



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Câmpus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

Origami como material didático nas aulas de matemática do Ensino Médio com a abordagem do Ensino Exploratório

Caetano Cordeiro de Melo

Trabalho de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Me. Luiz Fernando Ferreira Machado

VALPARAÍSO DE GOIÁS - GO

2025



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Caetano Cordeiro de Melo

Matrícula: 20211150040129

Título do Trabalho: Origami como material didático nas aulas de matemática do Ensino Médio com a abordagem do Ensino Exploratório

Autorização - Marque uma das opções

1. (x) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.



Documento assinado digitalmente
CAETANO CORDEIRO DE MELO
Data: 26/07/2025 10:23:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Valparaíso de Goiás, 26 / 07 / 2025.
Local Data

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Câmpus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

Origami como material didático nas aulas de matemática do Ensino Médio com a abordagem do Ensino Exploratório

Caetano Cordeiro de Melo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de
Goiás (IFG), Câmpus Valparaíso de Goiás, como parte dos
requisitos para a conclusão do Curso e obtenção do título
de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Luiz Fernando Ferreira Machado

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M528o

Melo, Caetano Cordeiro de

Origami como material didático nas aulas de matemática do Ensino Médio com a abordagem do Ensino Exploratório [recurso eletrônico] / Caetano Cordeiro de Melo.

2025.

Dados eletrônicos (1 arquivo).

118 f. : il. color.

Orientador: Prof. Me. Luiz Fernando Ferreira Machado.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, campus Valparaíso, 2025.

Modo de acesso: World Wide Web.

Arquivo de texto em formato PDF.

Disponível em: <https://repositorio.ifg.edu.br>.

1. Ensino Exploratório (Matemática). 2. Origami (recurso didático). 3. Teorema de Haga. I. Título. II. Machado, Luiz Fernando Ferreira, orient.

CDD 510.07

Bibliotecário: Lourenildo Targino Pedrosa - CRB-1/2264.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS VALPARAÍSO

Termo de Aprovação

CAETANO CORDEIRO DE MELO

ORIGAMI COMO MATERIAL DIDÁTICO NAS AULAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO COM A ABORDAGEM DO ENSINO EXPLORATÓRIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Valparaíso de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Monografia defendida e aprovada em 18 de março de 2025 pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Luiz Fernando Ferreira Machado
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Leal
Universidade de Brasília



Documento assinado digitalmente
MARCIA RODRIGUES LEAL
Data: 22/07/2025 18:02:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Maristela Barbosa Cardoso
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Valparaíso de Goiás – GO
2025

Documento assinado eletronicamente por:

- **Maristela Barbosa Cardoso, PROF ENS BAS TEC TECNOLÓGICO-SUBSTITUTO**, em 24/04/2025 15:58:31.
- **Luiz Fernando Ferreira Machado, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO**, em 23/04/2025 16:25:37.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 19/03/2025. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 629009
Código de Autenticação: 1cfcaa7f6a



Agradecimentos

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais, por me darem condições de ter chegado até aqui, sem a base que me deram não seria possível fazer nada do que fiz, sem minha mãe me incentivando a ingressar no curso e meu pai sendo minha eterna inspiração, não teria sido possível concluir essa etapa da minha vida.

Nesta trajetória em sala de aula, agradeço também a professora Leocádia, com quem tive o prazer de trabalhar como monitor de acompanhamento de um estudante autista, que me fez reconhecer a docência como uma profissão linda de se atuar e me mostrou o que é um trabalho bem feito em sala de aula, me motivando atuar nessa área.

Agradeço aos amigos que fiz no processo, que nos momentos de descontração tornaram a trajetória mais leve. Ressalto um agradecimento a pessoa especial que encontrei nesse caminho, Livia da Silva Gonçalves, minha companheira que me ajudou em muitas partes, tanto da graduação quanto deste trabalho, e me deu apoio, sendo um exemplo de quem concluiu essa graduação com êxito inigualável.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Me. Luiz Fernando Ferreira Machado que me ajudou em cada etapa do processo e foi fonte de grandes ensinamentos. Agradeço aos membros da banca a Profa. Dra. Márcia Rodrigues Leal, Profa. Dra. Maristela Barbosa Cardoso e a Profa. Dra. Maria do Carmo dos Reis por disporem do seu tempo e estarem presentes nesse momento de conclusão desta etapa.

Resumo

O presente trabalho busca servir como aporte teórico para compreender como o origami tem sido empregado em sala de aula e investigar uma maneira eficaz de seu uso para o ensino de matemática. Para tanto, tem o foco em apresentar o origami para além de suas definições resumidas e habituais, encontradas em artigos da área, bem como demonstrar seus usos, focando na parte de aplicações dentro da educação. Desse modo as perguntas que o norteiam são: O que é origami? Como ele é utilizado em sala de aula? Quais as limitações para o seu uso? Qual o grau de complexidade dos conteúdos que o origami pode servir como ferramenta para ensinar? Norteados por esses questionamentos buscou-se alcançar o objetivo principal de analisar o potencial do origami em aulas de matemática ao ser empregado juntamente com o Ensino Exploratório. Foi realizada a revisão bibliográfica que contou com a análise de 19 trabalhos, em seguida, foi ofertado um projeto de ensino aos estudantes do ensino técnico integrado do IFG – Câmpus Valparaíso, com o desenvolvimento de um processo de ensino nos moldes do Ensino Exploratório como forma de avaliar quais as reais limitações e potencialidades do origami no ambiente de sala de aula. Como resultados, considera-se que foi demonstrando que o origami, aliado à abordagem didática do Ensino Exploratório, é uma ferramenta útil e versátil para o ensino de matemática, com grande potencial de atrair os alunos e grande potencial para a construção de conceitos concretos a partir da abstração da geometria.

Palavras-chave: *Ensino de matemática; Ensino Exploratório; Origami; Revisão bibliográfica; Teorema de Haga.*

Abstract

This work aims to serve as a theoretical framework for understanding how origami has been used in the classroom and to investigate effective ways to use it in mathematics teaching. To this end, it focuses on presenting origami beyond its usual, concise definitions found in articles in the field, as well as demonstrating its uses, focusing on educational applications. Thus, the guiding questions are: What is origami? How is it used in the classroom? What are the limitations to its use? What is the degree of complexity of the content that origami can serve as a teaching tool? Guided by these questions, the main objective was to analyze the potential of origami in mathematics classes when used in conjunction with Exploratory Learning. A literature review was conducted, including the analysis of 19 papers. Subsequently, a teaching project was offered to students in the integrated technical program at IFG – Valparaíso Campus. The project involved developing a teaching process based on Exploratory Learning as a way to assess the real limitations and potential of origami in the classroom. The results demonstrate that origami, combined with the Exploratory Learning approach, is a useful and versatile tool for teaching mathematics, with great potential for engaging students and for developing concrete concepts based on the abstraction of geometry.

Keywords: Exploratory teaching; Haga's theorem; Literature review; Mathematics teaching; Origami.

Lista de Figuras

Figura 1 - Demonstração de dobra vale e montanha.	20
Figura 2 - Padrão de vinco da base de origami do Tsuru.	21
Figura 3 - Base de origami do Tsuru.	21
Figura 4 - Origamis formados pela mesma base.	22
Figura 5 - Papéis marcados pelas dobras dos origamis.	23
Figura 6 - Padrões de vinco gerados pelos origamis.	23
Figura 7 - Origami gerado pelo software Ori Revo.	28
Figura 8 - Enunciado do primeiro teorema de Haga.	32
Figura 9 - Nuvem de palavras das palavras-chave dos relatos de experiência.	37
Figura 10 - Distribuição dos alunos inscritos na oficina por turmas.	51
Figura 11 - Relação entre nível de conhecimento em origami e alunos por turma.	52
Figura 12 - Relação entre nível de conhecimento em geometria e alunos por turma.	52
Figura 13 - Relação entre nível de interesse em origami e alunos por turma.	53
Figura 14 - Gráfico de relação entre nível de interesse em geometria e alunos por turma.	53
Figura 15 - Alunos do grupo 2 explorando diferenças entre as duas caixas apresentadas.	61
Figura 16 - Alunos do grupo 3 recebendo auxílio do professor.	64
Figura 17 - Tarefa do grupo 3 do segundo encontro.	66
Figura 18 - Tarefa do grupo 2 do segundo encontro.	67
Figura 19 - Tarefa do Estudante K do segundo encontro.	68
Figura 20 - Tarefa do grupo 1 do segundo encontro.	69
Figura 21 - Tentativa de resolução do grupo 2.	76
Figura 22 - Algumas dobras utilizadas pelos alunos.	77
Figura 23 - Tarefa do grupo 4 do terceiro encontro.	79
Figura 24 - Tarefa do grupo 3 do terceiro encontro.	80
Figura 25 - Tarefa do grupo 1 do terceiro encontro.	81
Figura 26 - Tarefa do grupo 2 do terceiro encontro.	82
Figura 27 - Rascunhos dos alunos no terceiro encontro.	83
Figura 28 - Caixas feitas pelos alunos com auxílio do teorema de Haga.	84
Figura 29 - Gráfico de alunos que responderam o formulário por turmas.	86
Figura 30 - Gráfico de nível de satisfação dos alunos com a oficina.	87
Figura 31 - Gráfico de assuntos mais interessantes votados pelos alunos.	87
Figura 32 - Gráfico de alunos que apresentaram mais interesse em origami.	88

Figura 33 - Gráfico de estudantes que apresentaram mais interesse em geometria.	88
Figura 34 - Gráfico de maiores dificuldades dos alunos na oficina.	89
Figura 35 - Conteúdos matemáticos reconhecidos pelos alunos.	90
Figura 36 - Gráfico de percepção dos estudantes sobre o origami ter ajudado.	91
Figura 37 - Gráfico de opinião dos alunos sobre dobrar ser uma ação matemática.	92

Lista de Quadros

Quadro 1 - Artigos coletados e analisados.	35
Quadro 2 - Relação entre Grupos e Estudantes presentes no segundo encontro.....	59
Quadro 3 - Relação entre Grupos e Estudantes presentes no terceiro encontro.....	73

Lista de Siglas

Capes	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CFC	<i>Community for Creators of Origami</i>
IFG	Instituto Federal de Goiás
MD	Material Didático
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
SBEM-DF	Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Distrito Federal
UnB	Universidade de Brasília
SECITEC	Semana Nacional de Ciências e Tecnologias

Sumário

1. Introdução	9
2. Objetivos.	11
3. Origami e Educação Matemática.	12
3.1. Origami enquanto artefato.	13
3.2. Origami e matemática	23
3.3. Revisão bibliográfica.	26
3.4. Origami enquanto material manipulável	34
4. Tarefa e Ensino exploratório	37
5. Metodologia	41
5.1. Pesquisa	41
5.2. Lócus da Pesquisa	42
6. Apresentação e Análise de resultados	47
6.1. Primeiro encontro	47
6.2. Segundo encontro	50
6.3. Terceiro encontro	64
6.4. Resultados finais	77
7. Considerações Finais	84
REFERÊNCIAS	86
Apêndice	90
APÊNDICE A - Formulário de inscrição da oficina	90
APÊNDICE B - Plano de aula da Oficina	92
APÊNDICE C - Tarefa do primeiro encontro	96
APÊNDICE D - Tarefa do segundo encontro	98
APÊNDICE E - Tabela de acompanhamento do segundo encontro	100
APÊNDICE F - Tabela de acompanhamento do terceiro encontro	101
APÊNDICE G - Tarefa do terceiro encontro	102
APÊNDICE H - Formulário de coleta de opinião dos alunos	104
APÊNDICE I - Demonstração do Teorema de Haga	107

1. Introdução

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), a escolha do tema de pesquisa, surgiu devido a minha proximidade com a temática, sempre gostei da ideia do origami de fazer muito com pouco. Com uma simples folha de papel e algumas dobras podemos criar inúmeras figuras, desenhos e padrões. Desta maneira, após a exploração desse assunto durante os 4 anos de graduação, desde o primeiro semestre da licenciatura, quando utilizei o origami como uma possível abordagem prática para o ensino de geometria, venho interessado em investigar esse tema.

Desde então, aprofundei os estudos nessa área, aproveitando oportunidades que surgiam nas diferentes disciplinas de Educação Matemática e professores que conheci no processo que me apresentaram ambientes enriquecedores para tal, como foi o caso da oficina que ministrei no evento da Geometria Natalina¹ da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Distrito Federal (SBEM-DF). Assim, elaborei oficinas, criei atividades, apresentei meus trabalhos no XV Workshop de Verão da Matemática² da Universidade de Brasília (UnB) e na IV Semana de Ciências e Tecnologias³ do IFG - Câmpus Valparaíso.

Ao explorar essa temática, surgiram trabalhos que apontaram para o desenvolvimento recente dessa linha de pesquisa. Nos últimos anos estão surgindo novas abordagens para o ensino de matemática, com isso, pesquisas que apresentem materiais manipuláveis e diferentes metodologias para serem usadas na sala de aula, tem ganhado destaque. O que pode ser observado na revisão bibliográfica do presente trabalho, cujo trabalho mais antigo possui apenas 14 anos desde a sua publicação.

Durante essa trajetória, desenvolvi trabalhos com o Cubo Sonobe, também busquei teorias que corroboram com o uso do origami, como foi o caso do uso de algumas teorias de Piaget para a elaboração de um produto educacional. Em diversos momentos ao longo da minha formação, utilizei meu fascínio pelo origami para levá-lo para perto da minha atuação, e esse TCC surge como um encerramento, possibilitando fazer uma pesquisa mais aprofundada nesta área.

Toda a pesquisa desenvolvida se baseou na seguinte pergunta: Quais os indícios podem ser encontrados que comprovam a eficiência do origami enquanto instrumento a ser trabalhado

¹ Mais detalhes a respeito do evento podem ser acessados pelo endereço: <https://sbemdf.com.br/geometria-natalina/>

² Mais detalhes a respeito do evento podem ser acessados pelo endereço: <https://sites.google.com/view/workshop2023/home>

³ Mais detalhes a respeito do evento podem ser acessados pelo endereço: <https://www.ifg.edu.br/aluno/64-ifg/pro-reitorias/extensao-proex/157-semana-de-ciencia-e-tecnologia-secitec>

dentro de sala de aula? Que por sua vez, permitiu alcançar o objetivo de pesquisa de: Analisar o potencial do origami em aulas de matemática ao ser empregado juntamente com o Ensino Exploratório. Para tanto, foi realizado um levantamento bibliográfico de relato de experiência que utilizaram o origami em sala de aula de matemática, assim como uma revisão do que é o origami e quais os seus principais usos.

Deste estudo surgiu uma aplicação prática que foi realizada no IFG - Câmpus Valparaíso. Para que fosse possível, ainda houve o levantamento de metodologias de ensino que potencializassem o uso do origami, sendo encontrada a metodologia do Ensino Exploratório, baseada em autores como Ponte (2014) e Canavarro (2011). Que ao ser aplicada a prática possibilitou a coleta de dados que evidenciaram os limites e potencialidades do origami.

O cruzamento desses dados coletados com os pesquisados anteriormente foi suficiente para argumentar que o origami detém em sua confecção um pensamento matemático e uma visualização geométrica. Deste modo, com uma atividade bem estruturada e uma tarefa proposta e organizada com antecedência, é possível tirar grande proveito do uso de origamis para a visualização de conceitos mais abstratos da geometria de maneira concreta.

No entanto, não é objetivo deste trabalho, colocar o origami como sendo a ferramenta ideal para ser utilizada em todos os momentos de sala de aula de matemática. Ele demanda tempo para planejar seu uso, por vezes é complicado para os alunos conseguirem fazer as dobras. Devemos reconhecer suas limitações para poder organizar uma prática que favoreça o uso de seu potencial máximo, e assim, o origami poderá ser utilizado para favorecer a aprendizagem dos alunos.

Como resultado, o TCC se desenvolve apresentado em capítulos que seguem a sequência lógica para nortear o leitor sobre a parte teórica e depois apresentar os resultados obtidos com a oficina. No primeiro capítulo, o leitor se depara com a informação do que é o origami e qual a sua conexão com a matemática e a educação. Essa conexão é explorada através da revisão bibliográfica e da definição do origami como um material manipulável.

No capítulo seguinte, o leitor se depara com a metodologia de ensino exploratória, bem como a justificativa para seu emprego em conjunto com a aplicação de tarefas e qual a vantagem de se trabalhar com esse tipo de abordagem ao trabalhar com o origami. Dando sequência ao último capítulo antes da prática, é apresentada a metodologia de pesquisa e de organização da prática realizada.

O último capítulo antes das considerações finais, aborda uma análise detalhada de toda a prática realizada, estando estruturada por encontro e detalhando o ocorrido em cada momento

proposto pelo ensino exploratório, de modo a comparar o que era esperado com o que de fato foi alcançado. O final do capítulo apresenta o resultado final dos dados coletados de modo a responder as perguntas e questionamento objetivados neste trabalho.

2. Objetivos

2.1. Objetivo geral

- Analisar o potencial do origami em aulas de matemática ao ser empregado juntamente com o Ensino Exploratório.

2.2. Objetivos específicos

- Descrever os conceitos, classificações e aplicações relacionados ao origami;
- Destacar principais vantagens e limitações do origami em ambiente educacional;
- Identificar características que associam o origami como recurso para o ensino de matemática;
- Revisar os usos do origami nas aulas de matemática apresentados nas publicações do campo da Educação Matemática;
- Elaborar tarefas matemáticas com uso de origamis e uma sequência didática fundamentada no Ensino Exploratório voltadas para o Ensino Médio;
- Destacar as vantagens e limitações observadas no desenvolvimento da sequência didática.

3. Origami e Educação Matemática.

Nesta etapa, foi objetivado mostrar o origami para além da visão rasa que muito se tem sobre ele dentro do senso comum. Além disso, mostrar sua relação intrínseca com a matemática. Sob a luz de alguns pensadores da área, será relacionada a matemática com essa arte, buscando entender que, além desse valor histórico e cultural milenar, o origami ainda assume uma importante função técnica, onde possibilita a visualização e criação de padrões e objetos.

Tais objetos podem sair da função de produto final para se tornar foco de estudos e análises, possibilitando resultados dos mais diversos, a depender da criatividade do indivíduo. O que acontece com a geometria do origami e o Teorema de Haga⁴ que será descrito posteriormente, onde o produto final não é uma figura feita de dobradura, mas sim o conhecimento matemático adquirido ao dobrar.

Nota-se que esse simples ato de dobrar e manipular o papel é enriquecedor, ao passo que são trabalhadas diversas habilidades, é possível refletir sobre variados conceitos que surgem de padrões, tanto de dobras mais simples quanto de dobras complexas elaboradas por grandes origamistas. E essa reflexão matemática surge devido a característica do origami ter em sua formação muitos conceitos geométricos, o que se faz evidente no trabalho de Rancan e Giraffa (2011), quando afirmam que:

Ao dobrarmos o papel, executamos verdadeiros atos geométricos, ao construirmos retas, ângulos, polígonos, poliedros, figuras bidimensionais e tridimensionais. Podem ser vistos ou revistos conceitos de Geometria, sendo possível construir triângulos equiláteros, tetraedros regulares, cubos, sólidos estrelados, sem o uso de compasso, tesoura e cola, apenas com dobraduras. (Rancan, Giraffa, 2011, p. 3)

Ao avaliar esse trabalho, que descreve o origami sob a perspectiva de quem almeja apresentá-lo como material manipulável que servirá como instrumento para o ensino de matemática. É possível notar o quanto as autoras reconhecem a forte presença da matemática no origami. Existem muitos outros autores com a mesma perspectiva da presença vasta de matemática ao realizar dobraduras, sendo que aqui terão enfoque Haga (2008) e Hull (2013). Com auxílio de suas pesquisas, busca-se encontrar aporte teórico que confirme a afirmação: dobrar é uma ação matemática. Dessa forma, definindo o origami como esse artefato rico em

⁴ "Pelo simples procedimento de dobragem de colocar o vértice inferior direito de um quadrado no ponto médio do lado superior, cada aresta do quadrado é dividida em uma proporção fixa" (Haga, p. 7, 2008, tradução própria).

matemática, se torna justificável o seu emprego em salas de aula de matemática como um material manipulável para o ensino de matemática.

3.1. Origami enquanto artefato

Antes de reconhecer o origami como ferramenta presente em salas de aula de matemática e antes de avaliar a devida eficácia desse método, é preciso compreender a sua origem e as possibilidades de uso que essa técnica gera. Tendo uma visão mais abrangente de sua utilização e finalidade, é possível afirmar quais são as possíveis aplicações dentro da educação matemática, e principalmente, qual a limitação para utilização de Origamis para o ensino de matemática.

Partindo para compreensão de sua origem, por ser uma técnica tão antiga, diferentes trabalhos buscam definir seu início de distintas perspectivas. De maneira interessante, o trabalho de Kishimoto, et al. (2014), antes de apresentar sua prática realizada e as vantagens do uso do origami em aulas de educação física para melhorar a coordenação motora fina, apresentam uma visão voltada para a origem etimológica da própria palavra e tentando precisar a data de seu surgimento.

O origami é uma palavra originária do Japão, sendo composta pelo prefixo “oru” (dobrar) e pelo sufixo “kami” (papel). A origem do origami é considerada incerta, pois muitos acreditam que o Japão foi o pioneiro nesta arte, porém, cogita-se que a origem se deu na China, uma vez que o papel foi inventado pelo chinês Tsai Lao por volta do ano 105 D.C. (Kishimoto, et al, 2014, p.359).

Desse modo, temos uma visão do quão antiga é essa técnica. Mas no que de fato ela consiste, podemos observar no trabalho de Graciolli, Batista e Shintani (2021), que nos apresenta o origami como sendo a arte de dobrar o papel com o intuito de se encontrar um produto final, tal como, animais, figuras humanas, objetos, elementos da natureza. De início, era um ensinamento passado de pai para filho, Pimenta e Gazire (2019), apresenta uma revisão bibliográfica que detalha o que permitiu essa evolução e a disseminação dessa arte.

No início, por depender tanto do papel, que era artigo de luxo, o origami era uma prática associada ao entretenimento de classes mais abastadas. Essa elitização do ato de criar origamis perdurou até 1603, onde surgiu um período conhecido como a democratização do papel. Somente após essa popularização é que o origami se difundiu e começaram a surgir diagramas que demonstram o passo a passo para sua confecção. E somente em 1876, foi determinado que essa técnica deveria compor o currículo escolar japonês (Pimenta e Gazire, 2019).

Essa evolução histórica foi o que levou o origami a se tornar o que é hoje, que apesar do senso comum de que é somente um artesanato, é uma arte com potencial de pesquisa e aplicação em diversos ramos da ciência, inclusive valendo o destaque para esse trabalho, na área de matemática. É possível compreender melhor esse processo de evolução quando analisamos, ainda no trabalho de Pimenta e Gazire (2019), a vastidão de nomes que foram necessários para desenvolver diversas técnicas de dobradura.

Alguns nomes de impulsionadores dessa técnica surgiram no Oriente e no Ocidente, como: Leonardo da Vinci (séc. XV, na Itália); Friedrich Froebel (séc. XIX, na Alemanha); Miguel Unamuno (séc. XX, na Espanha); e Akira Yoshizawa (séc. XX, no Japão); esse último conhecido como o “pai do origami moderno”, pois criou a simbologia com instruções que constituem a linguagem do origami. (Pimenta e Gazire, 2019, p. 37)

Essa breve citação nos apresenta o caminho que foi necessário traçar por diversos nomes emblemáticos das mais diversas áreas para que o origami alcançasse a importância que tem hoje. Focando no Brasil, podemos depreender do trabalho de Kobayashi (2013), a maneira como os imigrantes vindos do Japão carregaram consigo o origami. Em seu trabalho, ela apresenta que a dificuldade em se identificar com uma nova cultura na América e a saudade de sua terra natal, fizeram com que os imigrantes japoneses que aqui chegaram a partir de 1908 trouxessem parte da sua cultura consigo. Desse modo, assim como práticas em cerimônias e comidas típicas, o origami aqui chegou.

Apesar do nome origami, que tem base no idioma japonês, trazendo para o português, essa arte é conhecida somente como dobradura. Pimenta e Gazire (2019) ainda apresentam que em espanhol é conhecido como papiroflexia, e em inglês paperfolding. As autoras abordam essa riqueza de interpretação em diferentes culturas, apresentando as fases que fizeram o origami partir de algo regional para um conhecimento global.

Dentro de tantos conceitos e ideias difundidas acerca do origami, para que ele pudesse ser estudado tão a fundo, surgiram definições e características variadas a respeito dele. A seguir, serão exploradas as noções de base de origami, padrão de vinco, dobras do tipo vale e dobras do tipo montanha. Desse modo exemplifica-se com imagens enquanto são apresentadas tais noções imprescindíveis ao desenvolver a técnica do origami.

Foi realizada, pelo autor do presente trabalho, uma série de origamis pensada para que se pudesse trabalhar com diferentes conceitos sobre o origami em poucas imagens e seguindo a mesma linha de ideias. Dessa forma, buscou-se em diversas obras, definições tão precisas quanto possível de diversos elementos que surgem ao se pesquisar um pouco mais a fundo

sobre o origami.

Nota-se a escassez de teoria e definições mais formais por falta de variedade de trabalhos na área, e compreende-se que trabalhos com maiores detalhamentos nessa área são de difícil acesso e pouco conhecimento no Brasil. Buscou-se, então, definir e explicar tais conceitos da maneira mais clara, lógica e precisa quanto possível, para tanto, segue o registro de uma série de imagens que norteiam tais esclarecimentos em uma ordem lógica e elaborada pelo autor deste trabalho.

Para iniciar o desenvolvimento do origami, é preciso compreender, como expresso no trabalho de Graciolli, Silva e Borba (2023), que dentro do universo do origami, só podemos realizar as dobras vale ou dobras montanha. De uma maneira mais informal, só é possível dobrar uma folha de papel nesses dois sentidos, fechando a folha em um sentido ou em outro. Como na Figura 1 a seguir:

Figura 1 - Demonstração de dobra vale e montanha.



Fonte: elaborada pelo autor.

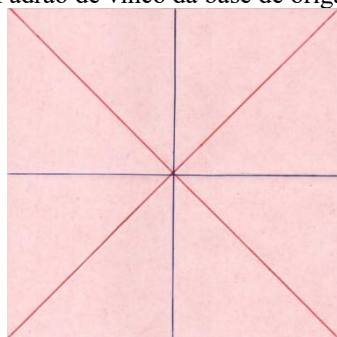
No trabalho de Silveira (2007), é possível encontrar a mesma definição e a notação oficial para representar tais dobras dentro de diagramas, que foi convencionada a partir dos trabalhos de Akira Yoshizawa por volta dos anos de 1950. Entretanto, para facilitar a visualização e seguindo a mesma notação presente no software Ori Revo e do trabalho de Graciolli, Silva e Borba (2023), adota-se neste trabalho a notação por cores, sendo azul para dobras vale e vermelho para dobras montanha.

A Figura 1, à esquerda, observa-se a representação de uma dobra vale, quando o origami se fecha para cima, enquanto na imagem à direita, encontra-se o exato oposto com o origami se fechando para baixo graças a uma dobra montanha. Essa dobra montanha foi feita na diagonal com o propósito de se atingir uma base de origami específica, entretanto as dobras dos dois tipos podem ser feitas em qualquer sentido do papel, a depender da demanda que o origami exige.

Bases de origami, são simplesmente um padrão de dobras iniciais que são feitas seguindo o mesmo passo a passo em diferentes figuras. Então com a mesma sequência de

dobraduras iniciais é possível obter distintas figuras e objetos. Foi esse o caso que apresentado na Figura 2 a seguir, que com duas dobras montanha nas diagonais e duas dobras vale na mediana dos lados, o resultado é a seguinte base.

Figura 2 - Padrão de vinco da base de origami do Tsuru.



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 2 representa um diagrama, que nada mais é do que a planificação do origami, de modo a apresentar em uma folha plana todas as dobras que serão feitas, surgindo então os padrões de vinco. Os padrões de vinco são as marcas que surgem na folha após o origami ser finalizado ou podem indicar quais as dobras devem ser feitas e em quais sentidos com o objetivo de se alcançar determinado produto final.

Entretanto, esses diagramas e padrões de vinco não apresentam em qual ordem as dobras são feitas, o que se torna uma limitação para que esse tipo de demonstração de fato ensine a maneira como o origami deve ser feito. O diagrama pode até ser utilizado com essa finalidade, e muitas vezes o é, mas não facilita o processo para aqueles que não possuem domínio sobre a técnica de dobradura. Nesse caso apresentado anteriormente, o padrão descreve como alcançar a seguinte base de origami presente na Figura 3.

Figura 3 - Base de origami do Tsuru.



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa é a base de origami com todas as dobras feitas em seu respectivo sentido conforme indicado no padrão de vincos da Figura 2. Com essas quatro dobras iniciais, chega-se ao papel

nessa posição, sendo assim possível confeccionar uma série de figuras. A seguir, na Figura 4, são apresentados alguns exemplos que podem ser alcançados partindo dessa base.

Figura 4 - Origamis formados pela mesma base.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 4, é possível ver uma série de origamis elaborados pelo autor, sendo da esquerda para a direita e no fundo da imagem, apresentados na seguinte ordem, uma coruja azul, uma flor vermelha, um cachorro amarelo, um pavão rosa com branco e uma flor de laranjeira azul. Ao centro e em laranja, é visível o origami mais conhecido e difundido, o Tsuru. Em seu trabalho, Hayasaka e Nishida apresentam esse origami e retratam a sua importância dentro da história dessa arte.

O grou-japonês ou tsuru, uma ave considerada tradicionalmente sagrada, tornou-se o símbolo do origami. Ninguém sabe quem é o autor da sua criação. O grou tem uma vida longa e por isso foi associado à prosperidade, saúde e felicidade. Nas festividades o grou está presente nos papéis de presente ou na forma de dobraduras. (Hayasaka; Nishida, [2008?])

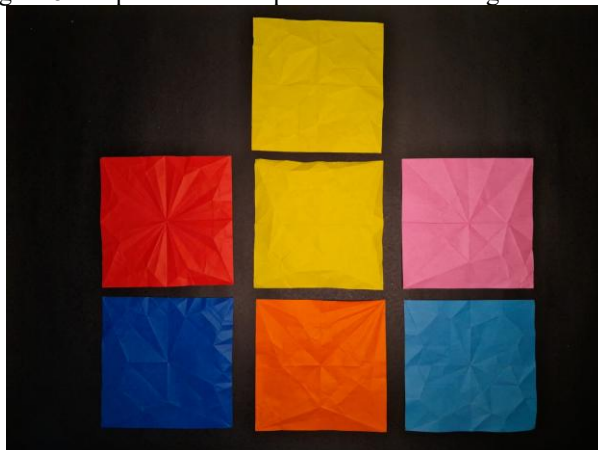
Essa base foi escolhida justamente por ser a responsável por criar o origami mais difundido e conhecido. É notório que, no padrão de dobra de todos os origamis presentes na Figura 4, é visível o mesmo padrão da Figura 2, até mesmo no cachorro, que como será apresentado na Figura 5, é composto por dois quadrados de papel dobrados de formas distintas, mas que se encaixam para formar a figura.

Os dois papéis usados para fazer o cachorro partem da mesma base, mas depois tem processos distintos para formar os detalhes, esse fato é o que o diferencia de um origami modular. Nas palavras de Hull (2013), podemos traduzir de seu trabalho e interpretar a seguinte definição, quadrados de papel dobrados de maneira idêntica e unidos pela dobra para formar uma figura só a partir dessa junção.

Como as duas partes que formam o cachorro são feitas a partir de dobras distintas, esse

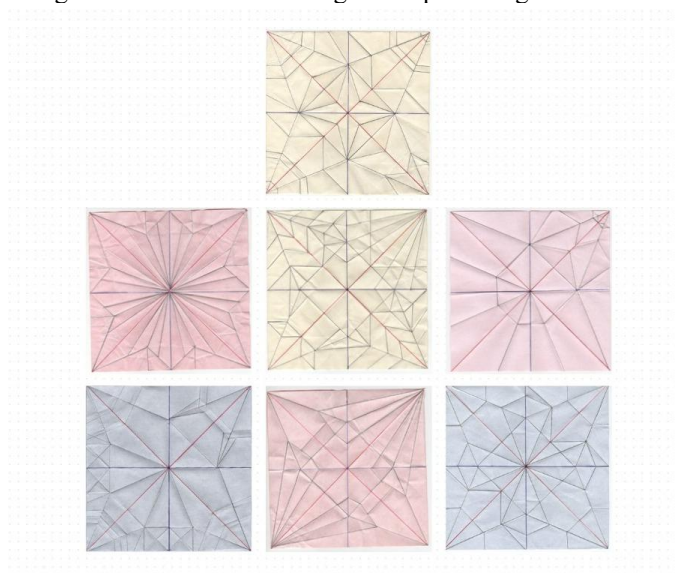
não cumpre essa definição que é um tipo específico de origamis. Na Figura 5 a seguir, é possível ver todas as dobras que foram necessárias para fazer os origamis da Figura 4 e na Figura 6 que segue, é possível observar os mesmos papéis virados e destacado todo o seu padrão de vinco, possibilitando visualizar então todos os conceitos apresentados anteriormente sobre origami.

Figura 5 - Papéis marcados pelas dobras dos origamis.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 6 - Padrões de vinco gerados pelos origamis.



Fonte: elaborada pelo autor.

Em todos os padrões de vinco presentes na imagem, foram destacadas as duas dobras vale em azul e as duas dobras montanha em vermelho, dobras essas que formam a base necessária para dar origem a essas 6 figuras. Um ponto importante que deve ser destacado é o de que, nem tudo que são dobras são origamis, também existem as suas variações, o Kirigami e o origami *Tesselation* ou Tesselação, em tradução para o português, são exemplos de variações do origami.

Este primeiro pode ser entendido quando analisada a própria construção de sua nomenclatura. O origami e o kirigami podem ser distinguidos como “A arte de trabalhar o papel (kami), quer seja dobrando-o (ori) – origami 折り紙 –, ou no uso misto do corte (kiri) e dobrar (ori) – kirigami 切り紙” (Kobayashi, 2013, p. 150). Nesse trecho, se torna clara a distinção entre as duas técnicas de manuseio do papel. Apesar de possuírem origem na mesma época, o origami, além de mais conhecido, não necessita de nenhum outro artifício além das próprias dobras, o que o difere do kirigami.

Já este segundo exemplo de variação do origami citado, está mais alinhada com os métodos de manipulação do papel já explicados anteriormente, se valendo dos mesmos princípios apresentados. O origami tesselação é uma técnica na qual é rica a presença de simetria e polígonos. Apesar de bem antiga e conhecida, é possível encontrar muitos trabalhos em vídeos de tutoriais de artesanatos ou sites específicos de origami.

Entretanto, por uma limitação deste trabalho, não foi possível encontrar uma definição mais precisa sobre essa técnica. Mas para que se faça compreender, é possível depreender de diversas pesquisas em fontes de sites especializados em origami, como Origami.club⁵, CFC⁶ (Community for Creators of origami) e o gatheringfolds.com⁷ que essa técnica consiste basicamente na manipulação de polígonos.

Essa manipulação se dá através do objetivo de se criar padrões geométricos recobrimo uma determinada área de superfície com polígonos dispostos de modo regular, nas palavras de Madonna Yoder, grande origamista da área, “Tesselações de origami são padrões repetidos dobrados a partir de uma única folha de papel, mas não há apenas um estilo ou nível de dificuldade para esse tipo de origami.” (Yoder, gatheringfolds, Acesso em: 08/11/2024). Destaca-se também a importância de Shuzo Fujimoto, um relevante origamista cujo trabalho com origamis focados na geometria fez com ele fosse um dos pioneiros e o principal nome quando se trata dessa técnica de tesselação.

O próprio Fujimoto considerou sua invenção de uma construção para um triângulo equilátero (por volta de 1967) um ponto de virada em sua carreira de origami. De fato, ele estava entre os pioneiros no uso de grades triangulares/hexagonais, que mais tarde se tornaram um marco do gênero de tesselação de origami, que ele foi um dos primeiros a perseguir. Ele publicou dezenas de designs de estrelas, a maioria baseada em uma folha de papel hexagonal e intimamente relacionada a tesselações. (CFC, Acesso em: 03/11/2024)

⁵ <https://origami.club/tessellation/>

⁶ <https://cfcorigami.com/creator/shuzofujimoto>

⁷ <https://gatheringfolds.com/blogs/news/basic-twists-for-origami-tessellations>

Essa citação foi retirada de sua bibliografia presente no próprio site CFC, ela demonstra que, além de sua relevância dentro da pesquisa sobre o origami, seu trabalho com origami atesta uma relação muito marcante entre a matemática e o origami. Seus trabalhos são estudados mesmo após seu falecimento e ainda há a tentativa de catalogar de maneira eficiente todos os modelos que criou ao longo de todos os seus anos de trabalho e dedicação a essa área.

A exemplo de Shuzo Fujimoto e Madonna Yoder, define-se quem são os origamistas, que seriam as pessoas que se dedicaram aos estudos, aperfeiçoamento e aprofundamento de técnicas de dobradura, bem como criaram diversos origamis e modelos que hoje são conhecidos e ensinados de maneira didática e simplificada na internet. Hayasaka apresenta uma definição mais poética.

Para o origamista, o ato de dobrar o papel representa a transformação da vida e ele tem a consciência de que esse pedaço, um dia, foi a semente de uma planta que germinou, cresceu e se transformou numa árvore. E que depois, o homem transformou a planta em folhas de papel, cortando-as em quadrados, dobrando-as em várias formas geométricas representando animais, plantas ou outros objetos. Onde os outros viam apenas uma folha quadrada, o origamista pode ver a origem de todas as formas se transbordando. Tradicionalmente, nada é cortado, colado ou desenhado. (Hayasaka; Nishida, [2008?])

Ela ainda completa com a visão do mestre origamista, Akira Yoshisawa, de que o origami é um diálogo entre o artista e o papel. Sendo então os origamistas os especialistas nessa área, no tópico que segue, são apresentados alguns deles e suas principais contribuições para a evolução dessa arte e do desenvolvimento da mesma dentro do universo da matemática, com o intuito de familiarizar o leitor com a pluralidade dessa arte e o potencial dela ao ser empregado nas ciências.

3.2. Origamistas

Para dar continuidade as reflexões a respeito do tema, são apresentados a seguir, alguns trabalhos que atestam a relevância dessa arte milenar dentro e fora da educação a partir da visão desses mestres, além de um maior detalhamento a respeito de alguns deles. Retomando primeiramente os dois utilizados para explicar e conceituar a técnica de origami tesselação, Madonna Yoder e Shuzo Fujimoto.

Madonna começou a criar seus próprios padrões de tesselação em 2018, após cursar Algoritmos de Dobragem Geométrica durante seu último semestre no MIT e apresentar seu projeto de curso na 7ª conferência internacional sobre origami em ciência, matemática e educação (7OSME). Depois de criar algumas peças de smocking para o Museu de Matemática de Nova York, para a exposição Math Unfolded, Madonna decidiu abrir um negócio, levando esses padrões de origami e smocking para um público mais amplo. (CFC, Acesso em: 14/04/2025)

Como é possível observar em sua breve biografia presente no CFC, Madonna é uma excelente origamista para dar início a essa apresentação sobre os origamistas e em como essa arte culmina na matemática, pois desde o início de seus trabalhos, ela já abordou a tesselação e sua característica de manipulação de polígonos para expor seus trabalhos no museu da Matemática. Ao se manter na mesma linha da tesselação, chegamos a Shuzo Fujimoto.

Shuzo Fujimoto (藤本修三 Fujimoto Shūzō; 27 de outubro de 1922 – 28 de julho de 2015) foi um criador de origami japonês cujo foco principal era o origami geométrico. Ele é considerado um dos pioneiros das tesselações de origami e provavelmente é mais conhecido por seu modelo recursivo de Hortênsia. (CFC, Acesso em: 14/04/2025)

Sendo esse um nome de grande respeito e consideração dentre os estudiosos dessa área, é um excelente exemplo de mestre origamista, ainda mais em um trabalho da área de matemática, por ele ter sido um origamista com grande interesse na área do origami geométrico. Partindo então para outro origamista de renome, Akira Yoshizawa, considerado um dos mais relevantes, teve papel fundamental na evolução dessa arte.

Akira Yoshizawa (吉澤章 Yoshizawa Akira; 14 de março de 1911 – 14 de março de 2005) foi um origami sta japonês, considerado o grande mestre do origami. Ele é creditado por elevar o origami de um ofício a uma arte viva. De acordo com sua própria estimativa feita em 1989, ele criou mais de 50.000 modelos, dos quais apenas algumas centenas de projetos foram apresentados como diagramas em seus 18 livros. Yoshizawa atuou como embaixador cultural internacional para o Japão ao longo de sua carreira. Em 1983, o Imperador Hirohito concedeu-lhe a Ordem do Sol Nascente, 5ª classe, uma das maiores honrarias concedidas no Japão. (CFC, Acesso em: 03/11/2024)

Como observado neste trecho retirado de sua biografia no site CFC, Akira criou milhares de padrões e os expôs, fazendo com que esta arte ganhasse muita relevância no Japão e fora dele, sendo então o responsável por difundir mais ainda essa técnica. Mesmo entre aqueles que não conhecem tanto dessa arte, ele ainda é um origamista que se faz conhecido por obras icônicas, como seu autorretrato⁸. Dentro dessa ideia de como surgem os modelos, destaca-se um importante origamista que criou um software denominado TreeMaker, seu nome é Robert J. Lang.

No origami, vemos a aparente criação de algo do nada, ordem da desordem, entropia invertida. Esses aspectos da dobradura de papel atraíram milhares de pessoas para a arte nos últimos anos. Eles inspiraram explorações em muitas das propriedades matemáticas e físicas do papel dobrado. Eles me atraíram para o origami e mantiveram meu interesse por cerca de 20 anos. (Lang, 1989, p. 17, tradução própria)

⁸ Sua obra mais marcante, seu autorretrato, pode ser visualizada em: bit.ly/3Ge8nps

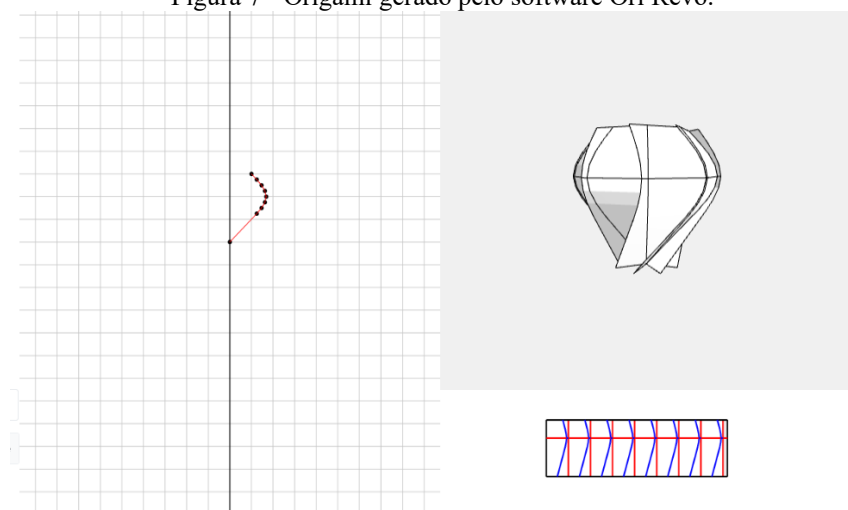
A partir dessa citação, é possível observar a atração que o origami gera e a influência que ele tem em diversas áreas e pessoas. Como Lang (1989) afirma nesse mesmo artigo, ele é um cientista, trabalhou na NASA e se tornou um grande origamista, sendo um dos mais importantes da atualidade. Nesse processo de estudos e desenvolvimento de origamis, ele criou o software *TreeMaker*, que em seu artigo de 1996, ele apresenta, é notório em seu trabalho que ele se motiva a criar um software que mexa com isso devido ao grau de complexidade que o origami adquire. Desde seu trabalho de 1989, ele já destaca esse fato, como notamos no seguinte trecho:

Essa descrição da arte teria sido precisa há 50 anos. Naquela época, todos os diferentes designs de origami do mundo poderiam ter sido catalogados em uma única folha de papel digitada, se alguém tivesse a inclinação de fazê-lo. Nenhum modelo teria mais de 10 ou 20 etapas. A maioria poderia ser dobrada em alguns minutos, até mesmo por um novato. Este não é mais o caso. Hoje, em livros, em periódicos e em arquivos pessoais, o número de designs de origami registrados chega bem a milhares, e muitos dos designs mais sofisticados têm mais de cem etapas e levam mais de uma hora para um dobrador experiente produzir. (Lang, 1989, p. 17, tradução própria)

Em seu trabalho de 1996, quando ele apresenta o seu software de maneira resumida, é possível notar a ampla presença de linguagem matemática, quando ele representa as etapas do origami com uma descrição cheia de formalismos e símbolos para representar os passos de maneira objetiva, similar a comumente encontrada em textos matemáticos. Nesse software, ele parte de noções matemáticas para descrever o comportamento do papel e conseguir manipular e projetar os modelos desejados a partir de bases de origami e comandos colocados no programa.

Outro origamista que apresenta trabalhos nessa linha da computação é Jun Mitani, que através de um plano cartesiano manipulamos e geramos padrões em 3D e depois imprimimos o diagrama com as dobras vale e montanha para que seja possível dobrar o modelo em 3D. Um ponto interessante do seu trabalho é o seu foco em trabalhar com origamis que possuam dobras curvas. Na Figura 7 é demonstrado como ele uniu o origami e a computação em um único software, que também é muito usado na impressão 3D.

Figura 7 - Origami gerado pelo software Ori Revo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Essa figura é a captura de tela do software Ori Revo⁹, nela é possível ver a malha quadriculada e o plano cartesiano no qual são plotados e manipulados os pontos, o modelo 3D que será gerado e abaixo como ficarão dispostos os padrões de vinco para confecção do origami. Manipulando dessa forma, é possível exportar o arquivo com o padrão de vinco e criar origamis mais complexos e com curvas, possibilitando aumentar a complexidade dos origamis produzidos.

Todos esses avanços, fizeram com que o origami deixasse de ser somente uma arte, para que através dos trabalhos desses origamistas, pudesse ser instrumento de pesquisas. Exemplos podem ser encontrados nas mais diversas áreas da ciência e do *design*, onde o origami pode ser trabalhado com o intuito de tornar algum processo mais eficiente, entretanto, ainda há muito o que ser explorado nessa área, como é possível notar em Teixeira e Nakata (2017).

Para exemplificar tais avanços, antes de mais exemplos de origamistas que se encontram relacionados com a temática de matemática, seguem duas aplicações curiosas do origami, que apesar de sua ausência de relação com a educação, ainda enriquecem esse trabalho ao evidenciar o quão vasto é o conhecimento em origami. O primeiro é um trabalho de LI; Vogt; Rus e Wood (2017)¹⁰, no qual é possível ver a criação de músculos artificiais através do origami.

O segundo exemplo, ainda dentro da área da saúde, é encontrado em um artigo de Ahmed, Gauntlett e Camci-Unal¹¹, no qual são encontradas aplicações dentro da biomedicina para a utilização de modelos oriundos do origami que geram processos mais eficientes e menos invasivos. Feitos os devidos apontamentos que destacam a amplitude do origami, o

⁹ <https://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/ja/software/orirevo/>

¹⁰ Mais detalhes em: https://www.researchgate.net/publication/321326818_Fluid-driven_origami-inspired_artificial_muscles

¹¹ Mais detalhes em: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7807481/>

encerramento dos exemplos se dá com um origamista que se destaca por sua importância em realizar a comunicação entre a matemática, a educação e o origami.

Também me lembro claramente de ter notado uma ligação entre o origami e a matemática durante aqueles anos. Eu tinha dobrado um animal, provavelmente o clássico pássaro esvoaçante, e em vez de colocá-lo em minha caixa cada vez maior de modelos dobrados, desdobrei-o cuidadosamente. O padrão de linhas de vinco no papel desdobrado era complexo e encantador. Claramente, pareceu-me, havia alguma matemática acontecendo aqui. O padrão das linhas deve seguir algumas regras geométricas. Mas compreender essas regras estava muito além da minha compreensão, ou pelo menos foi o que pensei na época. (Hull, p. 9, 2013)

Essa última reflexão trazida de Hull (2013) apresenta o primeiro contato que fez o autor refletir sobre a rica presença da matemática dentro do origami. Deste modo, é possível observar que, desde a complexidade encontrada nos origamis por Lang, que o fizeram trabalhar com noções matemáticas, até o plano cartesiano de Mitani para criação de modelos curvos em 3D, e chegando até Hull (2013) e Haga (2008), dois origamistas que propuseram livros a respeito de atividades matemáticas feitas com origami. Fica nítida a presença da matemática no origami e a possibilidade de se trabalhar com essa arte dentro da educação.

Diante do exposto, todo o apresentado até esse momento é somente um recorte do que é o origami sobre linhas mais gerais, buscando destacar qual a sua abrangência, não foi abordado a fundo uma série de ramificações que a pesquisa em origami pode tomar devido a vastidão dessa área. Para o intuito desse trabalho, esse panorama inicial do origami era necessário para introduzir a pesquisa que aqui se pretendeu realizar.

Com o objetivo de apresentar com clareza o origami como ferramenta a ser utilizada em sala de aula, se fez necessária a devida apresentação para que se demonstrasse que essa arte é muito além do que se conhece através do senso comum. Fica então expresso o convite, a quem interessar, pesquisar mais sobre as diversas áreas e variações do origami para além do enfoque que este trabalho adquire ao trabalhar com ele dentro da educação.

3.3. Origami e matemática

Como apresentado anteriormente, o origami está intrinsecamente ligado com a matemática, com o objetivo de concluir essa proximidade ao ponto de validar a afirmação de que dobrar é uma ação matemática, neste tópico é dado destaque a essa relação existente entre o origami e a matemática, com foco na geometria. Apesar da existência de outros conceitos envolvidos na dobradura, o que é mais evidente é a geometria.

Em Graciolli, Silva e Borba (2023), é possível conhecer a geometria do origami, que

consiste em compreender o origami e o ato de dobrar como fundamentado na geometria, sendo desenvolvido de maneira similar a geometria Euclidiana. Sendo essa similaridade presente na maneira com que a geometria do origami, parte de axiomas, afirmações mais básicas da matemática que servem para demonstrar afirmações de valor maior.

Huzita-Hatori, é o nome dado a lista de axiomas da geometria do origami, estes surgem de maneira similar ao que motivou o surgimento dos axiomas de Euclides na história da matemática. A partir da necessidade de se organizar os conhecimentos que muito se desenvolveram de maneira prática e objetiva. Muito já foi dito a respeito da complexidade que o origami adquire com o passar dos anos, para que isso não se tornasse uma limitação, a estruturação dessa área do conhecimento se fez necessária.

Nos trabalhos de Graciolli, Silva e Borba (2023) essa geometria é bem enunciada e introduzida, de modo que aqui é apresentado um recorte de seu trabalho com as principais noções dessa geometria para validar a afirmação inicial. Parte-se então dos axiomas enunciados, assim como foram feitos no trabalho de Graciolli, Silva e Borba (2023), a seguir:

1. Dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar uma linha que os ligue;
2. Dadas duas linhas, podemos localizar seu ponto de intersecção, se existir;
3. Dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar de modo que P_1 esteja sobre P_2 ;
4. Dadas duas linhas L_1 e L_2 , podemos dobrar de modo que L_1 esteja sobre L_2 ;
5. Dados um ponto P e uma linha L , podemos dobrar uma linha perpendicular a L passando por P ;
6. Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma linha L , podemos, sempre que possível, fazer uma dobra que coloque P_1 sobre a linha L e que passe pelo ponto P_2 ;
7. Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas linhas L_1 e L_2 , podemos, sempre que possível, dobrar de forma que P_1 esteja sobre L_1 e, ao mesmo tempo, P_2 esteja sobre L_2 .

Salientando que eles não são de autoria desses pesquisadores, estando presente em diversos trabalhos que abordam essa temática de matemática e origami, tamanha é a relevância desses axiomas. No trabalho de Silveira (2007), é encontrada uma explicação mais detalhada a respeito da criação e importância dos Huzita-Hatori, sendo sua origem atribuída ao:

[...] matemático ítalo-japonês Humiaki Huzita formulou uma lista de seis operações factíveis através de dobras simples [...]. Essas operações são conhecidas como axiomas de Huzita. Esses axiomas são, talvez, mais bem imaginados como operações que agem sobre pontos e linhas. Dado um conjunto de pontos ou linhas sobre um pedaço de papel ou plano, as operações de Huzita permitem que novas linhas sejam criadas e as intersecções entre as linhas velhas e novas definam novos pontos. Repetindo essas operações sobre o conjunto de linhas e pontos existente podemos obter ainda mais linhas e pontos (Silveira, p. 13, 2007).

É interessante notar o modo como, a princípio, eram somente seis os axiomas, ao passo que Silveira (2007) afirma que o sétimo surgiu como uma proposta de Koshiro Hatori, e o posterior trabalho de Robert J. Lang trouxe importante contribuição a partir desses axiomas, sendo ele o responsável por manipulá-los e mostrar que eles são o conjunto de todas as operações que podem ser feitas com uma folha de papel, sendo que qualquer figura de origami é a aplicação desses axiomas repetidas vezes.

Desse modo, o origami pode ser compreendido dentro de um ambiente matemático e cada dobra se torna uma ação matemática descrita por um desses axiomas. Logo, dobrar é uma ação matemática. Dentro desse universo da geometria do origami, um trabalho muito importante é o de Haga (2008), grande origamista com um fascínio pela matemática, onde buscava nas dobras encontrar verdades matemáticas e não figuras.

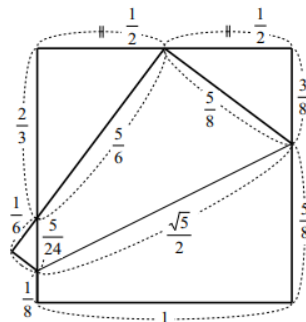
Assim, ele elaborou seu livro “origamics” no qual enuncia seus resultados, dentre eles, o resultado aqui trabalhado será o do Primeiro Teorema de Haga, "Pelo simples procedimento de dobragem de colocar o vértice inferior direito de um quadrado no ponto médio do lado superior, cada aresta do quadrado é dividida em uma proporção fixa" (Haga, p. 7, 2008, tradução própria).

Para os fins deste trabalho, será trabalhado e demonstrado aqui um resultado em particular desse teorema, que é o fato dele fornecer o ponto exato que divide o lado do quadrado em três partes iguais. A imagem da Figura 8 foi retirada do próprio trabalho de Haga e apresenta além do teorema enunciado de maneira original, consequências além das que serão aqui trabalhadas.

Figura 8 - Enunciado do primeiro teorema de Haga.

Haga's First Theorem By the simple folding procedure of placing the lower right vertex of a square onto the midpoint of the upper side, each edge of the square is divided in a fixed ratio, as follows (see Fig.1.5).

- (a) The right edge is divided by the point F in the ratio 3 : 5.
- (b) The left edge is divided by the point H in the ratio 2 : 1.
- (c) The left edge is divided by the point G in the ratio 7 : 1.
- (d) The lower edge is divided by the point H in the ratio 1 : 5.



Fonte: Haga (p. 7, 2008).

O resultado que será analisado é importante e será mais a frente empregado com essa finalidade, pois apresenta novas possibilidades dentro do origami. Ao dobrar um quadrado de papel é simples a obtenção de segmentos que são sempre a metade do anterior, logo é dobrada a folha ao meio e se tem duas partes iguais, repete o processo obtem-se quatro partes iguais. Generalizando, ao efetuar n dobras ao meio, será obtido o lado do quadrado dividido em 2^n partes iguais.

Isso é muito utilizado dentro do origami tesselação, poder dividir o papel para além de potências de dois, abre novas possibilidades, encontrando o ponto que divide o papel em três partes iguais, é possível então repartir a folha em potências de três ou múltiplos de 6 também. A prova deste teorema, com foco em encontrar esse ponto exato está apresentada no apêndice I.

3.4. Revisão bibliográfica.

Nos tópicos anteriores, foi elucidada a relevância do Origami sob um aspecto cultural, bem como suas variações e aplicações. Parte-se agora para um levantamento bibliográfico que possui o intuito de preencher lacunas quanto à utilização do Origami dentro de sala de aula. Buscou-se compreender de que maneira o Origami é utilizado dentro de aulas de matemática. Para alcançar esse objetivo mais geral, foram elaboradas questões mais específicas que guiaram a seguinte análise de trabalhos.

Objetivou-se fazer uma revisão bibliográfica com intuito de encontrar artigos que retratem relatos de experiências com o emprego do origami como material didático em salas de aula no Brasil. A ideia central é investigar a maneira com que esse artefato vem sendo trabalhado, bem como reconhecer o que limitou a sua utilização em mais escolas. As questões que guiaram a análise de cada artigo e que serão respondidas com os mesmos são:

1. Quais conteúdos são comumente trabalhados junto ao origami?
2. Em qual etapa da educação básica mais se utiliza o origami?
3. Quais as limitações e dificuldades encontradas ao se trabalhar com esse material?
4. Quais os resultados encontrados após essas aplicações?
5. Quais as principais bases teóricas utilizadas?
6. Quais características foram atribuídas ao origami para o seu uso como material manipulável no ensino de matemática?

Para a realização de tal levantamento, optou-se por selecionar os artigos através da plataforma da base de periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes, por se tratar de uma base de pesquisa sólida e de fácil acesso que engloba os trabalhos de grande relevância de maneira estruturada e objetiva. Concentrando assim em um mesmo local, artigos diversos com potencial de apresentar esse recorte de como o origami se apresenta nas salas de aula do Brasil.

Além disso, o recorte temporal selecionado foi de 15 anos. Entretanto, um resultado importante observado é o de que o relato mais antigo encontrado foi o de Rancan e Giraffa (2011). Em outras palavras, o recorte temporal não precisou ser utilizado e isso resultou na constatação de que a pesquisa nessa área tem se desenvolvido recentemente, contrastando com o fato do origami ser tão antigo.

Seguindo essas orientações, foi estabelecido que o buscador utilizado seria: ("origami " OR "dobradura") AND ("matemática" OR "geometria") AND ("educação" OR "ensino" OR

"aprendizagem"). Obtendo o resultado de 57 trabalhos. Desses, a partir de uma leitura preliminar, foram excluídos os que não apresentam uma aplicação em sala de aula ou não tratam da disciplina de matemática, para que fossem analisados somente os que apresentam relevância para o presente trabalho.

Outros critérios seguidos foram a eliminação de artigos em outros idiomas e países com o intuito de explorar o origami dentro da realidade do Brasil. E apesar de focar em experiências em sala de aula, também foram incluídos artigos que apresentam experiências na formação continuada, por acreditar que essas descrições se assemelham ao que será passado no futuro para os estudantes e pode enriquecer esse trabalho.

Nessa mesma linha de raciocínio, também houve exceções ao incluir trabalhos que apresentam somente um roteiro e descrevem como poderia ser a aplicação, mas que não se dirigem para a prática propriamente dita. Além disso, foram explorados somente os trabalhos com acesso aberto. O quadro 1 apresenta todos os trabalhos estudados.

Quadro 1 - Artigos coletados e analisados.

Artigos coletados e analisados				
	Nome do artigo	Ano	Autores	Periódico
Ensino Fundamental anos iniciais	O uso do origami adaptado para o ensino das formas geométricas planas a uma aluna com deficiência visual	2018	Cruz, Tainá Natielle Barbosa da; Ferreira, Robson dos Santos	Tangram - Revista de Educação Matemática
	AS INTERAÇÕES DISCURSIVAS NO ENSINO DE GEOMETRIA POR MEIO DE TÉCNICAS DE DOBRADURA E OUTRAS ATIVIDADES LÚDICAS	2020	Paixão, Tereza Cristina dos Santos; Silva, Adjane da Costa Tourinho e	Revista Paranaense de Educação Matemática
	PROJETO DE EXTENSÃO “MATHLIBRAS – ANO I”: UM RELATO SOBRE A OFICINA DE ORIGAMI	2020	Grützmann, Thaís Philipsen; Umetsubo, Patricia Michie; Martins, Marcos Aurélio Da Silva; Lebedeff, Tatiana Bolívar; Philipsen, Thaiana Neuenfeld	Expressa Extensão
	Origami como material manipulativo	2021	Cardoso, Valdinei César; Ribeiro, Rafaela dos Santos; Ribeiro, Roberta dos Santos	Kiri-Kerê - Pesquisa em Ensino
Ensino Fundamental anos finais	DIVERSIFICANDO O ENSINO DE GEOMETRIA COM APOIO DE ORIGAMIS: Uma proposta metodológica para 7ª série do ensino fundamental	2011	Rancan, Grazielle; Giraffa, Lúcia Maria Martins	RENOTE - Novas Tecnologias na Educação
	Dobraduras e colagens no ensino de geometria para estudantes cegos do ensino fundamental no perí-odo de contraturno	2017	Lima, Neuza Rejane Wille; Pinto, Tânia Maria Moratelli	Revista Ensino & Pesquisa
	Práticas Multidisciplinares: Atividades Lúdicas e Tecnologia Digital aliada ao estudo de Artes e Geometria	2019	Silva, Raquel Silveira da; Gautério, Vanda Leci Bueno	RELACult - Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade
	Experimentação do origami no ensino da geometria	2019	Dias, Charlene De Farias; Vebber, Guilherme Cañete; Fronza, Juliana	Remat - Revista Eletrônica da Matemática
	Abordagem de Polígonos com Materiais Didáticos Manipulativos: uma proposta de utilização do origami e do Tangram.	2023	Caldeira, Daniel de Sousa; Silva, Fernanda Andréa Fernandes	INTERMATHS - Revista de Matemática Aplicada e Interdisciplinar

Ensino Médio	O uso de dobraduras no ensino de geometria: uma experiência no estudo dos sólidos de Platão	2019	Braz, Lúcia Helena Costa; Morais, Álda Rina Souza; Alves, Clara Coimbra de Freitas; Vieira, Thayná Pereira	ForScience
	Função exponencial: uma estratégia didática aplicada no Ensino Médio	2020	Sivert, Cristiana Monique Feltes; Pereira, Érico Felden; Puhl, Cassiano Scott	BoEM
	Trissecção do ângulo obtuso com origami	2021	Graciolli, Carolina Yumi Lemos Ferreira; Batista, Carolina Cordeiro; Shintani, Rodolfo Masaichi	Boletim Cearense de Educação e História da Matemática
	Aspectos do pensamento computacional em atividades desplugadas com origami e matemática	2022	Graciolli, Carolina Yumi Lemos Ferreira; Júnior, Romário Costa da Rocha; Silva, Ricardo Scucuglia Rodrigues da	Dialogia
Formação continuada	Polígonos: dobra aqui, dobra ali e um objeto esquecido: o transferidor	2017	Leivas, José Carlos Pinto; Lara, Débora da Silva de; Soares, Gabriel de Oliveira	Ensino e Tecnologia em Revista
	Uma Experiência Interdisciplinar na Formação Continuada de Professores da Rede Pública no PACTO pelo Fortalecimento do Ensino Médio	2018	Dall'Asta, Marília Nunes; Pereira, Elaine Corrêa; Machado, Celiane Costa	RELACult - Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade
	Tecnologias Digitais e origami na Formação Docente para o Ensino de Geometria nos Anos Escolares Iniciais	2020	Souza, José Kemeson da Conceição; Martins, France Fraiha	Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática
	Dobrar e Contextualizar: o origami como Ferramenta de Ensino de Álgebra e Geometria	2021	Molgora, Larissa Beatriz; Figueiredo, Tiago Dziekaniak	Perspectivas da Educação Matemática
	Oficina de origami: Um recurso estratégico para o ensino de Geometria	2021	Ferreira, Arnaldo Dias; Carvalho, Elaine de Farias Giffoni de; Scipião, Lara Ronise de Negreiros Pinto; Alves, Francisco Régis Vieira; Santos, Maria José Costa dos	Research, Society and Development
	A Geometria do origami: explorando o Teorema de Haga em um curso de extensão	2023	Graciolli, Carolina Yumi Lemos Ferreira; Silva, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; Borba, Marcelo C.	Tangram

Fonte: Elaborado pelo autor

Com a revisão bibliográfica feita e os trabalhos dentro da área da matemática do origami analisados, fica evidente que esse é o assunto matemático que primeiro surge ao se manipular o origami. Entretanto, trabalhos como o de Hull (2013), apontam para a vastidão de conceitos ali presentes, exigindo então mais trabalhos e estudos que abordem outras áreas da matemática.

Dentro desta temática, surge a resposta da **segunda pergunta**, que diz respeito a qual fase do ensino básico que possui o origami como material manipulável de maneira mais recorrente. Como a divisão da tabela nos evidência, é clara a discrepância e o foco em se trabalhar com origamis no ensino fundamental. Além disso, seis trabalhos foram realizados na formação continuada, dentre eles, quatro são direcionados para o ensino fundamental, em específico, focam no ensino fundamental anos finais. Desse modo, aproximadamente 68,4% dos trabalhos são destinados a essa fase do ensino.

Seis artigos focam no ensino médio, sendo que três, possuem a mesma autora, o que pode ser um indício de que não há muitas pesquisas voltadas para essa área ou que não há conhecimento tão aprofundado de como o origami pode ser trabalhado de maneiras mais complexas a depender da faixa etária dos alunos. Fato esse que pode ser contestado pela pesquisa já apresentada, que demonstra o quanto a matemática é rica dentro do universo do origami.

Um parêntese válido que surgiu como uma particularidade dessa pergunta, diz respeito ao ensino inclusivo, apesar de não ser a ideia inicial de investigação, esse foi um tema interessante que surgiu no processo. Dos trabalhos analisados, três deles apresentaram uma temática de inclusão, sendo dois deles voltados para alunos com deficiência visual e um para o ensino de Libras.

Partindo para a **terceira pergunta** norteadora, seis trabalhos não apresentaram dificuldades que surgiram durante a prática, enquanto o resto tem dificuldades similares com preparação da oficina, estando incluso falta de planejamento que afetou o tempo de oficina, material impróprio adquirido para a atividade e pouca antecipação de dificuldades dos alunos. Todos os trabalhos que apresentaram dificuldades tinham como solução uma melhor preparação do professor para até mesmo antecipar as dificuldades dos alunos.

Ao se depararem com esse aprendizado novo, apesar da unanimidade dos artigos em destacar o êxito dos estudantes após certas tentativas, os alunos possuem certas dificuldades. No trabalho de Molgora e Figueiredo (2021), um dos participantes da oficina, por ser um professor que já atua, destaca a necessidade do preparo docente e de se pensar que por ser uma atividade que retira os alunos da sua rotina habitual, geraria um certo alvoroço que demandaria esforço com mais pessoal e mais tempo para ser organizado e se tornar eficiente.

Outros pontos destacados nos trabalhos, variam desde dificuldades em escolher o tipo de papel adequado para as dobras planejadas até dificuldades dos alunos em formalizar os conceitos que viram na prática com o papel. Esse último, e mais frequente, deve ser reconhecido como um comportamento natural dos alunos e que os professores devem tentar contornar.

Apesar do conteúdo estar evidente na própria dobradura, o estudante nem sempre consegue compreender aquilo como a matemática que ele também deve aprender na escola, o que se comprova pelos relatos dos artigos. Dessa forma, é papel do professor mediar a transição do que ele compreendeu na atividade para o formalismo que se espera ao aprender matemática na escola.

Embora desse detalhe, nota-se no panorama geral que o ensino com essa ferramenta foi muito positivo e tem-se esse fato como síntese da resposta à **quarta pergunta**. De maneira geral, os estudantes de todas as faixas etárias que participaram da oficina tiveram bastante interesse no apresentado, os tornando mais atraídos ao conteúdo. Alguns relatos, como o apresentado em Dall'Asta (2018), mostram os participantes da oficina se interessando e pedindo mais atividades com origamis.

Isso é interessante de ser explorado, em destaque nesse trabalho, pois ele trabalha com a formação continuada, isso mostra que se até mesmo os adultos e professores se tornam mais atraídos pela dinâmica, os alunos têm a tendência de serem mais atraídos ainda. Além disso, os alunos conseguiram encontrar uma base mais prática para o que antes era abstrato demais somente com a teoria e foi unânime entre os trabalhos que esse processo fez com que os professores notassem uma aprendizagem mais significativa. Tanto em trabalhos que fizeram testes e pesquisas quantitativas a esse respeito, quanto aqueles que somente observaram o comportamento dos alunos.

Entretanto, vale destacar a presença de trabalhos cujos resultados pretendidos não estavam na dobradura. Existiram trabalhos que, apesar de se valer da utilização de origamis, não tiveram ele como o foco propriamente dito. Como é o caso de Sivert (2020), que utiliza somente como um desafio inicial enxergar conceitos de exponencial através de dobras, mas sem objetivar a conclusão de nenhuma figura e nem focar no origami propriamente dito. Outros trabalhos usaram as dobras para confeccionar Tangram e esse sim como material de aula para estudar conceitos matemáticos. Isso é válido de se pensar quando questionados sobre os resultados, pois nem todos os resultados exaltados foram alcançados trabalhando com o origami durante todo o processo da oficina.

Um ponto interessante levantado pela **quinta pergunta**, é o que diz respeito ao direcionamento teórico, também é visto na primeira pergunta. O fato de que 52,63% dos

trabalhos focam nos conceitos iniciais da geometria plana, principalmente a classificação das principais formas geométricas. Levantou-se a hipótese de que esse enfoque nesses conteúdos se deva à mesma base teórica estudada.

Alguns autores se repetem nas citações e é possível notar que essa abordagem para essa temática é recente, já que a prática mais antiga analisada tem somente 13 anos. Ao analisar as principais bases teóricas dos artigos, percebe-se na estrutura dos artigos e na maneira como trabalham a dobradura, muitas semelhanças. Poucos definem essa técnica como um material didático, da maneira que esse trabalho busca definir, e há uma certa repetição, quando não de autores, de ideias.

Em geral, os trabalhos seguem a linha de destacar a eficiência do origami por ser uma ferramenta útil ao ensino, usando essa nomenclatura. Após isso, falam pouco sobre sua origem incerta e citam algum autor da área da educação que valide sua linha de pesquisa, e a maioria trabalha na mesma linha com os mesmos conteúdos. Desse modo, partindo para a **sexta pergunta**. Poucos definiram o origami como um material manipulável, entretanto a maioria atribuiu características a ele que poderiam fazer com que ele fosse considerado um material manipulável como o da definição formal fornecida por D'Ambrosio.

Eles atribuem ao origami a sua versatilidade, capacidade de fazer o estudante explorar e se tornar ativo na atividade, destacam a sua capacidade de desenvolver diversas habilidades, como a coordenação e o fato dele ser manipulável pelo próprio estudante para executar as atividades, geralmente de exploração. Diante do exposto, se faz clara a potencialidade do origami dentro da educação matemática, com as devidas ressalvas para um bom planejamento que possibilite uma aplicação clara e precisa dessa atividade. Dessa forma, o estudante efetiva o seu potencial de aprendizado.

3.5. Origami enquanto material manipulável

Muito se fala sobre o material manipulável, essa amplitude de ideias difundidas sobre um mesmo tema faz com que surjam ideias confusas sobre o que de fato são materiais manipuláveis e de que maneira eles são implementados de maneira efetiva no ensino. Podemos compreender o material manipulável como um dos tipos de materiais didáticos.

Entende-se que material didático é uma ferramenta útil com a finalidade de apoiar o professor no ensino de conteúdos, quando esses apresentam uma dificuldade de serem absorvidos pelos estudantes em uma única exposição. Como geralmente ocorre com conceitos abstratos comuns à matemática, entretanto, muitos questionamentos são levantados sobre o seu uso. Dando início às reflexões sobre o tema a partir da definição de Lorenzato (2012)

Material didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, MD pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros. (Lorenzato p. 18, 2012).

Podemos observar a abrangência dessa ferramenta fazendo com que ela possa ser utilizada e compreendida de distintas formas, a depender da demanda que deseja ser suprida. Pensando em um cenário de ensino de matemática, a utilização desses métodos pode ser de grande ajuda no momento de ensinar conceitos abstratos, como por exemplo, conceitos geométricos.

Trabalhando especificamente com materiais manipuláveis podemos entender a distinção a partir do fato de que esses são um subgrupo, no qual, é permitida a transformações por continuidade, que facilita ao estudante a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem como afirma Lorenzato.

Com esse tipo de material, o estudante, após se familiarizar com as possibilidades de modificações, pode ter uma versão concreta do conteúdo em suas mãos. Esse caminho de ir do concreto ao abstrato torna o aprendizado mais fácil de ser alcançado e mais claro, sem que somente uma forma técnica de reproduzir o conteúdo mecanicamente ocorra.

Por outro lado, um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem novamente contextualizados em outras situações. Mesmo no ensino fundamental, espera-se que o conhecimento aprendido não fique indissoluvelmente vinculado a um contexto concreto e único, mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos. (PCN, p. 36)

Sendo os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCNs), um dos principais documentos norteadores do ensino no Brasil. Podemos retirar dessa descrição sobre a absorção de conhecimentos uma validação ao uso de materiais didáticos, pois a partir de sua interpretação podemos concluir que o entendimento de conteúdos de diversas maneiras distintas é essencial para sua maior absorção.

Com materiais manipuláveis o estudante consegue vivenciar os mais diversos conteúdos de outras maneiras não só expositivas. Uma ressalva a este ponto, é o fato de que nenhum método é totalmente eficaz na educação, compreendendo a individualidade do estudante dentro de sala de aula, se torna claro que cada um vivencia e compreenderá o conteúdo a sua maneira, dependendo de suas vivências anteriores.

É que a linguagem do educador ou do político (e cada vez nos convencemos mais de que este há de tornar-se também educador no sentido mais amplo da expressão) tanto quanto a linguagem do povo, não existe sem um pensar e ambos, linguagem e pensar, sem uma realidade a que se encontrem referidos.

Desta forma, para que haja comunicação eficiente entre eles, é preciso que educador e político sejam capazes de conhecer as condições estruturais em que o pensar e a linguagem do povo, dialeticamente, se constituem. (Freire, 1970, p. 55 e 56)

Podemos entender essa abordagem de Paulo Freire com a educação como uma forma de pensar a educação de acordo com a realidade do sujeito. Dessa forma, dependendo da realidade em que se insere a escola ou de vivências anteriores dos alunos, determinados métodos de ensino podem ser melhores ou piores.

Alguns vão preferir aulas mais objetivas e expositivas, enquanto outros terão uma maior assimilação do conteúdo em uma aula mais lúdica. Cabe então ao professor analisar e entender a dinâmica de sua turma para ministrar uma aula que alcance o máximo de estudantes em termos de aprendizagem.

Dentro do âmbito da educação matemática, diversos são artigos que mencionam o origami como uma ferramenta aplicada em sala de aula. Por vezes ela aparece para explicar de forma mais visual algum conceito geométrico, principalmente nos anos iniciais da formação dos estudantes, e com conceitos mais simples, como paralelismo, perpendicularidade e os conceitos que abrangem as principais figuras planas.

Entretanto, para enquadrar o origami dentro desse universo do material manipulável, devem ser consideradas uma série de características necessárias para distinguir um material manipulável de outro artefato utilizado em sala de aula. Considerando as definições de Lorenzato (2012) sobre material manipulável, bem como as análises das práticas presentes nos artigos analisados, que utilizaram o origami e justificam o seu uso como metodologia. É possível concluir o que qualifica o origami como um material manipulável.

A capacidade presente nesse material de ser moldado e manipulado de distintas formas

com diferentes objetivos, o enquadra dentro de definições mais formais como um material manipulável. Outro fator a ser considerado, é que além das distintas possibilidades que podem ser exploradas dentro desse material, ainda existe a facilidade de acesso que o torna uma excelente ferramenta para ser utilizada dentro de sala de aula, já que seu recurso indispensável é o papel e esse, por sua vez, está presente sempre nas escolas.

Entretanto, considerando a fala de Lorenzato (2012) sobre reconhecer limitações dentro dos materiais didáticos, e que corrobora com as análises práticas realizadas nos artigos que relatam a prática, é possível perceber uma série de dificuldades com esse uso em sala de aula. A título de exemplo, as dificuldades motoras dos estudantes, o número de estudantes em sala de aula dificultando essa abordagem e até mesmo a falta de preparo dos professores no momento de ensinar as dobras de maneira mais acessível aos alunos.

4. Tarefa e Ensino Exploratório

Diante das necessidades específicas que o origami apresenta, por se tratar de um material manipulável, surgiu a necessidade de trabalhar com a proposta de uma atividade que valorizasse a ação do aluno. Diante disso, além de buscar através da revisão bibliográfica a maneira habitual com que esse tipo de material é utilizado em sala de aula, também houve uma busca por outras atividades que pudessem potencializar a aprendizagem quando combinada com a dobradura.

Através dos trabalhos de Machado (2023), é possível reconhecer um rico levantamento bibliográfico, que apresenta a tendência de pesquisa na área do ensino exploratório. Desse modo, para enfatizar o potencial dos autores aqui citados, foram apontados 3 autores que norteiam a aplicação do ensino exploratório através do cruzamento de suas ideias, e trazendo uma visão teórica mais recente, os apontamentos de ARAMAN, et al. (2023), autor com mais trabalhos que apareceram nos filtros de Machado (2023) e selecionada a sua publicação mais recente.

Assim, para dar início as reflexões, chegou-se à Ponte (2014) e sua distinção entre tarefa e atividade para que se defina com precisão o que será trabalhado e de que maneira para que ocorra de forma eficiente. Em suas palavras, essa definição e distinção precisa é necessária pois, “o ensino que valoriza o papel ativo do Estudante na aprendizagem precisa de forma fundamental desta noção, uma vez que as tarefas são o elemento organizador da atividade de quem aprende”.

Partindo dessa afirmação e ainda compreendendo a “hierarquia” entre atividade e tarefa através da seguinte outra afirmação de Ponte, deve se ter a ideia clara de que “uma atividade pode incluir a execução de numerosas tarefas”. Assim sendo, podemos compreender atividade como um processo maior que para ser cumprido tem a necessidade de serem realizadas algumas tarefas.

A tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao estudante (embora possa ser decidida por ele). Na verdade, as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo Estudante e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade). (Ponte, 2014, p. 14)

Para que a utilização do origami se efetive, é necessário pensar em qual atividade propor e quais as tarefas que o estudante irá realizar para alcançar a aprendizagem. Nas palavras de Ponte, para resumir, “a aprendizagem resulta da atividade, não das tarefas, e o mais determinante são as atitudes e concepções dos autores envolvidos”. Tendo clara a necessidade

de se trabalhar uma atividade que detenha boas tarefas, Ponte (2005, p. 2) salienta que “não basta, no entanto, selecionar boas tarefas - é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização em sala de aula”. Sendo assim, após pesquisas e levantamentos sobre a maneira com que é trabalhado o origami habitualmente foi escolhido o ensino exploratório como metodologia norteadora da prática proposta.

Essa seleção da metodologia que guiará a prática faz com que a mesma se torne mais estruturada, e assim mais eficiente. Enfatizando o que é o ensino exploratório e de que maneira ele deve se desenrolar em etapas para que cumpra seu papel. Mas antes dessas etapas, Rossa (2022) apresenta quais as vantagens de se trabalhar com tarefas desse tipo.

Práticas de EEM privilegiam a comunicação de conjecturas, estratégias e dificuldades dos alunos, assim como incentivam que eles questionem suas ideias e também as dos colegas, refletindo sobre necessidades, potencialidades e encaminhamentos de estratégias de resolução, envolvendo um processo de colaboração e negociação em sala de aula. (Rossa, p. 288, 2022)

Essa abordagem que potencializa tantos aspectos distintos e necessários à aprendizagem dos estudantes, pode ser entendida como uma tarefa que busca incentivar os estudantes a explorar e buscar conhecimentos acerca de um tema matemático, de modo a construir conhecimento de modo ativo. Nas palavras de (Ponte et al, 2013; Wijaya, 2017 apud Rossa 2022), “os alunos devem interpretar situações em termos matemáticos, formular questões matemáticas, raciocinar de forma indutiva, conjecturar, validar e generalizar os resultados obtidos”.

Para que isso se cumpra, tarefas de ensino exploratório necessitam de algumas etapas a serem seguidas para que se torne eficiente e cumpra com seu papel. São elas, a exposição da atividade, a exploração por parte dos estudantes, a socialização de seus resultados e a formalização de suas ideias em termos matemáticos. Em diferentes trabalhos essas mesmas etapas são trabalhadas com nomes distintos, entretanto, sempre com a mesma ideia de se fazer cumprir essas cinco etapas.

Analisando as etapas pela óptica de Oliveira (2013), tem-se um quadro que esquematiza bem suas ideias. De maneira sucinta, o professor deve apresentar uma introdução da tarefa, fazendo o Estudante compreender o que é necessário para que se cumpra tarefa e se ambiente ao cenário em que ela é proposta. O momento seguinte deve ser o de realização da tarefa, momento no qual o estudante deve desempenhar a função de explorar os comandos e conhecimentos prévios para de fato responder às etapas propostas.

No momento em que essa exploração ocorre por parte do estudante acontece a etapa de esquematizar e sequenciar os trabalhos dos alunos, preparando o professor para o momento seguinte, já com os alunos tendo apresentado suas respostas sobre a proposta, o professor orienta uma discussão da tarefa, fazendo com que ocorra uma socialização entre os alunos e grupos e que todos compreendam as etapas que seguiram e os diferentes meios de chegar a resposta. Por fim, o professor deve passar a formalização das aprendizagens matemáticas, momento no qual deve utilizar os conhecimentos que os alunos produzirem para formalizar matematicamente os conceitos.

A autora Canavarro (2011), apresenta em seu trabalho um interessante esquema no qual apresenta uma aula ficcional nos moldes do ensino exploratório, e apresenta com riqueza de detalhes uma realidade de sala de aula bem verossímil e com pontos a serem destacados pelo professor em cada etapa para que faça a metodologia ser eficiente. Ainda afirma que:

O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva. (Canavarro, pg. 11, 2011)

Com isso, introduz suas ideias e apresenta alguns pontos que destaco aqui que o professor deve se atentar para que alcance seus objetivos com essa metodologia. O primordial é a compreensão de que essa abordagem é complexa e demanda planejamento e antecipação do que os alunos irão realizar.

É essencial a fase de antecipação que ocorre antes da efetivação da proposta com os alunos em sala de aula, a qual envolve a seleção/elaboração de tarefa(s), antecipação de estratégias de resolução dos alunos e de aspectos a serem considerados para a condução da aula como um todo. (STEIN et al., 2008; CANAVARRO, 2011; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013 apud Rossa 2022, pg. 289)

Um importante ponto do planejamento é a divisão de grupos de alunos, visando que os mesmos socializem suas ideias com maior produtividade e a fim de garantir o seu interesse e participação nos debates, assim como descreve Oliveira (2013) a tarefa proposta dentro do ensino exploratório tem grandes vantagens ao ser trabalhada em grupos. Por se tratar de um processo que necessita de socializações, a criação de grupos favorece a etapa de formalização para a apresentação de seus resultados.

Além de facilitar as discussões da etapa posterior por fazer com que haja menos respostas e as ideias individuais de cada estudante já estão englobadas em seus respectivos

grupos. Por esse motivo se faz essencial a participação dos alunos ser motivada, para que haja participação dele nos resultados elaborados.

Com esse planejamento prévio já realizado, Canavarro (2011) destaca pontos primordiais a cada momento, como exemplo a necessidade de deixar os alunos envolvidos com a tarefa, bem como “Parece-lhe fundamental que todos tenham completamente esclarecidos como funciona o jogo para poderem começar a trabalhar e progredir matematicamente na tarefa” (Canavarro 2011). Ela destaca dessa maneira, pois no cenário a tarefa se desenrola em função de um jogo. Para a etapa seguinte, o principal é que o professor esteja atento à maneira com que se desenrola a exploração dos alunos, fazendo o que a autora denomina de monitorizar.

Esta prática realiza-se já em sala de aula e é muito apoiada pelo trabalho realizado pelo professor na antecipação. A monitorização corresponde à apropriação por parte do professor das estratégias e resoluções que os alunos realizam durante o trabalho autónomo com o objectivo de avaliar o seu potencial para a aprendizagem matemática a promover na turma. Ao monitorizar, para além de verificar se os alunos estão a trabalhar na tarefa, o professor dedica-se a: observar e ouvir os alunos ou grupos; avaliar a validade matemática das suas ideias e resoluções; interpretar e dar sentido ao seu pensamento matemático, mesmo que lhe pareça estranho e/ou não o tenha antecipado; ajudar os alunos em dificuldade a concretizar resoluções que tenham potencial matemático relevante para o propósito matemático da aula. (Canavarro, 2011, pg. 14)

Para efetivar essa prática, a autora sugere e utiliza a ideia de tabelas, que facilitam e agilizam o trabalho de acompanhar o desenvolvimento durante a correria da aula. Com essa ferramenta e essa fase bem elaborada, ela consegue fazer de maneira mais efetiva a seleção do que e de como o elaborado será socializado, deixando tudo em um caminho mais lógico que leve até a formalização com mais clareza.

Para que toda essa prática bem estruturada de fato cumpra com o seu papel, cabe ao professor a seleção de boas tarefas a serem empregadas. Retomando Ponte (2005), é possível encontrar quatro tipos de tarefas, exercícios, mais simples e diretos, comuns a sala de aula convencional. Os problemas, com um carácter desafiador onde o estudante não tem as ferramentas para solucionar logo de cara e deve se aprofundar em maneiras de contornar essa dificuldade.

Essas são as tarefas fechadas, onde se tem um caminho ao qual o estudante deve seguir. Já nas tarefas abertas, pode haver uma investigação, onde o estudante investiga um cenário sobre vários aspectos enquanto confronta diversos conceitos matemáticos já aprendidos ou não. Por fim tem-se a tarefa de carácter exploratório, escolhida aqui neste trabalho como a que mais se encaixou, dentro das separações de Ponte (2005), com as demandas exigidas pelo origami.

Os alunos não desenvolvem o raciocínio matemático apenas pela memorização de conceitos e procedimentos. É necessário estabelecer um ambiente de aprendizagem desafiador em que eles possam utilizar diferentes estratégias para resolver suas tarefas, possam comunicar suas ideias matemáticas e ouvir as ideias de seus pares. (Araman, p. 102, 2023)

Essa abordagem do autor presente na citação, combinada com as ideias previamente apresentadas, resume a abordagem que se buscou neste trabalho. O ensino exploratório serve como caminho para potencializar as nuances de se trabalhar com o origami, destacando suas características de manter o aluno ativo, enquanto oferece um aporte teórico para que as tarefas sejam pensadas e estruturadas de modo a tornar o ensino efetivo.

Com esse modo de compreender o ensino através de tarefas e a abordagem do ensino exploratório, fica mais claro o trabalho que aqui se buscou desempenhar. Todas estas etapas de exploração e discussão favorecem o uso do origami que depende tanto da interação ativa dos estudantes, dessa forma, utilizar o ensino exploratório pode contribuir para enfatizar quais são as potencialidades e limitações dessa ferramenta em salas de aula de matemática.

5. Metodologia

5.1. Pesquisa

Após a revisão bibliográfica, que permitiu a compreensão do origami para além do senso comum, que o entende como um mero artesanato, bem como a busca que foi feita para compreender seu uso dentro de salas de aula de matemática, foi possível elaborar um trabalho de pesquisa qualitativa e participante com o intuito de responder à seguinte pergunta: Qual o potencial do emprego de origamis dentro de salas de aula de matemática?

Reforçar a pergunta que norteou essa pesquisa é importante para garantir que a cada etapa, o objetivo esteja claro e alinhado, melhorando a coleta e análise dos dados. Como afirma Fiorentini (2012), ao abordar as etapas necessárias ao se elaborar um projeto, já com essa questão em mente, foi estruturada uma oficina que permitiu a realização de uma pesquisa participante com quatro instrumentos de coleta.

Um ponto favorável à coleta de dados foi a metodologia de ensino empregada na oficina, devido ao fato do ensino exploratório ser bem estruturado em suas etapas, bem como a necessidade de se ter um preparo prévio, que é descrito por Canavarro (2011) como a etapa de antecipar o que ocorre. Nesse ponto, foi dado bastante foco em tentar antecipar o que aconteceria, devido ao fato de nunca ter trabalhado com o ensino exploratório antes.

Um dos instrumentos de coleta utilizados também foi uma ideia retirada de seu trabalho. Quando ela aponta, a utilização de tabelas para a fase descrita como monitorização, momento no qual o professor toma nota do desenvolvimento dos alunos nas suas explorações para organizar o momento seguinte de socialização. Notou-se o potencial desse material de coleta para fazer uma interpretação do discurso do sujeito mais estruturada e produtiva, assim como também defende Fiorentini (2012).

Da mescla da teoria desses dois autores, surge a estrutura de pesquisa aqui empregada. Como o ensino exploratório já tem etapas e papéis bem definidos para os professores e alunos, optou-se por uma análise através de uma observação participante. Sendo assim, enquanto a oficina ia se desenvolvendo, o professor seguia coletando dados tanto para cumprir seu papel dentro do ensino exploratório quanto para compor seu instrumento de coleta de dados da pesquisa. De acordo com Fiorentini (2012) a observação participante ou etnográfica pode ser entendida da seguinte forma.

É um tipo de estudo naturalista ou etnográfico em que o pesquisador frequenta os locais onde os fenômenos ocorrem naturalmente. A coleta de dados é realizada junto

aos comportamentos naturais das pessoas quando essas estão conversando, ouvindo, trabalhando, estudando em classe, brincando, comendo... A denominação etnográfica é oriunda dos antropólogos; objetiva descrever a cultura de um determinado grupo étnico. O termo “participante” aqui significa, principalmente, participação com registro das observações, procurando produzir pouca ou nenhuma interferência no ambiente de estudo. (Fiorentini, 2012, pg. 107)

O que torna esse tipo de pesquisa interessante quando pensada juntamente com o ensino exploratório, é o fato de que participando como professor que ministra uma oficina, não há tanta interferência no comportamento dos estudantes além do que já é previsto pela metodologia, permitindo acompanhar e coletar dados relevantes para compreensão da potencialidade do origami em sala de aula.

Desse modo, foi utilizado um formulário que consta no apêndice H para coletar dados mais objetivos dos alunos, as tarefas entregues, bem como o diário de bordo do professor e as tabelas dos apêndices E e F também compuseram essa coleta, por fim, imagens registradas durante os três dias concluem os materiais de coleta. A análise de todos os materiais possibilitou a construção de uma análise do discurso mais precisa dos alunos.

5.2. Lócus da Pesquisa

Com o intuito de atestar de maneira mais efetiva as potencialidades e desvantagens do uso de origami dentro de sala de aula, foi estruturada uma oficina que aborda os principais pontos enfatizados na revisão bibliográfica. Assim foi proposta uma oficina realizada em 3 dias distintos onde cada encontro contou com tempo de 1 hora e meia de duração, os estudantes que puderam participar desse encontro foram os alunos do ensino técnico integrado ao ensino médio do IFG - Câmpus Valparaíso.

A proposta era a de ofertar essa oficina para estudantes do ensino médio, pois a revisão bibliográfica demonstrou que a maioria dos trabalhos não abordam essa faixa etária, apesar do origami ainda possibilitar grandes oportunidades para apresentar abstrações dos conteúdos de maneira mais concreta. Assim, foi proposto um projeto de ensino seguindo os parâmetros da instituição e divulgado aos alunos do dia 09/12/2024 até o dia 18/12/2024 e a inscrição foi realizada conforme o apêndice A que apresenta o formulário Google ofertado aos alunos.

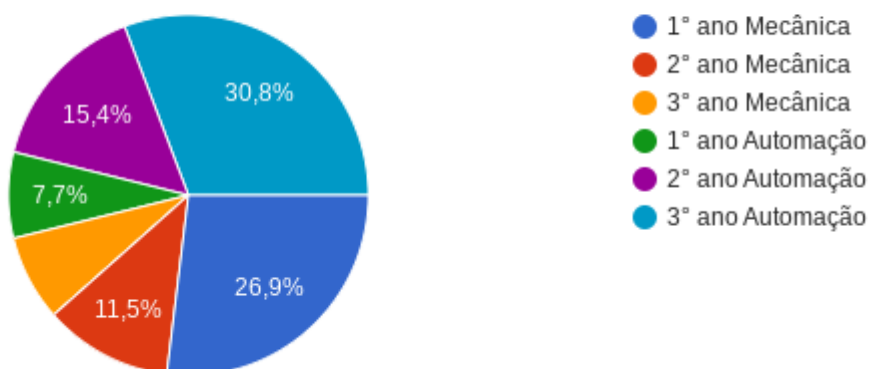
A Figura 10 representa a distribuição dos estudantes inscritos por turma e curso. Dos 26 alunos inscritos, os 20 primeiros foram selecionados para participar da oficina, enquanto os outros 6 ficaram em cadastro reserva, de modo que, por ausências comunicadas com antecedência foi necessário mesmo usar esse cadastro reserva. Percebe-se que a distribuição

não foi tão homogênea quanto se pretendia, o que dificultou a etapa seguinte de separação dos alunos em grupos.

Figura 10 - Distribuição dos alunos inscritos na oficina por turmas.

Turma

26 respostas



Fonte: elaborado pelo autor.

Como abordado no tópico anterior, a prática do ensino exploratório privilegia o uso do trabalho em grupos. Dessa forma, na presente oficina, desde o momento da criação do formulário de inscrição, foi pensada a coleta de dados que permitiriam a melhor separação dos alunos em grupos. Assim, foram colhidos no formulário, dados com a ideia de obter através da autoavaliação dos alunos um parâmetro numérico que guiasse a separação dos grupos.

Esse parâmetro, como presente no apêndice A, foi a criação de uma autoavaliação com valores numéricos de 0 a 5 que pretendiam separar quem tinha mais domínio sobre o origami e a geometria, bem como quem tinha mais interesse em cada um desses assuntos. Com base nisso, foram criados cinco grupos de quatro estudantes cada, a ideia é que fossem bem variados entre os membros de um mesmo grupo os níveis de conhecimento em origami e em geometria.

Outro critério utilizado foi o de separar o máximo possível alunos da mesma turma, fazendo com que em um mesmo grupo tivessem estudantes com diferentes experiências, nível de conhecimento e opiniões, enriquecendo as discussões. Essa separação dos alunos da mesma sala foi o critério mais difícil a ser cumprido, tendo em vista os dados do gráfico, já apresentado, que mostram que a distribuição de inscrições na oficina não foi tão homogênea quanto seria interessante para promover esses diálogos.

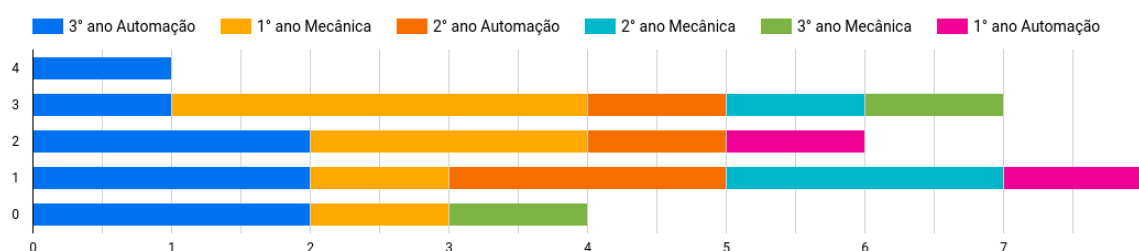
No momento de realização da oficina, esse foi o ponto que mais afetou o bom andamento da oficina. Os alunos se ausentaram muito, impossibilitando que os mesmos alunos dessem continuidade a oficina sempre presentes no mesmo grupo, isso atrapalhou a dinâmica

que já havia sido planejada toda em cima de grupos pré definidos e mantidos durante os 3 encontros.

Para melhor visualização do nível de conhecimento e de interesse dos alunos nos tópicos de geometria e origami de acordo com a turma a que fazem parte, foram criados os os gráficos apresentados nas próximas quatro figuras. O gráfico da Figura 11 relaciona o nível de conhecimento deles com relação ao origami e a turma deles.

Figura 11 - Relação entre nível de conhecimento em origami e alunos por turma.

Nível de conhecimento em Origami

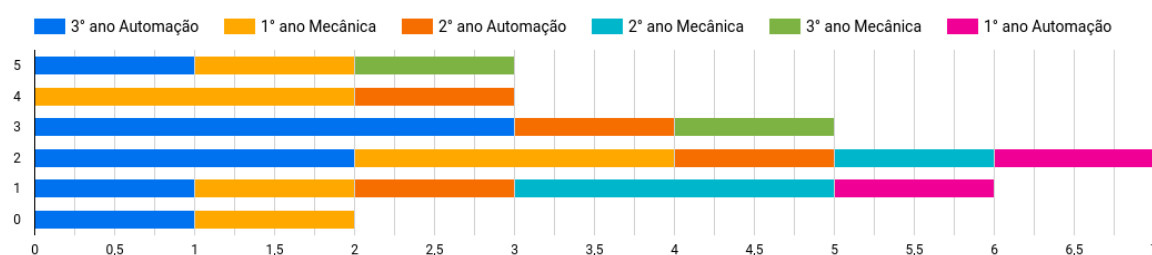


Fonte: elaborado pelo autor.

É possível notar que, independentemente da turma, os alunos consideraram seus conhecimentos bem diversificados quanto ao domínio da dobradura, entretanto, nenhum deles colocou que dominava em um nível mais alto a técnica. Uma distribuição parecida é notória no gráfico do nível de conhecimento em geometria, como pode ser visto na Figura 12.

Figura 12 - Relação entre nível de conhecimento em geometria e alunos por turma.

Nível de conhecimento em Geometria

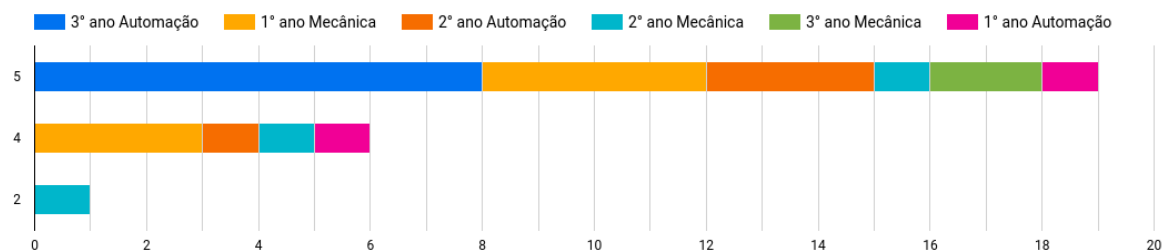


Fonte: elaborado pelo autor.

Nesse gráfico, todos os níveis de conhecimento foram selecionados, e a distribuição dos alunos em diferentes números tende a uma distribuição normal, comum na estatística, com os alunos com a tendência de apresentar um nível mediano de conhecimento. Outro fator importante pode ser visto nos outros dois gráficos a seguir.

Figura 13 - Relação entre nível de interesse em origami e alunos por turma.

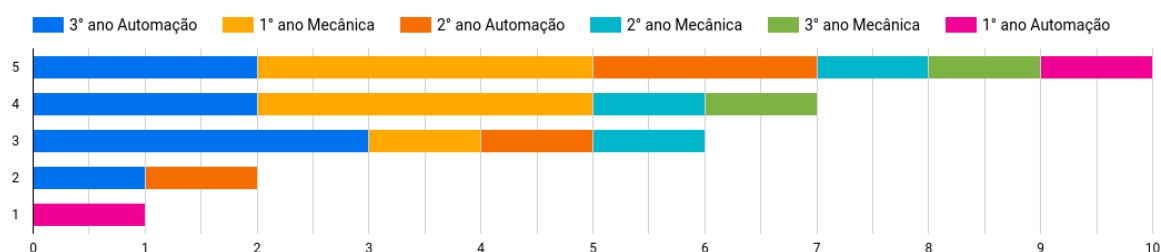
Nível de interesse em Origami



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 14 - Gráfico de relação entre nível de interesse em geometria e alunos por turma.

Nível de interesse em Geometria



Fonte: elaborado pelo autor.

O nível de interesse dos alunos é extremamente relevante quando falamos de ensino exploratório, pois quando os estudantes não se encontram engajados no assunto, não desenvolvem tudo o que poderiam sobre a tarefa a ser explorada. Por isso, atestar através desses gráficos das Figuras 13 e 14, que os alunos têm, em sua maioria, interesse em uma das duas áreas abordadas na oficina, já é um bom indicativo do aproveitamento da mesma.

Para finalizar a etapa de planejamento e organização da oficina, foi organizado em um plano de aula que consta no apêndice B todo o planejado e proposto para essa oficina. De maneira geral, os três encontros estão dispostos de modo que no primeiro seja realizada uma tarefa do tipo exercício, na qual apesar de certo nível de exploração, os alunos vão basicamente mobilizar seus conhecimentos e habilidades prévias para responder a comandos diretos e simples confeccionado origami s seguindo instruções detalhadas. Posterior a isso, nos dois encontros seguintes, toda a proposta foi feita para seguir todas as etapas do ensino exploratório.

Sobre os temas abordados, no primeiro encontro é realizada uma apresentação do origami como um artefato, destacando pontos que possam ser atraentes e curiosos para os estudantes, bem como destacando técnicas relevantes para evoluir no nível e no tipo de origami que você vai desenvolver, tudo de acordo com o apêndice C.

No encontro 2, realizado na semana seguinte, o foco é a exploração de um origami específico. Nesse encontro os estudantes devem se aprofundar na construção de um origami de

caixa buscando responder e encontrar questões pertinentes a matemática, para isso eles devem seguir cinco etapas que os guiarão a uma resposta que motivará toda a exploração do encontro 3, tudo de acordo com a tarefa no apêndice D e utilizando a tabela do apêndice E para organizar a socialização.

O encontro 2 serve basicamente para que os alunos construam um contexto no qual será necessário utilizar o Teorema de Haga para explorar a geometria do origami com maior destaque. No encontro 3 então, os alunos irão seguir as etapas da tarefa presente no apêndice G para explorar esse teorema e buscar solucionar a questão que eles mesmos criaram no encontro anterior, enquanto eles exploram será utilizada a tabela presente no apêndice F para organizar a socialização.

6. Apresentação e Análise de resultados

Para a melhor organização e compreensão do ocorrido durante as oficinas, separo aqui o que ocorreu em cada encontro, cruzando as informações do que era pretendido e do que foi alcançado. Como a oficina ocorreu seguindo os moldes do ensino exploratório, a descrição dos acontecimentos segue separada por todas as etapas que essa metodologia exige que ocorram na prática.

Dessa maneira, já estando clara a função de cada participante da oficina em cada momento, se torna mais direta a interpretação do que ocorreu. Além disso, nesta etapa do texto, dou seguimento utilizando a escrita em primeira pessoa por se tratar de uma metodologia de pesquisa que me colocou para além da função de pesquisador, mas também com a função de professor aplicador da oficina.

6.1. Primeiro encontro

Por se tratar de um encontro que, apesar de utilizar as tarefas como guia e tendo um certo nível de exploração, não foi trabalhado usando totalmente o ensino exploratório. A sua análise será mais breve e sem as separações que os encontros posteriores terão. Nesse primeiro momento, o objetivo era apresentar aos alunos o origami e trabalhar com eles alguns modelos simples para treinar, já que no encontro seguinte precisariam explorar mais a fundo as dobras.

Primeiro ponto a ser destacado, tanto nesse encontro quanto nos seguintes, foram as ausências, que mesmo já sendo esperadas, não havia contado com tantas. Durante a elaboração da sequência didática, foi levantada a pauta de que os alunos poderiam se inscrever, mas no dia faltarem sem aviso prévio, para tanto foram ofertadas mais vagas e solicitado aos alunos que avisassem caso fossem se ausentar para que fosse possível a reestruturação da oficina.

Desde o princípio, a oficina foi pensada em grupos que seriam separados previamente seguindo os critérios já descritos para formar grupos heterogêneos, esses grupos deveriam ser mantidos os mesmos durante os 3 encontros. Entretanto as ausências foram o maior problema dessa oficina, e em cada encontro houveram grupos diferentes, assim como alguns alunos apareceram somente em um encontro, outros em somente 2 e apenas 4 alunos estiveram nos 3 encontros.

Diante desse cenário, o primeiro encontro se deu com 11 estudantes, houve um pequeno atraso esperando para que mais alguns chegassem, entretanto isso não ocorreu. Com isso foi explicada a ideia inicial da oficina aos estudantes e para que não houvesse mais atrasos, separei

os estudantes buscando mesclar ao máximo em grupos heterogêneos, mas isso com o decorrer da oficina se mostrou irrelevante ao decorrer da oficina.

Como esse encontro não apresentava a metodologia do ensino exploratório e as tarefas propostas no final, como apresentado no apêndice C, tinham um caráter muito mais individual, por consistirem basicamente da construção de origamis sem a necessidade de grande socialização, os grupos se tornaram obsoletos nesse encontro. Apesar da socialização entre si ter favorecido a dinâmica.

Mesmo com eles sentados em duplas e trios, eles acabavam conversando com os colegas que tinham mais afinidade. Pela própria dinâmica da oficina, resolvi não intervir e achei o resultado bem proveitoso. O primeiro momento da oficina era uma exposição em slides que complementava as informações do material impresso com eles, nesse ponto, considero que a exposição poderia ter sido planejada de maneira diferente.

Esse material consistia de informações a respeito do origami para ampliar os conhecimentos prévios dos alunos que não conhecem a abrangência dessa arte, principalmente nas áreas das ciências. Para atrair os estudantes, todo o material era organizado em tópicos curtos e apresentados como curiosidades, também atentei para o modo da fala, tentando falar de maneira descontraída para não deixar massante a exposição.

Entretanto, isso não foi o suficiente para atrair os estudantes. Acabou que separei muitas curiosidades e definições diferentes para os alunos, o previsto era para passar os primeiros 50 minutos de aula expondo esse conceitos e definições, só que antes disso, os estudantes estavam aparentando muito desinteresse. Isso podia ser notado em suas ações, desde brincar com a cadeira até mesmo deixar a cabeça cair cochilando.

Com isso, não me delonguei tanto quanto o previsto e parti para a parte onde eles deveriam realizar a prática. Essa experiência foi boa para demonstrar a mudança do comportamento dos alunos quando a aula é expositiva e quando ela exige maior participação, os alunos mudaram bruscamente o seu comportamento quando se depararam com uma atividade para realizar.

Evidente de que essa mudança ocorre quando o estudante apresenta interesse na atividade proposta, para isso o origami cumpriu um papel fundamental já esperado. Em todas as interações dos alunos e comentários, bem como em suas próprias ações e mudanças de comportamento, ficou clara a empolgação ao manipular o origami. Fato esse que já era esperado, a ideia de trabalhar com origami era justamente atrair os alunos, e esse objetivo foi atingido sem sombra de dúvidas.

Sobre o primeiro momento, não era aquilo que esperavam de uma oficina, e hoje penso que deveria ter planejado o primeiro encontro de maneira a encurtar mais essa primeira etapa, pois mesmo considerando importante esse aprofundamento e reconhecer o origami para além de simples artesanato, eles se inscreveram almejando de fato fazer o origami e não estudar sobre ele ou a geometria do origami que também era introduzida nessa etapa.

Ao dar início a confecção do tsuru todos se empolgaram, começaram a brincar e interagir entre si, mas dentro da temática da oficina e falando sobre as dobras que realizariam. Quando a prática deles foi se desenrolando percebi muita socialização e um ajudando o outro, mesmo que através de brincadeiras. Eles não interagiam somente com seus grupos mas com todos ali presentes, em especial pois eram poucos alunos e dispostos em uma sala onde podiam trabalhar todos na mesma mesa.

Reconhecer que a sala favorecia a discussão entre todos e não somente com membros do grupo me fez reconhecer que deveria dispor os alunos de modo a fazer com que alguns grupos não estivessem na mesa nos encontros seguintes. Isso era importante para manter a ordem e a socialização no momento certo seguindo todo o modelo do ensino exploratório.

A interação entre os alunos que tinham muita dificuldade e a afirmação de alguns de que estavam com dificuldade por se tratar da primeira vez que faziam um origami. Me fez refletir sobre a ausência no formulário de inscrição do apêndice A, da pergunta mais direta aos alunos: Vocês já fizeram algum origami alguma vez na vida? E para refletir sobre a presença do origami em ambiente escolar, ainda complementar com: Se sim, esse origami foi feito na escola?

Eles sentiram dificuldades com o tsuru, mas com as instruções que passei fazendo junto com eles na cartolina, conseguiram fluir bem. No momento seguinte, as coisas saíram um pouco do planejado, não esperava que tivessem tanta dificuldade em seguir um diagrama, reconheço que o diagrama é difícil de ler, mas não era esperado que eles ficassem tão desorientados. Mesmo assim conseguiram fazer, lembrando da instrução do primeiro e com ajuda dos colegas.

Vendo modelos dispostos na sala, eles ainda conseguiram, por conta própria, fazer algumas adaptações e criar um dragão. Nesse ponto ocorreu a interação dos alunos que resultou na seguinte fala de uma das alunas: “Isso aqui é igual matemática, a gente só aceita que existe”. Se referindo a como dobrar o papel pode adquirir um caráter tão complexo quanto a matemática. Mesmo que não associem diretamente a geometria com o origami, foi interessante nesse primeiro encontro essa associação deles já que nos que viriam eles se aprofundariam em explorar a matemática dentro do origami.

Nesse ponto, a oficina já estava no fim e falei para eles fazerem a flor. Alguns ainda estavam tentando concluir ou aperfeiçoar seus tsurus e outros foram para a flor e acharam muito complexo. Ao todo, 4 alunos fizeram a flor, e foi unânime entre eles que a flor era complexa, mas o mais difícil era a leitura do diagrama. Quando anunciei o fim da oficina no horário programado de 15h30, eles não quiseram que acabasse e ficaram mais um pouco, cada um com suas respectivas tentativas e me pedindo ajuda quando necessário.

Outros ainda se juntaram a mim e pediram para voltar em algum ponto que acharam interessante, o de maior destaque foi o Ori revo, expliquei a funcionalidade básica e muitos se interessaram e queriam inclusive aplicar ele na impressora 3D do campus. Ficamos mais uns 40 minutos desse jeito, enquanto alguns se dissiparam aos poucos. Os que iam saindo ainda me perguntavam sobre como seria o próximo encontro e faziam promessas de dobrar melhor no seguinte e outros ainda afirmaram que irão treinar bastante em casa.

No geral, foi uma experiência muito gratificante e os tempos da oficina se cumpriram de acordo, bem como os objetivos planejados. Apesar de nem tudo ter seguido o planejado, o envolvimento dos alunos e interesse em participar desempenhou um papel fundamental para que a experiência fosse boa tanto para mim como aplicador quanto para eles que me deram um retorno muito positivo deste encontro, sendo o encontro que tive o retorno mais positivo por parte dos alunos.

6.2. Segundo encontro

O início desse encontro em particular foi conturbado e teve um atraso que afetou o andamento do restante da oficina, entretanto, buscou-se ao máximo manter a programação, mesmo com os 30 minutos de atraso. Esse transtorno foi devido a imprevistos envolvendo pegar materiais que seriam utilizados na oficina e a busca por quem estava com a chave do laboratório onde seria ofertada a oficina.

A oficina teve início então às 14 horas e 30 minutos do dia 22/01/2025, contou com um total de 11 alunos presentes, dos quais somente 6 haviam estado presentes no primeiro encontro ocorrido na semana anterior. Os alunos ficaram dispostos em 2 trios, 1 grupo de 4 pessoas e um aluno que fez a dinâmica sozinho por um motivo excepcional que será apresentado a seguir.

Para melhor visualização e organização das informações, a distribuição dos alunos nos respectivos grupos se encontra na Quadro 2 a seguir. Dessa forma, ao mencionar algum aluno, será utilizada a letra designada a ele nesse quadro, e buscando uma melhor análise da parte do ensino exploratório dessa oficina, com esse quadro e o que consta na parte do terceiro encontro,

fica mais simples observar quais alunos participaram dos dois encontros e que impactos isso teve.

Quadro 2 - Relação entre Grupos e Estudantes presentes no segundo encontro.

Relação entre Grupos e Estudantes presentes no segundo encontro.	
Grupo 1	Estudante A
	Estudante B
	Estudante C
Grupo 2	Estudante D
	Estudante E
	Estudante F
	Estudante G
Grupo 3	Estudante H
	Estudante I
	Estudante J
Individual	Estudante K

Fonte: elaborado pelo autor.

— **Motivação/ Apresentação da Tarefa Matemática:**

Durante essa fase da oficina, o esperado era demorar cerca de 10 minutos, contando que as instruções eram simples, a motivação já estava na tarefa entregue a eles e o origami proposto era mais simples do que os solicitados no encontro anterior. Entretanto, a dificuldade de reorganizar os grupos e de trabalhar com alunos que não tinham feito o proposto no encontro anterior, fez com que fosse mais difícil entenderem a dinâmica e a maneira de se realizar o origami necessário para cumprir a tarefa.

Para contornar tal dificuldade, busquei ao máximo ser o mais claro possível nas explicações, e na etapa de socialização, passava de grupo em grupo observando o que faziam e comentando algo que os pudesse guiar a resposta sem que eu as de fato entregasse, somente apontava um possível caminho a partir do que já haviam feito. Para organizá-los nesses grupos, não foi possível seguir o que havia sido proposto no momento de elaboração da oficina, mas tentei manter os mesmos critérios.

Ficando então, com 2 grupos de quatro pessoas e dois trios, buscando misturar, o máximo quanto possível, cursos, séries e deixando alunos que já estiveram presentes no

encontro anterior em cada grupo, de modo a equilibrar, pelo que observei anteriormente, o nível em origami de cada grupo. Entretanto, devido a outro evento ao qual 3 alunos deveriam participar, fiz alterações, chegamos então à formação dita anteriormente de 2 trios, 1 grupo de quatro pessoas e um aluno que fez toda a tarefa sem participar de nenhum grupo, fez sozinho.

O grupo 3 era um trio que, por excesso de alunos de uma mesma turma, não havia como separar os grupos sem que ficassem dois colegas da mesma sala juntos. Isso era contra o objetivo da oficina pois buscamos por grupos heterogêneos que propiciam maiores interações e discussões. Reparei que, de fato, isso influenciou na socialização e na conclusão da tarefa deles.

A partir daí, com todos os atrasos e o tempo para fazer tudo isso, acabei acelerando na explicação. Ainda falei, de maneira breve, o que havia ocorrido no encontro anterior, pois muitos ali não haviam comparecido, e expliquei brevemente que a dinâmica ocorreria em alguns momentos distintos e que primeiro eles tinham de entender bem a atividade. Ensinei o mais rápido quanto possível a confecção da caixa e sua variação.

Esperar levar cerca de dez minutos para ensiná-los essa confecção das caixas, por se tratar de um origami mais simples do que o apresentado no encontro anterior. No entanto, levei mais tempo, e para garantir que todos haviam compreendido as etapas, passei em todos os grupos vendo seus andamentos, levei cerca de quarenta minutos, e parti para a explicação das etapas da tarefa.

Me certifiquei de que todos tinham compreendido todas as etapas antes de dar seguimento com a seguinte. Li a tarefa do Anexo D, os deixando inteirados do que tinham de fazer de forma bem objetiva e explicando de maneira ampla para que compreendessem que poderiam trabalhar de diferentes formas para resolver a tarefa. Eles estavam prontos para começar por conta própria e eram exatos 15h20min, falei para eles que eles podiam continuar pensando a respeito mas que continuaríamos mesmo quando todos voltassem do horário do lanche, que é ofertado aos estudantes 15h30min.

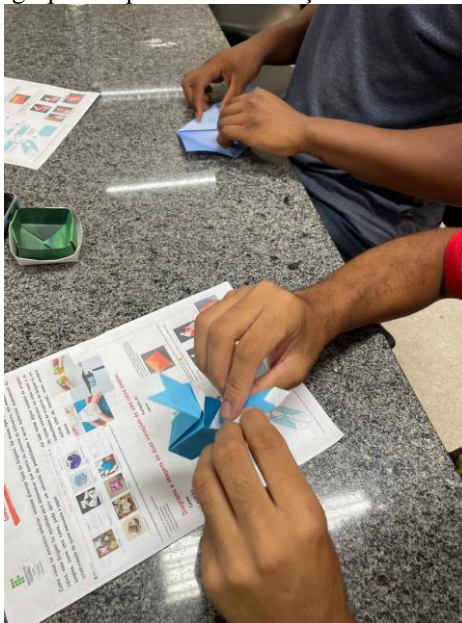
Nesse primeiro momento, o que mais afetou o bom andamento foram conversas entre os estudantes, sem que tivesse relação com o conteúdo, assim como a impossibilidade de se desenvolver as atividades com os grupos já pré-estabelecidos no momento da inscrição, entretanto nada que impossibilitasse a realização da oficina. Até mesmo os atrasos puderam ser contornados devido ao fato de os alunos terem toda a tarde de suas quartas - feiras livres, e não somente o período planejado para oficina, possibilitando estender a oficina até 17h caso fosse necessário.

No retorno, salientei que deveriam diminuir a essas conversas sem foco na oficina para que pudessem se concentrar para que pudessem realizar a tarefa, era cerca de 15h40, também combinei que eles teriam um prazo de 50 minutos para me entregarem as atividades já com suas respostas formalizadas. A partir daí, organizei os grupos de modo que não se sentassem todos na mesa principal da sala, com base no que observei no encontro anterior, e todos começaram a conversar sobre a tarefa com seus respectivos grupos.

— Desenvolvimento da Tarefa Matemática:

Ao ter início o desenvolvimento deles com seus grupos, a oficina começou a fluir mais, com os grupos mais concentrados. Depois de cerca de 10min, o Estudante que realizou a atividade sozinho, e que estava no grupo 1, me mostrou a resposta dele que fez sem ajuda do grupo, o restante do grupo 1 e dos outros grupos ainda estava fazendo os primeiros passos e tentando analisar as diferenças nas caixas, como mostra a Figura 15.

Figura 15 - Alunos do grupo 2 explorando diferenças entre as duas caixas apresentadas.



Fonte: Acervo pessoal.

Este aluno, que na tabela ficou nomeado como Estudante K, já tinha até formalizado a resposta e me entregue uma caixa com a maior altura, o que era o objetivo final da oficina daquele dia. A caixa estava correta, cumprindo todos os pré-requisitos descritos na tarefa. Outro ponto de destaque, é que o Estudante K não participou do primeiro encontro, mesmo assim, compreendeu toda a atividade e a desenvolveu com êxito.

O separei do restante do grupo para que não interferisse no desenvolvimento dos colegas, e os mesmo também tivessem oportunidade de pensar em suas tarefas por conta própria. Perguntei em que ponto, exatamente, era necessário dobrar o papel para fazer aquela caixa, então ele demorou mais uns poucos minutos antes de me entregar a atividade com o complemento de que tinha que dividir em 3 partes iguais, o que tornava a resposta dele completamente de acordo com o esperado.

Essa desenvoltura atípica fez levantar novamente a questão referente à relação existente entre a geometria e o origami, apesar de não ter experiências prévias com a dobradura, este Estudante apresenta um bom desenvolvimento com a geometria e utilizou dessa boa visualização geométrica para resolver o problema de uma maneira bem mais direta do que os demais colegas. Essa ocasião fez com que eu indagasse mais sobre a relação entre o origami e a geometria e tirasse conclusões interessantes, juntando esses fatos com eventos também ocorridos no terceiro encontro e a tarefa que os alunos me entregaram.

Outra reflexão afluída diz respeito à dinâmica do ensino exploratório, que pressupõe o trabalho coletivo, que por sua vez não ocorreu. Não considero ter havido falha na execução do Ensino Exploratório, pois um estudante que já soubesse a resolução interferiria demais em seu grupo que ainda não sabia o caminho e os impediria de realizar o trabalho por seu próprio mérito, então deve ser pensada essa metodologia, não como o trabalho coletivo por si só, mas o bom aproveitamento dessa coletividade.

Os alunos do grupo conseguiram realizar, em seu tempo, a mesma tarefa que o Estudante K já havia concluído, sua permanência no grupo para satisfazer demandas do Ensino exploratório, acabaria mais por atrapalhar do que ajudar nos resultados obtidos. Pois acabaria diminuindo a diversidade das respostas conseguidas ao final do processo, sendo que deixando o grupo separado do mesmo, houve uma maior pluralidade de respostas no momento da socialização.

O restante dos grupos precisou ser constantemente lembrado do tempo e usei algumas instruções que não dessem a resposta, mas que guiasse a um caminho mais direto. O grupo 1 e 2 estavam no mesmo ritmo, algumas ideias interessantes, mas sem a organização necessária para as executar e obter êxito na tarefa. Como por exemplo, a associação que os grupos fizeram a respeito de partes que também alteravam o tamanho quando se altera a altura das dobras, e os dois grupos repararam em partes diferentes que satisfazem isso.

O grupo 3 parecia o mais distante de encontrar a resposta, mesmo com orientações similares. Eu reexplicava o problema com outras palavras, todos iam para caminhos distintos, sendo esse o último grupo a de fato engrenar em alguma ideia. Mesmo observando o ponto

mentionado anteriormente, eles não sabiam como desenvolver a ideia além disso, fizeram a observação correta e não prosseguiram.

Acredito que a socialização deles foi bem prejudicada pela separação dos grupos, outro ponto é que nenhum dos membros tinha um grande repertório de conhecimentos prévios sobre dobraduras ou geometria, e isso dificultou tudo. Como todos tinham mais ou menos os mesmos conhecimentos, não parecia haver riqueza nas discussões para melhorar suas estratégias e resolver os problemas com que se depararam.

Enquanto isso, o grupo 1 reparou nos pontos que deveriam se sobrepor na penúltima etapa da caixa, sendo esse o caminho que aparenta ser o mais fácil para a resolução. Foi o mesmo caminho que o Estudante K seguiu e que eu antecipei que os alunos seguiriam enquanto planejava a oficina. Já o grupo 2, reparou como o padrão de vinco ficava ao desdobrar caixas de diferentes alturas e visualizou que a mais alta ficava mais cheia de quadrados do que de triângulos, o que se justifica pois a mais alta é um cubo e todas suas faces são quadrados.

Como os diferentes grupos conseguiram obter abordagens diferentes para resolução, conclui que o nível da atividade proposta estava de acordo com o nível de conhecimento deles, mesmo que nem todos tenham conseguido responder com a mesma facilidade ou domínio. Outro ponto foi o fato de não ter tanta distinção quanto previsto entre o desenvolvimento de quem esteve presente no primeiro encontro e quem não esteve, ao menos, nenhum indício nas tarefas ou em suas falas apontou para essa distinção.

O grupo 3 reparou no tamanho dos triângulos que surgiam na ponta das folhas, observando que essa dimensão tinha uma relação com a altura. Notaram que esses triângulos não são dobrados, mas eles se formam como consequências de outra dobra. Como não é uma relação tão direta entre uma ação que se faz e a consequência na altura, eles se perderam um pouco.

Na Figura 16 foi registrado o momento em que eu apresentava uma outra forma de enxergar os pontos que eles notaram, de modo a incentivar seu raciocínio. Mostrando a eles que aquele ponto surgia em decorrência de outra dobra, então deveriam averiguar a origem que faz esse ponto surgir, não o ponto em si. Como já haviam encontrado uma relação entre os tamanhos, caso percebessem qual era a origem dessas alterações, o problema estaria resolvido.

Figura 16 - Alunos do grupo 3 recebendo auxílio do professor.



Fonte: Acervo pessoal.

Em dado momento, um dos membros do grupo dobrou a folha em sanfona fazendo 3 partes iguais, mas eles não souberam articular a ideia que tiveram anteriormente com essa, foi somente uma tentativa que eles não concluíram se estava certa ou não. Como o desenvolvimento anterior não estava sendo produtivo, tentaram explorar que já que a caixa era dividida em três partes, o que aconteceria se essas três partes fossem iguais. Apesar de não concluírem nada com isso, pedi que socializassem esse pensamento no momento seguinte da oficina.

Por fim, teve de ser adicionado mais tempo para que pudessem passar suas conclusões para o papel, notei também, principalmente no grupo 2, que eles tinham ideias bem diferentes entre si. Isso os levou a diferentes conclusões e resultados selecionados para colocar na folha por, nas palavras deles, estarem “mais certos”, em meio a tantas seleções do que entraria ou não na tarefa final, sua observação com relação ao padrão de vinco e que estava correta, não apareceu na folha com suas conclusões finais. Desse modo, as discussões e explorações dos grupos foram concluídas.

— Seleção e sequenciação:

Enquanto todas essas interações entre os grupos se desenrolavam, a tabela presente no Anexo E era utilizada para criar uma sequência que fosse mais lógica para apresentar seus resultados e socializar seus raciocínios. Neste ponto foi interessante observar como os grupos tinham pensamentos muitas vezes complementares, para a organização. Também foi considerado o raciocínio que tiveram e expressaram oralmente, mas não acrescentaram em suas tarefas.

A seguinte sequência foi então montada, optei por dar início apresentando os resultados do grupo 2 com relação ao padrão de vinco. Pedi que os alunos observassem em seus próprios

papéis as conclusões que eles chegaram sobre a distribuição de padrões geométricos. Dando seguimento, apontei como as ideias que eles levantaram se comunicavam com as do grupo 3.

Aproveitei a menção ao grupo 3 para associar com as ideias do grupo 1, pois os pontos que o grupo 3 destacavam como influenciando a altura da caixa, tinham uma relação com o ponto que o grupo 1 utilizou para abordar a mesma questão, finalizando então, relacionei como o grupo 1 e o Estudante K pensaram no mesmo ponto, e que por fim, tudo culminava na tentativa do grupo 3 de tentar dobrar o papel em 3 partes iguais, mas sem muito sucesso.

Durante essa observação, foi interessante notar ideias mais abstratas saindo do grupo mais heterogêneo, que era o grupo 2. Este grupo apresentou o maior número de ideias e explorou o problema por diferentes pontos de vista, sendo inclusive o grupo que não sabia decidir o que colocar na formalização. Outro ponto, era que esse era o grupo com maior número de estudantes e o que mais se aproximava da separação de grupo pretendida ao planejar a oficina.

Ele continha alunos tanto do 1º, 2º e 3º anos, quanto alunos tanto de automação quanto mecânica, também tinha alunos que participaram do primeiro encontro e tinha a quantidade de alunos que era pensada para os grupos no projeto inicial, quatro alunos por grupo. Acredito que todas essas questões fizeram esse grupo o que mais se aproximou do comportamento esperado na oficina, mesmo não formalizando tudo como o esperado, exploraram ao máximo e trouxeram muitos resultados concluindo a tarefa com grande empenho.

— Socialização e discussão da Tarefa Matemática:

A socialização foi um momento excelente, depois de tanto tempo concentrados na resolução das tarefas, os estudantes ansiavam por comparar e avaliar as suas respostas. Alguns até aparentavam ter se cansado de focar na mesma tarefa e já queriam que acabasse logo, mas no geral demonstraram curiosidade quanto ao desenvolvimento de outros grupos e a maneira de se concluir a tarefa. Por se tratar de alunos de um curso do período integral, nesse horário é comum que apresentem cansaço.

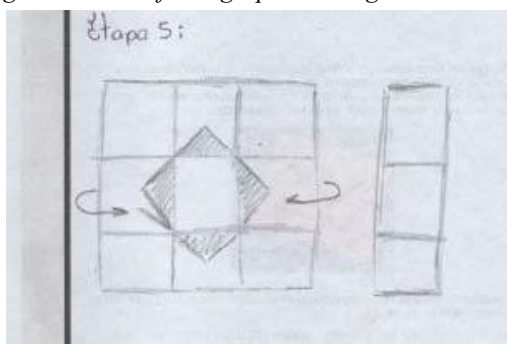
Neste momento, foram seguidas as etapas estabelecidas na sequenciação e o foco foi mostrar aos alunos como suas ideias eram complementares e todos haviam avançado na resolução da tarefa, bem como mostrar a pluralidade do raciocínio que poderia ser tomado para conseguir concluir a tarefa. Como todos haviam, mesmo que sem formalizar, conjecturado sobre a necessidade de dividir o papel em três partes iguais, a ideia não era mostrar para eles como chegar ao resultado. Isso eles já haviam feito, era então meu objetivo apresentar essa

pluralidade buscando encontrar novos raciocínios matemáticos e reflexões enriquecedoras no processo.

Faremos então agora a análise dos trabalhos, assim como foi feita a socialização em sala de aula. A distinção é que aqui usarei as tarefas dos alunos para provar dois pontos importantes deste trabalho: o origami como uma ferramenta útil dentro da sala de aula por utilizar do pensamento geométrico em seu desenvolvimento; e que bons resultados com o origami em sala de aula só podem ser alcançados com planejamento estruturado e aprofundado.

Foi iniciada a socialização a partir da análise do recorte da tarefa entregue pelo grupo 3, que pode ser visto na Figura 17, essa tarefa foi a que possuía menor explicação e desenvolvimento das ideias, apesar de ter tomado um caminho que poderia ter resultado em considerações enriquecedoras. Nesse grupo, houve a impossibilidade de se alcançar uma formação heterogênea entre os membros, o que foi contra o planejado e dificultou o andamento da tarefa como já foi salientado.

Figura 17 - Tarefa do grupo 3 do segundo encontro.



Fonte: Acervo pessoal.

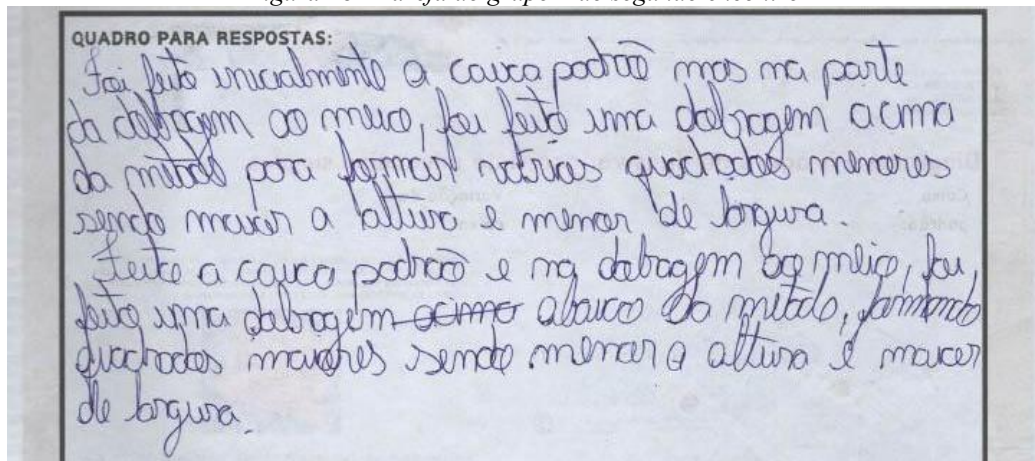
Nessa tarefa eles demonstraram, através dos desenhos e de suas explanações orais, que esses quatro triângulos no centro alteram seu tamanho quando a caixa altera também a sua altura, e notaram que a dobra que os forma, é a mesma que divide o lado do papel em três partes. Entretanto, não notaram outras consequências dessa dobra que os pudessem levar a concluir que o lado deveria ser dividido em três partes iguais.

Outro ponto dessa tarefa e que também é presente no recorte do grupo 2, presente na Figura 18, é o fato de que ambos os grupos eram formados por membros que marcaram no formulário de inscrição ter pouco domínio sobre a geometria, ao menos no grupo 2 tinham alunos com mais familiaridade sobre as dobras. O que pode ser visto nos dois é que nenhum deles destacou o ponto exato de dividir o papel em 3 partes.

Ambos conjecturaram sobre essa necessidade de se dobrar o papel em 3 partes iguais, mas nenhum deles apresentou domínio o suficiente da geometria para formalizar essas

informações em suas respectivas atividades. Ao menos o grupo 2, soube explorar mais as ideias das dobras, o que o fez refletir geometricamente, mas em sua tarefa ainda concluiu de maneira genérica e pouco objetiva apenas mostrando o processo de maneira descritiva com as observações que tinham mais certeza sobre a tarefa.

Figura 18 - Tarefa do grupo 2 do segundo encontro.



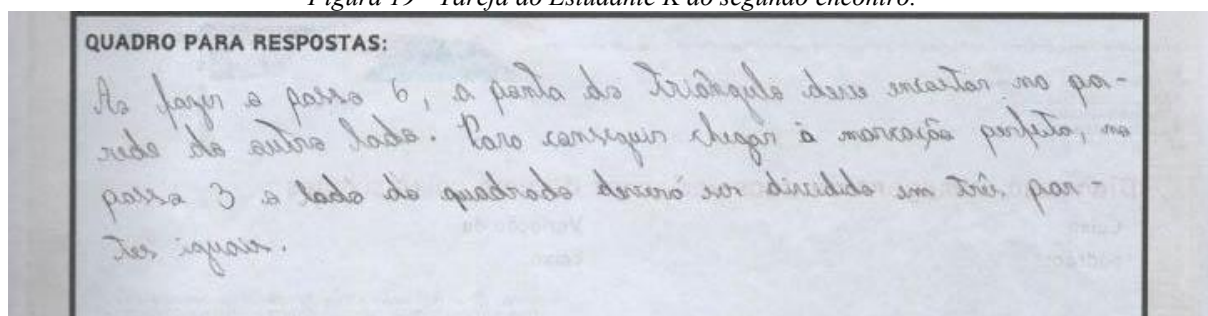
Fonte: Acervo pessoal.

Durante a socialização perguntei o porquê de ter em sua tarefa tão pouca informação que eles haviam explorado durante o processo. Não souberam responder, apenas houveram muitas divergências de ideias, o que tornou suas discussões ricas eles não souberam salientar na tarefa final. Ao ler sua resposta é possível notar que só descrevem as duas caixas ensinadas e o que foi feito para montar as duas, mas não falam qual a caixa mais alta ou o processo para encontrá-la.

Explanei aos colegas ideias que eles tiveram, pedi que erguessem os papéis de origami utilizados e mostrassem o padrão de vinco salientado por eles anteriormente. Nesse ponto falei aos colegas que a observação de notar mais quadrados quando se aproxima da caixa mais alta se deve ao fato de que a caixa mais alta é um cubo e todas as faces de um cubo são quadrados.

A tarefa entregue de maneira mais objetiva foi a do Estudante K, que apesar de se valer da geometria em seu raciocínio e utilizar o método do pensamento dedutivo para atestar a veracidade de suas conclusões, em nenhum momento ele afirmou ter utilizado a geometria. Em sua tarefa, que se encontra na Figura 19, podemos ver a única resposta que explicitou o ponto em que o papel deveria ser dobrado, falou da relação entre a dobra e a altura e indicou necessidade de dobrar em 3 partes iguais.

Figura 19 - Tarefa do Estudante K do segundo encontro.

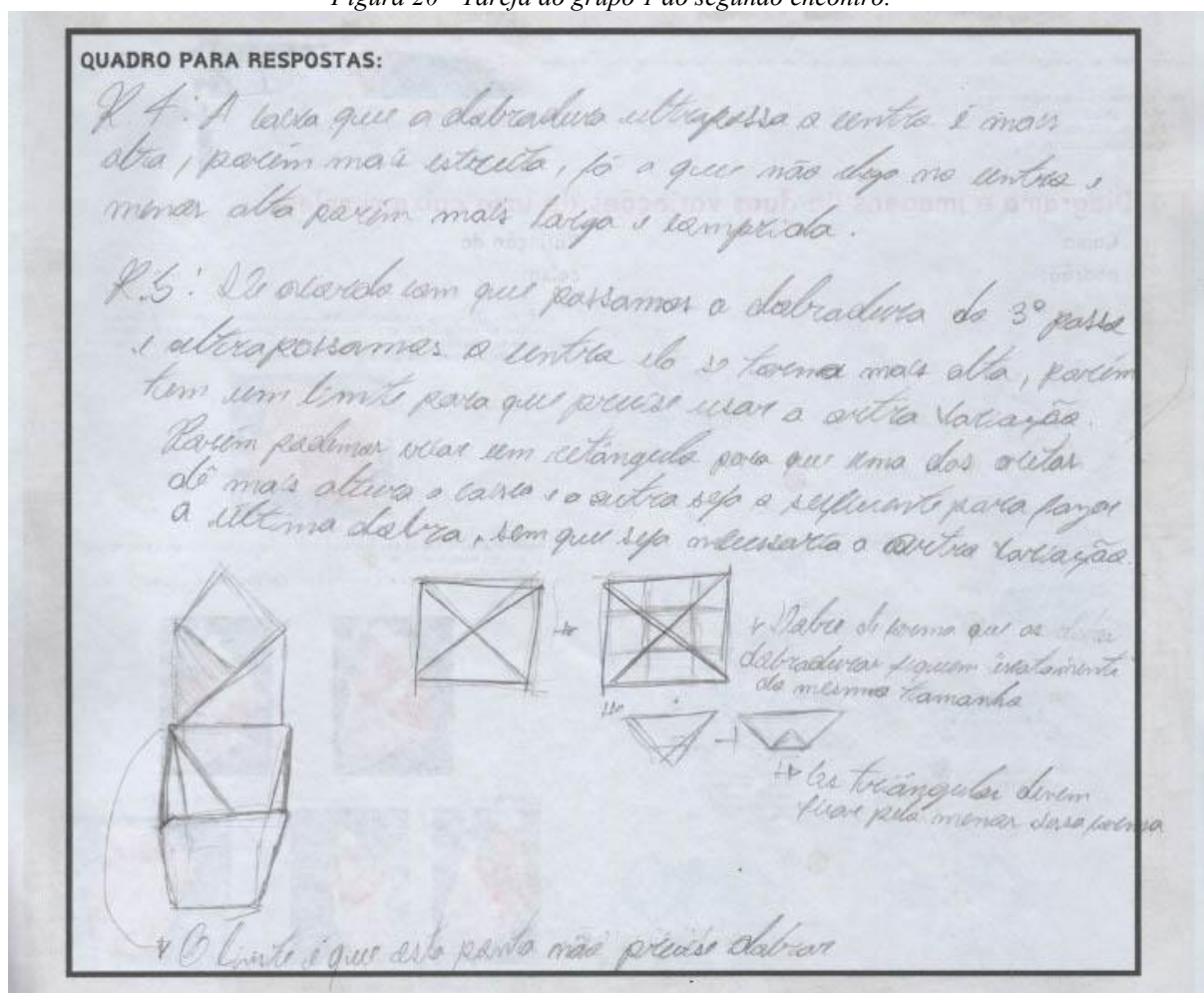


Fonte: Acervo pessoal.

Ele descreve em sua resposta, qual das etapas de dobra do papel que ocorre a seleção de qual altura a caixa deve assumir, discorre como chegou nesse ponto observando o mesmo ponto destacado na Figura 20 pelo grupo 1. Ele afirma, de maneira correta, que somente quando o papel é dobrado de modo a dividir o lado do papel em três partes iguais é que a caixa assume a sua maior altura.

Todos os passos por ele descrito podem ser vistos na tarefa do grupo 1, porém esse grupo foi o único que em uma de suas falas durante a sequenciação me afirmou que ali haviam relações geométricas. Esse trio era composto de 2 alunos que marcaram em suas inscrições um nível mais alto que a média em geometria, assim como também possuíam um domínio do origami. Sua resposta pode ser vista na Figura 20 e foi a que mais detalhou e levantou pontos a respeito da caixa.

Figura 20 - Tarefa do grupo 1 do segundo encontro.



Fonte: Acervo pessoal.

Esse grupo apresentou a resposta mais rica, por utilizar mais de uma forma de expressar suas ideias, textos e desenhos. Eles repararam que para a ponta não ultrapassar o limite da borda da caixa e ter que passar para a variação da caixa, eles deveriam descobrir até onde essa ponta, desenhada na parte inferior esquerda, poderia chegar, e esse ponto deveria tornar a caixa a mais alta.

Então notaram que quando o lado do papel é dividido em três partes iguais isso ocorre. Aproveitei esse momento para socializar com o grupo 3 e o Estudante K, a maneira com que tinham pensado de forma semelhante, o grupo 3 buscou por esse ponto mas decidiu por trabalhar com outro, e por isso teve uma maior dificuldade de relacionar com a altura da caixa e concluir suas ideias.

É possível notar ainda a presença do ponto explorado pelo grupo 3, mesmo sem explicitar que a sobra que eles indicam parte o papel em três partes iguais, eles ainda conseguiram afirmar em qual ponto o papel deveria ser dobrado e o porquê com precisão. Essas

tarefas demonstraram o quanto o nível em geometria e uma boa socialização ajudam em tarefas desse tipo, mas resultados mais importantes foram retirados do terceiro encontro, pois esse aborda de fato a geometria do origami e mais matemática de forma mais evidente.

— **Formalização/ Sistematização das aprendizagens:**

A formalização foi o momento mais breve da oficina, os estudantes tinham alcançado o objetivo de encontrar a caixa com a maior altura e descoberto que a mesma era alcançada quando o papel era dobrado em 3 partes iguais, dessa forma, usei seus próprios raciocínios para demonstrar que aquela era a caixa com maior altura, também acrescentei uma informação que até então ninguém tinha comentado, essa caixa era um cubo.

Nenhum estudante havia se atentado ao fato da caixa com maior altura ser um cubo sem uma de suas faces (a superior), talvez por falta de domínio matemático nessas definições, desatenção ou algum sinal de menor envolvimento com a tarefa. Ao demonstrar, através do raciocínio dos próprios, o ponto encontrado e debatido no momento anterior, ficou nítido que, por uma impossibilidade ao se manipular o papel, não tinha como haver uma caixa mais alta do que aquela sem amassar o papel ou adicionar uma dobra extra.

Estando provada que a maneira de realizar a caixa, cumprindo as alterações necessárias, era essa, dobrando em 3 partes iguais o papel, a oficina chegou ao fim. Como no primeiro encontro, alguns alunos ainda se mantiveram na sala conversando e tentando outras dobras, alguns tirando dúvidas sobre a confecção dos origamis feitos no encontro passado, nesse eles estavam menos empolgados do que no último, afinal de contas foram mais desafiados.

Por fim, no momento em que saía, o Estudante D me fez uma observação interessante, ele me falou que uma das observações que eu atribuí ao grupo 2 no momento da socialização foi feita por ele. Isso me fez reafirmar que esse grupo foi o que mais se aproximou do modelo de grupo esperado e teve socializações ricas e que despertaram novas ideias enquanto os membros do grupo defendiam seus pontos de vista.

Enquanto ele saía, o Estudante H veio até mim e se queixou que não desenvolveu melhor a tarefa por eu não ter explicado tão bem e ele ter se perdido na confecção do origami. Perguntei o que deveria ter feito para ser melhor entendido e ele não soube responder diretamente, somente disse que falei rápido não dando tempo de entender. Apesar de ter a preocupação com o tempo, considereirei que havia explicado de maneira clara, ainda mais considerando que passei diversas vezes por todos os grupos enquanto eles exploravam suas ideias, inclusive no grupo 3, tendo mostrado a eles um caminho a seguir a partir de seu raciocínio. Há uma possibilidade de

que a interação com a parceira do grupo possa ter atrapalhado o seu foco nos momentos de explicação.

Por afinidade, os dois, Estudantes H e I, se juntaram e não socializaram tanto com o Estudante J de seu grupo, que por sua vez, compreendeu tudo com a mesma explicação que dei ao grupo todo. Acabou que esse bloqueio em socializar com os outros os fechou em grupo que abstraiu da oficina e focou somente neles. Esse fato destaca que, caso a oficina tivesse sido organizada como planejado quanto a divisão de grupos, poderia ter dado melhores resultados para todos os alunos socializarem e desenvolverem melhor suas tarefas.

6.3. Terceiro encontro

O terceiro encontro estava previsto para ocorrer no dia 29/01/2025, entretanto, não estava me sentindo bem essa semana e comuniquei por e-mail aos estudantes que não poderia dar seguimento a oficina nessa semana. Não senti que essa distância entre um encontro e outro tenha afetado o desempenho deles, o que de fato afetou foi o fato de que no dia em que a oficina ocorreu, dia 05/02/2025, a BR-040 estava interditada e por isso não passaram ônibus do IFG e assim, muitos dos estudantes inscritos faltaram.

Por fim, a oficina ocorreu com um total de 9 alunos, divididos em 3 duplas e 1 trio. Desses alunos, 3 estavam presentes nos encontros anteriores e participaram completamente de todas as tarefas, 4 estavam presentes nos dois últimos encontros, e acompanharam a sequência dos dois principais encontros que eram os que abordavam o ensino exploratório e por fim 1 Estudante não participou de nenhum dos encontros anteriores e esteve presente somente neste último.

Assim, a distribuição dos grupos se encontra na tabela 3 a seguir. Esta tabela também é possível de relacionar com a tabela 2 e observar os alunos que estavam presentes nos dois encontros, que tanto nessa quanto na outra são retratados com a mesma letra. Essa sequência, de estar presente nos dois últimos encontros, é muito importante pois o encontro 2 encerra com a motivação do encontro 3, logo o último, isoladamente, se torna uma tarefa matemática sem contexto aparente.

Quadro 3 - Relação entre Grupos e Estudantes presentes no terceiro encontro.

Relação entre Grupos e Estudantes presentes no terceiro encontro.	
Grupo 1	Estudante D
	Estudante K
Grupo 2	Estudante A
	Estudante F
	Estudante O
Grupo 3	Estudante L
	Estudante M
Grupo 4	Estudante E
	Estudante N

Fonte: elaborado pelo autor.

— **Motivação/ Apresentação da Tarefa Matemática:**

Neste encontro, eles deveriam explorar as dobras que criam o teorema de Haga e só no final aplicá-las no origami da caixa, desse modo, o primeiro momento não continha explicações tão demoradas quanto no anterior sobre as dobras que seriam feitas, tendo em vista que o teorema de Haga é encontrado após duas dobras do papel. Desse modo, após alguns minutos esperando alunos interessados na oficina e um breve momento para separar os grupos, teve início a oficina.

Como tínhamos 9 alunos, recorri ao que já conhecia deles e separei em duplas, buscando juntar quem tinha mais dificuldade com quem tinha mais facilidade, tanto em Origami quanto em Geometria. Expliquei o contexto da oficina aos que não tinham aparecido em todas, também já emendei na explicação do que seria feito juntamente com a motivação, que era a exploração que havia sido feita no encontro anterior, mas muitos não estiveram presentes. Assim, às 14h30 eles começaram o processo de exploração, combinamos que isso duraria até às 15h10, distribui papéis de origami para que fizessem o indicado no teorema de Haga e eles começaram a explorar e rascunhar uma prova para o teorema.

Desde o início, por conta desse peso e da linguagem matemática bem mais rica nessa tarefa, muitos já se apresentaram mais reticentes. Apesar de presente nos outros encontros, nesse, a matemática era mais evidente, na tarefa já estava enunciado um teorema e símbolos matemáticos estavam bem mais evidentes. Mesmo já sabendo o tema da oficina e eu tendo salientado desde o encontro anterior a maior presença da matemática nesse encontro, somente essa apresentação da tarefa já os fez se retrair.

— Desenvolvimento da Tarefa Matemática:

Durante esse desenvolvimento, pude notar que os grupos foram melhor separados nesse encontro, de modo a ficar bem equilibrado em todos os grupos com duplas heterogêneas quanto ao domínio de matemática e geometria e a presença em encontros anteriores. A única dupla que não possuía membros presentes no encontro anterior era o grupo 3, mas ela foi separada pensando em unir dois alunos que eu já conhecia a ponto de ter uma noção de suas preferências quanto a dobras e a geometria.

De resto, todos os grupos tinham alunos que participaram do segundo encontro, com destaque ao grupo 2 que, por possuir o Estudante O, que não havia aparecido em nenhum dos dois encontros, tinha 2 outros integrantes que estavam presentes nesses encontros anteriores para poder ficar mais fácil de explicar ao Estudante O, o que havia ocorrido e motivava aquele encontro.

Como os grupos estavam bem equilibrados, darei destaque a enfatizar o que aconteceu em cada um deles separadamente e em ordem. No momento de apresentar suas tarefas, na etapa de socialização, ficará mais fácil explicitar na mesma ordem o que cada grupo desenvolveu, tornando mais simples a compreensão do que cada Estudante conseguiu desenvolver de acordo com o perfil de formação de seus respectivos grupos.

Partindo do grupo 1, o Estudante K foi um dos dois alunos que mais se empolgou com a dinâmica, no encontro anterior ele usou conhecimentos de geometria e manipulou bem o papel dessa forma, nesse encontro ele partiu da mesma tentativa. Seu companheiro de grupo havia participado dos outros dois encontros e foi colocado com esse estudante por ser um estudante bem empolgado e persistente nas tarefas propostas, mas que não apresentava tanto domínio da geometria.

Seguindo as instruções eles demoraram algum tempo até engrenar de fato em uma estratégia, isso ocorreu não devido a falta de compreensão da tarefa entregue, mas sim por conta de sua dificuldade em encontrar um segmento que aparentasse ter $\frac{1}{3}$ do lado, que era o ponto

de partida sugerido para que provassem o teorema. O Estudante K, chegou inclusive a efetuar dobras que, em suas palavras, me comprovaram que o papel que dei a eles não era de fato quadrado e por isso sua dificuldade.

Por fim, afirmei a ele que o papel era quadrado e mesmo que não fosse, através de um desenho de um quadrado ainda era possível efetuar a prova. O Estudante D acompanhou todo o raciocínio sugerindo intervenções, o Estudante K explicava a ele todo o raciocínio que tinha, mas em dado momento a interação se tornou desgastante para o Estudante D, que afirmou estar complicada demais a matemática empregada pelo colega.

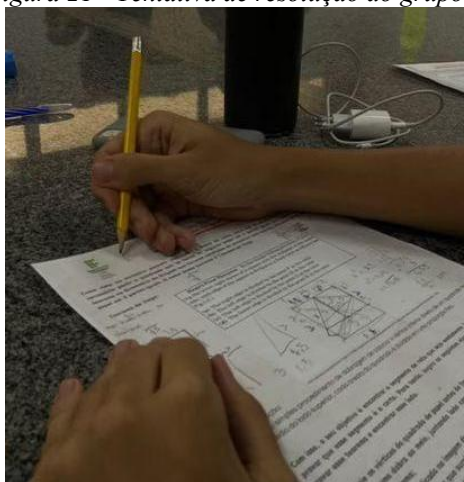
O Estudante K, acabou seguindo só em seu raciocínio enquanto seu colega dialogava com ele sobre uma ideia ou outra mas não conseguia acompanhar o raciocínio matemático. Por fim, no tempo extra que me pediram para concluir e que eu forneci, o grupo me apresentou seus resultados, usou conceitos bem além dos necessários, provando o teorema através de relação entre áreas e trigonometria. Os dois ficaram extasiados de terem conseguido.

Principalmente o Estudante K que se sentiu desafiado e gostou mais desse encontro do que do último que considerou fácil demais. No grupo 2 uma situação semelhante aconteceu, o Estudante A tornou-se bem mais participativo, do que nos encontros anteriores, estava mais empolgado por se sentir desafiado com uma tarefa que tinha uma matemática mais próxima da que conhecia.

Por sua vez a Estudante O, estava alheia ao que havia ocorrido nos encontros anteriores mas curiosa com a oficina como um todo, expliquei a ela o que havia ocorrido nos outros encontros de maneira breve e lhe entreguei cópias que sobraram das tarefas entregues nos dois primeiros encontros. Em seu canto, o Estudante F se mantinha, como no encontro anterior, mais introspectivo.

O Estudante A partiu por meios matemáticos para a resolução da tarefa, como pode ser visto na Figura 21, enquanto a Estudante O fazia o origami do encontro anterior buscando mesclar as duas tarefas para compreender melhor e achar novos caminhos em participação com seu amigo. O Estudante F se mantinha explorando o problema de maneira isolada e não queria socializar muito, mas manipulou o papel e rascunhou um pouco, mas sem nada definitivo.

Figura 21 - Tentativa de resolução do grupo 2.



Fonte: Acervo pessoal.

O Estudante A seguiu por caminhos diferentes do Estudante K, mas também concluiu a tarefa proposta, e assim como o anterior, precisou de mais conceitos matemáticos do que os utilizados na formalização. O grupo trabalhou bem junto, socializou, mas desenvolveu ideias separadas, onde o único que de fato concluiu a tarefa foi o Estudante A mas todos acompanharam seu raciocínio e ficaram satisfeitos com suas próprias explorações.

Já no grupo 3 e 4 a situação foi diferente. Nesse primeiro, os alunos tinham um desenvolvimento interessante por serem tão opostos quanto a preferência por abordar através de dobras e de geometria. Entretanto, nenhum deles tinha o domínio total em suas áreas de preferência, mas sabiam o suficiente para resolver a tarefa proposta, o que não se efetivou, mas não por incapacidade, mas sim medo de errar.

Os alunos desse grupo só avançaram na matemática até onde sabiam que daria resultados certos, usando inclusive régua. Seguiram todas as etapas iniciais mas pararam antes de avançar muito por não terem certeza do caminho que daria resultados e não queriam errar e começar novamente. O mesmo com as dobras, só dobraram o que tinham certeza de estar de acordo com o teorema e a dobra para dividir em 3 partes iguais, dobravam com precisão e aparentavam medo de amassar o papel ou usar mais, e assim só tiveram êxito nas primeiras etapas da tarefa e não provaram o teorema.

Por fim, no grupo 4 estavam dois alunos que se depreciavam com piadas relacionadas a não saberem matemática, foram o grupo com maior resistência a utilizar a geometria, tentaram usar somente dobraduras para provar tudo. Assim, encontraram o seguimento que era objetivado na tarefa e pararam seu desenvolvimento neste ponto, diferentemente do grupo anterior, não tinham receio de explorar dobras, na Figura 22 é possível ver o caminho que os alunos que tentaram provar usando dobras seguiram.

Figura 22 - Algumas dobras utilizadas pelos alunos.



Fonte: Acervo pessoal.

Ao me mostrarem suas tentativas e serem indagados sobre o que fizeram e com qual finalidade, a Estudante N afirmou o seguinte, “Você acha realmente que eu sei o que eu estou fazendo?”. Esse grupo não apresentou nenhuma estratégia bem definida e quando instigados a resolverem por algum caminho sugerido somente respondiam com piadas e deboche, por isso desenvolveram tão pouco.

— Seleção e sequenciação:

Durante todo esse desenvolvimento dos alunos, os acompanhei e fui fazendo anotações na tabela de acompanhamento presente no apêndice F, para que pudesse selecionar e sequenciar quais de suas ideias seriam apresentadas na socialização. Durante todo esse período tive algumas interações com os alunos na tentativa de os instigar a ser mais produtivos e desenvolverem mais.

Nos primeiros dois grupos o fiz de maneira semelhante, ajudando os que tinham questões relacionadas à matemática e instigando que eles se comunicassem mais entre os membros do grupo. Tanto o Estudante K quanto o Estudante A, desenvolveram tanto a matemática que tiveram dúvidas mais adiante, como por exemplo como definir que um triângulo é semelhante, como fazer a razão entre seus lados e algumas definições trigonométricas para empregar nos triângulos.

Percebendo o desenvolvimento dos outro dois grupos, falei de maneira geral para a turma que quem não conseguisse avançar mais pela geometria, poderia usar dobras, já havia

testado antes, e com dobras era possível descobrir uma boa parte da demonstração, chegando ao final sendo necessária somente uma regra 3 simples para provar tudo. Nesse ponto surgiu a observação mais interessante que fiz ao decorrer da oficina. Até então eu pensava que os alunos que não conseguissem avançar na geometria poderiam ter mais facilidades com dobras e poderiam ir por esse caminho.

Imaginei que na oficina estaria presente uma dualidade entre alunos que tinham maior domínio com a geometria e outros que o tinham com a dobradura. Entretanto, a afirmação supracitada de que dobrar é um ato matemático se fez real, e os alunos que tinham maior domínio com o origami coincidiam com os que tinham também a melhor interpretação geométrica.

Obviamente isso não era excludente, os alunos com menor propensão a geometria também conseguiam dobrar, mas o faziam de maneira mais limitada. As interações entre os estudantes e as tarefas entregues demonstraram que os alunos com maior domínio das dobras nos encontros anteriores, também eram os com um maior raciocínio em matemática e mais domínio desses conteúdos.

Cabe entender aqui que o que chamo de raciocínio matemático não é destacando os alunos que possuíam o maior conhecimento nessa área, mas sim os que demonstraram familiaridade com a matemática, não a evitavam e seguiram estratégias lógicas e estruturadas no momento de desenvolver problemas matemáticos. E esses alunos eram os mesmos que realizavam as dobras com maior propriedade e seguindo uma lógica no que dobravam.

Assim, os dois últimos grupos apresentaram um desenvolvimento menor, simplesmente não queriam explorar mais do que tinham certeza de estar certo, demonstraram medo de errar, e como mencionado a Estudante N fazia o tempo todo piadas depreciativas quanto ao seu conhecimento nessa matéria. Fazendo então levantar o questionamento sobre qual parte da sua formação a fez aceitar essa dificuldade de compreender a matemática como algo imutável e que sempre a acompanhará.

Essa foi uma das reflexões que surgiram possibilitadas pela prática em sala de aula, que mesmo sem ser objetivado chegar até esse momento, a sala de aula continua sendo um ambiente rico em reflexões das mais diversas. Desse modo, com o acompanhamento que fiz, notei que os estudantes teriam melhores resultados caso tivessem mais tempo para trabalhar em suas tarefas, principalmente os alunos em que eu ainda tinha esperança que desenvolvessem mais o problema através de dobras.

Forneci a eles mais 20 minutos, os deixando com exatos 1h de tempo de exploração. Ao fim desse período cheguei a conclusão de que a melhor maneira de apresentar a socialização

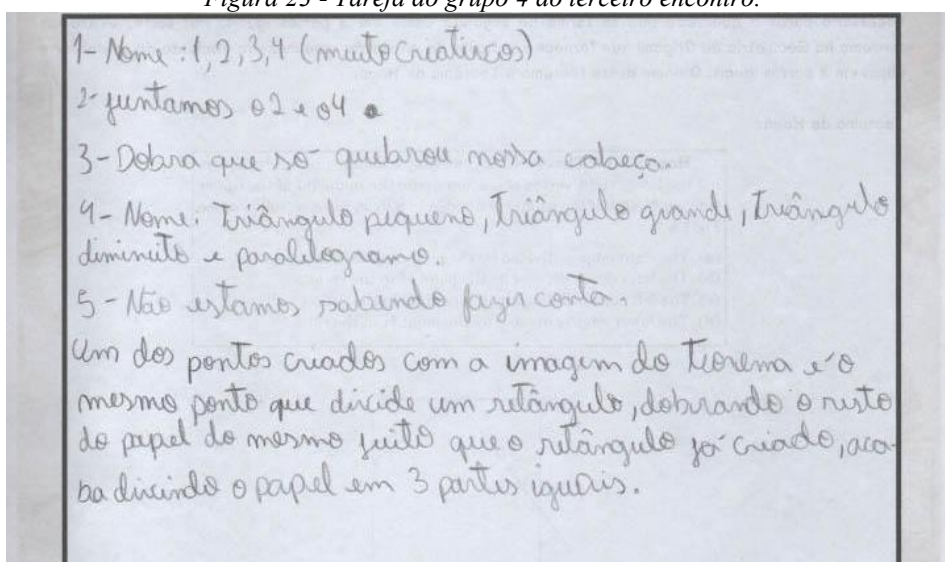
seria iniciando pelas dobras, pois foi o caminho que eles menos percorreram mas que também era muito rico em resultados. E por fim, salientar o desenvolvimento da matemática de alguns grupos e a maneira como a demonstração era mais simples.

Entre todos os alunos foi unânime a percepção de que a presença de forte linguagem matemática e conceitos mais explícitos os assustou, fazendo com que os que tivessem domínio da matéria exagerassem no conteúdo exigido, interpretando que era algo difícil e demandava de conhecimentos complexos. Enquanto os alunos com mais propensão às dobras apresentavam receio de explorar.

— Socialização e discussão da Tarefa Matemática:

Durante esse período os instiguei a falar o que cada grupo havia feito com as dobras, nesse ponto, os grupos 3 e 4 mostraram a todos de que forma descobriram o seguimento que era objetivado encontrar nos primeiros momentos da tarefa. Quando vi que não sairia nada além disso como resposta, afirmei que era possível fazer mais com as dobras, mas eles não tinham nenhum palpite sobre como. Na Figura 23 é possível observar como o desenvolvimento do grupo 4 se desenrolou.

Figura 23 - Tarefa do grupo 4 do terceiro encontro.



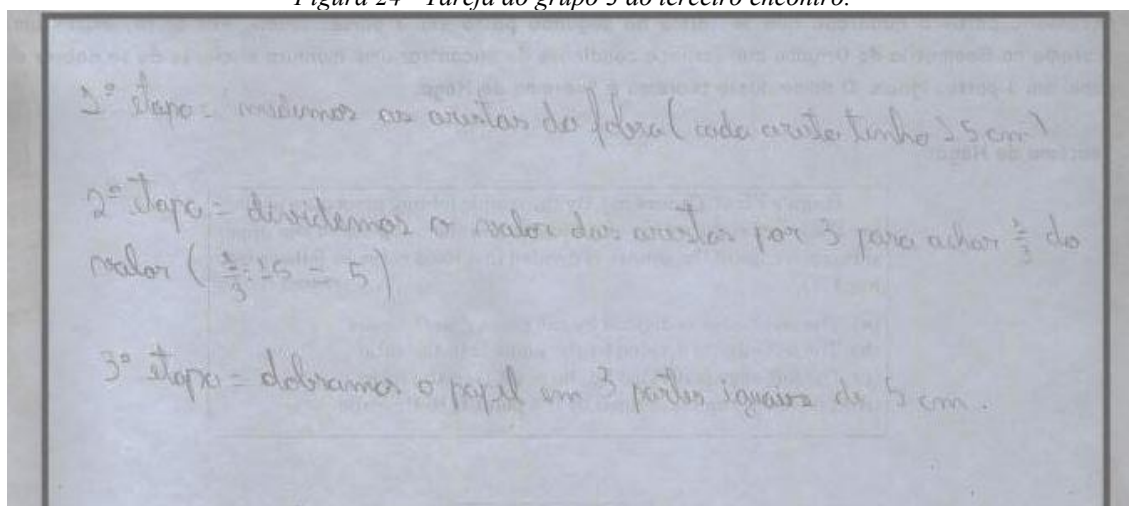
Fonte: Acervo pessoal.

É possível notar a linguagem matemática bem limitada e a falta de clareza ao expressar as ideias dos resultados que encontraram, acredito que tanto pela falta de domínio sobre o problema refletido quanto pela forma de organizar os resultados escolhida. Eles escolheram manipular o concreto com as dobras, e não souberam descrever seus resultados em um texto.

Também é possível notar que, até mesmo na tarefa entregue, houve o uso de ironia e piadas durante a nomeação das figuras. Os alunos desse grupo, apesar de tentarem de fato resolver a tarefa e estarem concentrados, usavam dessa comicidade da situação para esconder sua dificuldade e, quando eu os instigava dando mais observações como, por exemplo, falando de onde eram encontrados ângulos retos nas figuras, eles nem ao menos tentavam visualizar aquilo por medo de fracassar e já estarem presos a ideia de que eram ruins em matemática.

Na Figura 24 também é possível observar o trabalho do grupo 3. Este passou pelos mesmos problemas e dificuldades, mas tentou ainda desenvolver tudo com mais clareza e objetividade. Entretanto, devido ao perfil heterogêneo do grupo, eles não entraram em consenso do que deveria ser inserido em sua tarefa, ficando ao final com um texto curto e com poucos resultados efetivos.

Figura 24 - Tarefa do grupo 3 do terceiro encontro.

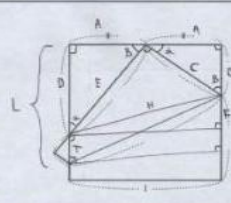


Fonte: Acervo pessoal.

Nesta tarefa os alunos quiseram ser mais precisos, usaram régua para medir os valores e descrevem basicamente esse processo de medir o papel. Observei que eles tinham necessidade de ter um rigor bem grande, e avançaram pouco por não ter convicção de que suas ideias dariam certo, escrevendo só o que era extremamente exato e preciso. Parti então à matemática, abordei a maneira exageradamente complexa que os dois primeiros grupos lidam com o problema.

Notei que, apesar de perspectivas diferentes, os alunos apresentavam ainda uma visão de que a tarefa exigia muito. Eles partiram direto para resultados mais elaborados da matemática, como podemos notar nas Figuras 25 e 26, apesar de não terem medo de explorar a matemática e perguntarem mais quando não sabiam algo, eu os falava que poderia ser mais simples, no entanto, continuavam acreditando que a resolução deveria sair de algo complexo e rebuscado.

Figura 25 - Tarefa do grupo 1 do terceiro encontro.

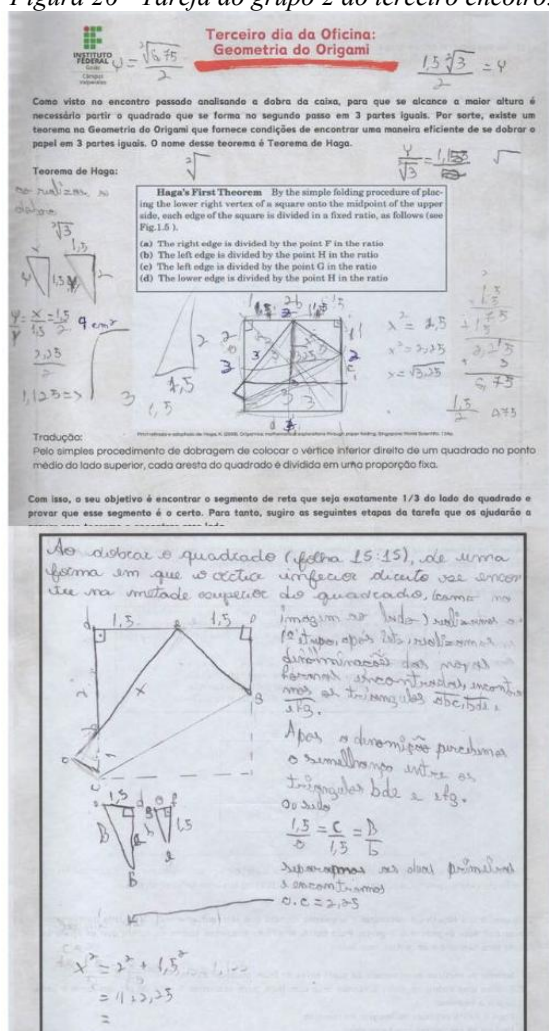


Procedimento de dobragem de colocar o vértice inferior direito de um quadrado sobre o vértice superior esquerdo.

$E^2 = A^2 + D^2$ $C^2 = A^2 + B^2$ $H^2 = E^2 + C^2$ $T = L - D$ $\text{SEN } \beta = \frac{D}{E} = \frac{A}{C}$ $H^2 = L^2 + F^2$	$\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ (6) $\frac{3 \cdot 3,75}{2} = 5,625$ $\frac{5 \cdot 3,75}{2} = 9,375$ $\frac{6 \cdot 1,75}{2} = 5,25$ $2 \cdot 6 = 12$
$E^2 = 3^2 + 4^2$ $E = \sqrt{25}$ $E = 5$ (1)	$12 + 6 + 9,375 + 5,25 + 3,375 = 36$ (7)
$\frac{4}{5} = \frac{3}{C}$ (2) $C = 3,75$	$L \cdot L = \text{ÁREA}$ (8) $6 \cdot 6 = 36$ $36 = 36$
$3,75^2 = 3^2 + B^2$ $B^2 = 2,25$ (3) $B = 1,5$	
$H^2 = 5^2 + 3,75^2$ $H^2 = 25 + 14,0625$ $H = \sqrt{39,0625}$ $H = 6,25$ (4)	
$6,25^2 = 6^2 + F^2$ $39,0625 = 36 + F^2$ $F = \sqrt{3,0625}$ $F = 1,75$ (5)	

Fonte: Acervo pessoal.

Figura 26 - Tarefa do grupo 2 do terceiro encontro.



Fonte: Acervo pessoal.

Nessa captura do que desenvolveram, é possível reparar que foram os únicos que utilizaram a própria representação do teorema na imagem para explorar uma possível prova. Não mencionaram como descobriram o segmento no primeiro momento pois utilizaram de conceitos matemáticos, separaram em hipótese e tese com clareza, reconhecendo qual era o segmento a provar e indo ao encontro de como comprovar suas suspeitas.

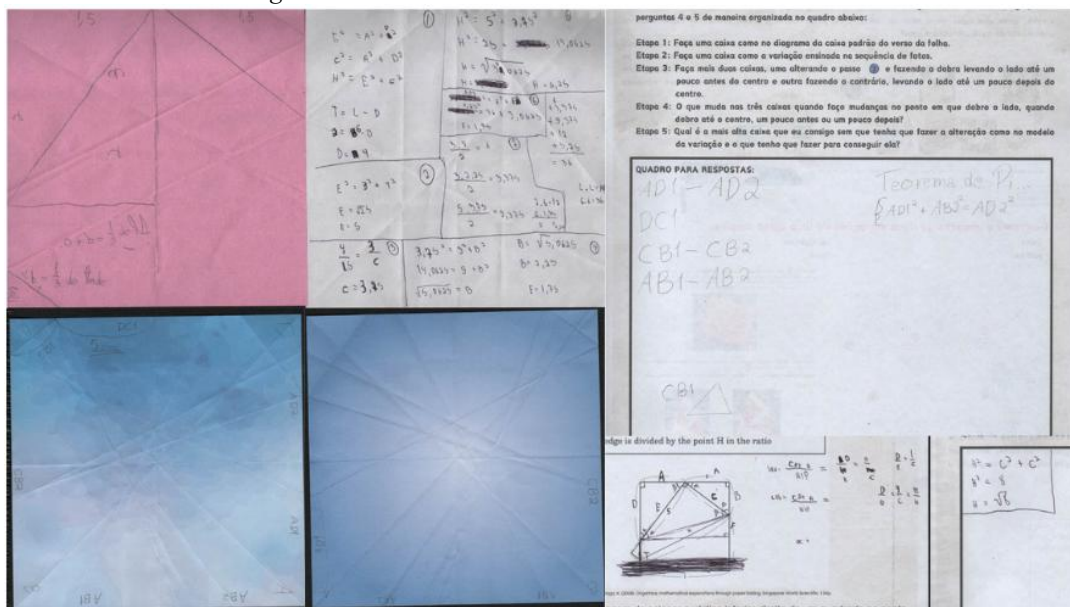
O Estudante A, em uma de suas dúvidas, perguntou se não estava fazendo o processo “errado” da matemática. Quando pedi que me explicasse seu questionamento, ele me afirmou o seguinte, quando está em sala de aula você tem alguns conceitos que trabalha e chega a um produto final, nesse trabalho era diferente, ele tinha uma suposição e ia buscando maneiras de provar se estava certo, por isso considerou que estava fazendo o caminho inverso.

Expliquei a ele que na matemática, quando queremos provar algo, em muitas das vezes, devemos já conhecer onde queremos chegar para termos um caminho do que nos parece que leva até este ponto, e assim é feita a matemática com suposições e provas, e não somente com

exercícios prontos onde fazemos contas e aplicamos fórmulas para ter um resultado exato. Esse diálogo, nas palavras dele, o deixou curioso sobre como a matemática é feita.

Esse processo de questionar e investigar buscando uma prova, fez com que os alunos abordassem o problema de muitas perspectivas e explorassem, como mostra a Figura 27, através de muitos rascunhos com tentativas e erros. Podemos notar muitas dobras, contas e rasuras em todo o material que os alunos utilizaram antes de formalizar seus trabalhos como apresentado acima.

Figura 27 - Rascunhos dos alunos no terceiro encontro.



Fonte: Acervo pessoal.

Essa Figura 27, foi obtida através da coleta do material que os alunos utilizaram em sala mas que não continha suas conclusões. Coletei todo o material após a saída deles da sala e selecionei as folhas de origami e papéis de rascunho que tinham mais informações que eles usaram para refletir as questões. Ainda sobraram muitos papéis de origami dobrados e amassados bem como tentativas de caixas para explorar as dobras, selecionei aqui somente alguns que melhor representam suas tentativas.

Ao final da exposição dos estudantes sobre as contas realizadas e as discussões sobre o que eles haviam tentado ou deixado de tentar, os alunos estavam curiosos com a resposta “correta”. Expliquei a eles que mostraria dois caminhos, um usando mais dobras, e outro usando contas mais simples, salientei que como todos acharam o segmento pretendido todos acertaram, o que faltou foi a prova e essa não tem caminho certo, existem diversos caminhos matemáticos para encontrá-la.

— Formalização/ Sistematização das aprendizagens:

Ao fim da socialização apresentei a formalização em dois momentos distintos, primeiro mostrei a eles duas maneiras de provar o teorema que eles apresentaram e depois utilizamos o teorema para construir a caixa do encontro passado usando esse teorema para nos garantir que a caixa tinha o exato formato, graças ao teorema, que assegura que tenhamos dividido o papel em três partes iguais.

Primeiro realizei de forma matemática com eles, apresentando a eles como era possível resolver tudo através da aplicação do teorema de Pitágoras para descobrir um lado, e logo após a aplicação de uma semelhança de triângulos. A semelhança era fácil de observar, pois como estávamos lidando com um quadrado de papel já eram conhecidos os ângulos retos e por simples soma de ângulos internos era possível ver quais ângulos eram iguais.

A demonstração seguiu as etapas descritas no Apêndice I. Logo após, mostrei a eles como fazendo uma série de dobras ao meio, poderíamos dividir o lado do quadrado em 8 partes iguais, garantidas pelas dobras ao meio, o que resultaria na substituição do teorema de Pitágoras e já partiria direto para a regra de três que surge com a semelhança de triângulos. A Estudante N afirmou: Ok entendi, mas nunca visualizaria e conseguiria fazer isso.

Essa afirmação só não tinha a concordância dos 3 alunos que rumaram para a matemática, enquanto todos os outros concordaram que era simples de fato as contas, mas que não conseguiriam visualizar aquilo na hora da tarefa. Por fim, veio o momento em que eles se animaram mais, a produção das caixas. Na Figura 28 é possível ver algumas das caixas que eles produziram com ajuda do teorema.

Figura 28 - Caixas feitas pelos alunos com auxílio do teorema de Haga.



Fonte: Acervo pessoal.

Os alunos que não haviam participado do encontro anterior tiveram bastante dificuldade nessa etapa, tendo em vista que nunca haviam feito a caixa. Eles tentaram algumas vezes,

tiveram dificuldade em descobrir onde encaixar a dobra do teorema, mas depois de um tempo conseguiram e a imagem da Figura 28 representa algumas das caixas que eles dobraram dessa forma.

6.4. Resultados finais

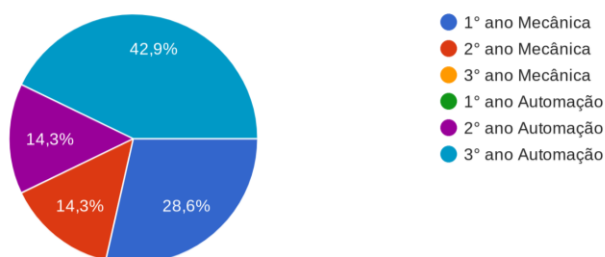
Por fim, ao encerrarmos a oficina, entreguei a eles um formulário, presente no apêndice H, com o intuito de fazer uma avaliação da oficina e de sua aprendizagem com ela. Desse modo, foi possível cruzar os dados já apresentados em conjunto com o formulário que os estudantes responderam no final, chegamos a resultados e reflexões interessantes no que diz respeito ao emprego de origamis dentro de sala de aula. Dos 9 alunos presentes, sete responderam o formulário, sendo os Estudantes N e E os que não responderam.

Ao entregar o link do formulário a eles, salientei que era de suma importância que fossem honestos em relação às suas respostas. No momento da elaboração desse instrumento de coleta, foi considerada a possibilidade de que os alunos respondessem não com suas opiniões mas sim com que achavam que fosse o esperado, respondendo sempre com uma avaliação positiva a oficina. Por isso enfatizei que não era o caso e que poderiam fazer de maneira honesta destacando o que não gostassem.

Apesar de passar o formulário em sala, alguns falaram que responderiam depois com mais calma, justificando também a dificuldade de acesso com a internet do campus, e somente esses dois não responderam. Desses sete, três estiveram presentes em todos os encontros, dois no segundo e terceiro encontros, uma estudante presente somente no último encontro e um estudante presente no primeiro e no último. A distribuição por turmas pode ser vista na Figura 29.

Figura 29 - Gráfico de alunos que responderam o formulário por turmas.

Turma
7 respostas



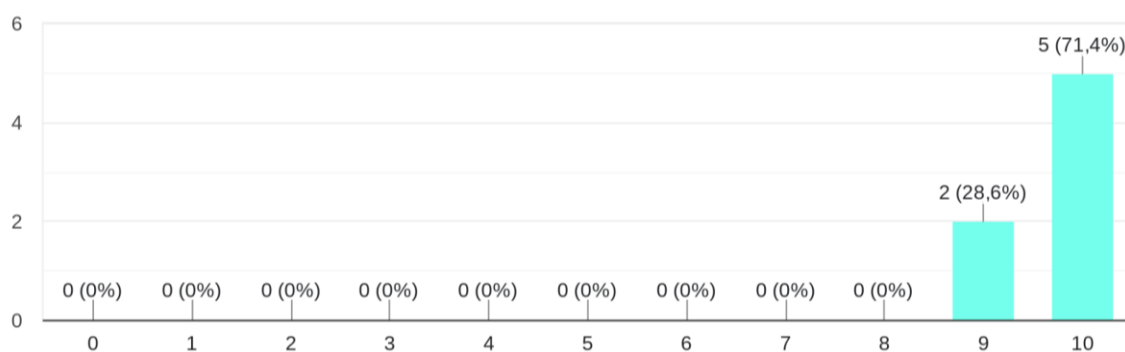
Fonte: Elaborado pelo autor.

Mesmo com as ausências e muitas mudanças entre os inscritos e os que efetivamente participaram, ainda se manteve uma distribuição semelhante entre os alunos das turmas que tiveram interesse em participar da oficina se compararmos com a Figura 10. As respostas dos

alunos são importantes para alcançar o objetivo geral deste trabalho, analisar o potencial do Origami em aulas de matemática ao ser empregado juntamente com o ensino exploratório.

Para tanto, analisaremos as respostas dos alunos separando em dois tipos de resultados que nos apresentam, a opinião dos alunos quanto a oficina em si e em seguida a opinião dos alunos sobre a validade de se estudar matemática com o auxílio de origami. Para início de discussão, a Figura 30 apresenta a avaliação geral dos estudantes com relação à oficina, demonstrando um cenário bem positivo.

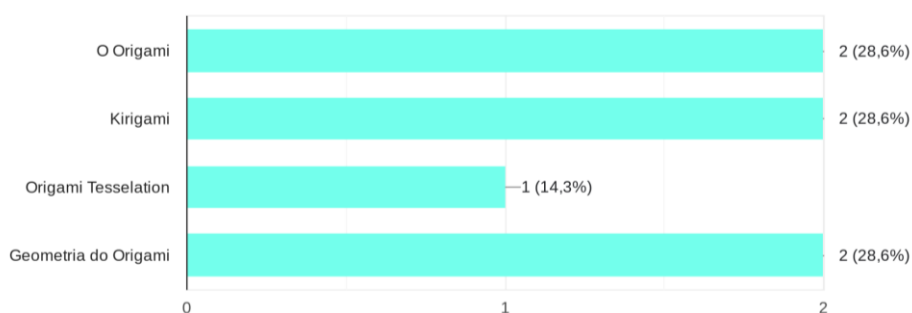
Figura 30 - Gráfico de nível de satisfação dos alunos com a oficina.
De 0 a 10, sendo 10 excelente e 0 péssimo. Com que nota você avalia a oficina?
7 respostas



Fonte: elaborada pelo autor.

O resultado não surpreende, tendo em vista a empolgação dos alunos durante todos os três encontros, nenhum estudante aparentou insatisfação e os que comentaram comigo após, elogiaram e perguntaram se haveria outros encontros. De maneira complementar, vemos na Figura 31, quais foram os conceitos abordados que eles consideraram mais interessantes e teriam interesse de se aprofundar.

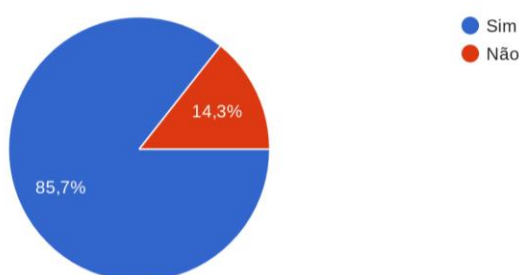
Figura 31 - Gráfico de assuntos mais interessantes votados pelos alunos.
O que você achou mais interessante e gostaria de ter visto com maior riqueza de detalhes?
7 respostas



Fonte: elaborada pelo autor.

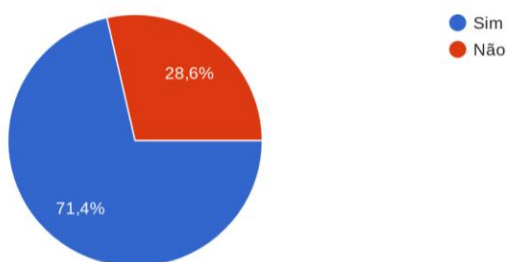
Nesse resultado, apesar de respostas bem equilibradas, é interessante observar que a geometria do origami teve ainda mais interesse do que outros tipos de origami, como é o caso da variação *tessellation*. A maneira como a matemática e a geometria foram abordadas na oficina, tentando simplificar e demonstrar tudo de forma mais prática, pode ser a justificativa desse resultado. Por último, as perguntas com relação a opiniões referente a oficina chegam ao fim com as Figuras 32 e 33.

Figura 32 - Gráfico de alunos que apresentaram mais interesse em origami.
Após o fim da oficina, você considera que o seu interesse aumentou em relação ao Origami?
7 respostas



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 33 - Gráfico de estudantes que apresentaram mais interesse em geometria.
Após o fim da oficina, você considera que o seu interesse aumentou em relação a geometria?
7 respostas

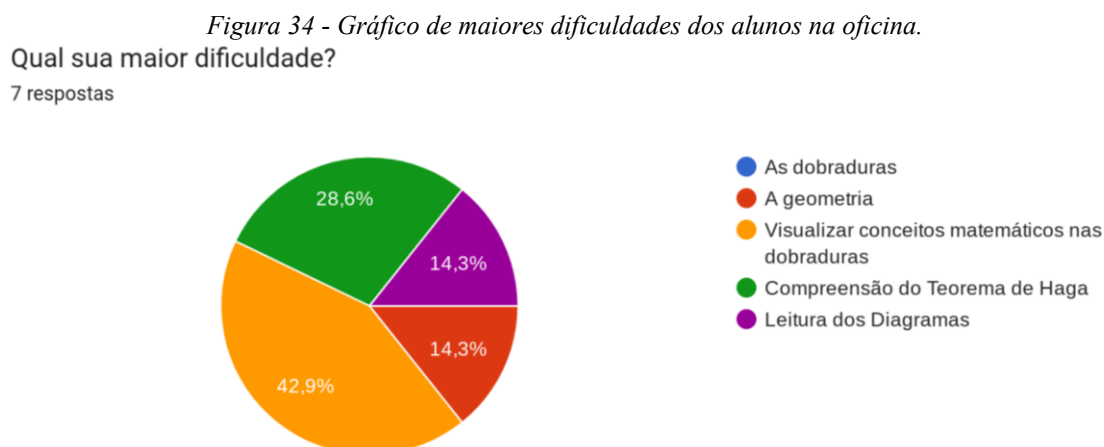


Fonte: elaborada pelo autor.

A partir dessas figuras, como esperado, os alunos demonstram ter mais interesse no origami do que na geometria, mas ainda assim, o resultado de que mais de setenta por cento dos alunos tenham desenvolvido maior interesse na geometria ainda é um valor expressivo. Mesmo levando em conta a possibilidade dos alunos terem respondido isso por acreditarem que era a resposta pretendida, ainda há uma quantidade de alunos que de fato concordam que a geometria é mais interessante vista dessa forma com o origami.

As outras perguntas do formulário abordam justamente esse ponto, questionando os alunos sobre essa relação existente entre a matemática e o origami e não somente a estrutura da oficina. Um ponto interessante a ser levantado diz respeito a dificuldade que os alunos teriam

em trabalhos com origami dentro da sala de aula, no levantamento feito no formulário, podemos ver através da Figura 34, o que de fato foi um maior desafio aos estudantes.



Fonte: elaborada pelo autor.

De maneira contraintuitiva, a maior dificuldade dos alunos não são as dobras em si, acrescentar o origami em aulas de matemática não trará mais dificuldade a aula pelo fato dos alunos também terem de efetuar as dobras. O que surpreende é a dificuldade dos alunos ser encontrada na visualização de conceitos geométricos dentro do origami, sendo que a ideia da oficina é justamente empregar o origami por ele facilitar essa visualização.

Com o intuito de estudar mais a fundo a surpresa que esse resultado trouxe, buscou-se analisar quais os alunos que tiveram essa maior dificuldade de visualização, sendo esses que marcaram essa resposta os estudantes D, M e O. Vale ressaltar, que o intuito aqui é analisar o que levou esses estudantes a marcarem tal resposta e não justificar uma possível falha ou necessidade de aprimoramento da oficina.

No caminho de levantar possibilidades para essa resposta, o Estudante D pode ter colocado isso por ter sido a dupla do Estudante K, que por sua vez visualizou os conceitos mais complexos de matemática dentro do origami, inclusive os que não eram necessários para cumprimento da tarefa. Assim, acompanhar esse raciocínio que desenvolveu mais do que o esperado, pode ter feito com que o Estudante D tivesse dificuldade de visualizar esses conceitos em específico.

Por sua vez, a Estudante O foi a aluna que não esteve presente nos outros encontros da oficina, encontros esses que tinham o intuito de introduzir, tanto a geometria do origami quanto a própria dobradura. Dessa forma, a maneira com que ela vivenciou somente a parte de maior presença da geometria possa ter feito com que ela não estivesse preparada para ver todos os conceitos ali presente, causando essa dificuldade de visualização.

Por fim, o Estudante M de fato aparentou uma dificuldade em desenvolver maiores conceitos matemáticos, entretanto, enquanto conversava com ele e sua dupla no momento da exploração, foi possível notar uma resistência com o modo de pensar indutivamente. Ele possui bom desenvolvimento na matemática escolar, com pensamento majoritariamente dedutivo, mas no momento de explorar a matemática com o desafio de já saber o que quer demonstrar e não saber como, ele não soube mobilizar conhecimentos prévios para tanto.

O mesmo que pôde ser observado no diálogo com o Estudante A, que sentia dificuldades quando a forma de pensamento matemático era alterada do tradicional realizado no ensino básico. Isso levanta o questionamento a respeito do uso de exercícios como o tipo de tarefa predominante em sala de aula, como aponta Ponte (2014), ao destacar as vantagens de trabalhar outros tipos de tarefa para favorecer o desenvolvimento matemático dos estudantes.

Dito isso, um bom planejamento e orientação da prática se faz imprescindível para que o objetivo de facilitar a visualização e entendimento de conhecimentos matemáticos seja alcançado. Pois essa prática já tem o intuito de sanar essa dificuldade, em meio as socializações e explorações, os conceitos matemáticos serão observados e reconhecidos, como comprova as respostas registradas pelos alunos na Figura 35. Dessa forma, ao visualizar o conceito em um material concreto, se tornará mais simples a sua total compreensão e capacidade de manipular os mesmos conceitos em situações de maior abstração.

Figura 35 - Conteúdos matemáticos reconhecidos pelos alunos.

Enxergou outro conteúdo matemático no Origami além dos apresentados dentro da oficina?

6 respostas

não

Sim

Geometria em geral

Não

Geometria

Trigonometria e areas de figuras planas.

Fonte: elaborada pelo autor.

Nessa resposta, os alunos apresentaram os conteúdos matemáticos que foram reconhecidos para além dos que foram apresentados como objetivo durante as tarefas. Mesmo que alguns não tenham enxergado nenhum conteúdo além dos explicitados, é possível notar que o dobrar desperta aos alunos uma forte percepção geométrica, os fazendo reconhecer muitos conceitos dessa área.

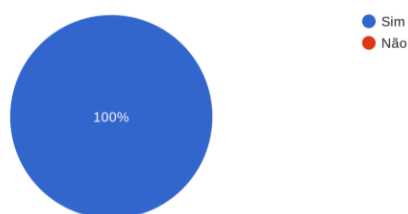
Ao ser empregada todas as etapas do ensino exploratório, mesmo que o estudante não enxergue o conceito matemático durante sua exploração, pode acabar por observá-lo na socialização. Como a última fala da Estudante N apresentada nos resultados do terceiro encontro demonstra, não era impossível de visualizar aqueles conceitos, eles até tinham uma leve noção da presença de conceitos matemáticos nas dobras, mas só ao fim do processo puderam enxergar tudo.

Demonstrando que ao realizar todo o processo, a dificuldade dos alunos tende a sumir por eles acabarem visualizando no concreto os conceitos pretendidos, o que é exatamente a ideia defendida pelos autores que abordam o uso de materiais concretos e manipuláveis. Nesta mesma linha de avaliar a eficácia dessa prática, a Figura 36, apresenta a resposta dos alunos para a pergunta do formulário que melhor resume o objetivo proposto.

Figura 36 - Gráfico de percepção dos estudantes sobre o origami ter ajudado.

Considera que Origami serviu como auxílio para melhor compreender algum conteúdo matemático?

7 respostas



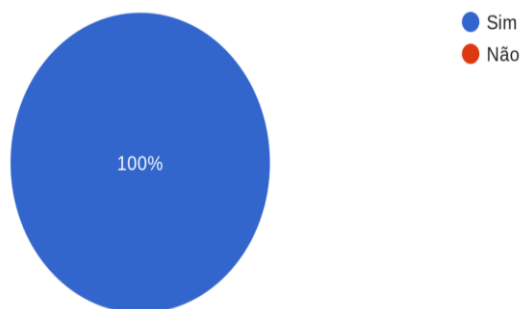
Fonte: elaborada pelo autor.

Ao serem indagados sobre o auxílio que o origami forneceu a eles, é unânime que o origami, quando alinhado a uma explicação matemática, pode representar em seu processo de confecção, uma série de objetos matemáticos. Ao trabalhar de maneira a fazer os alunos reconhecerem e manipularem esses objetos, eles estão de fato tomando posse do conhecimento matemático e o aplicando de maneira efetiva. Para finalizar, a Figura 37 traz a opinião dos alunos sobre a veracidade da frase construída no capítulo três deste trabalho e que tentou ser justificada para eles em todos os encontros.

Figura 37 - Gráfico de opinião dos alunos sobre dobrar ser uma ação matemática.

Concorda com a afirmação de que dobrar é uma ação matemática?

7 respostas



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao reconhecerem que a matemática está presente em cada ato de dobra, os estudantes reconhecem que ao manipular o papel, estão realizando atos matemáticos, logo, manipulam e tomam posse da própria matemática. É claro que reconhecer a presença da matemática, em especial da geometria, no origami, não é o mesmo que afirmar que fazer origami é aprender matemática.

Entretanto, utilizando o origami como material manipulável em parceria com uma metodologia que propicie a exploração dos estudantes, o potencial matemático do origami favorece a aprendizagem dos mesmos. Desde que bem trabalhado, em um ambiente propício e com um bom planejamento, o origami se torna uma excelente ferramenta de ensino matemático para diferentes níveis de aprendizado.

7. Considerações Finais

O presente trabalho teve como principal objetivo analisar o potencial do origami em aulas de matemática ao ser empregado juntamente com o ensino exploratório. Para tanto, foi feita uma revisão bibliográfica, tanto na área da educação, quanto na área do origami, e por fim unindo as duas em um levantamento bibliográfico de relatos de experiência de professores que utilizaram o origami dentro da sala de aula.

Para cruzar os dados levantados, foi realizada uma oficina que buscou empregar de maneira eficaz o origami como uma boa ferramenta para o ensino de matemática. Apesar do teor deste trabalho, reafirmo que o origami apresenta limitações e não se adequa a todos os momentos, o reconhecimento dessas limitações serve para destacar suas potencialidades e planejar o uso adequado e mais eficiente desse material dentro do ambiente escolar.

Diante do exposto e analisado anteriormente, foi possível observar que o origami, que já vem sendo empregado em diversas salas de aula de matemática, de fato é um bom instrumento para ser utilizado com os alunos. Além de atrair bastante a atenção dos estudantes, também é rico por si só em diversos conceitos matemáticos, que por serem vistos em um material concreto, são de mais simples visualização e compreensão do que os desenhos habituais que fazemos para representar as abstrações recorrentes na geometria.

Sobre esse tema em particular, o questionamento levantado durante a revisão bibliográfica deixa em aberto uma questão importante de ser respondida em trabalhos futuros, seria esse o único conteúdo (geometria) que é possível de ser trabalhado com esse material didático ou é somente o mais óbvio e direto de se encontrar ao manipular o origami? O foco deste trabalho não se destinou a responder isso, mas se torna uma importante questão que surge quando analisado o rumo dos trabalhos que utilizam o origami.

O uso de origamis, como verificado na pesquisa bibliográfica e comprovado na oficina aplicada, é de extremo interesse dos estudantes. Eles se envolvem em atividades que trabalhem com o origami apresentando grande interesse e curiosidade, o que favorece o ensino por motivar os alunos a se envolverem nas atividades propostas em sala, o que é um desafio comum, tendo em vista o pouco interesse dos estudantes com relação à matemática expositiva de sala de aula, logo, seria interessante uma investigação sobre como utilizar esses benefícios para além do ensino de geometria.

A conclusão geral que se chega através das investigações feitas na área são a de que o uso do origami tem grande potencial, não podendo ser considerado útil em todos os momentos, mas que com um bom planejamento e em momentos pontuais, serve como um excelente recurso

didático. A ideia deste trabalho não é a hierarquização do origami como uma ferramenta melhor do que as demais em sala de aula.

O objetivo é apresentar ao leitor que o origami, quando empregado de maneira adequada, e aqui houve a busca por apresentar um cenário propício ao seu emprego, destacando as principais características que favorecem seu uso. É um excelente material didático, que possui mais propriedades matemáticas do que geralmente são exploradas ou até mesmo conhecidas. E que mesmo com limitações, como dificuldades dos alunos ao realizar dobras e a necessidade de bastante planejamento prévio, ainda é uma ótima escolha para se trabalhar em sala de aula a depender do conteúdo.

Valendo o destaque de que, apesar da oficina ter sido realizada em três encontros para favorecer a dinâmica, os relatos e os resultados coletados apontam para a possibilidade de reestruturação e realização da oficina dentro do horário regular de sala de aula. Devido ao teor do trabalho, não é cabível explorar todas as nuances dessa relação entre o origami e o ensino de matemática, por ser uma área ainda com grande potencial de pesquisa.

Deixando então em aberto questões pertinentes a pesquisas futuras, como por exemplo, aplicação do origami para conteúdos matemáticos para além da geometria, explorar o origami como ferramenta didática dentro do ensino superior. Saindo da sala de aula, ainda há espaço para se pesquisar a matemática que se desenvolve dentro da geometria do origami, principalmente em dobras mais complexas que demandam de serem planejadas através de softwares.

REFERÊNCIAS

- BRAZ, Lúcia H. C.; MORAIS, Álida R. S.; ALVES, Clara C. de F.; VIEIRA, Thayná P. O uso de dobraduras no ensino de geometria: uma experiência no estudo dos sólidos de Platão. **ForScience**. v. 7, n. 2, 2019
- CALDEIRA, Daniel de S.; SILVA, Fernanda A. F. Abordagem de Polígonos com Materiais Didáticos Manipulativos: uma proposta de utilização do origami e do Tangram. **INTERMATHS - Revista de Matemática Aplicada e Interdisciplinar**. p. 118 - 134, 2023
- CANAVARRO, Ana P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**. p. 11 - 17, 2011
- CARDOSO, Valdinei C.; RIBEIRO, Rafaela dos S.; RIBEIRO, Roberta dos S. origami como material manipulativo. **Kiri-Kerê - Pesquisa em Ensino**, n. 11, 2021.
- CFC - Community for Creators of Origami, todos os direitos reservados.
<https://cfcorigami.com/creator/shuzofujimoto>. Acessado em: 03 nov. 2024.
- CFC - Community for Creators of Origami, todos os direitos reservados.
<https://cfcorigami.com/creator/akirayoshizawa>. Acessado em: 03 nov. 2024.
- CRUZ, Tainá N. B. da; FERREIRA, Robson dos S. O uso do origami adaptado para o ensino das formas geométricas planas a uma aluna com deficiência visual. **Tangram**, Dourados - MS, v. 1, n. 3, p. 108 - 119, 2018.
- DALL'ASTA, Marília N.; PEREIRA, Elaine C.; MACHADO, Celiane C. Uma Experiência Interdisciplinar na Formação Continuada de Professores da Rede Pública no PACTO pelo Fortalecimento do Ensino Médio. **RELACult - Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade**. V. 4, 2018.
- DIAS, Charlene de F.; VEBBER, Guilherme C.; FRONZA, Juliana. Experimentação do origami no ensino da geometria. **Remat - Revista Eletrônica da Matemática**. p. 108 - 122, 2019
- FERREIRA, Arnaldo D.; CARVALHO, Elaine de F. G. de; SCIPIÃO, Lara R. de N. P.; ALVES, Francisco R. V.; SANTOS, Maria J. C. dos. Oficina de origami: Um recurso estratégico para o ensino de Geometria. **Research, Society and Development**. v. 10, n. 8, 2021
- GRACIOLLI, Carolina Y. L. F.; BATISTA, Carolina C.; SHINTANI, R. M. TRISSECÇÃO DO ÂNGULO OBTUSO COM ORIGAMI: UM OLHAR PARA A HISTÓRIA E A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 8, n. 23, p. 209 - 225, 2021.

GRACIOLLI, Carolina Y. L. F.; JÚNIOR, Romário C. da R.; SILVA, Ricardo S. R. da. Aspectos do pensamento computacional em atividades desplugadas com origami e matemática. **Dialogia**. n. 40, 2022

GRACIOLLI, Carolina Y. L. F.; SILVA, Ricardo S. R. da; BORBA, Marcelo de C. A geometria do origami: explorando o teorema de Haga em um curso de extensão. **TANGRAM-Revista de Educação Matemática**, v. 6, n. 3, p. 60–81, 2023.

GRUTZMANN, Thaís P.; UMETSUBO, Patricia M.; MARTINS, Marcos A. da S.; LEBEDEFF, Tatiana B.; PHILIPSEN, Thaiana N.. PROJETO DE EXTENSÃO “MATHLIBRAS – ANO I”: UM RELATO SOBRE A OFICINA DE ORIGAMI. **Expressa Extensão**. 234 - 246 p. 2020

HAGA, Kazuo. Origamics: mathematical explorations through paper folding. **Singapore: World Scientific**. 134p. 2008.

HAYASAKA, E. Y.; NISHIDA, S. M. Pequena história sobre ORIGAMI. Botucatu, SP, [2008?]. Disponível em: https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm. Acessado em: 02 jan. 2025.

HULL, Thomas C. Project Origami: Activities for Exploring Mathematics. 2 ed. New York: **CRC Press**. 338p. 2013.

KISHIMOTO, Simone Thiemi, MARCO, Ademir de, SOARES, Daniela Bento, PONTIN, Ana Lúcia. Educação física escolar e a técnica de origami na educação infantil. **Pensar a Prática**, Goiânia, v. 17, n. 2, p. 359-376, jan./mar. 2014.

KOBAYASHI, M. C. M.; YAMADA, T. R. U. Origami e kirigami: arte e cultura como recurso lúdico e educativo. **Rev. Ciênc. Ext.** v.9, n.3, p.148-158, 2013.

LANG, Robert J. A Computational Algorithm for Origami Design. **Pleasanton, CA 94588**, p. 98 - 105, 1996

LANG, Robert J. Origami: Complexity Increasing. **Engineering & Science**. p. 16 - 23, 1989

LEIVAS, José C. P.; LARA, Débora da S. de; SOARES, Gabriel de O. Polígonos: dobra aqui, dobra ali e um objeto esquecido: o transferidor. **Ensino e Tecnologia em Revista**. v. 1, n. 2, 2017

LIMA, Neuza R. W.; PINTO, Tânia M. M.. Dobraduras e colagens no ensino de geometria para estudantes cegos do ensino fundamental no período de contra turno. **Revista Ensino & Pesquisa**. 2017.

LORENZATO, Sergio. *Investigação em educação matemática percursos teóricos e*

metodológicos. Autores associados, 2006.

LORENZATO, Sergio. O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. **Autores associados**, Campinas, 3. ed. 2012.

MACHADO, Luiz F. F.. UM PANORAMA DAS PUBLICAÇÕES SOBRE A ABORDAGEM DO ENSINO EXPLORATÓRIO NA EDUCAÇÃO BÁSICA. **XXVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**. Instituto Federal do Espírito Santo - IFES-Vitória-ES. 2023.

MOLGORA, Larissa B.; FIGUEIREDO, Tiago D. Dobrar e Contextualizar: o origami como Ferramenta de Ensino de Álgebra e Geometria. **Perspectivas da Educação Matemática**. v. 14, n. 36, 2021

OLIVEIRA, Hélia; MENEZES, Luiz; CANAVARRO, Ana P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.o ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**. v. XXII, n. 2, p 29 - 53, 2013

PAIXÃO, Tereza Cristina dos S.; SILVA, Adjane da C. T. e. AS INTERAÇÕES DISCURSIVAS NO ENSINO DE GEOMETRIA POR MEIO DE TÉCNICAS DE DOBRADURA E OUTRAS ATIVIDADES LÚDICAS. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. p. 97 - 127, 2020

PIMENTA, Anita L.; GAZIRE, Eliane S. O uso do origami na prática de professores que ensinam matemática: uma abordagem axiomática em construções geométricas. **Revista do Instituto de Ciências Humanas**, v. 15, n. 21, p. 36 - 58, 2019.

PONTE, João P. da. Gestão curricular em Matemática. **DIFMAT**. O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, p. 11 - 34, 2005

PONTE, João P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. p. 13 - 27, 2014

RANCAN, Grazielle; GIRAFFA, Lucia Maria Martins. DIVERSIFICANDO O ENSINO DE GEOMETRIA COM APOIO DE ORIGAMIS: Uma proposta metodológica para a 7ª série do ensino fundamental. **CINTED-UFRGS Novas Tecnologias na educação**, v. 9, n. 2, dezembro, 2011.

ROSSA, Eduardo P. de O.; ESTEVAN, Everton J. G. Caracterizando tarefas matemáticas de natureza exploratória. **Revista Insignare Scientia**. v. 5, n. 5, p. 286 - 300, 2022

SILVA, Raquel S. da; GAUTÉRIO, Vanda L. B. Práticas Multidisciplinares: Atividades Lúdicas e Tecnologia Digital aliada ao estudo de Artes e Geometria. **RELACult - Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade**. 2019.

SILVEIRA, Paulo E. A. Matemática e algoritmos das dobras. **Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo**. 2007

SIVERT, Cristiana M. F.; PEREIRA, Érico F.; PUHL, Cassiano S. Função exponencial: uma estratégia didática aplicada no Ensino Médio. **BoEM**. v. 8, n. 15. 2020

SOUZA, José K. da C.; MARTINS, France F. Tecnologias Digitais e origami na Formação Docente para o Ensino de Geometria nos Anos Escolares Iniciais. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**. v. 5, n. 2, 2020

TEIXEIRA, Samanta Aline; NAKATA, Milton Koji. A evolução artística e científica do origami: Um estudo teórico e prático sobre a prática. **Palíndromo**. v.9, n.18, p.142-163, 2017

YODER, Madonna. Torções básicas para tesselações de origami. **gatheringfold.com**. Disponível em: <https://gatheringfolds.com/blogs/news/basic-twists-for-origami-tessellations>. Acessado em: 08/11/2024

Apêndice

APÊNDICE A - Formulário de inscrição da oficina

Inscrição Oficina: Geometria do Origami

Essa oficina busca apresentar conteúdos matemáticos que possuem potencial de serem explorados através do Origami, ela apresenta o resultado prático das pesquisas realizadas pelo estudante da licenciatura Caetano Melo para compor o seu TCC. Serão ofertadas somente 20 vagas, que serão preenchidas pelos primeiros 20 estudantes que enviarem esse formulário devidamente respondido.

* Indica uma pergunta obrigatória

1. E-mail *

2. Nome do Aluno *

3. Turma *

Marcar apenas uma oval.

- ☐ 1º ano Mecânica
☐ 2º ano Mecânica
☐ 3º ano Mecânica
☐ 1º ano Automação
☐ 2º ano Automação
☐ 3º ano Automação

4. Considerando 0 como nenhum conhecimento ou experiência prévia e 5 como muito conhecimento e experiência. Como você classificaria o seu nível de conhecimento sobre Origami? *

Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐	☐

5. Considerando 0 como muita dificuldade e pouco entendimento e 5 como muita facilidade e entendimento. Como você classificaria o seu desempenho em geometria? *

Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. Considerando 0 como pouco interesse e 5 como muito interesse. Como você classificaria o seu interesse pelo conteúdo de geometria? *

Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐	☐

7. Considerando 0 como pouco interesse e 5 como muito interesse. Como você classificaria o seu interesse pelo Origami? *

Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐	☐

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE B - Plano de aula da Oficina

CABEÇALHO INSTITUCIONAL			
PLANO DE AULA			
GEOMETRIA DO ORIGAMI			
Área: Matemática	Ano Escolar: Ensino Médio	Duração: 3 Encontros de 1 hora e meia	Data: 15/01/2025; 22/01/2025; 29/01/2025.
Disciplina: Matemática	Autoria: Caetano Cordeiro de Melo	Orientação: Luiz Fernando Ferreira Machado	Supervisão: Luiz Fernando Ferreira Machado
Conhecimento alvo: Geometria do origami com foco na prova e aplicação do teorema de Haga			
Pré-requisito de conhecimento matemático: Distinção e caracterização de figuras planas, semelhança de triângulos e Teorema de Pitágoras			
Objetivos educacionais: Incentivar o pensamento geométrico e crítico matemático			
Materiais Necessários: Papéis de origami quadrados, Cartolina, Pincel e quadro, Slides, Celular para registro de atividades.			
Descrição metodológica: Utilizando a metodologia do ensino exploratório, será desenvolvida uma tarefa com utilização de dobraduras para refletir sobre a geometria euclidiana e sua comunicação com a geometria do origami. Desse modo, buscando desenvolver o pensamento geométrico e retomar conceitos da geometria de forma mais aplicada.			

DESENVOLVIMENTO DA AULA 1 – Tarefa de exercício com grau de exploração.			
Contexto de aplicação: Diversificação e aprofundamento			
OBJETIVOS		OBJETIVOS DO PROFESSOR	OBJETIVOS DOS ALUNOS
		• Apresentar o origami enquanto artefato artístico e histórico; • Destacar pesquisas e avanços que aplicam o origami nas ciências; • Apresentar definições pertinentes ao estudo de origamis; • Ensinar confecção de origamis de mesma base.	• Familiarizar-se com o origami ; • Confeccionar os origamis propostos; • Reconhecer e distinguir conceitos;
Fases do Ensino	Duração	Ações esperadas do(a) professor(a)	Ações esperadas dos(as) alunos(as)
Fase 1: Motivação/ Apresentação do Projeto.	10 min	Apresentar a dinâmica e separar os alunos em grupos, sanar as dúvidas e deixar as atividades seguintes tão claras quanto possível para os alunos.	Se organizarem nos grupos propostos e tirar dúvidas quanto às dinâmicas seguintes.
Fase 2: Apresentação do origami	20 min	Demonstrar como o origami pode ser mais amplo do que um simples artesanato. Apresentar por meio de slides algumas imagens do que está sendo falado destacando todo potencial dessa arte milenar.	Desenvolver um pensamento crítico quanto ao origami e a ideia que se tem dele em um senso comum.
Fase 3: Apresentação de conceitos relacionados	20 min	Apresentar conceitos que são indispensáveis ao se trabalhar e compreender o origami , tais como: Base de origami , Padrão de Vinco, Dobras vale e montanha, Diferentes tipos de origami s, Diagramas, origamistas, Huzita Scimemi.	Tirar dúvidas relacionadas aos conceitos.
Fase 4: Confecção dos origami s	40 min	Apresentar os origamis que eles realizaram em 3 momentos: • Apresentar o tsuru feito sem diagramas;	Confeccionar os dois Tsurus e outro origami sem instruções além do diagrama.

		• Oferecer o diagrama para que façam agora o tsuru só que sem auxílio e somente a interpretação do diagrama; • Oferecer o diagrama de outro origami de mesma base para que interpretem e façam outro origami .	
Avaliação: Entrega da tarefa			

DESENVOLVIMENTO DA AULA 2 – ENSINO EXPLORATÓRIO				
Contexto de aplicação: Diversificação e aprofundamento				
OBJETIVOS		OBJETIVOS DO PROFESSOR	OBJETIVOS DOS ALUNOS	
		• Ensinar a confecção da caixa de origami ; • Instigar investigação sobre variações da caixa; • Destacar a presença de figuras e conceitos geométricos presentes no origami .	• Confeccionar a caixa; • Debater maneiras de variar a caixa; • Conjecturar sobre as perguntas norteadoras.	
Fase 1: Motivação/ Apresentação da Tarefa Matemática	10 min	Apresentar a tarefa proposta com a motivação para se confeccionar uma caixa, bem como demonstrar como se constrói uma caixa e sua variação.	Se organizar nos mesmos grupos da semana anterior e pegar uma folha com a tarefa para cada aluno, sendo uma única resposta por grupo.	
Fase 2: Desenvolvimento do Tarefa Matemática	40 min	Observar a construção da resposta dos alunos enquanto exploram a dobra da caixa através das etapas propostas na tarefa. Bem como esquematizar qual a melhor ordem para apresentar na socialização.	Construir uma resposta em grupo e organizá-la na folha seguindo as etapas propostas na tarefa.	
Fase 3: Seleção e sequenciação	5 min	Organizar as ideias que esquematizei para apresentar aos alunos.	Reler suas respostas e aguardam o professor dar seguimento a próxima etapa enquanto conversa também com outros grupos sobre suas ideias.	
Fase 4: Socialização e discussão da Tarefa Matemática	20 min	Apresento a todos as ideias dos grupos e as utilizo para construir uma resposta única da turma em conjunto com os alunos. .	Acompanhar a explanação sobre as ideias que os outros grupos tiverem e refletem sobre essas diferenças enquanto conversam entre os membros do grupo e os de fora sobre como construíram suas respectivas ideias.	
Fase 5: Formalização/ Sistematização das aprendizagens	15 min	Formalizar o que foi falado e deixo concreto o porquê da caixa ter que ser construída com a partição em 3 parte iguais para que cumpra os requisitos propostos.	Refletir sobre suas construções e compreender as diferenças com relação a formalização.	
Avaliação: Uma tarefa recolhida de cada grupo com a resposta das atividades e a tabela de acompanhamento do professor sistematizando suas respectivas construções.				

DESENVOLVIMENTO DA AULA 3 – ENSINO EXPLORATÓRIO				
Contexto de aplicação: Diversificação e aprofundamento				
OBJETIVOS		OBJETIVOS DO PROFESSOR	OBJETIVOS DOS ALUNOS	
		• Enunciar o Teorema de Haga; • Explicar o que eles devem provar; • Instigar a prova do Teorema; • Ensinar como aplicar o Teorema na caixa do encontro anterior.	• Interpretar o Teorema de Haga; • Provar o Teorema de Haga; • Aplicar o resultado do Teorema na caixa do encontro anterior.	
Fase 1: Motivação/ Apresentação da Tarefa Matemática	10 min	Utilizar a caixa do encontro passado para incentivar a busca por uma maneira de partir o lado do quadrado em $\frac{1}{3}$ e apresentar o Teorema de Haga como a ferramenta que pode ser utilizada para isso.	Se organizar nos mesmos grupos da semana anterior e pegar uma folha com a tarefa para cada aluno, sendo uma única resposta por grupo.	
Fase 2: Desenvolvimento do Tarefa Matemática	40 min	Observar a construção da resposta dos alunos enquanto exploram a prova do teorema proposto na tarefa. Bem como esquematizar qual a melhor ordem para apresentar na socialização.	Construir uma resposta em grupo e organizá-la na folha seguindo as etapas propostas na tarefa.	
Fase 3: Seleção e sequenciação	5 min	Organizar as ideias que esquematizei para apresentar aos alunos.	Reler suas respostas e aguardam o professor dar seguimento a próxima etapa enquanto conversa também com outros grupos sobre suas ideias.	
Fase 4: Socialização e discussão da Tarefa Matemática	20 min	Apresento a todos as ideias dos grupos e as utilizo para construir uma prova única da turma em conjunto com os alunos. .	Acompanhar a explanação sobre as ideias que os outros grupos tiverem e refletem sobre essas diferenças enquanto conversam entre os membros do grupo e os de fora sobre como construíram suas respectivas ideias.	
Fase 5: Formalização/ Sistematização das aprendizagens	15 min	Formalizo a prova do Teorema e apresento a etapa em que deve ser aplicado na construção da caixa para obter a de maior altura.	Refletir sobre suas construções e compreender as diferenças com relação a formalização.	
Avaliação: Uma tarefa recolhida de cada grupo com a resposta das atividades e a tabela de acompanhamento do professor sistematizando suas respectivas construções.				

APÊNDICE C - Tarefa do primeiro encontro



Primeiro dia da Oficina: Geometria do Origami

Nesse encontro vamos entender o Origami e suas diferentes interpretações ao longo da história, desde de seu surgimento até o presente momento. Compreender ele enquanto artefato histórico assim como ferramenta para inovações científicas. Para isso, aqui está algumas definições e curiosidades sobre o Origami para que possamos compreender sua notoriedade.

Breve História do Origami:

O Origami é junção de duas palavras em japonês, “oru” (dobrar) e “kami” (papel). A origem da arte se confunde com a do próprio papel e é bem incerta, antigamente era ensinado de geração em geração e somente em famílias com maior dinheiro. Com a popularização foi se difundindo, passando até a ser obrigatório nas escolas, hoje evolui e possui dezenas de variações e aplicações no design e na ciência quando se quer manipular materiais de maneira mais eficiente e otimizando espaço.

ORIGAMI ESTÁ EM VARIAS PARTES DE PRODUTOS DO COTIDIANO OU NA CIÊNCIA PENSANDO EM OTIMIZAR ALGUMA AÇÃO HUMANA. COMO POR EXEMPLO:

- AIR BAGS SÃO DOBRADOS COM PRECISÃO PARA QUE SE ABRA O MAIS RÁPIDO QUANTO POSSÍVEL;
- NA MEDICINA, COMO NO TRABALHO DOS PESQUISADORES LI: VOGT; RUS; WOOD. NA CRIAÇÃO DE MÚSCULOS ARTIFICIAIS;
- OUTRO USO NA MEDICINA SERIA O STENT CARDÍACO DE ORIGAMI PARA CIRURGIAS MENOS INVASIVAS;
- NO DESIGN DE MÓVEIS E ACESSÓRIOS;
- NA ASTRONOMIA, UTILIZANDO A DOBRA DE MATERIAIS SÓLIDOS, COMO OS PAINÉIS QUE BLOQUEIAM PARTE DA LUZ SOLAR, CHAMADOS DE STARSHADE.

PARA ALGUNS PESQUISADORES COMO HULL, DOBRAR É UM ATO MATEMÁTICO E AÇÕES FEITAS NO PAPEL PODEM SER DESCRITAS POR AXIOMAS, QUE SÃO VERDADES ABSOLUTAS USADAS PARA ESTRUTURAR DIVERSAS ÁREAS DA MATEMÁTICA.

SÃO ESSES AXIOMAS QUE DESCREVEM TODAS AS AÇÕES QUE PODEM SER FEITAS NO PAPEL E SÃO CHAMADOS DE HUZITA-SCIMEMI

Os sete axiomas são:

1. Dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar uma linha que os ligue.
2. Dadas duas linhas, podemos localizar seu ponto de interseção, se existir.
3. Dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar de forma que P_1 esteja sobre P_2 .
4. Dadas duas linhas L_1 e L_2 , podemos dobrar de forma que L_1 esteja sobre L_2 .
5. Dados um ponto P e uma linha L , podemos dobrar uma linha perpendicular a L passando por P .
6. Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma linha L , podemos, sempre que possível, fazer uma dobra que coloque P_1 sobre a linha L e que passe pelo ponto P_2 .
7. Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas linhas L_1 e L_2 , podemos, sempre que possível, dobrar de forma que P_1 esteja sobre L_1 e, ao mesmo tempo, P_2 esteja sobre L_2 .

Hull (2021) opud. Gracioli (2023)

Vamos agora para o segundo momento desse encontro. Após as explicações feitas e a leitura de curiosidades sobre o Origami na ciência e na matemática, siga agora as seguintes etapas para fazer um Origami.

1. Produza a base de Origami indicada no padrão de vinco da imagem, sendo azul indicação de dobra montanha e vermelho dobra vale.
2. Produza um Tsuru sem olhar o diagrama, somente com as orientações dadas.
3. Produza agora outro Tsuru só que sem orientações e somente com auxílio do diagrama.
4. Produza agora uma flor seguindo o diagrama.

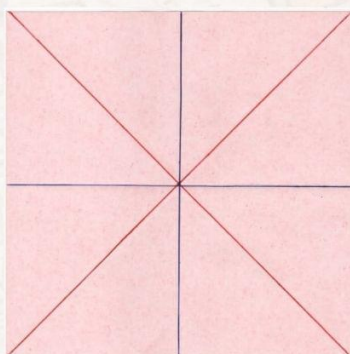
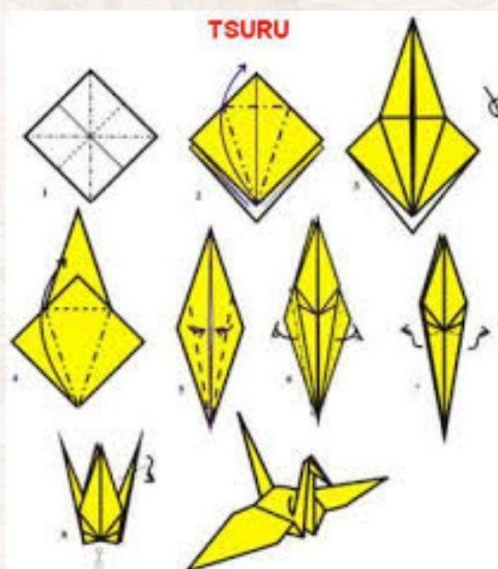
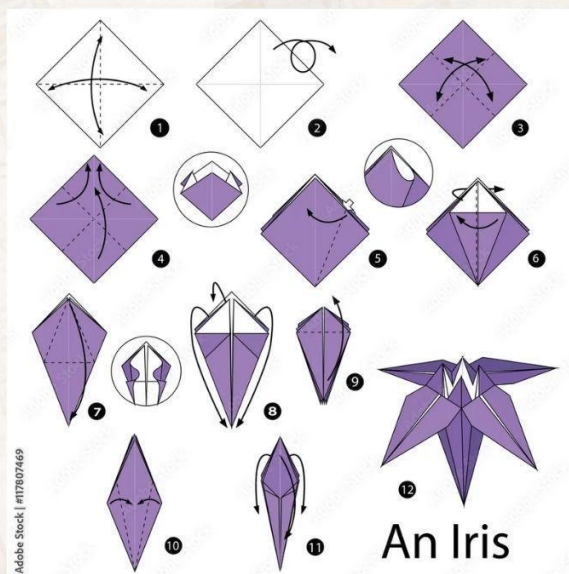


Imagem feita pelo próprio autor



Link de acesso: <https://www.flickr.com/photos/alessandrozamboti/4653059164>



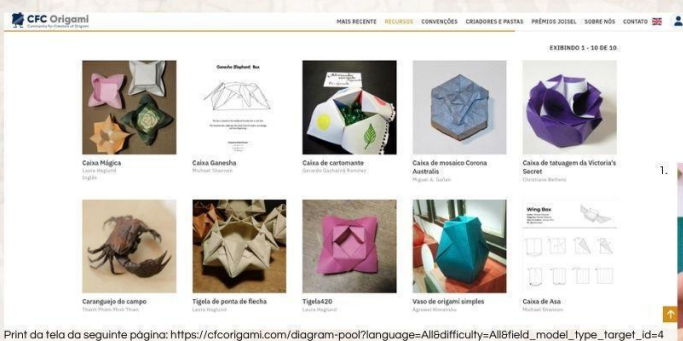
Link de acesso: <https://stock.adobe.com/br/images/step-by-step-instructions-how-to-make-origami-an-iris-flower/117807469>

APÊNDICE D - Tarefa do segundo encontro

Segundo dia da Oficina: Geometria do Origami

Como vimos no encontro anterior, existem diversos tipos de Origamis. Um desses tipos é o de Origamis de caixa, esse Origami foi escolhido para demonstrar que dentro do universo da dobradura, até mesmo o mais simples, como uma caixa, pode abrir um universo de possibilidades a serem exploradas dependendo da criatividade de quem manuseia o papel.

Ao lado temos alguns modelos de origamis de caixas encontrados em sites como o da comunidades de criadores de Origami ou em outros sites da internet, como exemplos abaixo.



Print da tela de vídeos dos seguintes links:

1. <https://pin.it/34XPR0RLe>
2. <https://pin.it/2l2ysD99m>
3. <https://pin.it/1XcCwDKzS>

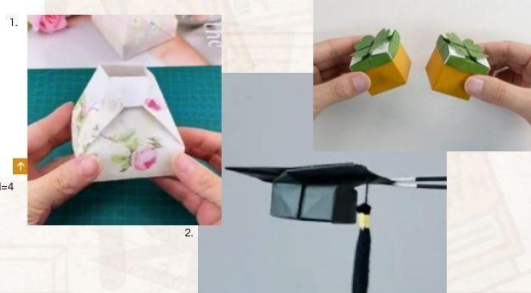
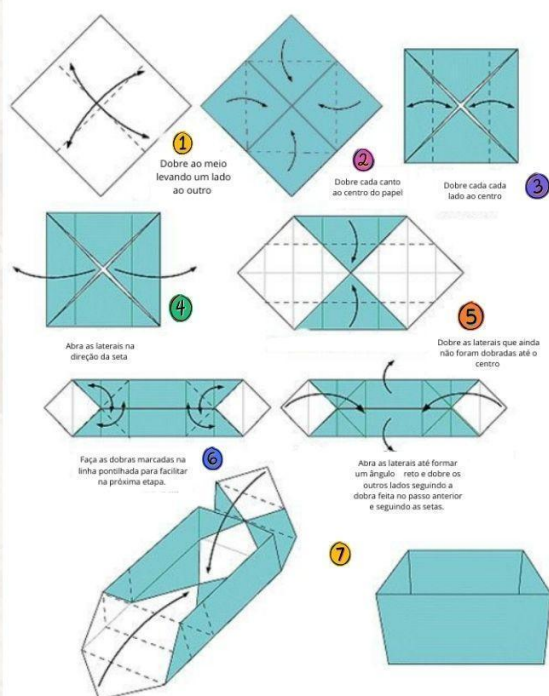


Diagrama e imagens de duas variações de uma caixa simples:

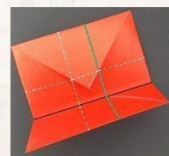
**Caixa
padrão:**



Link de acesso: <https://stock.adobe.com/br/images/step-by-step-instructions-how-to-make-origami-a-box/106537308>

**Variação da
caixa:**

NO PASSO ② VAI FAZER A SEGUINTE ALTERAÇÃO. DOBRANDO ESSA LINHA PRETA COM A LATERAL BEM DEPOIS DO CENTRO E DEPOIS VAI REPETIR OS PASSOS SE GUIANDO POR ONDE A DOBRA PASSARÁ POR ESSE TRIÂNGULO. VAI REPETIR DOS OUTROS 3 LADOS. PRIMEIRO COMO MOSTRADO NA LINHA PONTILHADA AZUL E DEPOIS NAS DUAS BRANCAS.



PARA CONSEGUIR FECHAR A CAIXA. DEPOIS DE FAZER OS PASSOS SEGUINTE. VOCÊ DEVE FECHAR DA SEGUINTE MANEIRA NO PASSO ⑦ DOBRA NA LINHA PONTILHADA AZUL E REPETE O PROCESSO DO OUTRO LADO, FICANDO ASSIM:

DE UM LADO:



DO OUTRO:



POR FIM A CAIXA FICA ASSIM:



6 imagens feitas pelo próprio autor

Nome dos integrantes do grupo:

.....
.....

Os comandos a seguir são etapas para a construção de uma resposta que motivará as atividades relacionadas ao próximo encontro, explorem as dobras da caixa e registrem o raciocínio do grupo nas perguntas 4 e 5 de maneira organizada no quadro abaixo:

Etapa 1: Faça uma caixa como no diagrama da caixa padrão do verso da folha.

Etapa 2: Faça uma caixa como a variação ensinada na sequência de fotos.

Etapa 3: Faça mais duas caixas, uma alterando o passo ③ e fazendo a dobra levando o lado até um pouco antes do centro e outra fazendo o contrário, levando o lado até um pouco depois do centro.

Etapa 4: O que muda nas três caixas quando faço mudanças no ponto em que dobro o lado, quando dobro até o centro, um pouco antes ou um pouco depois?

Etapa 5: Qual é a mais alta caixa que eu consigo sem que tenha que fazer a alteração como no modelo da variação e o que tenho que fazer para conseguir ela?

QUADRO PARA RESPOSTAS:

APÊNDICE E - Tabela de acompanhamento do segundo encontro

	Usou mais dobras ou conceitos geométricos para buscar solução?	Como organizou os resultados para apresentar?	Identificou a relação entre o local da dobra e a altura da caixa?	Identificou valor fixo entre a soma das alturas e o lado da base?	Fez alguma afirmação sobre relação com volume?	Nível de aproximação da resolução esperada de 0 a 5:		Chegou até o resultado de partir em 3 partes iguais?
1° Grupo	Dobras Geometria					0 1 2	3 4 5	Sim Não
2° Grupo	Dobras Geometria					0 1 2	3 4 5	Sim Não
3° Grupo	Dobras Geometria					0 1 2	3 4 5	Sim Não
4° Grupo	Dobras Geometria					0 1 2	3 4 5	Sim Não
5° Grupo	Dobras Geometria					0 1 2	3 4 5	Sim Não

APÊNDICE F - Tabela de acompanhamento do terceiro encontro

	Usou mais dobras ou conceitos geométricos para buscar solução?	Como organizou os resultados para apresentar?	Aparentou compreender o que afirma o Teorema de Haga?	Conseguiu provar a relação de quantos outros segmentos além do objetivado?	Usou quais teoremas da geometria?	Nível de aproximação da resolução esperada de 0 a 5:	Chegou até a prova de onde se encontra o ponto que divide o papel em $\frac{1}{3}$?
1° Grupo	Dobras Geometria		Sim Não			0 3 1 4 2 5	Sim Não
2° Grupo	Dobras Geometria		Sim Não			0 3 1 4 2 5	Sim Não
3° Grupo	Dobras Geometria		Sim Não			0 3 1 4 2 5	Sim Não
4° Grupo	Dobras Geometria		Sim Não			0 3 1 4 2 5	Sim Não
5° Grupo	Dobras Geometria		Sim Não			0 3 1 4 2 5	Sim Não

APÊNDICE G - Tarefa do terceiro encontro



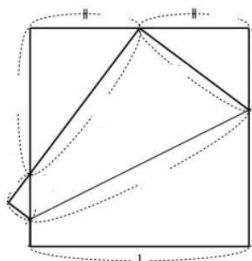
Terceiro dia da Oficina: Geometria do Origami

Como visto no encontro passado analisando a dobra da caixa, para que se alcance a maior altura é necessário partir o quadrado que se forma no segundo passo em 3 partes iguais. Por sorte, existe um teorema na Geometria do Origami que fornece condições de encontrar uma maneira eficiente de se dobrar o papel em 3 partes iguais. O nome desse teorema é Teorema de Haga.

Teorema de Haga:

Haga's First Theorem By the simple folding procedure of placing the lower right vertex of a square onto the midpoint of the upper side, each edge of the square is divided in a fixed ratio, as follows (see Fig.1.5).

- (a) The right edge is divided by the point F in the ratio
- (b) The left edge is divided by the point H in the ratio
- (c) The left edge is divided by the point G in the ratio
- (d) The lower edge is divided by the point H in the ratio



Tradução:

Print retirado e adaptado de: Haga, K. (2008). Origamics: mathematical explorations through paper folding. Singapore: World Scientific. 134p.

Pelo simples procedimento de dobragem de colocar o vértice inferior direito de um quadrado no ponto médio do lado superior, cada aresta do quadrado é dividida em uma proporção fixa.

Com isso, o seu objetivo é encontrar o segmento de reta que seja exatamente $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado e provar que esse segmento é o certo. Para tanto, sugiro as seguintes etapas da tarefa que os ajudarão a provar esse teorema e encontrar esse lado.

1. Nomeie os vértices do quadrado de papel antes de fazer qualquer dobra;
2. Realize uma dobra ao meio, juntando lado com lado, para encontrar o meio de um dos lados e poder seguir o teorema;
3. Faça a dobra indicada na imagem do teorema;
4. Nomeie os segmentos que surgiram;
5. Indique qual segmento tem o tamanho que se parece com o que você quer provar, isso te dará o objetivo de buscar pelos valores desse segmento;

Use dobras e conceitos geométricos para encontrar e provar qual segmento mede $\frac{1}{3}$ do lado. Após isso, passe a limpo suas respostas no verso da folha de maneira organizada.

.....

[illegible]

APÊNDICE H - Formulário de coleta de opinião dos alunos

Oficina: Geometria do Origami

Esse formulário se destina aos alunos que participaram da oficina da Geometria do Origami. Ele tem o intuito de coletar a opinião de vocês sobre a oficina que acabaram de participar, espero que tenham gostado e aproveitado bastante, obrigado pela presença.

** Indica uma pergunta obrigatória*

1. E-mail *

2. Nome *

3. Turma *

Marcar apenas uma oval.

☐ 1º ano Mecânica

☐ 2º ano Mecânica

☐ 3º ano Mecânica

☐ 1º ano Automação

☐ 2º ano Automação

☐ 3º ano Automação

4. Considera que Origami serviu como auxílio para melhor compreender algum conteúdo matemático? *

Marcar apenas uma oval.

☐ Sim

☐ Não

5. De 0 a 10, sendo 10 excelente e 0 péssimo. Com que nota você avalia a oficina? *

Marcar apenas uma oval.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. Qual sua maior dificuldade? *

Marcar apenas uma oval.

- ☐ As dobraduras
- ☐ A geometria
- ☐ Visualizar conceitos matemáticos nas dobraduras
- ☐ Compreensão do Teorema de Haga
- ☐ Leitura dos Diagramas
- ☐ Outro: _____

7. Concorda com a afirmação de que dobrar é uma ação matemática? *

Marcar apenas uma oval.

- ☐ Sim
- ☐ Não

8. Enxergou outro conteúdo matemático no Origami além dos apresentados dentro da oficina?

9. O que você achou mais interessante e gostaria de ter visto com maior riqueza de detalhes?



Marque todas que se aplicam.

- ☐ O Origami
☐ Kirigami
☐ Origami Tessellation
☐ Geometria do Origami
☐ Outro: _____

10. Após o fim da oficina, você considera que o seu interesse aumentou em relação ao Origami?



Marcar apenas uma oval.

- ☐ Sim
☐ Não

11. Após o fim da oficina, você considera que o seu interesse aumentou em relação a geometria?

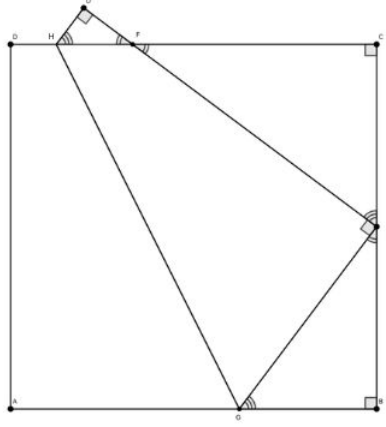


Marcar apenas uma oval.

- ☐ Sim
☐ Não

APÊNDICE I - Demonstração do Teorema de Haga

Segue a demonstração do teorema de Haga como utilizado na oficina proposta, com o objetivo de interpretar o teorema para encontrar o segmento que representa $1/3$ do lado do quadrado.



Como características da figura nós temos:

1. O lado do quadrado será denominado como L
2. Os ângulos $\hat{GBE} = \hat{ECF} = \hat{GED'} = \hat{FD'H} = 90^\circ$ sempre;
3. O ponto E é o ponto médio do lado $\overline{CB}$;
4. $\overline{EG} = \overline{AG}$, assim como $\overline{D'H} = \overline{DH}$, por conta do próprio cenário em que o problema se enuncia, em uma dobra de papel;
5. os triângulos $\triangle GBE$, $\triangle FD'H$ e $\triangle ECF$ são semelhantes pelo critério AAA (ângulo, ângulo, ângulo).

Com essas informações, podemos demonstrar que quando realizada a dobra que leva o ponto A até o ponto E , todos os vértices do quadrado são divididos mantendo proporções fixas, sendo que buscamos encontrar o segmento que representa exatos $\frac{1}{3}$ do lado L , esse processo ocorre da seguinte forma:

Primeiro, acharemos $\overline{BG}$ para podermos aplicar a semelhança. Pelo Teorema de Pitágoras temos o seguinte:

$$\begin{aligned} (\overline{BG})^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 &= (L - \overline{BG})^2 \\ (\overline{BG})^2 + \frac{L^2}{4} &= L^2 - 2(\overline{BG})L + (\overline{BG})^2 \rightarrow \overline{BG} = \frac{3L}{8} \end{aligned}$$

Com esse valor, podemos utilizar a semelhança dos triângulos $\triangle GBE$ e $\triangle ECF$ para encontrar o valor de $\overline{CF}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CF}}{\frac{L}{2}} &= \frac{\frac{3L}{8}}{\frac{3L}{8}} \\ \frac{3\overline{CF}L}{8} &= \frac{L^2}{4} \rightarrow \overline{CF} = \frac{2L}{3} \end{aligned}$$

Como $\overline{CF} + \overline{DF} = L$, então, $\overline{DF}$ só pode ser igual a $\frac{1}{3}$ do lado.

■