



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

O TEOREMA DE OSTROWSKI

JACYELLEN DE FRANÇA RIBEIRO

Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Matemática

ORIENTADOR: PROF. DR. BRUNO DE PAULA MIRANDA

VALPARAÍSO-GO

2025



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Jacyellen de França Ribeiro

Matrícula: 20221150040215

Título do Trabalho: O Teorema de Ostrowski

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Valparaíso, 5 de março de 2026.


Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

TEOREMA DE OSTROWSKI

JACYELLEN DE FRANÇA RIBEIRO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG), Câmpus Valparaíso de Goiás, como parte dos requisitos para a conclusão do Curso e obtenção do título de licenciado em Matemática.

ORIENTADOR: PROF. DR. BRUNO DE PAULA MIRANDA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R484t Ribeiro, Jacyellen de França

O Teorema de Ostrowski [recurso eletrônico] / Jacyellen de França Ribeiro.

2026.

Dados eletrônicos (1 arquivo).

30 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Bruno de Paula Miranda.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, câmpus Valparaíso, 2026.

Modo de acesso: World Wide Web.

Arquivo de texto em formato PDF.

Disponível em: <https://repositorio.ifg.edu.br>.

1. Números Reais - Matemática (matemática). 2. Teoria dos números. I. Título. II. Miranda, Bruno de Paula, orient.

CDD 512



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS VALPARAÍSO

Termo de Aprovação

JACYELLEN DE FRANÇA RIBEIRO

TEOREMA DE OSTROWSKI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Valparaíso de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Monografia defendida e aprovada em 06 de fevereiro de 2026 pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno de Paula Miranda
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Profa. Dra. Maristela Barbosa Cardoso
Membro Interno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Profa. Dra. Anna Carolina Martins Machado Lafetá
Membro Externo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília

Valparaíso de Goiás – GO
2026

Documento assinado eletronicamente por:

- Maristela Barbosa Cardoso, PROF ENS BAS TEC TECNOLÓGICO-SUBSTITUTO, em 06/03/2026 11:38:26.
- Anna Carolina Martins Machado Lafetá, Anna Carolina Martins Machado Lafetá - Docente - Ifb (10791831000182), em 07/02/2026 15:55:55.
- Bruno de Paula Miranda, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 07/02/2026 15:51:50.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 06/02/2026. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 743467
Código de Autenticação: 4d226f8ae9



A Deus, a Ele, seja a glória eternamente.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado forças durante toda a minha trajetória no curso.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio e suporte, especialmente às minhas irmãs, Jayane e Jaylanne, que me motivaram em cada etapa.

Agradeço à minha amiga que conheci no IFG e que admiro muito, Cleityane, pela parceria, pelas conversas e experiências compartilhadas que tornaram essa trajetória mais leve.

Aos colegas que fiz ao longo do curso, especialmente aos da minha turma, que trilharam todo esse caminho comigo. Aos professores que contribuíram para minha formação, principalmente ao meu orientador, Bruno de Paula Miranda, que contribuiu na orientação deste trabalho.

Em suma, sou grata pela oportunidade de ter cursado o ensino superior no Instituto Federal de Goiás. Além do conhecimento técnico, levarei também comigo a responsabilidade de compartilhar e multiplicar esse saber.

Resumo

O Teorema de Ostrowski caracteriza os possíveis valores absolutos no conjunto dos números racionais. Por meio de uma abordagem teórico-exploratória de livros de Teoria dos Números, Espaços Métricos, Análise Real e Álgebra, pretende-se descrever a demonstração do teorema e abordar conceitos fundamentais para sua plena compreensão. O Teorema de Ostrowski estabelece que todo valor absoluto não trivial no corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ é equivalente ao valor absoluto usual ou a um valor absoluto p -ádico. Ao fornecer uma classificação completa dos valores absolutos em $\mathbb{Q}$, o teorema se torna uma ferramenta essencial para a construção e análise do corpo dos números p -ádicos.

Palavras-chave: Teorema de Ostrowski; Valor Absoluto; Números p -ádicos.

Abstract

The Ostrowski Theorem characterizes the possible absolute values on the set of rational numbers. Through a theoretical-exploratory approach to books on Number Theory, Metric Spaces, Real Analysis, and Algebra, the aim is to describe the proof of the theorem and address fundamental concepts for its full understanding. The Ostrowski Theorem establishes that every non-trivial absolute value on the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ is equivalent to either the usual absolute value or a p -adic absolute value. By providing a complete classification of absolute values in $\mathbb{Q}$, the theorem becomes an essential tool for the construction and analysis of the field of p -adic numbers.

Keywords: Ostrowski Theorem; Absolute Value; p -adic Numbers.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	VALOR ABSOLUTO	11
2.1	Propriedades do valor absoluto	14
3	TOPOLOGIA	17
4	VALORES ABSOLUTOS EM $\mathbb{Q}$ O TEOREMA DE OSTROWSKI	22
4.1	Valores absolutos equivalentes	22
4.2	Teorema de Ostrowski	24
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	28
	REFERÊNCIAS	29

1. INTRODUÇÃO

Em 1917, Alexander Markowich Ostrowski (1893–1986) estabeleceu um resultado fundamental ao classificar todos os valores absolutos definidos no corpo dos números racionais, um marco que se tornou um dos pilares da teoria dos números moderna [1]. Tal classificação fornece a base conceitual para a construção do corpo dos números p -ádicos, tema singular e de grande relevância na área [3].

De maneira análoga à construção do corpo dos números reais, os completamentos de $\mathbb{Q}$ surgem a partir do preenchimento das lacunas existentes no conjunto dos racionais, processo que depende da escolha de um valor absoluto. O Teorema de Ostrowski mostra que, a menos de equivalência, todo valor absoluto em $\mathbb{Q}$ pertence a uma de duas naturezas distintas: a arquimediana ou a não arquimediana. No primeiro caso, obtém-se um valor absoluto equivalente ao valor absoluto usual, cujo completamento conduz ao corpo dos números reais. No segundo, surgem os valores absolutos p -ádicos, associados aos números primos, cujo completamento dá origem aos corpos dos números p -ádicos.

Assim, o Teorema de Ostrowski não apenas descreve a existência desses dois tipos fundamentais de valores absolutos em $\mathbb{Q}$, mas também esclarece que não há outras possibilidades além do valor absoluto usual e dos valores absolutos p -ádicos. O objetivo deste trabalho é apresentar a demonstração desse teorema. Para que a compreensão seja completa, desenvolve-se previamente um estudo detalhado sobre valores absolutos, destacando suas propriedades principais e o papel que desempenham na construção dos respectivos completamentos. Este trabalho se fundamenta em diversas contribuições da literatura (conforme [2,4,5]), destacando-se como principal referência a obra de Gouvêa (ver [3]).

2. VALOR ABSOLUTO

O conjunto que será foco de nosso estudo será o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$, mas para destacar a generalidade dos teoremas e resultados, trabalharemos dentro de um corpo arbitrário $\mathbb{k}$. Lembrando que um corpo é um anel comutativo no qual todo elemento não nulo possui um inverso com respeito à multiplicação (para mais detalhes, ver [2]). Iniciaremos com a definição de valor absoluto num corpo $\mathbb{k}$ e exploraremos as propriedades implícitas da definição.

Definição 1. *Um valor absoluto em $\mathbb{k}$ é uma função*

$$|\cdot| : \mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

que satisfaz as seguintes condições:

- i) $|x| = 0$ se e somente se $x = 0$;*
- ii) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{k}$;*
- iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{k}$.*

Dizemos que um valor absoluto em $\mathbb{k}$ é não-arquimediano se satisfaz a condição adicional:

- iv) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ para todo $x, y \in \mathbb{k}$.*

caso contrário, dizemos que o valor absoluto é arquimediano.

Um exemplo óbvio é o *valor absoluto usual*, proveniente da função módulo: seja $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ o corpo dos racionais, definimos

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

No decorrer do texto, esse valor absoluto em $\mathbb{Q}$ será denotado por $|\cdot|_\infty$. É fácil ver que ele é arquimediano (tome $x = y = 1$ e perceba que a condição (iv) não é satisfeita). Outro exemplo de valor absoluto, porém pouco interessante, é o *valor absoluto trivial*: seja $|\cdot| : \mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por

$$|x| = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Perceba que é um exemplo de valor absoluto não-arquimediano. Vale ressaltar que se $\mathbb{k}$ é finito, então o único valor absoluto possível é o trivial. Isso será provado mais a frente no Lema 2.

Agora, para introduzir um outro exemplo, adotaremos uma nova maneira de medir distância entre racionais, a partir de um primo $p \in \mathbb{N}$ qualquer. Tome $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos escrevê-lo como um produto de potências de primos: $n = p^\nu n'$, com $p \nmid n'$. O expoente ν é determinado de forma única. Como ν é determinado por p e n , escreveremos $\nu_p(n) = \nu$, de forma que $\nu_p(n)$ é o expoente da maior potência de p que divide n . Formalmente:

Definição 2. Dado $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, definimos a valorização p -ádica de n como sendo o inteiro positivo $\nu_p(n)$ definido pela condição

$$n = p^{\nu_p(n)} n' \quad \text{com } p \nmid n'.$$

Se $x = a/b \in \mathbb{Q}^*$, definimos a valorização p -ádica de x pondo

$$\nu_p(x) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

Convencionamos $\nu_p(0) = +\infty$.

A convenção acima é intuitiva pois toda potência p^m divide 0.

Lema 1. Para todo $x, y \in \mathbb{Q}$, temos

$$i) \quad \nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$$

$$ii) \quad \nu_p(x + y) \geq \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\},$$

com as convenções óbvias em relação a $\nu_p(0) = +\infty$.

Demonstração. Sejam $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$.

(i) Sabendo que $x \cdot y = \frac{ac}{bd}$, segue por definição que

$$\begin{aligned} \nu_p(xy) &= \nu_p\left(\frac{ac}{bd}\right) = \nu_p(ac) - \nu_p(bd) \\ &= (\nu_p(a) + \nu_p(c)) - (\nu_p(b) + \nu_p(d)) \\ &= (\nu_p(a) - \nu_p(b)) + (\nu_p(c) - \nu_p(d)) \\ &= \nu_p(x) + \nu_p(y). \end{aligned}$$

Acima estamos usando o fato elementar de que o expoente da maior potência de p que divide um produto de inteiros é a soma dos expoentes das maiores potências de p que dividem os respectivos fatores.

(ii) Agora, sabendo que $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ temos

$$\begin{aligned}
\nu_p(x + y) &= \nu_p\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) = \nu_p(ad + bc) - \nu_p(bd) \\
&\geq \min\{\nu_p(ad), \nu_p(bc)\} - \nu_p(bd) \\
&= \min\{\nu_p(ad) - \nu_p(bd), \nu_p(bc) - \nu_p(bd)\} \\
&= \min\{\nu_p(a) - \nu_p(b), \nu_p(c) - \nu_p(d)\} \\
&= \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}.
\end{aligned}$$

Na primeira desigualdade acima usamos o fato de que na soma $ad + bc$ podemos por em evidência a potência $p^{\min\{\nu_p(ad), \nu_p(bc)\}}$. $\square$

Note que se compararmos as duas propriedades neste lema com as condições (ii) e (iv) na definição de valores absolutos, vemos que elas são muito semelhantes, exceto que o produto na primeira foi transformado em uma soma (como ao calcular um logaritmo) e que a desigualdade na segunda foi invertida. Podemos “desfazer” a inversão da desigualdade alterando o sinal e, em seguida, transformar a soma em um produto elevando-a a um expoente.

Definição 3. Seja $x \in \mathbb{Q}^*$, definimos o valor absoluto p -ádico de x por

$$|x|_p = p^{-\nu_p(x)}.$$

Convencionamos que $|0|_p = 0$.

Proposição 1. A função $|\cdot|_p$ é um valor absoluto não-arquimediano em $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Por definição de valor absoluto p -ádico, temos que $|x|_p = 0 \iff x = 0$. Pelo Lema 1, temos que

$$\begin{aligned}
|xy|_p &= p^{-\nu_p(xy)} \\
&= p^{-(\nu_p(x) + \nu_p(y))} \\
&= p^{-\nu_p(x)} \cdot p^{-\nu_p(y)} \\
&= |x|_p \cdot |y|_p.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|x + y|_p &= p^{-\nu_p(x + y)} \\
&\leq p^{-\min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}} \\
&= \max\{p^{-\nu_p(x)}, p^{-\nu_p(y)}\} \\
&= \max\{|x|_p, |y|_p\}.
\end{aligned}$$

Portanto, a função $|\cdot|_p$ é um valor absoluto não-arquimediano.

□

De forma geral, quando calculamos o valor absoluto p -ádico de um número n que é “muito divisível” pelo nosso primo p , a valoração $\nu_p(n)$ será grande e, então, o valor absoluto $|n|_p$ será pequeno. Portanto, o valor absoluto p -ádico fornece, de uma forma peculiar, uma medida de quão divisível um número é por p . Por exemplo, o valor absoluto 5-ádico de 124 é igual a 1, pois

$$|124|_5 = 5^{-\nu_5(124)} = 5^0 = 1.$$

Já o valor absoluto 5-ádico de 125 é igual a 0.008, pois

$$|125|_5 = 5^{-\nu_5(125)} = 5^{-3} = \frac{1}{125} = 0.008.$$

2.1. Propriedades do valor absoluto

Seja $\mathbb{k}$ um corpo qualquer e $|\cdot|$ um valor absoluto não-trivial em $\mathbb{k}$, que pode ou não ser arquimediano. Primeiramente, provaremos alguns fatos de verificação quase imediata, porém indispensáveis para a boa compreensão do trabalho.

Lema 2. *Para qualquer valor absoluto $|\cdot|$ em um corpo $\mathbb{k}$, temos que:*

- i) $|1| = 1$
- ii) Se $x \in \mathbb{k}$ e $|x^n| = 1$, então $|x| = 1$
- iii) $|-1| = 1$
- iv) Para todo $x \in \mathbb{k}$, $|-x| = |x|$.
- v) Se $\mathbb{k}$ é um corpo finito, $|\cdot|$ é trivial.

Demonstração. i) Observe que

$$|1| = |1^2| = |1| \cdot |1| = |1|^2.$$

Isto é, $|1|$ é um número real positivo que elevado ao quadrado resulta em 1. Disto segue que $|1| = 1$.

ii) Seja $x \in \mathbb{k}$ com $x^n = 1$. Teremos

$$1 = |1| = |x^n| = |x|^n \implies |x| = 1.$$

iii) Como $(-1)^2 = 1$, segue diretamente de ii) que $|-1| = 1$.

iv) Segue de iii) que

$$|-x| = |-1||x| = 1 \cdot |x| = |x|.$$

v) Se $\mathbb{k}$ é finito, então dado $x \in \mathbb{k}^*$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^n = 1.$$

Portanto, segue de ii) que $|x| = 1$ e o valor absoluto tem que ser o trivial.

□

De agora em diante, sempre que escrevermos $\mathbb{k}$ fica subentendido que trata-se de um corpo não finito. Queremos obter uma condição necessária e suficiente para que um valor absoluto seja não-arquimediano. Começamos com o seguinte lema.

Lema 3. *Seja $\mathbb{k}$ um corpo e $|\cdot|$ um valor absoluto em $\mathbb{k}$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$, para todo $x, y \in \mathbb{k}$.

ii) $|z + 1| \leq \max\{|z|, 1\}$.

Demonstração. Considere (i) verdade. Então, colocando $x = z$ e $y = 1$, temos que $(i) \implies (ii)$. Agora, assuma (ii) verdade. Se $y = 0$ então (i) é válido automaticamente, portanto podemos assumir $y \neq 0$. Seja $z = x/y$. Então temos de (ii)

$$\left| \frac{x}{y} + 1 \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{x}{y} \right|, 1 \right\}.$$

Ao multiplicarmos ambos os lados por $|y|$, temos que

$$|y| \cdot \left| \frac{x}{y} + 1 \right| \leq |y| \cdot \max \left\{ \left| \frac{x}{y} \right|, 1 \right\} \implies |x + y| \leq \max \{|x|, |y|\}.$$

□

Teorema 1. *Seja $A \subseteq \mathbb{k}$ a imagem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{k}$. Um valor absoluto $|\cdot|$ em $\mathbb{k}$ é não-arquimediano se e somente se $|a| \leq 1$ para todo $a \in A$. Em particular, um valor absoluto em $\mathbb{Q}$ é não-arquimediano se e somente se $|n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Sabemos que $|\pm 1| = 1$; portanto, se $|\cdot|$ é não-arquimediano, temos que

$$|a \pm 1| \leq \max\{|a|, 1\}.$$

Por indução, segue que $|a| \leq 1$ para todo $a \in A$.

Agora, provaremos a recíproca pelo lema anterior. Pelo Lema 3, basta provar que para qualquer $x \in \mathbb{k}$ temos

$$|x \pm 1| \leq \max\{|x|, 1\}.$$

Seja m um inteiro positivo qualquer. Então,

$$|x+1|^m = \left| \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k \right| \leq \sum_{k=0}^m \left| \binom{m}{k} \right| |x^k|.$$

Agora, como $\binom{m}{k}$ é um inteiro, temos $\left| \binom{m}{k} \right| \leq 1$, então podemos continuar com

$$|x+1|^m \leq \sum_{k=0}^m \left| \binom{m}{k} \right| |x^k| \leq \sum_{k=0}^m |x^k| = \sum_{k=0}^m |x|^k.$$

Note que o maior valor de $|x|^k$ para $k = 0, 1, 2, \dots, m$ é igual a $|x|^m$ se $|x| > 1$ e é igual a 1 caso contrário, porque $x^0 = 1$. Então,

$$|x+1|^m \leq (m+1) \max\{1, |x|^m\}.$$

Extraindo a raiz m -ésima de ambos os lados, obtemos:

$$|x+1| \leq \sqrt[m]{m+1} \cdot \max\{1, |x|\}.$$

Esta desigualdade é válida para todo inteiro positivo m , não importa quão grande seja, e sabemos (da teoria de limites) que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m+1} = 1.$$

Portanto, se $m \rightarrow \infty$ temos

$$|x+1| \leq \max\{|x|, 1\},$$

como queríamos mostrar. □

Isso ajuda a explicar a diferença entre valores absolutos arquimedianos e não arquimedianos e nos permite reformular as coisas da seguinte maneira: um valor absoluto é arquimediano se a imagem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{k}$ for ilimitada. Segue que um valor absoluto é arquimediano se satisfaz a seguinte **Propriedade Arquimediana**: *Dados $x, y \in \mathbb{k}$, $x \neq 0$, existe um inteiro positivo n tal que $|nx| > |y|$.* Perceba que a Propriedade Arquimediana é equivalente à afirmação de que existem inteiros cujos valores absolutos são arbitrariamente grandes. Esta propriedade vale para o valor absoluto usual em $\mathbb{Q}$ e nos números reais.

3. TOPOLOGIA

Ao trabalharmos com valores absolutos em corpos, obtemos uma noção de tamanho dos elementos do corpo, com a qual podemos medir distância entre os elementos. Isto é, obtemos uma métrica, com a qual podemos definir os conceitos topológicos como conjuntos abertos e fechados, limites de sequências, etc. O primeiro passo é medir as distâncias:

Definição 4. *Seja $\mathbb{k}$ um corpo e $|\cdot|$ um valor absoluto em $\mathbb{k}$. Definimos a distância $d(x, y)$ entre dois elementos $x, y \in \mathbb{k}$ por*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

A função $d(x, y)$ é chamada de métrica induzida pelo valor absoluto.

A definição de $d(x, y)$ é paralela, naturalmente, à maneira usual como definimos a distância entre dois números reais. O primeiro ponto que precisamos esclarecer é que muitas das noções que podemos definir usando a distância usual em $\mathbb{R}$ funcionam igualmente bem para qualquer distância.

Lema 4. *Sejam $d(x, y)$ e $\mathbb{k}$ como na definição 4. Valem as seguintes propriedades:*

- i) Para todo $x, y \in \mathbb{k}$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;*
- ii) Para todo $x, y \in \mathbb{k}$, $d(x, y) = d(y, x)$;*
- iii) Para todo $x, y, z \in \mathbb{k}$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

Demonstração. Por definição de valor absoluto, temos que $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ e $d(x, y) = |x - y| = 0 \iff x = y$. Pela propriedade de valor absoluto, é fácil ver que $|x - y| = |y - x|$. E, por fim, perceba que $d(x, z) = |x - z| = |x + y - y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$. $\square$

Estas são as propriedades gerais que definem uma métrica; a última desigualdade é chamada de *desigualdade triangular*, pois expressa o fato usual de que o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois (“Uma reta é o caminho mais curto entre dois pontos.”). Um conjunto no qual uma métrica é definida é chamado de *espaço métrico*, então podemos ler o enunciado deste último lema como dizendo que qualquer corpo com um valor absoluto pode ser transformado em um espaço métrico definindo $d(x, y) = |x - y|$.

De maneira geral, a métrica definida por valores absolutos arquimedianos se comporta de maneira muito semelhante à dos números reais. Já quando a métrica é definida por um valor absoluto não arquimediano, surgem diferenças interessantes. O fato de um valor absoluto não ser arquimediano também pode ser expresso em termos da métrica:

Lema 5. *Seja $|\cdot|$ um valor absoluto em um corpo $\mathbb{k}$ e definindo uma métrica por $d(x, y) = |x - y|$. O valor absoluto $|\cdot|$ é não arquimediano se, e somente se, para qualquer $x, y, z \in \mathbb{k}$ temos que*

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Demonstração. Primeiramente, considere o valor absoluto não arquimediano. Note que $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y|$, pela propriedade não arquimediana, temos que

$$|x - z + z - y| \leq \max\{|x - z|, |z - y|\} = \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Reciprocamente, assumindo $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ válido para quaisquer x, y, z , note que

$$\begin{aligned} |x + y| &= |x - (-y)| = d(x, -y) \\ &\leq \max\{d(x, 0), d(0, -y)\} \\ &= \max\{|x|, |-y|\} \\ &= \max\{|x|, |y|\}, \end{aligned}$$

assim, temos que o valor absoluto é não arquimediano. □

Chamamos essa desigualdade de “desigualdade ultramétrica”. Um espaço munido com essa ultramétrica é chamado de **espaço ultramétrico**. Tais espaços apresentam propriedades bastante curiosas. Uma vez que temos uma maneira de medir distâncias, podemos fazer geometria; e, como nossa maneira de medir distâncias é bastante estranha, a geometria também é bastante diferente da qual estamos acostumados. Antes de apresentarmos alguns desses resultados, consideremos a seguinte proposição:

Proposição 2. *Seja $\mathbb{k}$ um corpo e $|\cdot|$ um valor absoluto não-arquimediano em $\mathbb{k}$. Se $x, y \in \mathbb{k}$ e $|x| \neq |y|$, então*

$$|x + y| = \max\{|x|, |y|\}.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $|x| > |y|$. Segue da definição de valor absoluto não arquimediano que

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} = |x|.$$

Por outro lado, $x = (x + y) - y$, então

$$|x| \leq \max\{|x + y|, |y|\} = |x + y|,$$

o que implica que $|x + y| \leq |x| \leq |x + y|$, e portanto $|x| = |x + y|$. $\square$

A propriedade ultramétrica apresentada na proposição acima pode ser referida como "o mais forte ganha". Com o intuito de explorar alguns resultados interessantes, embora não sejam todos essenciais para o tema do trabalho, apresentaremos, a seguir, algumas peculiaridades geradas pela propriedade ultramétrica que ilustram a singularidade desses espaços. A primeira delas, decorre diretamente da Proposição 2.

Corolário 1. *Em um espaço ultramétrico, todos os "triângulos" são isósceles.*

Demonstração. Sejam x, y e z elementos de um espaço ultramétrico. As medidas dos lados do triângulo são $d(x, y) = |x - y|$, $d(x, z) = |x - z|$ e $d(z, y) = |z - y|$. Note que

$$(x - y) = (x - z) + (z - y).$$

Se for $|x - z| \neq |z - y|$, pela Proposição 2, temos que $|x - y| = \max\{|x - z|, |z - y|\}$. Assim, ou temos $|x - z| = |z - y|$ ou $|x - y| = \max\{|x - z|, |z - y|\}$, e portanto sempre temos dois lados com a mesma medida. $\square$

Este é um resultado bastante contraintuitivo. Para visualizarmos melhor a Proposição 2, analisaremos o valor absoluto p -ádico no caso em que $x, y \in \mathbb{Z}$. Sabemos que, $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$; considere $\nu_p(x) = n$ e $\nu_p(y) = m$, de modo que

$$x = p^n x' \quad y = p^m y' \quad p \nmid x' y'.$$

Aplicando o valor absoluto, temos

$$|x|_p = p^{-n} \quad \text{e} \quad |y|_p = p^{-m}.$$

Obtemos $|x|_p > |y|_p$ quando $n < m$; assumamos que $m = n + \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$. Então

$$x + y = p^n x' + p^{n+\varepsilon} y' = p^n (x' + p^\varepsilon y').$$

Agora, como $p \nmid x'$, temos $p \nmid (x' + p^\varepsilon y')$, e portanto $\nu_p(x + y) = n$, o que significa que $|x + y|_p = p^{-n} = |x|_p$, como afirma a proposição. Nessa situação, $|y|_p$ é menor e $|x|_p = |x + y|_p$.

Por outro lado, suponhamos que $|x|_p = |y|_p$, ou seja, que $n = m$. Então, obtemos

$$x + y = p^n (x' + y')$$

com $p \nmid x'$ e $p \nmid y'$, e é perfeitamente possível que $p \mid (x' + y')$, nesse caso, o máximo que podemos afirmar é que $\nu_p(x + y) \geq n = \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$, logo

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} = |x|_p = |y|_p.$$

Portanto, quando $|x|_p$ e $|y|_p$ são iguais, é possível que $|x + y|_p$ seja menor (ou não). Assim, em ambos os casos, pelo menos dois dos três valores absolutos $|x|_p$, $|y|_p$ e $|x + y|_p$ são iguais.

Em espaços métricos, as “bolas” ou os “discos” também se revelam bastante peculiares.

Definição 5. *Seja $\mathbb{k}$ um corpo com um valor absoluto $|\cdot|$. Seja $a \in \mathbb{k}$ um elemento e $r \in \mathbb{R}_+$ um número real. A **bola aberta** de raio r e centro a é o conjunto*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{k} : d(x, a) < r\} = \{x \in \mathbb{k} : |x - a| < r\}.$$

A **bola fechada** de raio r e centro a é o conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{k} : d(x, a) \leq r\} = \{x \in \mathbb{k} : |x - a| \leq r\}.$$

As bolas abertas são os protótipos dos conjuntos abertos, e as bolas fechadas dos conjuntos fechados. Num espaço métrico, um conjunto U é aberto se qualquer elemento em U for o centro de uma bola aberta que está contida em U ; um conjunto S é fechado se seu complemento for um conjunto aberto. Um ponto x é um **ponto de fronteira** de um conjunto S se qualquer bola aberta com centro x contiver tanto pontos que estão em S quanto pontos que não estão em S . Um conjunto S é fechado exatamente quando contém todos os pontos de sua fronteira.

Com essas definições em mente, exploraremos a topologia dos espaços ultramétricos com respeito às bolas. Mostraremos que todo ponto de uma bola é também centro dessa bola, outro resultado peculiar decorrente da propriedade ultramétrica.

Proposição 3. *Seja $\mathbb{k}$ um corpo com um valor absoluto não arquimediano.*

- i) Se $b \in B(a, r)$, então $B(a, r) = B(b, r)$; em outras palavras, todo ponto que está contido em uma bola aberta é um centro dessa bola.*
- ii) Se $b \in \overline{B}(a, r)$, então $\overline{B}(a, r) = \overline{B}(b, r)$; em outras palavras, todo ponto que está contido em uma bola fechada é um centro dessa bola.*

Demonstração. Para provar (i), temos por definição que $b \in B(a, r)$ se e somente se $|b - a| < r$; tomando um x qualquer que satisfaz $|x - a| < r$, a propriedade não arquimediana nos diz que

$$|x - b| = |x - a + a - b| = |(x - a) - (b - a)| \leq \max\{|x - a|, |b - a|\} < r,$$

então, $x \in B(b, r)$; isso mostra que $B(a, r) \subset B(b, r)$. Agora, similarmente, seja $a \in B(b, r)$, isto é, $|a - b| < r$. Tomando um y qualquer que satisfaz $|y - b| < r$, a propriedade não

arquimadiana nos diz que

$$|y - a| = |y - b + b - a| = |(y - b) - (a - b)| \leq \max\{|y - b|, |a - b|\} < r,$$

então, $y \in B(a, r)$; isso mostra que $B(b, r) \subset B(a, r)$. Portanto, $B(a, r) = B(b, r)$.

A demonstração de (ii) é análoga à demonstração de (i), basta substituir $<$ por $\leq$. □

4. VALORES ABSOLUTOS EM $\mathbb{Q}$ O TEOREMA DE OSTROWSKI

Nesta seção, mostraremos que, no corpo dos números racionais, os valores absolutos são essencialmente aqueles que já encontramos: o valor absoluto usual, o valor absoluto p -ádico e o valor absoluto trivial. Antes disso, introduziremos a noção de “igualdade” de valores absolutos. Assim, seremos capazes de demonstrar que esses três constituem a lista completa de valores absolutos em $\mathbb{Q}$.

4.1. Valores absolutos equivalentes

Definição 6. *Dois valores absolutos $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ em um corpo $\mathbb{K}$ são equivalentes se definem a mesma topologia em $\mathbb{K}$, isto é, se todo conjunto que é aberto em relação a um também é aberto em relação ao outro.*

Afirmar que dois valores absolutos são equivalentes significa dizer que, apesar de serem definidos de formas diferentes, eles são “o mesmo” (de forma mais rigorosa, eles induzem a mesma topologia, isto é, produzem o mesmo comportamento topológico no conjunto). Isso é mais fácil de dizer do que de verificar, então encontraremos um critério mais acessível. Observe primeiro que o fato de uma sequência convergir pode ser expresso em termos de conjuntos abertos, e, portanto, valores absolutos equivalentes terão as mesmas sequências convergentes.

Lema 6. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo com um valor absoluto $|\cdot|$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

ii) *Qualquer conjunto aberto que contenha a contém todos os termos da sequência (x_n) , exceto um número finito deles.*

Demonstração. Assuma que vale (ii). Uma vez que uma bola aberta $B(a, \varepsilon)$ centrada em a é um conjunto aberto, todos os termos de (x_n) , exceto um número finito deles, pertencem a bola aberta, então existe um N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in B(a, \varepsilon)$. Portanto para qualquer ε existe um N tal que $n \geq N$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$, ou seja, $x_n \rightarrow a$.

Agora, suponha que $x_n \rightarrow a$ e considere U um conjunto aberto contendo a . Como U é aberto, existe um r tal que $B(a, r) \subset U$. Então, existe um N tal que $|x_n - a| < r$ para todo $n \geq N$. Portanto, para todos os n , exceto um número finito deles, temos $x_n \in B(a, r) \subset U$. $\square$

Isso fornece uma definição de sequência convergente (em um corpo munido de valor absoluto) em termos de conjuntos abertos. Portanto, se dois valores absolutos definem os mesmos conjuntos abertos, eles também definirão as mesmas sequências convergentes. Esta é a primeira de várias maneiras equivalentes de caracterizar a equivalência de valores absolutos.

Proposição 4. *Seja $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ valores absolutos em um corpo $\mathbb{k}$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- i) $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ são valores absolutos equivalentes.*
- ii) Para qualquer sequência (x_n) em $\mathbb{k}$ temos $x_n \rightarrow a$ com respeito a $|\cdot|_1$ se, e somente se, $x_n \rightarrow a$ com respeito a $|\cdot|_2$.*
- iii) Para qualquer $x \in \mathbb{k}$ temos $|x|_1 < 1$ se, e somente se, $|x|_2 < 1$.*
- iv) Existe um número real positivo α tal que para todo $x \in \mathbb{k}$ temos*

$$|x|_1 = |x|_2^\alpha.$$

Demonstração. Primeiro, suponha (i), isto é, que $|x|_1$ e $|x|_2$ são equivalentes. Pelo Lema 6, qualquer sequência que converge em relação a um valor absoluto também deve convergir no outro, o que é (ii).

Suponha (ii). Dado qualquer $x \in \mathbb{k}$, é fácil ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ com respeito à topologia induzida por um valor absoluto $|\cdot|$ se e somente se $|x| < 1$. Isso dá (iii).

Agora, assumamos (iii), provaremos que vale (iv). Tomando $x_0 \in \mathbb{k}^*$ que satisfaz $|x_0|_1 < 1$ (note que o valor absoluto é não-trivial), segue de (iii) que $|x_0|_2 < 1$. Seja $\alpha = \log_{|x_0|_2}(|x_0|_1)$. Claramente, temos

$$|x_0|_1 = |x_0|_2^\alpha$$

e $\alpha > 0$ (lembre-se do gráfico da função logarítmica de base entre 0 e 1). Mostraremos que para qualquer outro $x \in \mathbb{k}$ valerá a igualdade

$$|x|_1 = |x|_2^\alpha. \tag{1}$$

Note que podemos admitir $x \neq 0$. Perceba que, se ocorre $|x|_1 = |x_0|_1$, então deveremos ter $|x|_2 = |x_0|_2$, pois do contrário teríamos $\frac{x}{x_0}$ ou $\frac{x_0}{x}$ com $|\cdot|_2 < 1$, contrariando (iii). Em particular, valeria a equação (1).

Similarmente, se $|x|_1 = 1$, deveremos ter $|x|_2 = 1$, pois do contrário (ii) aplicado a x ou $\frac{1}{x}$ implicaria $|x|_1 < 1$. Assim, neste caso também teríamos que vale (1).

Agora admita que $x \neq 1$ e que $|x|_1 \neq |x_0|_1$. Seja β tal que

$$|x|_1 = |x|_2^\beta. \tag{2}$$

Queremos provar que $\alpha = \beta$. Primeiro, note que se um elemento x satisfaz (1) ou (2), então toda potência x^n com expoente inteiro também satisfará (isso segue diretamente das propriedades de valor absoluto). Em particular, podemos assumir sem perda de generalidade

que $|x|_1 < 1$ pois, se não o fosse, bastaria trabalhar com $\frac{1}{x}$. Sejam m, n dois inteiros positivos. Note que

$$|x|_1^n < |x_0|_1^m \iff \left| \frac{x^n}{x_0^m} \right|_1 < 1 \iff \left| \frac{x^n}{x_0^m} \right|_2 < 1 \iff |x|_2^n < |x_0|_2^m$$

e aplicando o logaritmo na primeira e na última inequação, obtemos

$$n \log |x|_1 < m \log |x_0|_1 \iff n \log |x|_2 < m \log |x_0|_2$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{n}{m} < \frac{\log |x_0|_1}{\log |x|_1} \iff \frac{n}{m} < \frac{\log |x_0|_2}{\log |x|_2}.$$

Isto implica que os dois quocientes de logaritmos acima devem coincidir, pois do contrário conseguiríamos alguma fração $\frac{n}{m}$ entre os dois quocientes. Sendo assim temos

$$\frac{\log |x_0|_1}{\log |x_0|_2} = \frac{\log |x|_1}{\log |x|_2}$$

e como $\log |x_0|_1 = |x_0|_2^\alpha$ e $|x|_1 = |x|_2^\beta$, concluímos que vale $\alpha = \beta$, logo vale (iv).

Finalmente, se assumirmos (iv), obtemos que

$$|x - a|_1 < r \iff |x - a|_2^\alpha < r \iff |x - a|_2 < r^{\frac{1}{\alpha}},$$

de modo que qualquer bola aberta em relação a $|\cdot|_1$ também é uma bola aberta (embora de raio diferente) em relação a $|\cdot|_2$. Isso é suficiente para mostrar que as topologias definidas pelos dois valores absolutos são idênticas. $\square$

4.2. Teorema de Ostrowski

Teorema de Ostrowski. *Todo valor absoluto não-trivial em $\mathbb{Q}$ é equivalente a algum valor absoluto $|\cdot|_p$, onde p é primo ou $p = \infty$.*

Demonstração. Seja $|\cdot|$ um valor absoluto não-trivial em $\mathbb{Q}$. Consideraremos as seguintes possibilidades:

- a) Suponhamos que $|\cdot|$ é arquimediano. Queremos mostrar que o valor absoluto em questão é equivalente ao valor absoluto usual $|\cdot|_\infty$ (proveniente da função módulo). Seja n_0 o menor inteiro positivo tal que $|n_0| > 1$ (pelo Teorema 1 deve existir pelo menos um, caso contrário, o valor absoluto seria não-arquimediano). Agora, podemos encontrar

um $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$|n_0| = n_0^\alpha.$$

(Encontrar α é um simples exercício de logaritmo, basta resolver a seguinte equação: $\log_{n_0} |n_0| = \alpha$.) Com α satisfazendo a igualdade, realizaremos a prova de que $|\cdot|$ e $|\cdot|_\infty$ são equivalentes. Para isso, segue da Proposição 4 que basta provar que, para todo $x \in \mathbb{Q}$ a igualdade $|x| = |x|_\infty^\alpha$ vale.

Note que provando que esta igualdade vale para qualquer inteiro positivo, ela também valerá para os racionais pelas propriedades de valor absoluto.

Sabemos que quando $n = n_0$ vale a igualdade. Provaremos que valerá também para qualquer inteiro. Tomemos n um inteiro positivo arbitrário e escreveremos na base n_0 , na forma

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_k n_0^k,$$

com $0 \leq a_i \leq n_0 - 1$ e $a_k \neq 0$. Note que k é determinado pela inequação $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$, em particular

$$k = \left\lfloor \frac{\log n}{\log n_0} \right\rfloor.$$

Aplicando o valor absoluto, temos

$$\begin{aligned} |n| &= |a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_k n_0^k| \\ &\leq |a_0| + |a_1| n_0^\alpha + |a_2| n_0^{2\alpha} + \cdots + |a_k| n_0^{k\alpha}. \end{aligned}$$

Como n_0 foi escolhido como o menor inteiro tal que $|n_0| > 1$, então todos os $|a_i| \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} |n| &\leq 1 + n_0^\alpha + n_0^{2\alpha} + \cdots + n_0^{k\alpha} \\ &= n_0^{k\alpha} (1 + n_0^{-\alpha} + n_0^{-2\alpha} + \cdots + n_0^{-k\alpha}) \\ &= n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^k n_0^{-i\alpha} \\ &\leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{-i\alpha} \\ &= n_0^{k\alpha} \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Observação: Na segunda linha da equação acima, colocou-se em evidência o termo $n_0^{k\alpha}$.

Na terceira linha, reescrevemos a soma $(1 + n_0^{-\alpha} + n_0^{-2\alpha} + \dots + n_0^{-k\alpha})$ como a série geométrica: $\sum_{i=0}^k n_0^{-i\alpha}$.

Na quarta linha, consideramos o limite do somatório quando tende ao infinito, o qual converge para a expressão $\frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}$.

Note que se $C = \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}$ (perceba que C é um número positivo e que não depende de n e nem de k), podemos reescrever a desigualdade da seguinte forma:

$$|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha.$$

Agora esta fórmula é aplicável para qualquer n arbitrário, então valerá para n^N , que por sua vez será

$$|n^N| \leq C n^{N\alpha}.$$

Aplicando a raiz N -ésima, temos

$$|n| \leq \sqrt[N]{C} n^\alpha.$$

Como vale para qualquer N , podemos fazer $N \rightarrow \infty$, fazendo $\sqrt[N]{C} \rightarrow 1$, e assim ficamos com a inequação: $|n| \leq n^\alpha$.

Queremos provar a igualdade, provaremos então que vale também $|n| \geq n^\alpha$. Para isso, escreveremos a expressão na base n_0 :

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \dots + a_k n_0^k.$$

Como $n_0^{k+1} > n \geq n_0^k$, temos

$$n_0^{(k+1)\alpha} = |n_0^{k+1}| = |n + n_0^{k+1} - n| \leq |n| + |n_0^{k+1} - n|,$$

então

$$|n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - |n_0^{k+1} - n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha.$$

Agora, como $n \geq n_0^k$, segue que

$$\begin{aligned} |n| &\geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha \\ &= n_0^{(k+1)\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0} \right)^\alpha \right) \\ &= C' n_0^{(k+1)\alpha} \\ &> C' n^\alpha, \end{aligned}$$

e novamente $C' = 1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^\alpha$ não depende de n e é positivo. Como valem as duas desigualdades $|n| \leq n^\alpha$ e $|n| \geq n^\alpha$, temos que $|n| = n^\alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Isso prova que todo valor absoluto $|\cdot|$ arquimediano nos racionais é equivalente ao valor absoluto usual $|\cdot|_\infty$.

- b) Agora, suponha que o valor absoluto $|\cdot|$ é não-arquimediano. Ou seja, $|n| \leq 1$ para todo inteiro n (isso segue do teorema 1).

Como $|\cdot|$ não é o trivial, então deve existir um menor inteiro positivo tal que $|n_0| < 1$.

Veja que n_0 é primo. Se não fosse, então n_0 pode ser escrito da forma $n_0 = a \cdot b$ com a e b menores do que n_0 . Nesse caso, pela nossa escolha de n_0 , teríamos $|a| = |b| = 1$ e $|ab| = |n_0| < 1$, o que não pode ser. Logo, n_0 é primo. Chamaremos n_0 de p . Agora, mostraremos que $|\cdot|$ é equivalente ao valor absoluto p -ádico, onde p é esse primo específico.

Se $n \in \mathbb{Z}$ não for divisível por p , então $|n| = 1$. Ao dividirmos n por p , teremos um resto, que podemos escrever da seguinte forma

$$n = rp + s$$

com $0 < s < p$. Pela minimalidade de p , temos que $|s| = 1$. Além disso, temos que $|rp| < 1$, porque $|r| \leq 1$ (por consequência do valor absoluto ser não-arquimediano) e $|p| < 1$ (por construção). Como $|\cdot|$ é não-arquimediano (e portanto “todos os triângulos são isósceles”), segue da proposição 2 que

$$|n| = |rp + s| = |rp + 1| \leq \max\{|rp|, 1\} = 1.$$

Finalmente, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, podemos escrevê-lo como $n = p^\nu n'$ com $p \nmid n'$, o que implica que $|n'| = 1$. Então,

$$|n| = |p|^\nu |n'| = |p|^\nu = c^{-\nu},$$

onde $c = |p|^{-1} > 1$.

Portanto, $|\cdot|$ é equivalente ao valor absoluto p -ádico.

□

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações desenvolvidas ao longo deste trabalho evidenciam o papel central do Teorema de Ostrowski na compreensão da estrutura aritmética do corpo dos números racionais e de seus possíveis completamentos. Esse teorema estabelece que todo valor absoluto não trivial definido em $\mathbb{Q}$ é equivalente ao valor absoluto usual ou a algum valor absoluto p -ádico, associado a um número primo p . Tal resultado impõe uma classificação completa e exaustiva, mostrando que não existem outros tipos de valores absolutos além desses.

Como consequência direta dessa classificação, torna-se possível ampliar o corpo dos números racionais de maneira sistemática, concluindo que os únicos corpos completos obtidos a partir de $\mathbb{Q}$ são o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e, para cada primo p , o corpo dos números p -ádicos $\mathbb{Q}_p$. O corpo $\mathbb{R}$ surge como o completamento de $\mathbb{Q}$ em relação ao valor absoluto usual, enquanto cada $\mathbb{Q}_p$ é obtido por meio do valor absoluto p -ádico correspondente. Em ambos os casos, preserva-se uma propriedade fundamental: o conjunto dos números racionais é denso no corpo completo resultante, assim como ocorre na construção dos números reais.

Dessa forma, o Teorema de Ostrowski constitui uma ferramenta essencial para a teoria dos números moderna, pois fornece o alicerce teórico necessário para a construção e o estudo dos números p -ádicos. Esses corpos desempenham um papel crucial na resolução de problemas envolvendo divisibilidade, congruências e equações diofantinas, além de apresentarem aplicações relevantes em áreas como criptografia e códigos de correção de erros. Assim, o teorema não apenas esclarece a natureza dos valores absolutos em $\mathbb{Q}$, mas também abre caminho para desenvolvimentos profundos e aplicações amplas dentro e fora da matemática.

REFERÊNCIAS

- [1] ALVES, Francisco Regis Vieira; OLIVEIRA, Paulo César Cavalcante de. **Sobre os números p -ádicos: aspectos históricos, matemáticos e epistemológicos..** Revista Brasileira de História da Matemática, v. 24, n. 48, p. 1-32, 2024.
- [2] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de Álgebra.** Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [3] GOUVÊA, Fernando Q. **p -adic numbers: An introduction.** 3. ed. Cham: Springer, 2020.
- [4] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise.** v. 1. 13^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos.** 1^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.