinal β tal que $\aleph_0 < \beta < c$. Historicamente, Cantor defendeu a conjectura, conhecida como a *Hipótese do Contínuo*, segundo a qual não existe cardinal estritamente intermediário entre $\aleph_0$ e c , isto é, a resposta a essa questão seria negativa. “[...] na conclusão [de *Uma contribuição para a teoria dos conjuntos* (1878)], ele [Cantor] formulava pela primeira vez a hipótese do contínuo” (Belna, 2011, p. 106).

Em 1963, foi demonstrado que a Hipótese do Contínuo é independente dos axiomas da Teoria dos Conjuntos, de modo análogo ao fato de o Quinto Postulado de Euclides ser independente dos demais axiomas da geometria (Lipschutz, 1976), isto é, a hipótese do contínuo não pode ser nem demonstrada nem refutada no âmbito dessa teoria.

4.39 PARADOXOS NA TEORIA DOS CONJUNTOS

Cantor foi o primeiro a estudar a Teoria dos Conjuntos de maneira sistemática como um ramo da matemática (Lipschutz, 1976), sendo, portanto, considerado seu fundador. À medida que seus trabalhos se tornaram conhecidos e passaram a influenciar outras áreas da matemática, surgiram diversas contradições, denominadas paradoxos.

4.39.1 O PARADOXO DE CANTOR

Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todos os conjuntos existentes. Nesse caso, todo subconjunto de $\mathcal{U}$ é também um elemento de $\mathcal{U}$. Em particular, o conjunto das partes de $\mathcal{U}$ é um subconjunto de $\mathcal{U}$.

Assim, existe uma função injetiva $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$, definida por $f(A) = A$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Por outro lado, a função $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$, definida por $g(u) = \{u\}$, é injetiva. Assim, pelo Teorema 3.33, existe uma função bijetiva de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, o que contradiz o Teorema 4.37. Essa contradição evidencia o paradoxo associado à suposição da existência do conjunto $\mathcal{U}$ de todos os conjuntos.

“O caráter paradoxal desses conjuntos deve-se ao fato de serem ‘grandes demais’” ((Belna, 2011), p. 164).

4.39.2 O PARADOXO DE RUSSEL

Seja M o conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si mesmos como elemento, isto é,

$$M = \{X \mid X \notin X\}.$$

Pergunta-se se M pertence ou não a si mesmo. Se $M \notin M$, então, pela própria definição de M , conclui-se que $M \in M$. Por outro lado, se $M \in M$, novamente pela definição de M , deve-se ter $M \notin M$. Em ambos os casos, chega-se a uma contradição lógica.

Esse paradoxo pode ser ilustrado por uma analogia conhecida, denominada paradoxo do barbeiro: em uma cidade, existe um barbeiro que faz a barba de todos os homens que não fazem a barba em si mesmos. Pergunta-se, então: quem faz a barba do barbeiro?

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando eu estava fazendo o curso de análise real na reta, ministrado pelo meu orientador, li dois capítulos do livro *Várias faces da Matemática* (Ávila, 2011). Os capítulos tinham informações relacionadas a conjuntos infinitos enumeráveis e não-enumeráveis e tratava de paradoxos da teoria dos conjuntos. Foi aí que me interessei pela ideia de haver conjuntos infinitos maiores que outros.

Ao iniciar o próximo semestre letivo, já sob orientação de TCC, examinei uma série de livros sobre a história da matemática, neles encontrei muito pouco da história de Cantor e de suas contribuições para a matemática.

A partir daí encontramos um livro que tratava exclusivamente da história de Cantor e de suas contribuições (Cantor (Belna, 2011)). Assim, fiz a leitura dele na íntegra. Esse livro serviu como base para criar uma biografia do matemático e ligar partes do trabalho à história.

Para a construção da parte matemática, consultamos livros de análise, livros da *Sociedade Brasileira de Matemática*, dentre outros, no entanto o livro principal para elaboração do trabalho foi *Teoria dos conjuntos* (Lipschutz, 1976).

Em um dado momento, fui à procura dos trabalhos originais produzidos por Cantor, em alemão. Consegui encontrar sete artigos originais. Nós fizemos a tradução de dois. Assim, foi possível encontrar alguns trechos que se adequavam ao trabalho. Por exemplo, extraímos do artigo *Sobre uma propriedade do conjunto de todos os números reais algébricos* (1874) que Cantor demonstrou que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

Achei interessante a técnica utilizada para começamos a escrever o trabalho, iniciamos de traz para frente, começamos pelo Teorema 4.33 de Cantor, a partir dele construímos partes do Capítulo 3, Capítulo 4, enunciamos o Teorema 3.33 e algumas proposições necessárias para provar o Teorema de Cantor. À medida que estudamos o assunto, fomos acrescentando resultados.

Em suma a Definição 4.2 de Cantor é que permitiu provar o Teorema 4.33 e alguns outros teoremas de Cantor.

Nós produzimos todo o trabalho em linguagem Latex. Realizei dois minicursos introdutórios no meu campus e continuei aprendendo na internet, obtive ajuda da inteligência artificial ChatGPT¹ para produzir alguns gráficos no trabalho.

¹ Disponível em: <https://chat.openai.com/>.

REFERÊNCIAS

- ÁVILA, G. S. d. S. *Várias Faces da Matemática—Tópicos para Licenciatura e Leitura Geral*. São Paulo-SP: Editora Edgard Blucher, 2011.
- BELNA, J.-P. *Cantor*. São Paulo: Estação Liberdade, 2011.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. São Paulo-SP: Editora Blucher, 2012.
- CANTOR, G. Ueber die ausdehnung eines satzes aus der theorie der trigonometrischen reihen. *Mathematische Annalen* 5, p. 123–132, 1872.
- CANTOR, G. Ueber eine eigenschaft des inbegriffes aller reellen algebraischen zahlen. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* 77, p. 258–262, 1874.
- CANTOR, G. Ein beiüag zur mannigfaltigkeitslehre. *Crelles Journal f. Mathematik* 84, p. 242–258, 1878.
- CANTOR, G. Über eine elementare frage zur mannigfaltigkeitslehre. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 1, p. p. 75–78, 1891.
- CANTOR, G. Beitrage zur begründung der transfiniten mengenlehre. *Mathematische Annalen* 49, p. p. 207–246, 1897.
- CAVAILLES, J. *Philosophie mathématique*. Paris: Hermann, 1962.
- LIMA, E. L. *Análise real volume 1*. Rio de Janeiro: Impa, 2014.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio - volume 1*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- LIPSCHUTZ, S. *Teoria dos conjuntos*. São Paulo-SP: Editora McGraw do Brasil LTDA, 1976.
- VELLEMAN, D. J. *How to prove it: A structured approach*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.