

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA**

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**CONTRIBUIÇÕES DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL E DA
MEDIÇÃO COM TECNOLOGIAS PARA O ENSINO-
APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES**

LORENA GONÇALVES DA LUZ

GOIÂNIA

2023

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor:

Matrícula:

Título do Trabalho:

Autorização - Marque uma das opções

- ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
- ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data 30/12/2023 (Embargo);
- ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☒ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 05/07/2023.
Local Data



Documento assinado digitalmente
LORENA GONCALVES DA LUZ
Data: 05/07/2023 16:43:53-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

LORENA GONÇALVES DA LUZ

**CONTRIBUIÇÕES DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL E DA
MEDIÇÃO COM TECNOLOGIAS PARA O ENSINO-
APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – IFG – Campus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

GOIÂNIA

2023

L979c Luz, Lorena Gonçalves da.
Contribuições do ensino desenvolvimental e da mediação com tecnologias para o ensino-aprendizagem de sistemas lineares / Lorena Gonçalves da Luz. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023.
74 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Matemática – álgebra linear. 2. Matemática - sistemas lineares - software GeoGebra . I. Vaz, Duelci Aparecido de Freitas (orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 512.5

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

CONTRIBUIÇÕES DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL E DA MEDIAÇÃO COM TECNOLOGIAS PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES

por

LORENA GONÇALVES DA LUZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 21 de junho de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Profª. Ma. Ana Cristina Gomes de Jesus (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof Me. Elias Rafael de Sousa (UNIFAN/Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Elias Rafael de Sousa, Elias Rafael de Sousa - Outros - Ifg - Câmpus Goiânia (10870883000225), em 21/06/2023 17:53:47.
- Ana Cristina Gomes de Jesus, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 21/06/2023 17:53:21.
- Duelci Aparecido de Freitas Vaz, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 21/06/2023 17:52:37.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 07/06/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 417187
Código de Autenticação: 9abe987d1e



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Rua 75, nº 46, Centro, GOIÂNIA / GO, CEP 74055-110
(62) 3227-2805 (ramal: 2805)

RESUMO

Busca-se por meio desse trabalho realizar a apresentação de uma proposta de atividade de estudo do conceito de Sistema Linear pelas conjecturas do Ensino Desenvolvidor proposto por Davydov, no qual tratará uma recomendação acerca do método e aplicação didática para pesquisadores docentes em Matemática e Educação Matemática. Sendo, uma investigação que se caracteriza pela natureza bibliográfica qualitativa. Nesse trabalho, em um primeiro momento apresentaremos um estudo sobre o caráter sociocultural do indivíduo e sua mediação simbólica por meio dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural para compreendermos a Teoria do Ensino Desenvolvidor de Davydov e sua análise para a desenvolvimento experimento didático formativo davydoviano e suas ações, para a construção da atividade de estudo. No segundo e terceiro momento discutimos sobre o uso das tecnologias no ensino e a mediação de Davydov através das tecnologias, além de realizar uma apresentação do *software* GeoGebra e relatar sobre a aplicabilidade matemática com as tecnologias. Para finalizar, em um quarto momento foi apresentado um levantamento do conceito de Sistemas Lineares e sua trajetória lógico-histórica, com a apresentação da história por trás da conceitualização. A partir da formalização dos momentos anteriores, é desenvolvido a proposta de uma atividade de estudo com a abordagem do uso do GeoGebra para resolução de Sistemas Lineares, utilização o *software* com meio auxiliador no processo de ensino-aprendizagem do aluno.

Palavras-chave: Ensino Desenvolvidor, Atividade de Estudo, Sistema Linear, GeoGebra.

ABSTRACT

The aim of this work is to present a proposal for a study activity on the concept of Linear System through the conjectures of Developmental Teaching proposed by Davydov, which will address a recommendation about the method and didactic application for teaching researchers in Mathematics and Mathematics Education. Being, an investigation that is characterized by the qualitative nature. In this work, at first, we will present a study on the sociocultural character of the individual and its mediation served through the budgets of the Historical-Cultural Theory to understand Davydov's Theory of Developmental Teaching and its analysis for the development of Davydov's formative didactic experiment and their actions, for the construction of the study activity. In the second and third moments, we discussed the use of technologies in teaching and Davydov's mediation through technologies, in addition to presenting the GeoGebra software and reporting on the mathematical applicability with technologies. Finally, in a fourth moment, a survey of the concept of Linear Systems and its logical-historical trajectory was presented, with the presentation of the history behind the conceptualization. From the formalization of the previous moments, the proposal of a study activity is developed with the approach of the use of GeoGebra for solving Linear Systems, using the software as an auxiliary means in the student's teaching-learning process.

Keywords: Developmental Teaching, Study Activity, Linear System, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Janela de Visualização	34
Figura 2 - Janela de Álgebra.....	35
Figura 3 - Campo de Entrada.....	35
Figura 4 - Menu Principal.....	35
Figura 5 - Barra de Ferramentas	35
Figura 6 - Janelas da Barra de Ferramenta	36
Figura 7 - Janela de Visualização 3D	37
Figura 8 - Barra de Ferramentas 3D	37
Figura 9 - Janela CAS.....	37
Figura 10 - Visão geral	38
Figura 11 - Interpretação no plano - Exemplo 1.....	54
Figura 12 - Interpretação no plano - Exemplo 2.....	55
Figura 13 - Interpretação no plano - Exemplo 3.....	57
Figura 14 - Interpretação no espaço - Exemplo 1.....	58
Figura 15 - Interpretação no espaço - SPD.....	60
Figura 16 - Interpretação no espaço - SPI	61
Figura 17 - Interpretação no espaço – SI - I	63
Figura 18 - Interpretação do espaço - SI - II.....	64
Figura 19 - Situação-Problema - Modelação da ação.....	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Plano de aula para a formação de conceito e análise de Sistemas Lineares com auxílio do GeoGebra.....	66
Tabela 2 - Situação-problema e sua solução	67

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
1. ENSINO DESENVOLVIMENTAL	13
1.1 A EDUCAÇÃO E O ENSINO.....	13
1.2 O CARÁTER SOCIOCULTURAL DO DESENVOLVIMENTO HUMANO.....	13
1.3 MEDIAÇÃO SIMBÓLICA	15
1.4 ZONA DE DESENVOLVIMENTO REAL E PROXIMAL	17
1.5 EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO DAVYDOVIANO.....	19
2. TECNOLOGIAS NO ENSINO	26
2.1. AS TECNOLOGIAS	26
2.2. A QUESTÃO DA MEDIAÇÃO	26
2.3. A MEDIAÇÃO COM TECNOLOGIAS NO SENTIDO DE DAVYDOV	29
3. MATEMÁTICA NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM.....	32
3.1. A MATEMÁTICA COM AS TECNOLOGIAS.....	32
3.2. GEOGEBRA.....	33
3.2.1. VISÃO GERAL	34
4. PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM NO SENTIDO DE DAVYDOV	39
4.1. O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE SISTEMAS LINEARES.....	39
4.2. SISTEMA LINEAR.....	44
4.2.1. EQUAÇÕES LINEARES	44
4.2.2. SOLUÇÃO DE EQUAÇÃO LINEAR.....	45
4.2.3. SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES	45
4.2.4. SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR.....	46
4.2.5. CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR	46
4.2.6. SISTEMA MATRICIAL.....	47
4.3. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	48
4.3.1. OPERAÇÕES ELEMENTARES.....	48
4.3.2. MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO	49
4.3.3. SISTEMAS EQUIVALENTES	50
4.3.4. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN	50
4.3.5. REGRA DE CRAMER	51
4.4. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA.....	53
4.4.1. INTERPRETAÇÃO NO PLANO.....	53
4.4.2. INTERPRETAÇÃO NO ESPAÇO	58
4.5. A ATIVIDADE DE ESTUDO BASEADA NO ESTUDO DE SISTEMA LINEAR COM O GEOGEBRA	65

CONCLUSÃO.....	71
REFERÊNCIAS	73

INTRODUÇÃO

Neste trabalho temos como objetivo investigar as contribuições do Ensino Desenvolvimental de Davydov procurando discutir aspectos específicos para a educação matemática e as contribuições que a teoria trouxe para o meio educacional juntamente a proposta de mediação com uso de tecnologias, relacionando assim as tecnologias e a educação. Centralizando o conteúdo de Sistemas Lineares para o referencial de nossa pesquisa. Onde visamos contribuir no contexto de ensino-aprendizagem de uma temática nova dentro da perspectiva escolar.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos uma breve contexto sobre a teoria histórico-cultural de Vygotsky, demonstramos sobre as características do desenvolvimento humano, a definição de mediação baseado em seus pressupostos, a caracterização de zona de desenvolvimento proximal e real, representações estas necessárias para introdução da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov que propõe desenvolver a capacidade mental e o cognitivo dos alunos, por meio dos conteúdos e o desenvolvimento da conceitualização da atividade de estudo.

No capítulo 2, buscamos mostrar sobre o uso das tecnologias no ensino, sua ligação com a mediação simbólica e demonstração da mediação com as tecnologias para Davydov.

No capítulo 3, destacamos sobre a conexão da Matemática com as tecnologias e a apresentação do software utilizado neste trabalho o GeoGebra e suas funções.

No capítulo 4, discorreremos sobre uma proposta de ensino-aprendizagem no sentido davydoviano, com a introdução do movimento lógico-histórico do conceito de Sistemas Lineares, com destaque para alguns matemáticos presentes e marcantes para historicidade do conceito por meio de uma pesquisa bibliográfica e qualitativa. Seguindo, da definição de elementos teóricos do conteúdo de Sistema Lineares, com os principais métodos utilizados para a resolução dos sistemas. Posteriormente, apresento modelos de interpretação geométrica para Sistemas Lineares 2x2 (no plano) e 3x3 (no espaço), exatamente nesse ponto obteremos o uso do *software* GeoGebra para auxílio na representação. Para finalizar, introduziremos a proposta de uma atividade de estudo no sentido de Davydov para o conceito e conteúdo de Sistemas Lineares com o auxílio do GeoGebra.

Elegemos como prioridade desse projeto de pesquisa investigar as relações entre tecnologias e educação, a partir do pressuposto da Teoria do Ensino Desenvolvimental,

do qual será contextualizado a partir do conteúdo relacionado a Sistemas Lineares, por meio de pesquisas bibliográficas cultuando uma promoção de ensino-aprendizagem significativa para futuros estudantes. Oferecendo assim alternativas para que dificuldades encontradas na aplicabilidade da temática possam ser elucidadas de forma clara, que associe conceitos e definições, motive o ato investigativo e incentive a capacidade mental e cognitiva do aluno, resultando na melhoria do conhecimento empírico do aluno. Cabe enfatizar que isso exige criar, desenvolver e avaliar um ambiente de ensino-aprendizagem que proporcione um desenvolvimento lógico-histórico para a compreensão efetiva, com investimento na capacidade do aluno de adquirir sua independência e autonomia da sua aprendizagem.

Indagamos: Como o uso da Teoria do Ensino Desenvolvimental pode ser aplicada para o emprego dentro de sala do conteúdo de Sistemas Lineares e seus antecessores, e de que maneira pode auxiliar no ensino-aprendizagem dos alunos? E como as tecnologias, de amplas formas, tem potencial de desenvolve-se em conjunto com a aplicabilidade do estudo e benefício para a compreensão desejada? E como o desempenho do professor pode ampliar com a junção da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov para o engrandecimento do objeto de estudo? Visando, como ponto central a dificuldade dos estudantes na temática de Sistemas Lineares, e após a análise de pesquisas acadêmicas, observamos a persistência do desentendimento em definições conceituais, e nas soluções de exercícios que exigem a aplicação de assuntos que antecedem Sistemas Lineares, como matrizes, e como efeito, não efetivam satisfatoriamente conteúdos posteriores. Apoiando-se nos alicerces do Ensino Desenvolvimental juntamente com auxílio do uso de tecnologias construiremos uma pesquisa onde buscaremos encontrar alternativas que possam ser empregadas futuramente em âmbito escolar que saiam do tradicionalismo metodológico, enfatizando o processo de ensino-aprendizagem do aluno. A presente pesquisa é definida de natureza bibliográfica, onde buscaremos realizar uma abordagem teórica sobre o processo desenvolvimental do ensino-aprendizagem do conteúdo de Sistema Linear. Tendo como objetivo uma aprendizagem consciente e crítica do conteúdo de Sistema Linear, e fixando como condição essencial aos alunos a compreensão e a análise da realidade de modo dialético.

1. ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Iremos percorrer sobre os aspectos do conceito da teoria histórico-cultural de Vygotsky (1896 - 1934) e suas proporções para o desenvolvimento da teoria do Ensino Desenvolvidimental de Davydov.

1.1 A EDUCAÇÃO E O ENSINO

O uso da educação, em diferentes abordagens, carrega consigo uma significância imprescindível. Seguimos, um modelo dialético de educação decorrente de uma postura dialógica que é voltada para a construção coletiva de espaços, assim, operando valores de potencialização social, cultural, econômica e política para transformação coletiva. Seguindo, a mesma vertente de transformação potencial obtemos o conceito de ensino, uma ação para instrução que consiste na aquisição de informações e demonstrações apresentadas, ou seja, a reprodução do que foi desenvolvido com parcialidade na compreensão, traduzindo-se à uma etapa de formação do caráter instrumental, visando um fim a si mesmo diante à aprendizagem produzida. Relacionando-se com isso, temos nas palavras de Libâneo (2023, p. 5), “que a educação e o ensino são responsáveis os processos do desenvolvimento mental dos alunos, incluindo a formação de capacidades ou qualidade mentais”.

Podemos relacionar educação, ensino e também o desenvolvimento psíquico humano, a partir das contribuições realizadas por Lev V. Vygotsky (1896 - 1934), com seus estudos sobre a perspectiva histórico-cultural e suas implicações na educação, na medida em que traz importantes reflexões sobre a relação ensino-aprendizagem.

1.2 O CARÁTER SOCIOCULTURAL DO DESENVOLVIMENTO HUMANO

Vygotsky é um autor que tem em sua trajetória preceitos que impactam a educação em geral, a valorização do professor, a intervenção pedagógica e o papel desse educador na formação do sujeito, quer dizer, o sujeito que passa pela escola tem nela uma instituição fundamental para seu desenvolvimento. Que leva em consideração a fala da escola, a fala do professor, e também apoia a ação pedagógica e a intervenção.

Uma maneira interessante de introduzir os conceitos de Vygotsky sobre desenvolvimento é através da referência aos planos genéticos de desenvolvimento. Vygotsky, como um autor interacionista, destaca a importância das ações e atividades para o desenvolvimento humano. A abordagem interacionista de Vygotsky se torna palpável quando exploramos as quatro fases de desenvolvimento - filogênese,

ontogênese, sociogênese e microgênese - que juntas caracterizam o funcionamento psicológico dos indivíduos.

Resumidamente: a filogênese é a história da espécie humana; a ontogênese é a história do indivíduo da espécie; a sociogênese é a história cultural, do meio cultural que o sujeito está inserido, e a microgênese é um aspecto mais individual do desenvolvimento. Rego (2014, p.24), afirma sobre os estudos de Vygotsky, que “o projeto principal de seu trabalho consistia na tentativa de estudar os processos de transformação do desenvolvimento humano na sua dimensão filogenética, histórico-social e ontogenética”.

Vygotsky, por meio do princípio do método dialético, observou questões marcantes no desenvolvimento humano, a saber, ele ocorre a partir da relação do homem com o contexto social ao longo de sua trajetória histórico-cultural.

Com o propósito de pesquisar a origem das características psicológicas humanas, assim, analisar a educação como meio social, unicamente humano. Vygotsky se interessou a estudar os comportamentos e psiquismo dos animais, a fim de apontar as diferenças e semelhanças com os seres humanos.

Por meio das concepções de Rego (2014), exploraremos a natureza de cada um desses processos de transformação. Iniciaremos com a filogênese, que abrange a formação histórica de uma espécie. Por exemplo, cada espécie animal possui uma trajetória única, estabelecendo limites e possibilidades para o funcionamento psicológico. Tomando, por esse ponto, pode-se estabelecer que existem habilidades que somos e que não somos capazes de desenvolver. Assim, define o que o ser humano pode fazer (andar) e o que não pode fazer (voar), por exemplo. Essas características são influentes no desenvolvimento psíquico. Não sabemos voar, mas construímos tecnologias que nos permitem fazê-lo.

Temos também a ontogênese que diz respeito ao desenvolvimento do indivíduo de uma determinada espécie. Cada indivíduo de uma espécie tem um caminho de desenvolvimento (ele nasce, se desenvolve, se reproduz, e morre). Tudo isso, ocorre em um determinado tempo, ritmo e sequência. Estando ligado a filogênese, ambos são de natureza biológica, considerando a pertinência a espécie. Deduzindo assim que somos membros de uma determinada espécie, passando por um percurso de desenvolvimento, esse que pode ser determinado pela passagem e pela a sequência desenvolvimental da espécie.

A sociogênese é a história da cultura em que o sujeito está inserido. Em que as formas de funcionamento cultural interferem (definem) no funcionamento psicológico do indivíduo, definindo assim a significação pela história-cultural. E pode ser dividida em dois aspectos. No primeiro aspecto, a cultura funciona como uma espécie de alargador das potencialidades humanas. No segundo, cada cultura organiza o desenvolvimento de maneira única. Concluindo, cada processo do plano genético de desenvolvimento se conecta, assim com retrata Rego (2014),

E por essa razão que Vygotsky procura compreender a evolução da cultura humana (aspecto sociogenético), o processo de desenvolvimento individual (aspecto ontogenético) e se detém especialmente, no estudo do desenvolvimento infantil, período em que estas "ferramentas" são aprendidas, ou seja, é nesse período que acontece o surgimento do uso de instrumentos e da fala humana. (REGO, 2014, p. 49)

Ao falarmos sobre o fato de que cada fenômeno psicológico tem sua própria história, estaremos discutindo sobre o conceito de microgênese. Isso, levando em consideração que o contexto de *micro* se subteme a representação do indivíduo. Podendo envolver um processo do “saber” ao não “saber” sobre determinado movimento ou ação, envolto em certo período. Compreender o interesse do desenvolvimento e analisar de forma individual, para o fenômeno ou momento da sua história.

A microgênese, nos faz analisar cada pequeno fenômeno e como constitui uma história, mas, com experiências diferentes e particularidades próprias. Demonstrando, um esboço da singularidade de cada pessoa e da heterogeneidade entre os seres humanos, definindo a construção histórica do sujeito.

Acredita-se que para compreender as ações humanas é necessário analisar suas relações biológicas e cultural. No qual foram constituídas ao decorrer da sociedade humana fazendo mediação entre o homem e o mundo. No próximo tópico discorreremos a questão da mediação do desenvolvimento humano de Vygotsky.

1.3 MEDIAÇÃO SIMBÓLICA

O conceito do senso comum para a palavra ‘mediação’ está associado à noção de intermediação, na qual um objeto é colocado entre outros. Por exemplo, ocorre a interposição de um objeto entre dois elementos. No entanto, de acordo com a concepção de Vygotsky (1984), o conceito de mediação refere-se à relação do ser humano com o mundo não sendo direta, mas sim mediada. Portanto, pode ser realizada através de instrumentos e signos. A descoberta do uso de signos como meios auxiliares para

solucionarem ações cotidianas, tais como lembrar, comparar, relatar, escolher, é análoga a invenção de instrumentos, que está situada ao papel de um instrumento no trabalho.

A mediação por instrumentos é constituída pelo fato que nos relacionamos com os objetos do mundo, por exemplo, usando ferramentas intermediárias. Portanto, os instrumentos produzem uma mediação entre a ação concreta do indivíduo sobre o mundo.

Os signos são formas posteriores de mediação, que constituem em mediações de natureza semiótica ou simbólica, e induzem há uma interposição entre o sujeito e o seu objeto de conhecimento, entre o psiquismo e o mundo, não os analisando de maneira concretizada como nos instrumentos, mas sim, de forma simbólica. Mesmo que o objeto seja concreto e marcado no mundo exterior, não é um objeto de natureza instrumental, e sim, de natureza simbólica. No sentido, que não age diretamente sobre algo, mas sim, em um plano simbólico. Segundo Rego (2014, p.43) “o pressuposto da mediação é fundamental na perspectiva sócio-histórica justamente porque é através dos instrumentos e signos que os processos de funcionamento psicológico são fornecidos pela cultura”.

Outro plano em que os signos aparecem são os planos totalmente simbólicos, dos quais são envoltas através do sistema psicológico que funcionam com mediador semiótico, demonstrando assim, uma característica tipicamente humana, como, a possibilidade de representação mental, de um mundo que é somente simbólico. Um dos exemplos que podemos ressaltar é: a associação de objetos, que nos leva há uma representação gráfica e visual, e também a ideia de palavra associada ao objeto. Do qual é expedida por meio de memórias e momentos passados, com transições simbólicas, ou seja, mediações entre o sujeito e o mundo.

Vygotsky distingue dois elementos básicos responsáveis por essa mediação: o instrumento, que tem a função de regular as ações sobre os objetos e o signo, que regula as ações sobre o psiquismo das pessoas. (...) Vygotsky esclarece que o uso de instrumentos e dos signos, embora diferentes, estão mutuamente ligados ao longo da evolução da espécie humana e do desenvolvimento de cada indivíduo. (REGO, 2014, p. 50 e 51)

Assim, analisando as funções mediadora presente nos instrumentos, Vygotsky os relacionou com as ações humanas, sendo instrutor de mudanças ampliando a possibilidade de intervenção da natureza.

Esse processo de mediação pode ocorrer por meio de um sujeito, mas não diretamente pelo indivíduo em si, estabelecendo uma conexão mediada pelo conhecimento prévio do outro. No contexto educacional, isso adquire extrema

importância, uma vez que grande parte do conhecimento transmitido é mediado pela experiência de um terceiro. Dessa forma, o indivíduo não precisa necessariamente vivenciar diretamente a ação para adquirir conhecimento prévio, o que contribui para um processo de aprendizagem essencial para o desenvolvimento histórico.

Desse modo, os sistemas simbólicos, trabalham como ações mediadoras de conexão entre os indivíduos para esclarecer as informações partidas entre grupos culturais diversos. Portanto, Vygotsky (1984) afirma que processos mentais são aprimorados pela interação cultural e social, por meio da mediação simbólica. Nesse contexto, no próximo tópico apresentaremos a definição vygotskiana de zona de desenvolvimento proximal e real.

1.4 ZONA DE DESENVOLVIMENTO REAL E PROXIMAL

As relações entre desenvolvimento e aprendizagem são aspectos importantes da teoria de Vygotsky, pois desenvolveu múltiplos trabalhos na área da psicologia ligada à educação, postulado em um fenômeno básico de sua teoria, no qual o desenvolvimento passa do externo para interno. Esse ideal é de suma importância, para a introdução da aprendizagem nas definições dos ramos do desenvolvimento.

Para Vygotsky, a aprendizagem promove o desenvolvimento, e através da aprendizagem ocorre a motivação para o desenvolvimento do sujeito, isso atrelado a ideia de que o caminho para o desenvolvimento está em aberto. A cultura é definida de acordo com a trajetória do sujeito, temos também a noção de especificidade de cada indivíduo, que vai ser definida na sua interface com o mundo, nas suas experiências de aprendizagem e nos seus procedimentos microgenéticos. Rego (2014) declara que, baseando-se nos pressupostos vygotskianos, o ato de aprender é de extrema necessidade e uma espécie de garantia do desenvolvimento das funções psicológicas humanas e da organização cultural.

Um aspecto importante da teoria de Vygotsky, com relação ao desenvolvimento, é a perspectiva de que o desenvolvimento deve ser compreendido de forma prospectiva e não retrospectiva. Portanto, devemos realizar uma análise prévia do futuro. Normalmente, tendemos a analisar algo que já aconteceu, que já está consolidado e efetivado. No entanto, é necessário direcionar nossa atenção para o objeto em processo, especialmente quando ocorre a intervenção pedagógica, a ação educacional de qualquer tipo. Esse momento é também uma oportunidade em que o desenvolvimento está em

efervescência, representando um fenômeno a ser compreendido pelo estudioso do desenvolvimento.

O nível de desenvolvimento real pode ser entendido como referente àquelas conquistas que já estão consolidadas na criança, aquelas funções ou capacidades que ela já aprendeu e domina, pois já consegue utilizar sozinha, sem assistência de alguém mais experiente da cultura (pai, mãe, professor, criança mais velha etc.). Este nível indica, assim, os processos mentais da criança que já se estabeleceram, ciclos de desenvolvimento que já se completaram. (REGO, 2014, p. 72)

Para este pensamento básico de Vygotsky, pode-se explicar a zona de desenvolvimento, com outros dois conceitos. O nível de desenvolvimento real refere-se aos processos desenvolvimentais já concretizados, ou seja, até o qual a criança já chegou, o desenvolvimento passado ou o olhar retrospectivo.

O nível de desenvolvimento potencial menciona acontecimentos que serão desenvolvidos, mas que podemos imaginar que está próximo de acontecer, deduzimos essa proximidade pelo fato da relação com os objetos de conhecimento de ação, mas que necessita da intervenção de um parceiro mais experiente o indivíduo conclui sua atividade. O fato de o indivíduo não desenvolver sozinho a tarefa, mas com ajuda, significa que aquilo pertence a um plano de desenvolvimento que está próximo de se consolidar. O que está posto entre a ação já desenvolvida de maneira autossuficiente e o que está posto a ser realizado com auxílio de um terceiro. Vygotsky denomina zona de desenvolvimento proximal, aquilo que representa funções não foram efetivadas, e o que permite a intervenção e podemos operar as transformações. Vygotsky (1984) discorre que:

O aprendizado é o responsável por criar a zona de desenvolvimento proximal, na medida em que, em interação com outras pessoas, a criança é capaz de colocar em movimento vários processos de desenvolvimento que, sem a ajuda externa, seriam impossíveis de ocorrer. Esses processos se internalizam e passam a fazer parte das aquisições do seu desenvolvimento individual. É por isso que Vygotsky afirma que "aquilo que é a zona de desenvolvimento proximal hoje será o nível de desenvolvimento real amanhã - ou seja, aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã" (VYGOTSKY, 1984, p. 98 apud REGO, 2014, p. 74)

É importante ressaltar que o conceito citado anteriormente, é de valia significativa, se centralizamos como base o plano educacional, pelo fato de conseguir analisar essencialmente o desenvolvimento individual, levando em consideração várias posições, ocasiões e conquistas que complementem esse processo, podendo também identificar limites em relação a zona desenvolvimental proximal do indivíduo.

Portanto, o uso da zona de desenvolvimento proximal está relacionado a distancia entre a capacidade autônoma do individuo realizar uma atividade e a

realização efetivada com a colaboração de outro elemento social de seu convívio, correlacionando os níveis de desenvolvimento potencial e real de maneira única. Assim, posteriormente, abordaremos sobre a teoria do Ensino Desenvolvidor de Davydov, pesquisador posterior à Vygotsky, no qual utilizaremos muito dos aspectos apresentados nas seções anteriores e discutiremos sobre o experimento didático formativo (atividade de estudo) davydiano e as seis ações necessárias para sua formulação.

1.5 EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO DAVYDOVIANO

Vasily Vasilyevich Davydov (1930-1998) foi um psicólogo e pedagogo russo, que dedicou-se há um longo e árduo processo de trabalhos científicos com a finalidade de elaborar uma teoria didática de ensino centrada no desenvolvimento humano, baseando-se na teoria histórico-cultural de Lev Semionovitch Vygotsky (1896-1934) e seus seguidores, em busca de uma metodologia de ensino que abrangesse o conceito proposto por Vygotsky de Zona de Desenvolvimento Proximal dando ênfase na sistematização da aprendizagem do conhecimento teórico-científico.

Davydov além de aprimorar a concepção teórico pedagógica dentro da teoria histórico-cultural levou como consequências práticas a relação entre educação e desenvolvimento situada por Vygotsky, denominando sua teoria como Teoria do Ensino Desenvolvidor. O psicólogo russo, enxergava o ensino como um constituinte meio de desenvolvimento humano, partindo da aprendizagem infantil, centralizando como ponto de suas pesquisas o esclarecimento do processo de ensino através da atividade de estudo e da aprendizagem do educando, dando destaque ao valor pedagógico e didático de seu trabalho, voltados a psicologia de formação dos pensamentos teóricos-científicos do aluno.

Começando seus trabalhos de pesquisa com crianças, em idades do ensino primário, considerava a análise de novas experiências psicológicas e de seus acréscimos, assim, procurando entender o significado nessa faixa etária. Acreditava-se, então, que essas crianças produziram tarefas de aprendizagem que causariam mudanças significativas, havendo assim a necessidade de se organizar um sistema de ensino capaz de construir nessas crianças uma Zona de Desenvolvimento Proximal.

De acordo com Libâneo (2004), a Teoria do Ensino Desenvolvidor propõe desenvolver a capacidade mental e o cognitivo dos alunos, por meio dos conteúdos. O cerne dessa teoria é o ensino voltado para a formação de conceitos, onde o aluno participa firmemente dessa formação, e não simplesmente o memoriza. A partir das concepções da Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky, a Teoria do Ensino

Desenvolvimental é discutida como uma teoria de ensino que objetiva a formação integral e o desenvolvimento do educando, construindo um pensamento com potencial para desempenhar simultaneamente o papel de ferramenta cognitiva e produto da busca pelo conhecimento. Tal pensamento é denominado, por Davydov, como pensamento teórico ou pensamento dialético. De outra forma, se o aluno for orientado a pensar teoricamente, além de dominar novos conteúdos ele assimilará as ferramentas mentais que lhe permitem pensar e se desenvolver com autonomia no conhecimento.

Nas palavras de Libâneo e Freitas:

A base do ensino desenvolvimental, portanto, é o conteúdo a ser ensinado. Os métodos e a organização do ensino por sua vez, derivam-se dos conteúdos. Para Davydov, aprender teoricamente consiste em captar o princípio geral, as relações internas de um conteúdo, o desenvolvimento histórico do conteúdo. É aprender a fazer abstrações para formar uma célula dos conceitos-chaves da matéria, para fazer generalizações conceituais e aplica-las a problemas específicos. (LIBÂNEO; FREITAS, 2007, p. 47)

Assim, o ensino deve ser esquematizado de tal modo, que possibilite ao estudante a apropriação dos conceitos em nível do que se tem mais atual, em sua totalidade, como síntese de suas transformações históricas (DAVYDOV, 1988). Com o objetivo uma aprendizagem consciente e crítica dos conteúdos escolares buscando condições essenciais aos alunos para a compreensão e análise da realidade de modo dialético, colocando o professor numa posição de mediador, entre os conceitos e os alunos. Fazendo com que os alunos consigam internalizar os conceitos de forma que possam utilizá-los amplamente, levando-os a estarem ativos durante o processo, facilitando a apropriação dos conceitos estudados.

Seguindo este ideal Davydov realiza pesquisas acerca da construção do Ensino Desenvolvimental.

O conhecimento que representa as inter-relações entre o conteúdo interno e externo do material a ser apropriado, entre aparência e essência, entre o original e o derivado, é chamado conhecimento teórico. Tal conhecimento somente pode ser apropriado pelo aluno se ele for capaz de reproduzir o verdadeiro processo de sua origem, recepção e organização, isto é, quando o sujeito pode transformar o material. Nessa condição, o material de estudo adquire um propósito orientado para a aprendizagem, pois há uma intencionalidade de reproduzir atos que outrora levaram pessoas a descobrir e conceituar um determinado conhecimento teórico (DAVYDOV, 1988, p. 127)

Trata-se da análise de dois tipos de pensamentos, o empírico e o teórico, colocando as características individuais de cada um e como as trabalhará-las na escola, ambos se complementam, mas têm o funcionamento diferentes. Para Davydov (1995), o pensamento teórico consiste em criar a generalização substantiva de algum sistema e em seguida desenvolver mentalmente esse sistema mostrando seu desenvolvimento

universal. Por sua vez, a denotação do raciocínio empírico está conectada a ações externas possibilitando a generalização formal, nos aspectos superficiais do objeto, induções fundamentais para o desenvolvimento do educando.

De acordo com Davydov, a base do Ensino Desenvolvimental está ligada à teoria da atividade de estudo, através dela o aluno formula ações mentais próprias para a construção de conceitos teórico visando em um objeto, agindo em sua realidade. Freitas (2016), cita

... na organização da atividade de estudo é a conexão entre percurso investigativo científico e percurso de estudo do objeto pelo aluno. Na investigação do objeto, o pesquisador se apropria de seus detalhes, analisa suas diversas formas de desenvolvimento e estabelece seus nexos. Porém, na exposição do resultado da investigação, apresenta o movimento real que lhe permitiu chegar a esse resultado. (FREITAS, 2016, p.402)

Outro procedimento investigativo científico baseado da teoria histórico-cultural, é o experimento didático formativo, estudado por Vygotsky e seus colaboradores. Davydov, afirma que o experimento formativo visa a investigação da descoberta de novas concepções mentais dos educandos no decorrer da atividade de estudo, por meio de orientações e comandos para atingir objetivos traçados.

O método do experimento formativo caracteriza-se pela intervenção ativa do pesquisador nos processos mentais que ele estuda. Neste sentido, ele difere substancialmente do experimento de verificação (constatação, comprovação) que somente enfoca o estado já formado e presente de uma formação mental. A realização do experimento formativo pressupõe a projeção e modelação do conteúdo das formações mentais novas a serem formadas, dos meios psicológicos e pedagógicos e das vias de sua formação. Ao pesquisar os caminhos para realizar este projeto (modelo) no processo do trabalho de aprendizagem cognitiva feito com as crianças, pode-se estudar também as condições e regularidades da origem, da gênese das novas formações mentais correspondentes. Em nosso ponto de vista, o experimento formativo pode ser chamado de experimento genético modelador, que plasma uma combinação (unidade) entre a investigação do desenvolvimento mental das crianças e a educação e ensino destas mesmas crianças (DAVYDOV, 1988, p. 52).

Temos, assim, que o experimento didático formativo é essencial para o desenvolvimento mental se forma durante o processo de educação e ensino do indivíduo, sendo constituído para a análise desse processo. O experimento formativo pode servir como apoio e orientação para a construção de um plano de ensino, por exemplo. Segundo Davydov (1988), uma das características primordiais é a intervenção do pesquisador, que resultam em ações mentais constituídas por meios psicológicos e pedagógicos. Como, na perspectiva vygotskyana, a centralização não é em ações já desenvolvidas, e sim, visando o meio educacional, assim naquelas que poderá ocorrer a mediação entre professor, estudante e atividade de estudo.

Com enfoque também na conjectura entre ensino-aprendizagem, e situando algumas observações coerentes para o educador, por exemplo, obter conhecimento das

primícias da teoria histórico-cultural e do Ensino Desenvolvimental, domínio pleno da temática aplicada, além de metodologias, e noções didático-pedagógico dos processos educativos. Para a análise desse processo de educação e ensino individual, a estruturação da atividade de estudo do aluno deve ser por meio de tarefas formuladas contendo ações praticadas. A usabilidade dos conceitos dos objetos é parte do processo de operação mental do indivíduo, mas, em situação cotidiana escolar como o professor promove esse processo?

O conceito teórico exige do discente uma atividade com propósito estabelecido, no qual é desenvolvido com um experimento didático formativo objetivando a ocupação das ações mentais relacionadas ao conceito teórico, ocorrendo a transformação do objeto, originando ações mentais parecidas a colocadas anteriormente por cientistas, desenvolvendo conceitos próprios. Com a descoberta de um conteúdo novo, concluímos que os alunos ainda não obtêm conhecimento do objeto, não possuem concentrações (ações, motivos, objetivos, etc) que podem ser elaboradas para o estudo adequado do objeto. A solução pode ser considerada a atividade de estudo e seu objeto como uma unidade, objetificando no final do estudo a formação do conhecimento do próprio e a melhor forma de o conhecer. Assim, o conceito é envolto de ações distintas aos pensamentos investigativos que os ligam.

Para planejar uma atividade de estudo, o professor deve dispor ao aluno que seus pensamentos sejam ou posam correlacionar a uma relação universal do objeto que é mostrada na investigação científica, para a compreensão do objeto, formando assim modos de análise parecidos com os utilizados pelos cientistas. Assim, os alunos constroem ações mentais para se pensar o objeto, podendo se relacionar com o processo de ensino e aprendizagem, com uma explicação guiada para que o conhecimento teórico abstrato possa torna-se concreto. A construção do objeto de estudo dessa forma leva-nos a entender o conceito como uma concretização do geral.

Davydov, baseou-se na formulação da estrutura da atividade humana de Leontiev (1983). Para a composição da atividade de estudo, temos os seguintes aspectos: necessidade, motivo, objetivo, ações e operações e condições, também compostos na atividade de Leontiev, mas Davydov adicionou o aspecto: desejo. O desejo se torna primordial para o desenrolar dessa composição, pois, é elemento básico da necessidade.

Davydov (1999), discorre sobre a relevância das emoções para a realização das tarefas que o indivíduo se dispõe a concluir. Para ele as emoções capacitam o sujeito para que consiga alcançar seus objetivos, se suas ‘emoções’ desprezarem alguma de

suas escolhas, não conseguirá executar a atividade. A usabilidade da criatividade é de suma importância, também, para a atividade de estudo, a busca por tarefas criativas estimula os alunos a motivarem a sua aprendizagem.

Assim, a atividade de estudo expressa a relação ativa e criadora do aluno com o objeto de estudo visando transformá-lo (ao fazer as relações entre o externo e o interno no conteúdo) e, desse modo, formar o conhecimento teórico. Esse conhecimento somente pode ser apropriado “reproduzindo-se o próprio processo do seu surgimento, obtenção e formalização, ou seja, quando o sujeito transforma novamente um material” (Davydov, 1999, p.). Desse modo, o material a ser assimilado tem um objetivo pedagógico porque agora o professor tem a intenção de ajudar o aluno a “percorrer de novo (reproduzir) os caminhos que outrora levaram os indivíduos a descobrir e conceituar o conhecimento teórico” (Davydov, 1999b, p.). Trata-se, pois, na escola, de formar nos alunos a necessidade da atividade de estudo e os meios de realizá-la como contribuição ao desenvolvimento de sua personalidade. (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p.340)

O conteúdo aplicado e a sua análise é uma das condições primordiais para o professor começar seu planejamento, conseqüentemente a construção do experimento didático formativo, no qual objetifica a conciliação da relação geral e universal do objeto. O uso da epistemologia, ou seja, o estudo crítico na compreensão dos princípios, fazendo com que o professor faça uma análise histórica do objeto, considerando amplamente também seu aspecto social e cultural, condicionando em exame lógico histórico do cotidiano do indivíduo.

Trazendo assim o uso conceitual para a esquematização da atividade de estudo e a necessidade de seu aprendizado, que resultará para o aluno na aquisição de um universo de saberes novo, desenvolvendo suas experimentações mentais do objeto mantendo o aluno ativo através da investigação.

A elaboração da atividade de estudo, contém alguns princípios que podem servir de referência para o professor, dentre eles estão: o desenvolvimento de ações motivadoras ligados a vivência dos alunos e as relações entre os conceitos científicos e a compreensão de conceitos sociais, que servirão de apoio para o uso do desejo dos alunos para a aprendizagem, onde colocarão em abrangência suas necessidades e indagações. Por meio de uma atividade inovadora e verificativa, o professor consegue levar o aluno a ações e pensamentos parecidos com de cientistas, havendo ligações entre o seu percurso investigativo científico e o percurso do estudo do objeto, se tornando uma situação social vivida o para o aluno.

Para Davydov, uma forma de alcançar a atividade de estudo proposta, temos a afirmação de que o ensino do conteúdo através da resolução de situações problemas tem uma aplicabilidade segura para a área de pesquisa e autonomia do aluno, apoiando seu desenvolvimento dos conhecimentos e aprendizagens com o mundo. A aplicação de

uma problemática para resolução do aluno é uma maneira de manter ático seu interesse pelo objeto de estudo, um meio mobilizador de seu potencial, levando a uma solução teórica (científica), trazendo uma ruptura do senso comum relacionado ao conteúdo, a descoberta do desconhecido. Para Davydov (1981), a formação da atividade de estudo envolve o aprimoramento de cada um de seus componentes, suas inter-relações e suas transformações mútuas. Isso inclui o aperfeiçoamento dos aspectos motivacionais e operacionais do estudo, a transformação do aluno em sujeito da atividade de estudo que ele realiza, e o domínio, por parte do aluno, das formas de atividade de estudo conjunta. Essa formação também está relacionada ao impacto no desenvolvimento da atividade de estudo. Portanto, os níveis de maturidade dessa atividade, juntamente com seus componentes, são características qualitativas importantes para a eficácia do trabalho tanto do professor com o domínio do conteúdo aplicado quanto do estudante na execução da mesma.

Para a finalização da composição do experimento didático formativo - atividade de estudo - temos como base a estruturação de seis ações que compõem a teoria de Davydov.

- transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado;
- modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras;
- transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em “forma pura”;
- construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
- controle da realização das ações anteriores;
- avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada. (DAVYDOV, 1988, p. 173)

A atividade de estudo é introduzida mediante a apresentação de uma problemática, esta necessita de análise dos dados da tarefa a fim de desvendar a relação universal do objeto. Posteriormente os alunos devem focar na elaboração de um modelo de descoberta da relação universal que é expresso em forma de objeto, simbólica ou gráfica, consistindo em recriar a representação de determinada relação. A relação universal aparece na atividade de estudo de maneira abstrata, a transformação do modelo da relação principal, funciona a fim de estudar o objeto com a possibilidade de deduzir propriedades em aspecto mais concreto e não apenas puro, a partir da solução de ademais tarefas em que temos o objeto em situações particulares.

Para a resolução de tarefas que tem ligação primária com a relação universal e vínculo com os particulares, acontecendo a criação de um determinado sistema de

tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral, partindo daqui a mudança significativa do desempenho docente proporcionando autonomia ao aluno e a aprendizagem do objeto. Como forma de assegurar os processos anteriores ocorre o monitoramento das etapas anteriores, em que consiste na verificação das competências estabelecidas, onde o aluno realiza uma reflexão crítica de sua atividade de estudo. Finalizando o processo de ações de estruturação de uma atividade de estudos, temos a avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada pelo professor, assim podendo examinar a aprendizagem do conceito.

2. TECNOLOGIAS NO ENSINO

Nesse capítulo será feita uma exposição sobre o uso das tecnologias no ensino, sua relação com a mediação simbólica de Vygotsky, e a conjectura da mediação com tecnologias nos aspectos davydovianos.

2.1. AS TECNOLOGIAS

Temos uma geração repleta de tecnologias digitais com ganhos esperados e sonhados, como a aquisição de computadores, smartphones, tablets, e diversos outros aparelhos eletrônicos e também mediáticos. Essas aquisições são muito valiosas no âmbito científico, e âmbito escolar, com a introdução de aparelhos mais modernos para exames laboratoriais, ou com uso de calculadoras científicas mais sofisticadas para resolução mais ágil de equações matemáticas, por exemplo.

Situação essa que provocou mudanças em todo meio social, e o no meio educacional não seria diferente, tais avanços reformularam nosso cotidiano, nossa maneira de pensar, nossa maneira de trabalhar e até a nossa maneira de estudar. Visando, a educação como substância elementar para a formação intelectual do indivíduo, proporcionando a ele uma preparação necessária para a construção de suas funções mentais de racionalização, socialização e desenvolvimento cognitivo. Vemos, também, que o uso da tecnologia pode ser de importante serventia para essa construção, porém, quando vivenciamos em sala de aula, por exemplo, a narrativa é outra, de acordo com Peixoto (2016) nos deparamos com uma realidade problemática em relação à aplicabilidade e usabilidade das tecnologias, que poderiam se tornar aliadas, mas acabam de certo modo transformando-as em um emaranhado de obstáculos, que são capazes de serem melhorados com a prática apropriada.

Baseando-se nessas transformações, o ambiente escolar pode transforma-se em conceitos de transmissão de conhecimento, assim, o papel do docente nesse desenrolar é de mediador. Portanto, em decorrência dos inúmeros avanços tecnológicos que aparecem, o processo pedagógico ver um novo momento, no qual está relacionado a reorganização e redefinição de metodologias, colocando a escola em novas perspectivas.

2.2. A QUESTÃO DA MEDIAÇÃO

O significado atribuído a palavra mediação é bastante trabalhado, mas, é visto ainda como a funcionabilidade de elaborar a relação entre dois objetos/ indivíduos que estão separados, sendo um conceito que transpassa diversos meios teóricos, também

sendo um conceito que instiga o pensamento sobre as ações humanas levando o debate com as complexidades que o envolve.

Para a contextualização utilizaremos nesse capítulo a mediação conceituada por Vygotsky, da base materialista-dialética da teoria histórico-cultural, que é considerada por ele um fator primordial para a aprendizagem, acreditando que através da interação ocorre a construção do conhecimento do indivíduo, como forma de tentativa de remoção do dualismo instaurado a mediação como intermédio de dois conteúdos, nesse caso específico, a relação entre a tecnologia e a educação.

A mediação é confirmada por Vygotsky como a intervenção do elemento mediador entre o homem e a natureza, através de instrumentos, e na concepção com os outros, por meio dos signos, uma vez que para ele a aprendizagem é uma atividade social. Assim, em uma visão dialética de conhecimento, não preceitua o dualismo entre a teoria e a prática, é um processo que relaciona o sujeito (homem) e objeto (natureza) em desenvolvimento em um contexto próprio.

Na abordagem proposta por Vygotsky (2004, 2007), o desenvolvimento humano pode ser pensado como produtor de identidade de contrários, recusando a oposição exclusivamente externa entre o indivíduo e o meio. A essa oposição, a teoria histórico-cultural propõe a contradição interna dos dois momentos indissociáveis, no entanto distintos do pensamento humano em suas formas superiores: o pensamento e a linguagem. (PEIXOTO, 2016, p. 372)

Vygotsky (2000) diz que a construção do desenvolvimento psicológico dos aprendizes é de serventia da educação. Portanto, temos com o professor um papel de organizador do meio social educativo, sendo ele o mediador entre o saber científico e o aluno, pois essa parte do saber popular, que pode e deve ser tomado com ponto inicial para se obter os objetivos esperados pela a instituição de ensino e/ou pelo docente. Assim, levando em consideração o conhecimento do aluno, o professor se estabelece em um paradigma no qual já adquiriu sua construção com a cultural de sua sociedade, desenvolvendo uma relação com os conteúdos escolares. O desenrolar da conceitualização de mediação, no meio educacional, conseqüentemente, mostra para a valorização do trabalho do professor, sendo a escola uma instituição que leva aos alunos uma formação a favor da transformação social.

Peixoto (2016) discorre que a mediação que é desenvolvida entre professor e aluno é o cerne da relação pedagógica, pois ambos medeiam juntos, cada um com suas características e funções mentais relacionadas ao desenvolvimento, do qual se trata da

apropriação de um psiquismo historicamente desenvolto na forma de relações sociais entre os humanos. A compreensão do processo de ensino-aprendizagem trata-se da interação com a relação que estabelece com o meio interno e externo. O professor é o atuante na promoção de desejo do aluno em aprender e responsável por propor as situações cognitivas necessárias. O diálogo, a troca de experiências, o debate, a apresentação de dúvidas e perguntas que extinguem ao resultado, a orientação, o desafio relacionado a dinâmica, as reflexões propostas, a persistência na forma e relação com o trabalho realizado, o adquirir novos saberes e conceitos, a colaboração com desenvolvimento crítico, são aspectos essenciais para a caracterização da mediação pedagógica e através dele o discente poderá se relacionar, por exemplo, com o uso de tecnologias, pois é preciso comunicação, programação e compreensão total dos conhecimentos para esse adição.

Mas a relação do conceito de mediação para a análise do desenvolvimento pedagógico com as novas tecnologias acarreta numa concepção da qual as tecnologias são responsáveis por um processo de superação dos conhecimentos de senso comum para obtenção imediata dos conhecimentos científicos. Podemos fixar essa relação adversa, onde começamos a compreender a problematização do uso, por exemplo, de termos que enaltecem as tecnologias como “retentoras” da educação, como “*computador como ferramenta de mediação*” e/ou “*mediação tecnológica*” (PEIXOTO, 2016). Elas podem ser meios mediadoras, mas devem ser portar como relação mediadora, para não nos tornamos reféns das perspectivas de uma tecnologia “salvadora” e levarmos em conta a tecnologia como forma de interlocução neutra para corporação em âmbito escolar.

De acordo com Peixoto (2016), o avanço tecnológico deixa a civilização passiva, de certa forma cômoda as suas facilidades, confiamos e colocamos responsabilidades que muitas vezes não devem ser atribuídas a esse avanço, numa forma de endeusamento ou como disposto de ações emocionais, como distinção do maquinário por ferramenta do “bem” ou do “mal”, nos colocando num loop infinito de segmentações de idolatrias (salvadoras ou apreensoras) tanto para os humanos quanto para as tecnologias. Esse pensamento dualista estabelecido por uma má interpretação pode ser confundido pela ação proposta e não pela a forma que essa ação será executada, os meios pelos os fins.

Para superar esse pensamento, é necessário analisar as atividades pedagógicas por meio da aplicação de tecnologias, estabelecendo conexões através de computadores, *smartphones*, sites, *softwares*, jogos, vídeos e outras formas de intermediação com as tecnologias. O objeto que é responsável pela mediação de uma atividade resulta na

movimentação de uma atribuição interna e externa do sujeito, ou seja, individual e coletiva. A perspectiva formal e dualista da mediação com tecnologia se formula na distinção entre sujeito e objeto, podemos considerar no ato instrumental de Vygotsky (2004), no qual objeto e ferramenta desempenham funções distintas qualitativa e funcionalmente, para contextualizar o funcionamento mental e contexto sociocultural compostos.

Segundo Peixoto (2016), consideramos as práticas pedagógicas com a aplicação das tecnologias como conhecimentos complementares aos saberes teóricos e práticos. Assim, a mediação pode apresentar formas de dinâmicas que permitem apreender as relações entre sujeitos sociais.

A mediação com tecnologias está relacionada ao uso do objeto tecnológico com o intermeio do professor e do discente nesse processo, dos quais trabalharam em conjunto para a compreensão da aprendizagem do conceito. Assim, no próximo tópico trataremos sobre a mediação com tecnologias no sentido davydoviano.

2.3. A MEDIAÇÃO COM TECNOLOGIAS NO SENTIDO DE DAVYDOV

Com a discussão trabalhada em construção do conceito de mediação pedagógica relacionadas ao uso de novas tecnologias, esse entendimento é necessário para o trabalho docente seja suficiente para a aprendizagem significativa do discente, é uma maneira de realizar isso é através dos ensinamentos das vertentes histórico-cultural de Vygotsky e da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov. De acordo com esses autores, é preciso que o professor consiga atuar com ações possíveis de se fixar pela Zona de Desenvolvimento Proximal do aluno, assumindo a mudança do desenvolver potencial para o real do aluno, assim temos a teoria da atividade (experimento didático formativo) como alicerce para que o estudante consiga concretizar o conhecimento concreto e abstrato apropriando o desenvolvimento científico.

Voltaremos a abordar conceitos levantados anteriormente, de dois tipos de pensamento: o empírico e o teórico. Um está relacionado a experiência sensorial, e a outra a abstração dos objetos. O pensamento empírico leva ao aluno formular conteúdos por meio da generalização, da qual parte da comparação de objetos, para a identificação de algo que difference-os ou qualifique-os de formas comuns em suas estruturas mentais. O pensamento teórico está postulado da análise de relações e atribuições externas do objeto, que usadas para construir uma abstração conceitual.

O pensamento empírico, de acordo com Davydov (1988), quando conectado com o ensino, cria uma concepção que prioriza a sua organização com aspectos

concretos, o que leva a falta de estímulo do pensamento teórico, seguindo esse pensamento o ensino acaba sendo pautado na transmissão de conhecimento, monótona e maçante, não acontecendo a motivação necessária para ser trabalho a investigação científica incentivadas pelos alunos. O que resulta num processo de ensino-aprendizagem que não experimenta, que não trabalha o novo, e nem a criatividade, se tornando um momento muitas vezes insignificante para o estudante.

Diferentemente do pensamento empírico, o pensamento teórico preocupa-se com as mudanças do objeto e suas características distintas, resultante de constatações, compreensões e explicações sobre o objeto, se correlacionando com a abstração. Abstração essa que permite a análise, conhecendo assim toda sua essência, de maneira histórica e concreta do objeto.

No pensamento teórico, o próprio concreto aparece duas vezes: como ponto de partida da contemplação e representação, reelaboradas no conceito, e como resultado mental da reunião das abstrações. Aqui é importante ressaltar que, no fim das contas, o caráter “concreto” ou “abstrato” do conhecimento não depende de estar próximo das representações sensoriais, mas de seu próprio conteúdo objetivo. Se o fenômeno ou o objeto é examinado pelo homem independentemente de certa totalidade, como algo isolado e autônomo, trata-se somente de um conhecimento abstrato, por mais detalhado e visível que seja, por mais “concretos” que sejam os exemplos que o ilustram. Ao contrário, se os fenômenos ou objeto é tomado em unidade com o todo, se é examinado na sua relação com outras manifestações, com sua essência, com a origem universal (lei), trata-se de um conhecimento concreto, mesmo que seja expresso com a ajuda dos signos e símbolos mais “abstratos” e “convencionais” (DAVYDOV, 1988, p. 150)

A escola moderna tem como primórdio essencial a centralização na capacidade de avaliação dos conteúdos que são passados e a apropriação dos conceitos que interceptam a formação, dos indivíduos em desenvolvimento, o pensamento que acarreta a construção de suas capacidades mentais e habilidades científicas, argumentos defendidos por Davydov.

Davydov (1988) reconhecia que a tecnologia pode ampliar o acesso dos alunos a recursos educacionais e informações diversas. Ele enfatizava que o uso da tecnologia poderia fornecer oportunidades para que os alunos explorem diferentes perspectivas, enriquecendo sua compreensão e estimulando sua curiosidade intelectual. Portanto, o uso adequado da tecnologia no processo educacional pode se tornar uma ferramenta para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, desde que seja mediado por um professor, que compreenda as possibilidades e limitações da tecnologia e seja capaz de orientar os alunos no uso reflexivo e significativas dessas ferramentas.

Possibilitando que o professor possa se dispor de uma atividade pedagógica que se relacionando com a forma de mediação, poderá ser estabelecida em ambientes

escolares, assim ele conseguirá por meio de um planejamento (por exemplo, uma atividade de estudo), fazer com que o aluno vença suas noções superficiais do conteúdo (senso comum) e torne-as essências (teoria).

3. MATÉMATICA NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM

Neste capítulo discorreremos sobre aplicabilidade das tecnologias no Ensino de Matemática e apresentação do software GeoGebra e suas funções.

3.1. A MATEMÁTICA COM AS TECNOLOGIAS

O ensino da Matemática na atualidade exige dos docentes a adição de novas metodologias, a reformulação de táticas já praticadas e a distinção de suas estratégias. Sendo a mediação pedagógica por meio das novas tecnologias um ótimo companheiro para o desembaraçar dessa crise.

A disciplina da matemática desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de processos de pensamento e na aquisição de atitudes que vão além do seu próprio escopo. Ela tem a capacidade de cultivar, nos alunos, habilidades para resolver problemas reais, fomentando o hábito de investigação, promovendo confiança e adaptabilidade para enfrentar situações novas. Além disso, a matemática possibilita a formação de uma visão abrangente e científica da realidade, a percepção da beleza e harmonia presentes, bem como o estímulo ao desenvolvimento da criatividade e de outras habilidades pessoais (BRASIL, 1998).

A Matemática, pode ser como uma disciplina temida por diversos estudantes, pelo decorrer das gerações, pode encontrar meios viáveis de formular métodos pedagógicos com o intermeio das tecnologias, possibilitando situações no qual o aluno consegue desenvolver de maneira independente sua própria aprendizagem, com auxílio, por exemplo, de computadores, tablets ou smartphones com *softwares* matemáticos, jogos educativos, vídeos-aulas centradas em determinado conteúdo ou até mesmos sites especializados. Estabelecendo assim uma relação entre homem e máquina, mas, sempre pautados em planejamentos objetificados e organização centrada para essa mediação.

O avanço tecnológico contribui de fato para o processo de ensino-aprendizagem do indivíduo, principalmente na área da Matemática, que está bastante relacionada, por exemplo, a programação, sendo menção para o desenvolvimento tecnológico.

Assim, as funções da matemática e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender matemática deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer matemática e de um saber pensar matemático. (BRASIL, 1998, p. 252).

O uso do maquinário induz no âmbito escolar uma tarefa social poderosa, que proporciona aos processos fundamentos para o desenvolvimento do saber matemático,

no mais concreto dos atos, trazendo transformação, experimentação, interpretação, demonstração, visualização e muito mais.

3.2. GEOGEBRA

Compreendendo a complexidade da relação entre educação e tecnologias, optamos como sugestão o uso do *software* GeoGebra, por ser dinâmico, tanto para professores quanto para estudantes de Matemática, e público em geral, podendo o *software* auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Seguindo, a definição do próprio site do programa,

GeoGebra é um *software* dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. Além disso, o GeoGebra oferece uma plataforma online com mais de 1 milhão de recursos gratuitos criados por nossa comunidade em vários idiomas. (...) GeoGebra é uma comunidade de milhões de usuários localizada em quase todos os países. Tornou-se o fornecedor líder de *software* dinâmico de matemática, apoiando a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. O mecanismo matemático da GeoGebra alimenta centenas de sites educacionais em todo o mundo de diferentes maneiras, desde demonstrações simples até sistemas de avaliação on-line completos (GEOGEBRA, 2023, ON-LINE)

O GeoGebra é um *software* gratuito, disponível tanto para ser baixado em computadores quanto em aparelhos portáteis, como *smartphones* ou tablets. É um mecanismo que se interliga entre si, conectando os seus usuários a diversas áreas da Matemática de maneira dinâmica, pois, apresenta uma interface acessível e bons recursos que também são interativos.

A primeira versão do programa foi desenvolvida como projeto para a sua dissertação de mestrado de Markus Hohenwarter, em Matemática Educacional e Ciência Computacional pela Universidade de Salzburg na Áustria, no final do ano de 2001. Desenvolvendo assim um *software* que é destaque pela sua praticidade, tanto no âmbito educacional quanto no científico. A versão atual do *software*, GeoGebra Clássico 6¹, mas, temos também ele em seu formato online com seções divididas.

Além de funções, que proporcionam um acesso igualitário, que serve do estudante de fundamental ao professor de pós-graduação, como vídeos-aulas em seu canal no YouTube², exemplos de tarefas³ e atividades com o uso do programa, livros

¹ Site para o download do aplicativo: <https://www.geogebra.org/download>

² Canal do YouTube: <https://www.youtube.com/@ogeogebra>

³ Atalho para obtenção de materiais: <https://www.geogebra.org/materials>

com manuais no site⁴, uma sala de aula interativa e cursos disponibilizados por semestre com certificação gratuita.

3.2.1. VISÃO GERAL

O GeoGebra apresenta diversas ferramentas que são aplicáveis para a composição de praticidade.

Informando algumas áreas principais:

a) Janela de Visualização;

Ícone se encontra na parte direita da tela, no qual é exibido as representações gráficas e geométricas dos objetos, como polinômios, retas e funções. As construções exibidas são produzidas no comando da aba de Entrada.

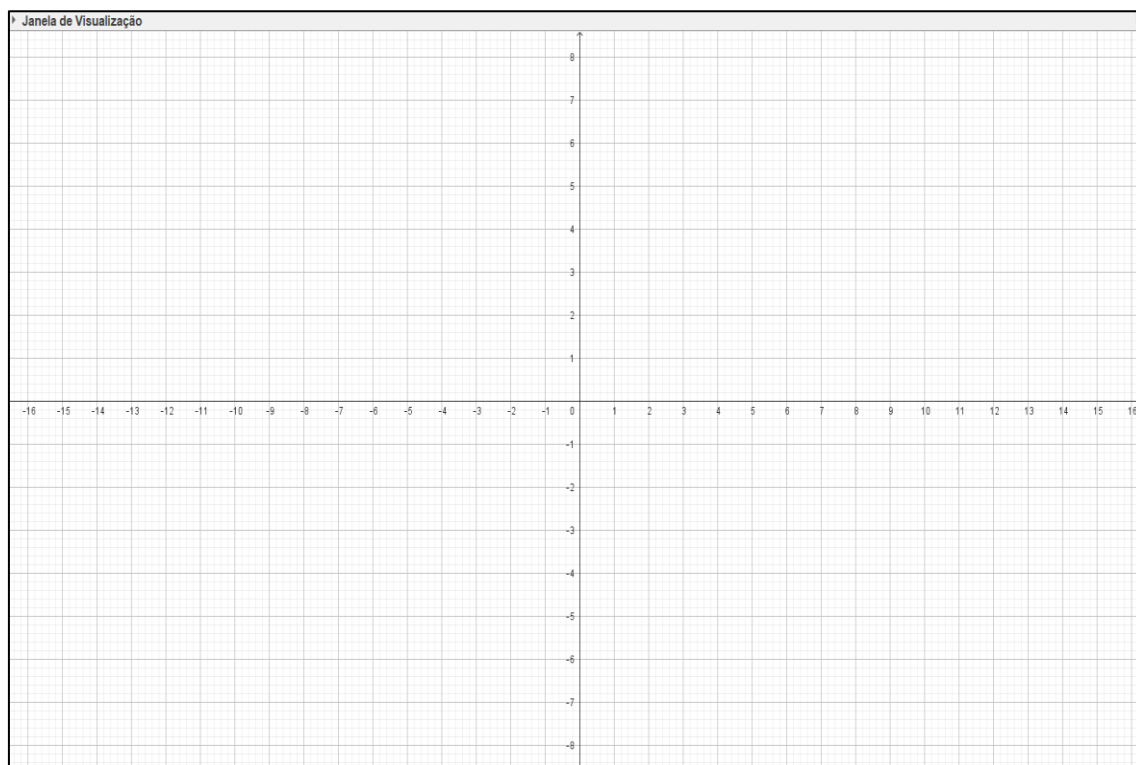


Figura 1 - Janela de Visualização

Fonte: *Software GeoGebra versão 5.0.706.0 – 3D.*

b) Janela de Álgebra;

Ícone se encontra na parte esquerda da tela, no qual é exibido as representações algébricas e numéricas dos objetos construídos.

⁴ Site do GeoGebra: <https://ogegebra.com.br/site/>



Figura 2 - Janela de Álgebra

Fonte: *Software GeoGebra versão 5.0.706.0 – 3D.*

c) Campo de Entrada;

Ícone que se encontra da parte inferior da tela, onde são digitados comandos para a construção dos objetos desejados, para realização de movimentos ou para a modificação de objetos.



Figura 3 - Campo de Entrada

Fonte: *Software GeoGebra versão 5.0.706.0 – 3D.*

d) Menu Principal;

Ícone no qual é disponibilizado as opções de: arquivar, gravar, exibir, ferramentas, editar, de abrir um novo documento, dentre outros.

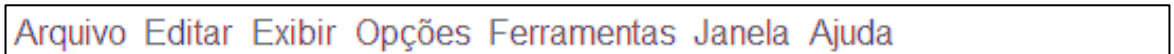


Figura 4 - Menu Principal

Fonte: *Software GeoGebra versão 5.0.706.0 – 3D.*

e) Barra de Ferramentas;

Ícone no qual se dispõem todas as ferramentas para a construção dos objetos, como figuras geométricas, pontos e retas.



Figura 5 - Barra de Ferramentas

Fonte: *Software GeoGebra versão 5.0.706.0.*

É composta por doze janelas com funções essenciais para a construção, modificação e movimentação dos objetos construídos. Abaixo, intitulamos cada janela da Barra de Ferramentas.

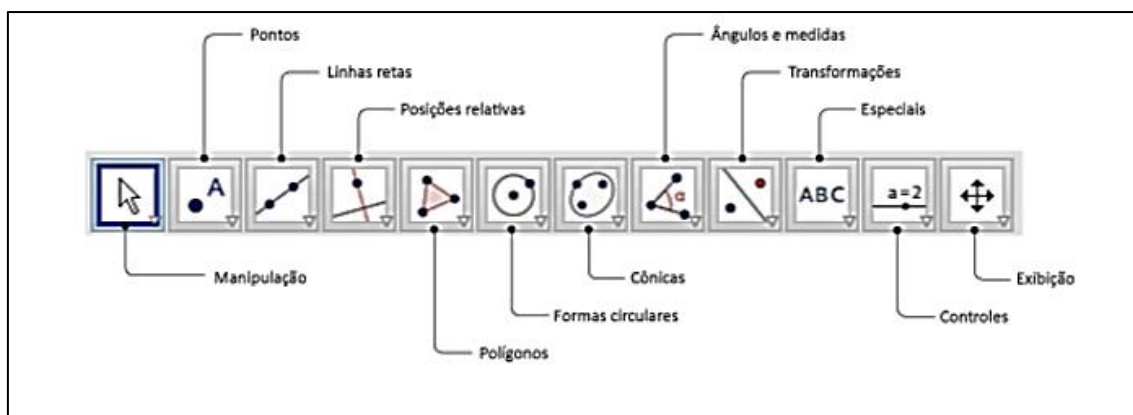


Figura 6 - Janelas da Barra de Ferramenta

Fonte: *Software GeoGebra* versão 5.0.706.0.

E ademais, temos:

f) Janela de Visualização 3D;

Esse ícone permite a mostragem da imagem em uma apresentação tridimensional, ou seja, em 3D com a inclusão de ferramentas de auxílio na barra de ferramentas da interface.

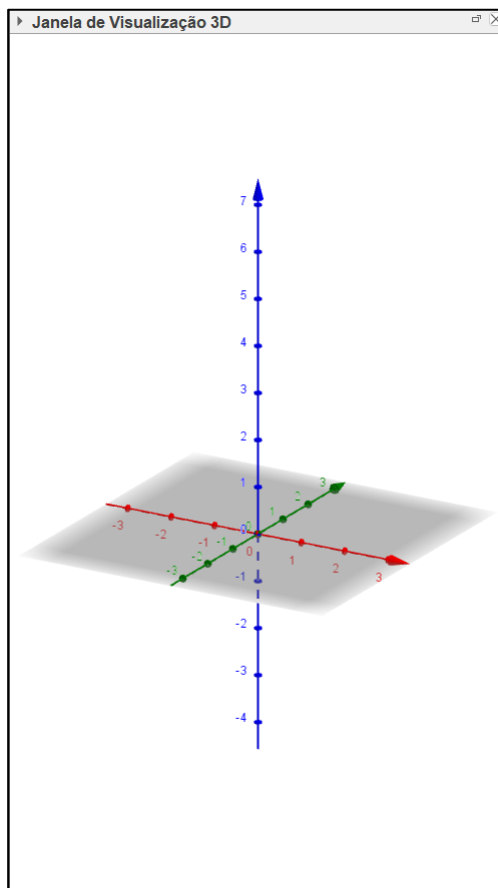


Figura 7 - Janela de Visualização 3D

Fonte: *Software GeoGebra versão 5.0.706.0 – 3D.*

Sua nova barra de ferramentas apresenta 14 janelas, das quais 7 são de função específica da janela de Visualização 3D.



Figura 8 - Barra de Ferramentas 3D

Fonte: *Software GeoGebra versão 5.0.706.0 – 3D.*

g) Janela CAS.

O ícone Janela CAS são células, nas quais tem entradas na parte superior da interface, e resolução na inferior da célula. Com esse ícone conseguimos realizar cálculos numéricos e, também expressões numéricas. No GeoGebra temos a Janela CAS como Sistema de Computação Algébrica (Computer Algebra System), que é acionado através do Menu, na aba Exibir e clicando no comando.

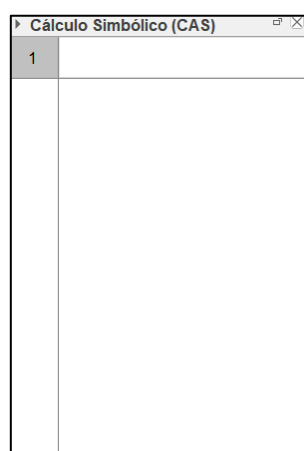


Figura 9 - Janela CAS

Fonte: *Software GeoGebra versão 5.0.706.0 – 3D.*

- Visão geral do software;

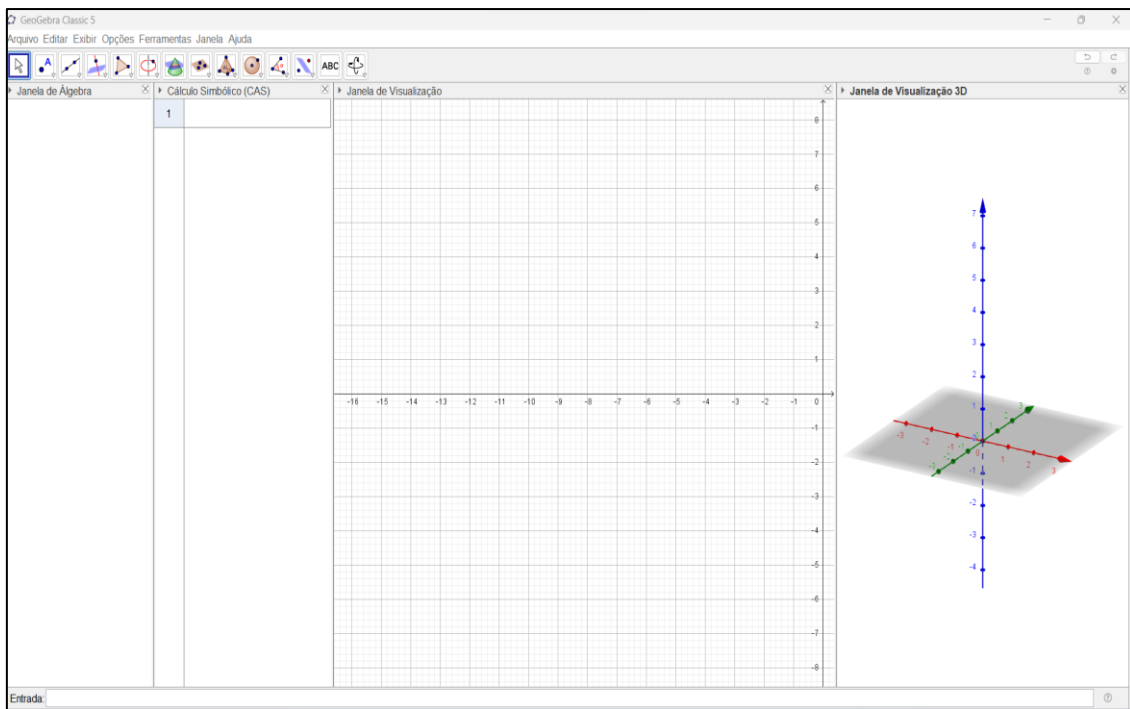


Figura 10 - Visão geral

Fonte: *Software GeoGebra versão 5.0.706.0 – 3D.*

Notamos que o GeoGebra é repleto de ferramentas com diversas funcionalidades, que são utilizadas por diversos professores e alunos, assim como também utilizado para representação geométrica nesse trabalho de Sistemas Lineares para o auxílio na percepção do conteúdo.

4. PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM NO SENTIDO DE DAVYDOV

Apresentação de uma proposta de ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares na concepção do Ensino Desenvolvimental de Davydov. Neste capítulo demonstraremos um estudo bibliográfico sobre o conceito e a historicidade do Sistema Linear, além da sua ligação com demais conteúdo. Em seguida, abordaremos sobre aplicabilidade da temática central do capítulo – Sistema Linear – com o software GeoGebra para a interpretação geométrica da mesma, abordagem que será de apoio dando futuramente para futuros trabalhos, como para professores e pesquisadores da área educacional e matemática e para o processo de ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos dos discentes.

4.1. O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE SISTEMAS LINEARES

A utilização do contexto histórico entrelaçado no desenvolver de determinado conteúdo é uma alternativa metodológica excelente. A História da Matemática apresenta conceitos próprios para cada momento vigente na sociedade e se moldura a partir do tema proposto, o uso didático dessa abordagem é mostrar para o discente que todos os contextos de trabalho em sala é desenvolvimento da construção no decorrer dos tempos dos conceitos matemáticos, em períodos atuais e passados.

A abordagem dos sistemas lineares na sua contextualização histórica se desenvolve com diversas contribuições de estudiosos matemáticos para chegarmos à construção atual, com teoremas, demonstrações, notações e conceitos mudados e aperfeiçoados nesse decorrer temporal.

Os sistemas de equações lineares são diretamente interligados aos estudos de matrizes e determinantes, tanto nos seus processos de resolução quanto na interpretação e amostragem, o que não se resultaria de maneira diferente em seu contexto histórico. Podemos encontrar os primeiros traços de origem desse método em registros babilônicos (1800 a.C. - 500 a.C.), onde temos como exemplos dessas atribuições as formas encontradas em tabuletas das quais demonstram que eles conseguiam resolver sistemas simples para a resolução de problemas com duas incógnitas.

A resolução de equações, mesmo em níveis diversos de complexidade, eram bastante utilizados pelos babilônicos (EVES, 2004). Mas, era a partir da álgebra que eles demonstravam seus problemas geométricos. Em notação atual, temos o seguinte exemplo.

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

Dos quais valiam-se da troca de palavras por representações simbólicas como: comprimento (x), largura (y) e área (xy), denotavam também termos para profundidade, pela a adição do símbolo z , com a intenção de indicar volume de alguma forma.

Temos, também, a isenção de inscritos em papiros como, por exemplo, o papiro de Rhind (1650 a.C.) encontrado no Egito, que conforme ressalta Boyer (1996) tal contem cerca de 85 problemas dos quais comprovavam que os egípcios usavam como aliada a matemática. Eves (2004, p.73) nos propõe o seguinte problema, com a resolução pela a Regra da Falsa Posição.

$$x + \frac{x}{7} = 24$$

Uma forma de solução é estimulando um valor para x do qual assumiremos $x = 7$. Portanto, teremos:

$$7 + \frac{7}{7} = 7 + 1 = 8$$

Com a substituição temos que o resultado encontrado 8 é diferente do esperado 24, ou seja $8 \neq 24$, não satisfazendo a equação. No entanto, podemos resolvê-la pela a multiplicação do 8 por 3 para obtermos 24, no qual o valor correto de x será 3. $7 = 21$.

Os chineses, por volta do ano 200 a.C., já continham um método para resolução de sistemas lineares, cuja posteriormente seria ideia pioneira do Método de Eliminação de Gauss, usando-se da eliminação dos coeficientes dos termos desconhecidos em uma tabela, diferenciando-se no fato de que cada equação uma coluna em vez de uma linha. Provas desse algoritmo são encontradas no livro “Nove capítulos sobre a Arte Matemática”, no qual constam uma das mais antigas citações sobre o conceito de matrizes, sendo um dos livros mais importantes para a matemática oriental.

Como exemplo de método de solução chinês, apresentamos o Método Fangcheng, que é apresentado no já citado livro “Nove capítulos a Arte Matemática”, do qual exhibe técnicas em arranjos numéricos em forma quadricular.

Um problema citado,

Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou.

Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (EVES, 2011, p. 268)

Que escrito em maneira algébrica fica

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

E será representado, pelo método chinês, assim

1	2	3		0	0	3
2	3	2	← Com a redução, teremos →	0	5	2
3	1	1		36	1	1
26	34	39		99	34	39

A diferença mais perceptível entre a forma de resolução atual e a chinesa é a mudança de posição das linhas pelas colunas e a escrita da direita para a esquerda. Temos como resultado da incógnita $z = 99/36$, as demais são encontradas por substituição.

O estudo moderno de sistemas de equações lineares se iniciou simultaneamente com pesquisas de dois matemáticos, o japonês Seki Kowa (1642 – 1708) que calculava determinantes, mas o aplicava em equações e não em sistemas. E o alemão Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716) no ano de 1693, onde instaurou a conceitualização de determinantes para resolução desses sistemas, do qual se utilizava de um conjunto de índices como coeficiente de um sistema de três equações com as incógnitas x e y .

Em uma de suas cartas encaminhadas ao matemático Guillaume François – o L'Hospital (1661 – 1704) Leibniz apresentou o primeiro registro, e explicou como funcionaria a resolução por eliminação de incógnitas, empregando os números para indicar linhas e coluna, no qual o primeiro número indica a linha e o segundo número a coluna.

$$\begin{cases} a + bx + cy = 0 \\ d + ex + fy = 0 \\ g + hx + ky = 0 \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{Reescrevendo com expressões numéricas}} \quad \begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$$

Com solução,

$$10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 = 12 \cdot 21 \cdot 30$$

Embora, o suíço Gabriel Cramer (1704 – 1752) tenha mais reconhecimento pela a regra de Cramer, a solução de equação linear em duas ou mais incógnitas foi inicialmente desenvolvida pelo escocês Colin Maclaurin (1698 -1746). A regra como conhecemos atualmente tinha o objetivo de facilitar a construção algébrica para a solução de n equações lineares com n incógnitas. Ele a escreveu,

$$A_n = Z_n z + Y_n y + X_n x + \dots$$

Percebeu que para os casos de uma ou mais incógnitas, havia uma ‘regra geral’, onde as incógnitas eram apresentadas por meio de frações com o mesmo denominador, que era resultado das somas de suas partes positivas e negativas, que eram o resultado do produto de seus coeficientes, tendo assim um único coeficiente por linha e coluna.

Apresentamos, um exemplo de como Cramer encontrou a regra geral,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

O trabalho de Cramer elaborou a efetivação de um método mais simples para obtenção do denominador comum das frações e de um método que encontrasse o sinal da parte desse denominador além da obtenção dos numeradores dessas frações.

O matemático francês Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 – 1796) no ano de 1771 induziu a primeira abordagem lógica da teoria dos determinantes independente do uso de sistemas lineares, sugerindo o uso de uma notação posicional, que se concentra na combinação dos coeficientes. No ano seguinte, 1772, o também francês Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) demonstrou um teorema que permite o cálculo da resultante para uma expressão de determinante por meios de cálculos dos complementos algébricos. Tomando n equações, com os coeficientes

$$1a, 1b, 1c, \dots$$

$$2a, 2b, 2c, \dots$$

Com o auxílio da Regra de Cramer, Laplace usou o termo de variação para a obtenção da determinante, ele explica as letras $a, b, c, d, \dots$, tem partes iguais ao número de combinações possíveis, que são chamadas de resultantes, que o mesmo número de termos e sinais dependente do número de variações.

Segue o exemplo, a três equações

$$\begin{aligned}0 &= 1am + 1bm' + 1cm'' \\0 &= 2am + 2bm' + 2cm' \\0 &= 3am + 3bm' + 3cm'\end{aligned}$$

Com a , b e c compondo as resultantes, temos

$$\begin{array}{cccccc}abc & acb & bac & bca & cab & cba \\+1a2b3c & -1a2c3b & +1c2a3b & -1b2a3c & +1b2c3a & -1c2b3a\end{array}$$

Laplace dispõe um cálculo, que é representado pela matriz

$$\begin{array}{ccc}1a & 1b & 1c \\2a & 2b & 2c \\3a & 3b & 3c\end{array}$$

No qual seu determinante é obtido pela a somatória dos membros de cada ou colunas multiplicadas pelo próximo determinante composto pelos elementos das linhas e colunas restantes. Baseando-se, nas notações atuais, teremos

$$1a \times \begin{vmatrix} 2b & 2c \\ 3b & 3c \end{vmatrix} + 2a \times \begin{vmatrix} 1c & 1b \\ 3c & 3b \end{vmatrix} + 3a \times \begin{vmatrix} 1b & 1c \\ 2b & 2c \end{vmatrix}$$

Utilizando os co-fatores, obtemos

$$1a \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2b & 2c \\ 3b & 3c \end{vmatrix} + 2a \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1b & 1c \\ 3b & 3c \end{vmatrix} + 3a \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1b & 1c \\ 2b & 2c \end{vmatrix}$$

No qual a equação de condição será $+1a2b - 1b2a = 0$.

Louis A. Cauchy (1789 – 1857), criou o termo determinante, para descrever como o conhecemos atualmente, em 1812, o caracterizou como uma função anexada na transformação de coordenadas. Além de citar a questão sobre os arranjos em tabelas, com a identificação por letras subscritas nos coeficientes, mas, o uso de barras foi acrescentado posteriormente por Cayley.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Em 1841, o francês Arthur Cayley (1821 – 1895) apresenta a representação de determinantes por duas barras. E posteriormente, em 1853, apresentou o conceito de matriz, as dispondo como arranjos com m linhas e n colunas.

Cayley, observou que se dispor assim

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad \text{Expressaria a seguinte equação} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{matrix}$$

Ademais, Cayley definiria as matrizes como entidades distintas que formavam um sistema algébrico, analisou sua utilidade para resolução de sistemas, induziu o conceito de matriz nula, transposta, identidade e unitária, a adição e multiplicação de matrizes.

Carl Friedrich Gauss (1777 -1855) e Wilhelm Jordan (1842 – 1899) foram responsáveis, no século XIX, pela a criação do Método de Eliminação de Gauss (Gauss-Jordan), que consistia na sequência de operações aplicadas linha a linha de uma matriz, com o intuito de alterar os coeficientes da matriz e reduzi-los a uma matriz triangular. A solução é obtida por substituição reversa, iniciando pela última equação do sistema reduzido. O método foi instituído como ferramenta para a obtenção ao Método dos Mínimos Quadrados que foi produzido para a análise da melhor função linear.

Hoje, o estudo dos sistemas lineares é essencial em diversas áreas da matemática aplicada, ciências naturais, engenharia e economia. Os sistemas lineares são usados para modelar problemas do mundo real e encontrar soluções numéricas que ajudam a tomar decisões informadas e resolver problemas complexos.

4.2. SISTEMA LINEAR

Para essa secção utilizamos os estudos dos livros de Álgebra Linear, Boldrini (1980), do Ensino Superior e de Matemática – Ciências e Aplicações Iezzi (2013) para a apresentação de exemplos.

4.2.1. EQUAÇÕES LINEARES

Uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é toda equação do tipo:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

Onde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ e b são coeficientes reais. E b é chamado de termo independente da equação, quando ele é nulo, temos uma equação linear homogênea.

A equação linear é uma equação de primeiro grau com uma ou mais incógnitas.

Veja exemplos de equações lineares,

$$x + y + z = 1$$

$$4x - 3y = -2$$

4.2.2. SOLUÇÃO DE EQUAÇÃO LINEAR

Uma sequência de n números reais $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ é solução da equação $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$ se a sentença $a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + \dots + a_n \lambda_n = b$ for verdadeira.

Ou seja, quando na equação dada substituímos o x_n por λ_n e depois que efetuarmos as operações necessárias, obtivermos uma sentença verdadeira.

Temos o seguinte exemplo,

- O par ordenado $(4, 6)$ é solução da equação $4x - 3y = -2$?

$$4 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = -2 \rightarrow 16 - 18 = -2 \rightarrow \underbrace{-2 = -2}_{\text{Sentença verdadeira}}$$

Assim, que substituímos o x por 4 e y por 6, como é mostrado no par ordenado, obtivemos a sentença verdadeira.

4.2.3. SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Denomina-se **sistema de equações lineares** todo sistema formado por conjunto de **equações lineares**. Em modo geral, podemos representar um sistema de equações lineares de m equações com n incógnitas por:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

No qual temos,

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, são variáveis;
- a_{ij} (a_{12}) $\in \mathbb{R}$, são coeficientes das variáveis, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$;
- $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, são termos independentes. Assim, como acontece na equação linear quando todos termos independentes são nulos, o sistema é chamado de homogêneo.

Exemplificando,

$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$, é um sistema linear de duas equações com duas incógnitas.

$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$, é um sistema de três equações com três incógnitas.

4.2.4. SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

A sequência de números reais $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ é **solução de um sistema linear** de n incógnitas se for solução de uma cada uma das equações do sistema.

Consideraremos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ 7x - 2y + 3z = 8 \\ 2x - 5y + 11z = 8 \end{cases}$$

No qual o conjunto solução $\lambda = (1, 1, 1)$, que ao efetuarmos a substituição de x por 1, y por 1 e z por 1, em todas as equações teremos a sentença verdadeira.

Assim, $1 + 5 \cdot 1 - 1 = 5$; $7 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$; $2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 11 \cdot 1 = 8$

4.2.5. CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Um sistema linear é classificado à partir do número de soluções possíveis para ele. Das quais, temos as seguintes possibilidades: de não haver solução possível, ter somente uma única solução ou haver infinitas soluções.

Se o sistema adquirir ao menos uma solução ele é um **sistema possível**. Para o caso, de não haver nenhuma solução, ele será um **sistema impossível**.

O **sistema possível** se divide em duas terminações possíveis, o **determinado** quando obtemos uma única solução e o **indeterminado** quando obtemos infinitas soluções.

4.2.6. SISTEMA MATRICIAL

Um sistema de equações lineares, será escrito na forma matricial se conseguirmos separar seus componentes por matrizes.

Partindo do ponto que,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ou, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ é a matriz dos coeficientes das incógnitas.}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ é a matriz das incógnitas.}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ é a matriz dos termos independentes.}$$

Uma outra matriz que pode ser associada a um sistema é a matriz ampliada de um sistema. Do qual temos,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Como exemplificação colocamos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

Em representação matricial ficaria,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4.3. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Os métodos de resolução percorridos a seguir serão: O método de operações elementares; o método da substituição; o método de sistemas equivalentes; o método de Gauss-Jordan e; o método da regra de Cramer. Com a apresentação de exemplos e sua solução.

4.3.1. OPERAÇÕES ELEMENTARES

As três operações elementares possíveis sobre as equações do sistema apresentado ou sobre as linhas de sua matriz aplicada.

1. Transição de posição das linhas i e j – pela i -ésima e j -ésima – ou equações que são representadas pela $L_i \leftrightarrow L_j$.

Exemplo: $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y - z + w = -4 \\ x + y + z - w = 4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases}$$

2. Multiplicação da linha – i -ésima – ou equação por um escalar diferente de zero, representado por $L_i \rightarrow kL_i$ sendo k um escalar não nulo.

Exemplo: $L_4 \rightarrow 3L_4$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ 3x - 3y + 3z + 3w = 6 \end{cases}$$

3. Troca da linha i por ela mesma com a adição de k (um escalar não nulo) vezes a linha j , na qual a representação é $L_i \rightarrow L_i + kL_j$.

Exemplo: $L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2$.

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ 3x + 3y + z - w = 4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases}$$

4.3.2. MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

É um método que consiste em escolhermos uma das equações do sistema para que nesta seja isolada uma das variáveis. Assim, poderemos substituir, na outra equação, a variável isolada pela expressão aplicada. É um método simples, mas, útil em poucos casos.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

Isolando a variável x na segunda equação, teremos $x = 6 + 3y$.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 6 + 3y \end{cases}$$

E realizando a substituição de valores, para a incógnita x da primeira equação,

$$2 \cdot (6 + 3y) + y = 5 \rightarrow 12 + 6y + y = 5 \rightarrow 6y + y = 5 - 12 \rightarrow$$

$$7y = -7 \rightarrow y = -\frac{7}{7} \rightarrow y = -1$$

Agora, substituindo y por -1 na segunda equação teremos,

$$x = 6 + 3 \cdot (-1) \rightarrow x = 6 - 3 \rightarrow x = 3$$

Portanto, obtivemos como conjunto solução do sistema, o par ordenado $(3, -1)$.

4.3.3. SISTEMAS EQUIVALENTES

Quando dois sistemas de equações lineares possuem o mesmo conjunto solução, os chamamos de sistemas equivalentes.

Por exemplo, os sistemas $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$, pois, ambos têm como conjunto solução o par ordenado (3, -1).

Tendo um sistema distinto, temos como função moldá-lo em outro equivalente, utilizando o método das operações elementares.

Iremos resolver o sistema, como exemplificação.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \rightarrow -2L_1 + L_2. \\ L_3 \rightarrow -3L_1 + L_3. \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow -\frac{1}{3}L_2$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow 7L_2 + L_3 \quad \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Obtemos, da terceira equação, $z = \frac{4}{2} \rightarrow z = 2$.

Trocando esse valor na segunda equação, temos $y + 2 = 5 \rightarrow y = 5 - 2 \rightarrow y = 3$.

Para concluirmos, e encontrarmos o conjunto solução completo, substituiremos os valores disposto na primeira equação,

$$x + 2 \cdot 3 + 2 = 9 \rightarrow x + 6 + 2 = 9 \rightarrow x + 8 = 9 \rightarrow x = 9 - 8 \rightarrow x = 1.$$

No qual obtivemos como conjunto solução $\{(1, 3, 2)\}$.

4.3.4. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

O método de resolução de Gauss-Jordan é baseado nas seguintes afirmações, consideraremos a matriz ampliada, que será transformada em uma matriz identidade por meio das operações elementares.

Dada a matriz,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Aplicaremos as operações elementares de modo que a matriz esse transforme nessa,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_m \end{bmatrix}$$

Em que $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_m \end{bmatrix}$ é o conjunto solução do sistema.

Usaremos, como exemplo o sistema,

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + \quad + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases} \text{ sua matriz ampliada é } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow (-5)L_3 + L_1} \begin{pmatrix} -32 & 0 & 0 & -14 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow (-\frac{1}{32})L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{16} \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow (-2)L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow (-7)L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Reescrevendo como um sistema,

$$\begin{cases} x + 0y + 0z = \frac{7}{16} \\ 0x + 0y + z = \frac{17}{8} \\ 0x + y + 0z = -\frac{1}{16} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{7}{16} \\ z = \frac{17}{8} \\ y = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

E temos como resolução do método, o conjunto solução $\{(\frac{7}{16}, \frac{17}{8}, -\frac{1}{16})\}$.

4.3.5. REGRA DE CRAMER

A regra de Cramer é um método usado para resolução de sistemas com determinantes, que consiste na análise de sistema $n \times n$, por meio da determinante de sua matriz incompleta.

Suponha que tenhamos um sistema com n equações e n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

E o colocando na forma matricial, teremos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Como já apresentado, no tópico 4.2.6. cada membro tem sua função, temos A representando a matriz dos coeficientes, X representando a matriz das incógnitas e B representando a matriz dos termos independentes.

Por hipótese, a $\det(A) \neq 0$, logo existe uma matriz inversa A^{-1} . Portanto, se efetuamos a multiplicação da equação $A \cdot X = B$ por sua matriz inversa A^{-1} , e isolamos o X, demonstraremos,

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Temos que, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$, logo $X = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{adj } A) \cdot B$. Que pode ser calculada na forma matricial,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & \dots & A_{n3} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & \dots & A_{n4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & A_{4n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & \dots & A_{n3} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & \dots & A_{n4} \\ & & \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & A_{4n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sabendo que $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, em que α_1 composto por,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + A_{31} \cdot b_3 + A_{41} \cdot b_4 + \dots + A_{n1} \cdot b_n) = \frac{1}{\det A} \cdot \frac{\det A}{1}$$

Da mesma forma, encontraremos $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$.

4.4. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Iremos argumentar e analisar de forma geométrica os sistemas lineares (soluções) em $\mathbb{R}^2$ (plano) e em $\mathbb{R}^3$ (espaço), com representação feitas no *software* GeoGebra.

4.4.1. INTERPRETAÇÃO NO PLANO

No sistema de equações lineares 2×2 , por exemplo $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ no qual cada equação do sistema é representada por uma reta (r_1 e r_2). Resolver o sistema nos leva a procurar as interseções das retas.

De modo que,

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Com vetores representados por,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Assim temos, $x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{b}$. Com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1

Consideraremos o sistema, $\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$.

Sabemos, com base no exposto acima, que seus vetores são $v_1 = (3,2)$, $v_2 = (2,1)$ e $b = (30,17)$.

Abrimos o *software* GeoGebra, para encontrarmos a solução do sistema

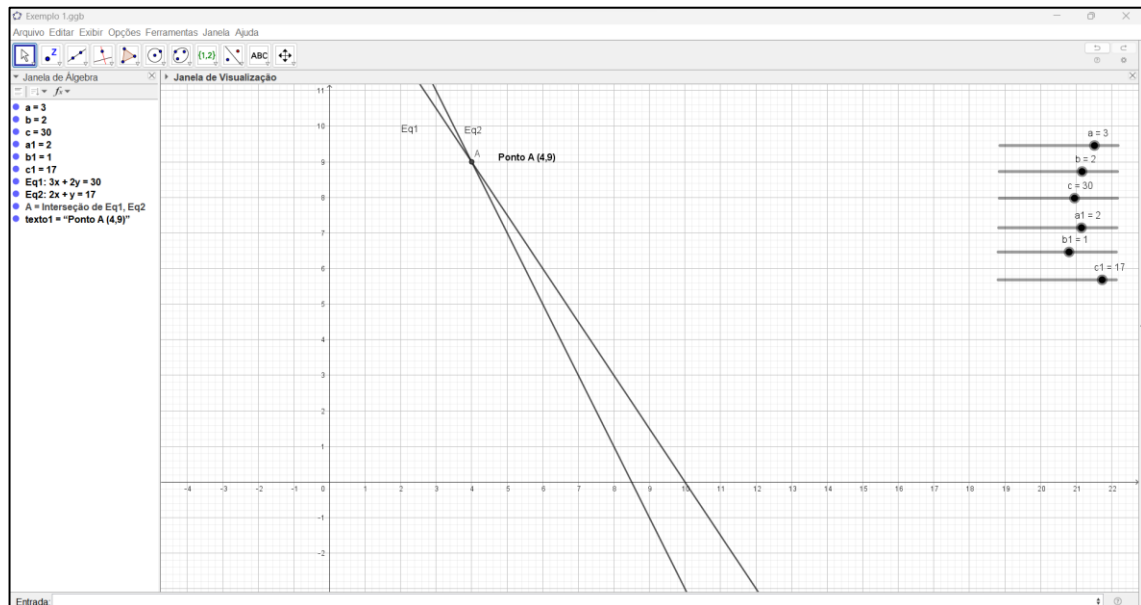


Figura 11 - Interpretação no plano - Exemplo 1

Com a função “Entrada” colocaremos no comando a primeira equação do sistema que é representada na imagem por “Eq1” e repetiremos a mesma sequência na segunda equação do sistema, representada por “Eq2”. Com a obtenção dessas duas equações efetuaremos um comando para encontrarmos a interseção entre as equações, na janela “Entrada” com o comando de “Interseção” e adicionando a “Eq1” e “Eq2” para conseguirmos a solução do sistema, o par ordenado $\{(4, 9)\}$.

Passos auxiliares para a exceção no programa GeoGebra:

- 1- Abra o GeoGebra;
- 2- Ative a Malha;
- 3- Na Caixa de Entrada, digite a primeira equação $3x + 2y = 30$;
- 4- Aparecerá uma reta.
- 5- Na Caixa de Entrada, digite posteriormente a segunda equação $2x + y = 17$;
- 6- Aparecerá mais uma reta, que fará interseção em um ponto com a reta anterior;
- 7- Mude a cor da reta obtida, para conseguirmos identificar as retas;

- 8- Para obter o ponto de interseção das retas, clique no botão Ponto, perceba que abrirá uma caixa de menus com outros botões. Clique no botão (Interseção entre Dois Objetos). Agora, clique em uma reta e depois na outra. O ponto de interseção será marcado, o par ordenado $\{(4, 9)\}$;
- 9- Para colocar a equação (ou, mais precisamente, o texto referente a cada equação) próxima a cada reta, clique na Janela de Álgebra, com o botão esquerdo do mouse na equação correspondente a cada reta e arraste até a reta.

No caso do Exemplo 1, o sistema proposto é possível e determinado (SPD), o sistema tem uma única solução. E terá retas concorrentes.

Exemplo 2

Considere o sistema
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$$

Temos, como vetores $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (3,3)$ e $b = (5,15)$.

Com o auxílio do GeoGebra, encontraremos a resolução do sistema,

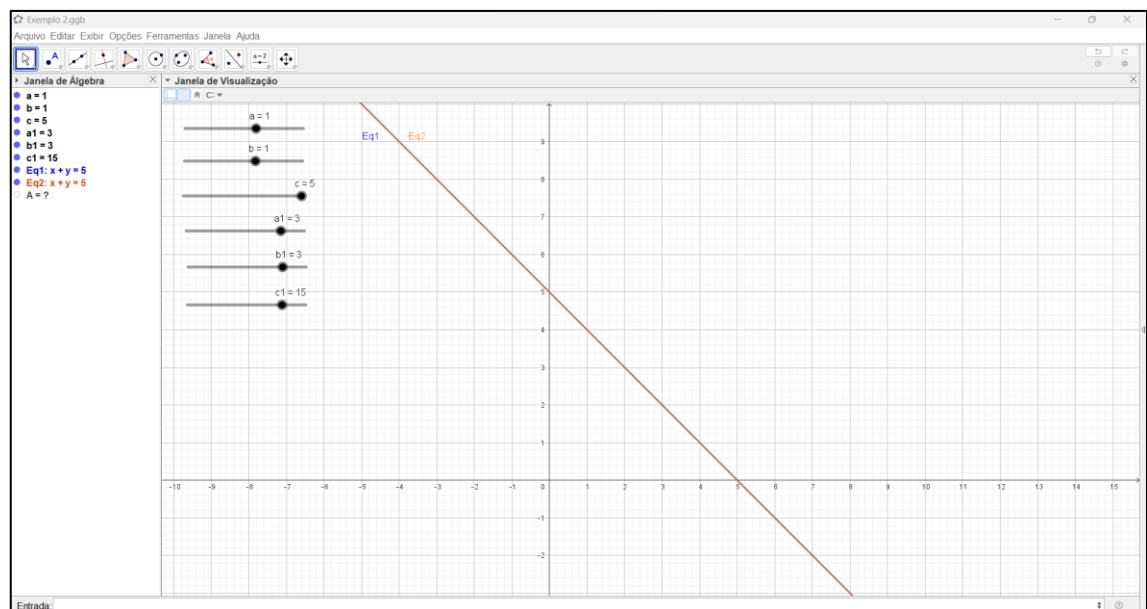


Figura 12 - Interpretação no plano - Exemplo 2

Fonte: *Software GeoGebra* - Gráfico produzido pela autora.

Repetiremos os comandos apresentados no Exemplo 1, para conseguirmos as “Eq1” e “Eq2” para serem substituídas no comando de “Interseção”. Porém, nesse caso

não conseguimos encontrar a interseção do sistema, no qual foi apresentado pelo o *software* um sinal ? quando efetuado.

Passos auxiliares para a exceção no programa GeoGebra:

1. Abra o GeoGebra;
2. Ative a Malha;
3. Na Caixa de Entrada, digite a primeira equação $x + y = 5$;
4. Aparecerá uma reta.
5. Na Caixa de Entrada, digite posteriormente a segunda equação $3x + 3y = 15$;
6. Aparecerá mais uma reta, só que está reta está rente a outra.
7. Mude a cor da reta obtida, para conseguimos identificar as retas;
8. Indicaremos os pontos das retas, clicando no botão Ponto, e selecionando onde a reta encontra as coordenadas.
9. Para obter o ponto de interseção das retas, clique no botão Ponto, perceba que abrirá uma caixa de menus com outros botões. Clique no botão (Interseção entre Dois Objetos). Nesse caso, não encontraremos interseção entre as retas. Por isso, aparece o sinal ? quando efetuado.

Para colocar a equação (ou, mais precisamente, o texto referente a cada equação) próxima a cada reta, clique na Janela de Álgebra, com o botão esquerdo do mouse na equação correspondente a cada reta e arraste até a reta.

Pelo fato de as duas equações serem equivalentes entre si, portanto, podemos representar o sistema por $ax + y = 5$, transformando teremos $ax = 5 - y$. Onde, qualquer par ordenado resultante se aplicará na forma $(5 - y, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, sendo sua solução. Fazendo o inverso para encontrar o valor de y teremos $y = 5 - x$ temos, também qualquer par ordenado na forma $(x, 5 - x)$, com $x \in \mathbb{R}$, como uma solução possível. Assim, o Exemplo 2 resultará em um sistema possível e indeterminado (SPI), um sistema com infinitas soluções e com retas coincidentes.

Exemplo 3

Considere o sistema
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$$

Em adquirimos como vetores $v_1 = (3, -2)$, $v_2 = (6, -4)$ e $b = (1, 7)$.

E que, também, com o amparo do GeoGebra tentaremos encontrar a conjunto solução do sistema.

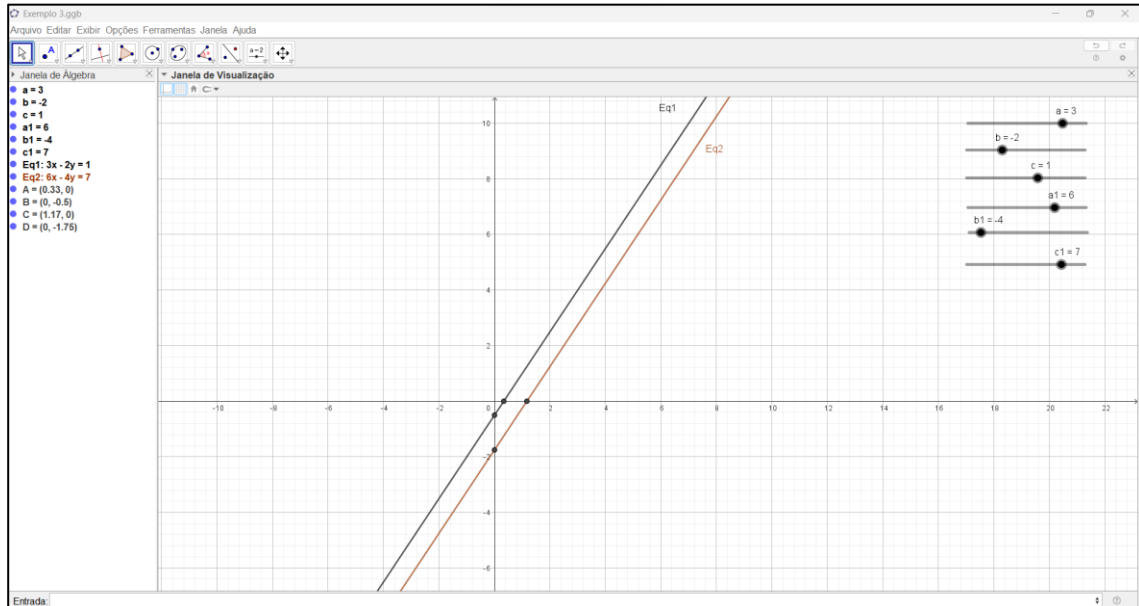


Figura 13 - Interpretação no plano - Exemplo 3

Fonte: *Software GeoGebra* - Gráfico produzido pela autora.

Como podemos perceber não será possível encontrar a interseção das equações (retas), e fazendo a operação do sistema por meio das operações elementares, teremos

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases} \quad L_1 \rightarrow -2L_1 \quad \begin{cases} -6x + 4y = -2 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases} \rightarrow 0 = -5 \text{ (Incorreto)}$$

Passos auxiliares para a exceção no programa GeoGebra:

1. Abra o GeoGebra;
2. Ative a Malha;
3. Na Caixa de Entrada, digite a primeira equação $3x - 2y = 1$;
4. Aparecerá uma reta.
5. Na Caixa de Entrada, digite posteriormente a segunda equação $6x - 4y = 7$;
6. Aparecerá mais uma reta, só que esta reta está rente a outra.
7. Mude a cor da reta obtida, para conseguirmos identificar as retas;
8. Indicaremos os pontos das retas, clicando no botão Ponto, e selecionando onde a reta encontra as coordenadas.

Portanto, no Exemplo 3 temos um sistema impossível (SI), ou seja, um sistema sem solução, com retas paralelas distintas.

4.4.2. INTERPRETAÇÃO NO ESPAÇO

A equação $ax + by + cz = d$ representa um plano em $\mathbb{R}^3$ (sendo a, b, c e d , números reais diferente de zero). Assim determinar a solução de um sistema com 2 equações corresponde, geometricamente, a determinar a interseção de 2 planos.

O sistema,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3 = d_3 \end{cases}$$

Cada equação, geometricamente, na ordem apresentada, define os planos λ , α e β , respectivamente. A tripla ordenada (x, y, z) é solução quando o ponto pertence a interseção $\lambda \cap \alpha \cap \beta$.

Exemplo 1

Considere o sistema, $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$, já apresentada na secção 4.3.3. do

capítulo.

Com o apoio do GeoGebra, encontraremos a tripla ordenada do sistema

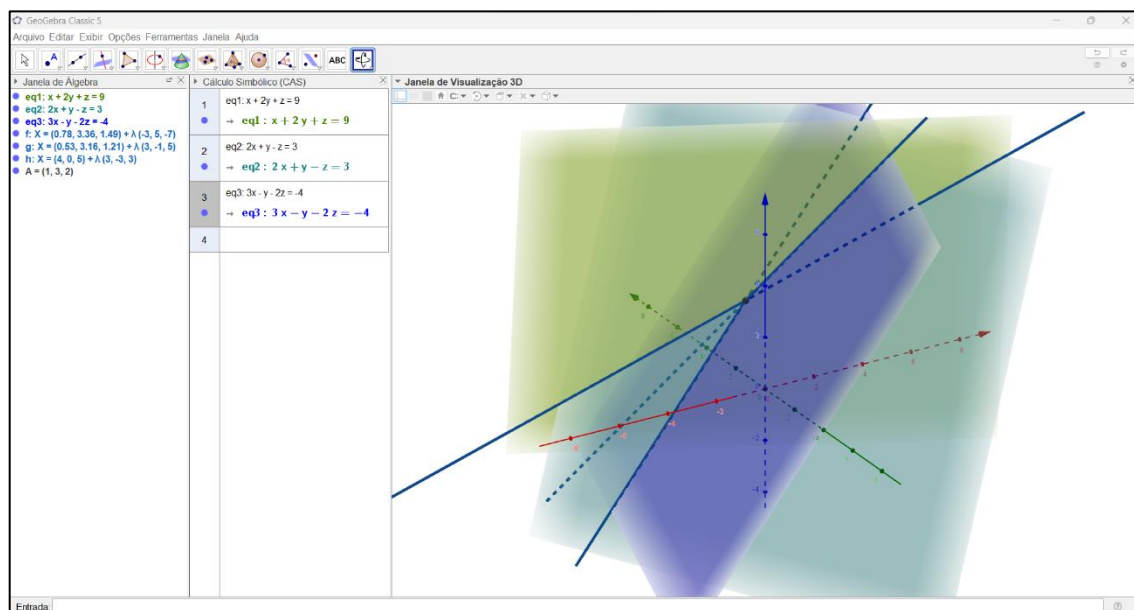


Figura 14 - Interpretação no espaço - Exemplo 1

Fonte: Software GeoGebra - Plano produzido pela autora.

Para a resolução desse sistema 3×3 , iremos utilizar a aba Janelas de Álgebra, Janela de Visualização 3D e a de Cálculo Simbólico (CAS). Primeiramente, escreveremos cada equação do sistema nos comandos da janela CAS. Em seguida, selecionaremos cada equação para obtermos a visualização do plano em 3 dimensões (λ , α e β), da qual tentaremos por intermédio desses planos a interseção desejada. Para encontrarmos a interseção é necessário fazermos esse processo em fase, primeiramente, selecione a ferramenta “Interseção de duas superfícies” no qual teremos que pressionar os planos, dois por vezes, até pressionarmos todos. Assim, conseguiremos enxergar as interseções, mas, podemos também apertar a ferramenta “Interseção de dois objetos” e selecionar duas das retas encontradas e descobriremos a solução. E teremos como tripla ordenado $\{(1, 3, 2)\}$.

Para a ativando a Janela de Visualização 3D no GeoGebra devemos seguir os seguintes passos:

1. Abra o GeoGebra;
2. Clique em Exibir e depois Janela de Visualização 3D;
3. Feche a Janela de Visualização 2D, clicando no X ao lado do nome Janela de Visualização 2D;
4. Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização 3D e na caixa que aparece clique em Janela de Visualização (último item dessa caixa);

Para a ativando a Janela de CAS no GeoGebra devemos seguir os seguintes passos:

1. Com o GeoGebra já aberto, clique em Exibir e depois em Cálculo Simbólico (CAS);
2. Com a Janela de Visualização 3D, já selecionada teremos as duas abas selecionadas juntamente com a aba Janela de Álgebra, já selecionada por padrão do *software*;

Vamos analisar diferentes situações relativas as suas posições no espaço.

- a) Sistema possível e determinado (SPD).

- Os três planos se intersectam em um ponto.

Acontece quando os três pontos se intersectam em um único ponto, que é representado pela solução do problema.

Considere o sistema
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y + 2z = -5 \end{cases}$$

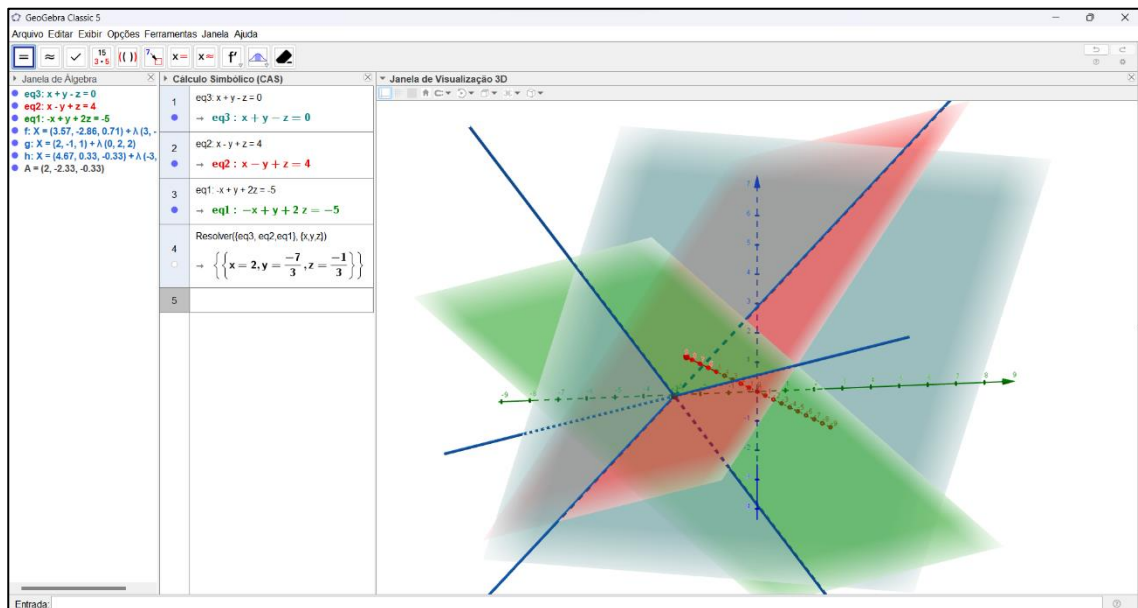


Figura 15 - Interpretação no espaço - SPD

Fonte: Software GeoGebra - Plano produzido pela autora.

E a única solução do sistema é a tripla ordenada $\{ 2, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3} \}$.

Passos auxiliares para a execução no programa:

1. Abra o GeoGebra;
2. Ative a Janela de Visualização 3D;
3. Na Caixa de Entrada, digite a primeira equação $x + y - z = 0$ (digitamos a equação também na Janela CAS);
4. Aparecerá uma reta;
5. Na Caixa de Entrada, digite a equação $x - y + z = 4$ (digitamos a equação também na Janela CAS);
6. Aparecerá outra reta, mude a cor da reta, selecionando-a e escolhendo a cor;
7. Na Caixa de Entrada, digite a equação $-x + y + 2z = -5$ (digitamos a equação também na Janela CAS);
8. Aparecerá a ultima reta, que também será necessário fazer a mudança de cor, para diferenciar as três retas presentes na aba;
9. Podemos encontrar a interseção entre os pontos com o comando “Interseção de duas superfícies” e selecionar o encontro dos outros. Assim, também, conseguiremos obter o resultado do sistema;

10. Conseguimos obter o resultado, também, digitando na Janela CAS a função ‘Resolver’ e selecionar as equações já presentes na aba na ordem correta, e selecionar Enter.
11. A Janela 3D possui um recurso em que podemos girá-la para ter uma melhor visualização. Basta clicar, com o botão esquerdo do mouse, em qualquer lugar da Janela 3D, segurar e arrastar. Experimente;

Seguindo a sequência já apresentada, iremos acrescentar cada uma das equações do sistema na Janela CAS, em seguida, seleciona-las para visualizarmos os planos. Já na Janela de Visualização selecionaremos a opção de “Interseção de duas superfícies” até encontrarmos a interseção de ambos os planos. Designaremos, nesse momento, a ferramenta de “Interseção de dois objetos” e com isso encontraremos o ponto de interseção do sistema e também seu, já demonstrado, conjunto solução.

b) Sistema possível e indeterminado (SPI).

- Os três planos são distintos e se intersectam em uma única reta.

Considere o seguinte sistema,
$$\begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

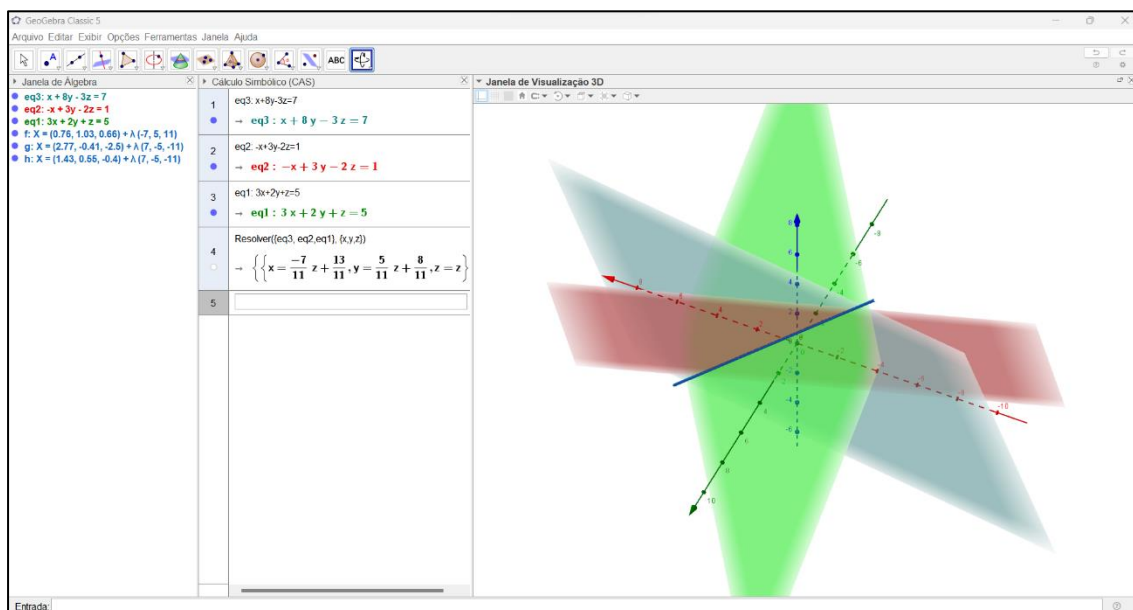


Figura 16 - Interpretação no espaço - SPI

Fonte: Software GeoGebra - Plano produzido pela autora.

Nesse exemplo, o ponto de interseção não foi encontrado como na exemplificação do sistema possível e determinado. Mas, com o comando de “Resolver” conseguimos fixar as equações e as variáveis do sistema, e dispor o resultado. Como demonstrado a tripla ordenada encontrada foi $\left\{\frac{13}{11} - \frac{7}{11}z, \frac{8}{11} + \frac{5}{11}z, z\right\}$, $z \in \mathbb{R}$. Logo, o sistema é indeterminado, pois, as soluções podem dispor qualquer valor para z .

Passos auxiliares para a execução no programa:

1. Abra o GeoGebra;
2. Ative a Janela de Visualização 3D;
3. Na Caixa de Entrada, digite a primeira equação $x + 8y - 3z = 7$ (digitamos a equação também na Janela CAS);
4. Aparecerá uma reta;
5. Na Caixa de Entrada, digite a equação $-x + 3y - 2z = 1$ (digitamos a equação também na Janela CAS);
6. Aparecerá outra reta, mude a cor da reta, selecionando-a e escolhendo a cor;
7. Na Caixa de Entrada, digite a equação $3x + 2y + z = 5$ (digitamos a equação também na Janela CAS);
8. Aparecerá a última reta, que também será necessário fazer a mudança de cor, para diferenciar as três retas presentes na aba;
9. Conseguimos obter o resultado, digitando na Janela CAS a função ‘Resolver’ e selecionar as equações já presentes na aba na ordem correta, e selecionar Enter.

- Para essa classificação de sistema temos mais duas possibilidades de representação geométrica;

- Três planos que coincidem.
- Dois planos que coincidem e um terceiro que intersecta ambos seguindo uma reta.

c) Sistema Impossível (SI).

- Os três planos se intersectam, dois em dois, mas não a interseção nas retas.

$$\text{Considere o sistema, } \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$$

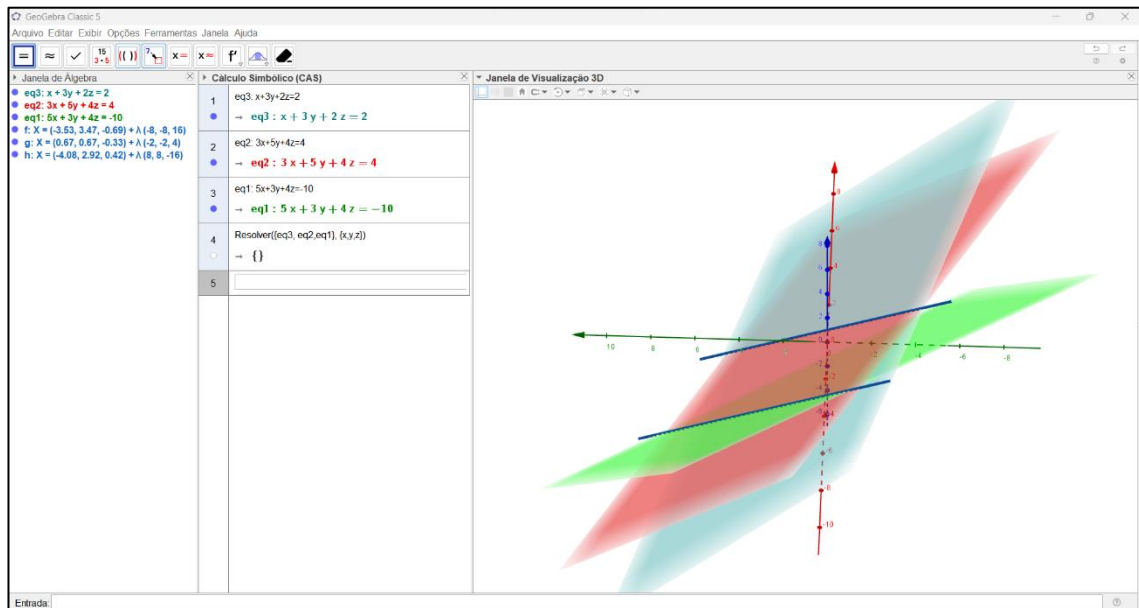


Figura 17 - Interpretação no espaço – SI - I
 Fonte: Software GeoGebra - Plano produzido pela autora.

Nesse caso, também não conseguimos pelo software encontrar o ponto de interseção do sistema, pois, as retas desenvolvidas se intersectam somente de dois em dois planos, e também não conseguimos com o comando “Resolver” encontrar o conjunto solução do sistema. Sendo assim, um sistema impossível (SPI), cujo não tem solução real.

Passos auxiliares:

1. Abra o GeoGebra;
2. Ative a Janela de Visualização 3D;
3. Na Caixa de Entrada, digite a primeira equação $x + 3y + 2z = 2$ digitamos a equação também na Janela CAS);
4. Aparecerá uma reta;
5. Na Caixa de Entrada, digite a equação $3x + 5y + 4z = 4$ (digitamos a equação também na Janela CAS);
6. Aparecerá outra reta, mude a cor da reta, selecionando-a e escolhendo a cor;
7. Na Caixa de Entrada, digite a equação $5x + 3y + 4z = -10$ (digitamos a equação também na Janela CAS);
8. Aparecerá a última reta, que também será necessário fazer a mudança de cor, para diferenciar as três retas presentes na aba;

9. Seleccionaremos na Janela CAS a função ‘Resolver’ e seleccionar as equações já presentes na aba na ordem correta, e seleccionar Enter, só que não aparecerá resultado.

- Dois planos são paralelos e o terceiro intersecta ambos, segundo duas retas paralelas distintas.

Considere o sistema,
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 11 \\ -3x - 3y - 3z = 10 \end{cases}$$

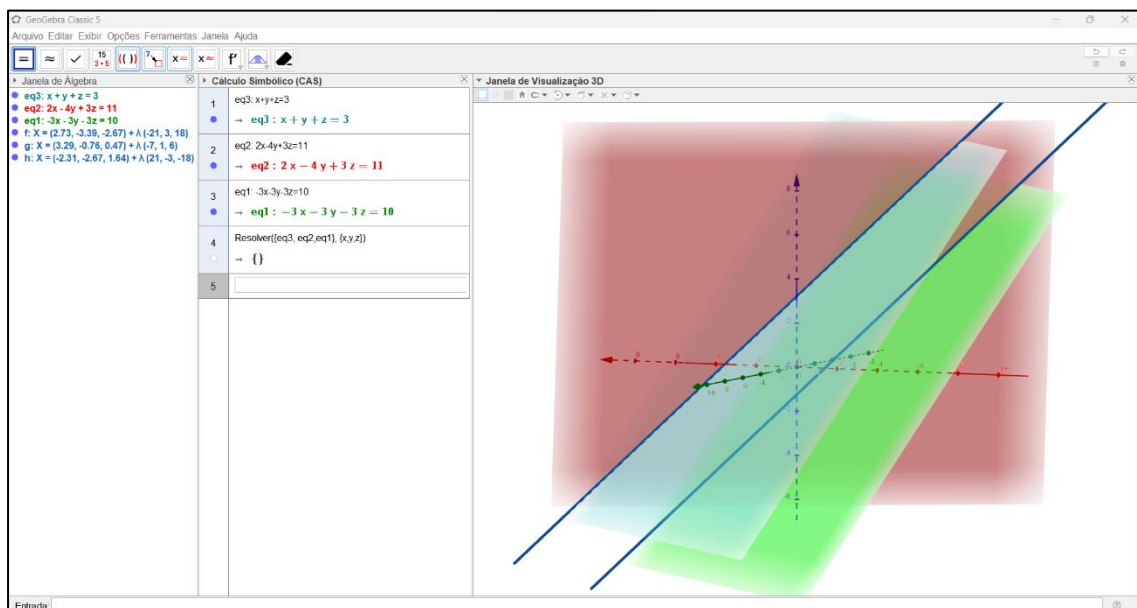


Figura 18 - Interpretação do espaço - SI - II
Fonte: Software GeoGebra - Plano produzido pela autora.

O sistema continuará sendo um sistema impossível, e também manterá as retas de interseção paralelas, mas, com os planos em posições diferentes do qual dois planos são planos e um terceiro intercepta ambos. E também, conseguimos somente enxergar a representação geométrica do plano.

- Seguindo a mesma lógica, apresentada anteriormente temos também mais duas possibilidades de representação.

- Dois planos que são coincidentes e um que é paralelo.
- Com os planos paralelos.

Demostramos que com o conhecimento efetivo do conteúdo e o auxílio do software GeoGebra, a resolução dos sistemas fica mais ágil, visível e dinâmica.

4.5.A ATIVIDADE DE ESTUDO BASEADA NO ESTUDO DE SISTEMA LINEAR COM O GEOGEBRA

A teoria do Ensino Desenvolvidor, conceituada por Davydov, é baseada na formação do pensamento teórico-científico utilizando-se do uso de conceitos para desenvolvimento mental do indivíduo. Do qual propõe construir a capacidade mental e o cognitivo do aluno, através do conteúdo aplicado - Sistema Linear - trazendo autonomia em seu conhecimento. Para Davydov, compreender teoricamente um conteúdo, independentemente da temática, se consiste na ação de entender o princípio geral (inicial), as relações internas e seu desenvolvimento histórico.

Para alcançarmos esse objetivo de formulação dos conceitos científico, é preciso uma organizada a partir do lógico histórico seguindo uma trajetória parecida a qual o cientista para a construção primordial do objeto.

Na proposta de Davydov, o ensino da matemática deve ser colocado a partir de ações investigativas, mostrando-se o conceito trabalhado, portanto a aprendizagem aplicada não deve ser definida em conceitos fechados, mas revelado por ações de estudo, provocando para aluno intervenções no seu desenvolvimento mental, levando-o a pensar e encontrar soluções por próprio mérito e, em conjunto, também de forma coletiva com seus colegas de classe.

A Matemática está inserida em todo caminhar no nosso cotidiano, no qual foi construída juntamente com o avançar da sociedade. Por isso, o emprego da História da Matemática é um método excelente para a didática em sala, sendo também uma alternativa para tentarmos mudar o paradigma de ser uma disciplina conteudista e acrescentarmos o conceito lógico- histórico do assunto determinado. A aplicabilidade conceitual da temática também é um experimento interessante para o desenvolvimento do aluno, por meio do cerne da origem do conteúdo conseguiríamos construir diversas habilidades com os alunos, num contexto social, cultural e educacional.

A atividade de estudo é a junção do percurso investigativo e do percurso de estudo do objeto, com o professor com papel de mediador da formação mental que será desenvolvido pelo aluno, com uma sequência tática efetiva em seis ações, que traçam um percurso a ser percorrido pelo aluno até a formulação do objeto inicial da atividade de estudo. O planejamento e o apropriação do conteúdo do docente é essencial para o desenvolvimento cognitivo do aluno. Assim, introduziremos a proposta de uma atividade de estudo sobre o ensino de Sistemas Lineares com o auxílio do GeoGebra, um tópico sensível durante sua aplicação no ensino básico, pois, engloba diversos conteúdos antecessores, que com a atividade de estudo, pensada por Davydov, em

conjetura com o GeoGebra resultará na construção de habilidades matemáticas concretas para obtenção do conteúdo.

Apresentaremos o modelo de plano de ensino.

Tabela 1 - Plano de aula para a formação de conceito e análise de Sistemas Lineares com auxílio do GeoGebra

PLANO DE ENSINO		
Disciplina	Matemática	
Conteúdo	Sistema Linear	
Ano	2º ano (Ensino Médio)	
Objetivo Geral		
Formar no aluno a construção do conceito de Sistema de Equações Lineares. E instigar no aluno, por meio do GeoGebra, métodos investigativos de resolução de sistemas com uso do <i>software</i> .		
Objetivo Especifico		
Desenvolver nos alunos o norte das ações mentais: Analisar, criticar, comparar, sintetizar, relembrar, observar, refletir, distinguir, relacionar e aplicar o conceito.		
Conteúdos	Ações aplicadas	Aulas necessárias / minutos
Análise dos conteúdos antecessores de Sistema Linear: Matrizes e Determinantes.	Relembrar.	2 aulas com 50 minutos cada.
Apresentação do Lógico-Histórico de Sistema Linear, juntamente com Matrizes e Determinantes.	Relembrar, Analisar, Criticar, Refletir e Relacionar.	3 aulas com 50 minutos cada.
Introdução do conceitual de Sistema Linear.	Observar, sintetizar, refletir, analisar e relacionar.	1 aula com 50 minutos
Demonstração da: solução; classificação; do sistema matricial; de métodos de resolução e; da interpretação geométrica, no plano e no espaço.	Comparar, observar, criticar, analisar, refletir, aplicar o conceito e distinguir.	3 aulas com 50 minutos cada.
Apresentação da interface do <i>software</i> GeoGebra e sua aplicabilidade.	Analisar, observar, criticar, refletir e sintetizar.	2 aulas com 50 minutos cada.

Demonstração de métodos de resolução com o GeoGebra.	Analisar, observar, criticar, refletir, sintetizar, aplicar conceito.	3 aulas com 50 minutos cada.
--	---	------------------------------

Fonte: Produzido pela a autora.

Seguindo o modelo de plano de ensino, o executaremos de acordo com as seis ações de planejamento da atividade de estudo. Verificando cada ação com o objeto de que os alunos consigam assimilar os conhecimentos matemáticos de forma que contribuía em seu desenvolvimento cognitivo e mental, a moldar seu pensar lógico e teórico.

Como primeira ação temos como objetivo a *transformação de dados da tarefa e a identificação da relação universal do objeto*, ou seja, a apresentação de um problema para resolução de Sistemas Lineares, do qual o aluno terá que examina-lo e identificar a relação universal, constatando sua ascensão do abstrato para o concreto. Sugerimos, atividade inicial, situações-problemas com a aplicabilidade dos Sistemas Lineares no cotidiano do aluno, por exemplo, medidas, fluxo de tráfego, e estruturação química.

Citaremos um problema já apresentado, na secção 4.1 desse capítulo, sobre o uso de medidas.

Tabela 2 - Situação-problema e sua solução

Temos, a seguinte situação-problema apresentada no Livro Nove Capítulos a Arte Matemática. Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (EVES, 2011, p. 268) No problema é proposto que há três classificações de grãos, que são separados em ordem sistemática. O primeiro tipo com três feixes, o segundo com dois feixes e o terceiro com um feixe, fazendo assim 39 medidas. Posteriormente, temos o primeiro tipo com dois feixes, o segundo com três feixes e o terceiro tipo com um feixe, obtendo 34 medidas. E, por fim, o primeiro tipo com um feixe, o segundo tipo com dois feixes e o terceiro tipo com três feixes, tendo 26 medidas. Quais medidas de grãos obteremos em cada feixe, de tipo específico?
--

Solução:

Temos o sistema de equações lineares, de acordo com os dados do problema, já atribuindo um tipo de grão a uma variável.

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Obs.: Como já apresentado temos como solução de $z = \frac{99}{36}$, que simplificando por 9, teremos $z = \frac{11}{4}$.

(Assim) Resolvendo o sistema, temos $z = \frac{11}{4}$, e por meio de substituição conseguiremos os valores de x e y, que valerão $x = \frac{37}{4}$ e $y = \frac{17}{4}$. Encontrando o valor da medida de cada tipo (qualidade) do grão.

No problema podemos além de desenvolver o conceito lógico-histórico de Sistema Linear trabalhamos os Métodos de Solução de Sistemas Lineares.

Fonte: Produzido pela a autora.

O uso de situações-problemas relacionadas a aplicação dos Sistemas Lineares no cotidiano do aluno, resgata questões e aspectos sociais, culturais e históricos que conduzem a sua relação universal, resultante em uma análise crítica e científica do objeto.

Subsequentemente, temos a ação de *modelação da relação universal* que visa na construção de um modelo representativo da relação geral e suas conexões. Trata-se de uma análise já existente, que pode ser representada de forma gráfica, literal ou objetivada. Para este modelo utilizaremos do modelo gráfico, interpretação geométrica pelo GeoGebra, uma reprodução visual prática.

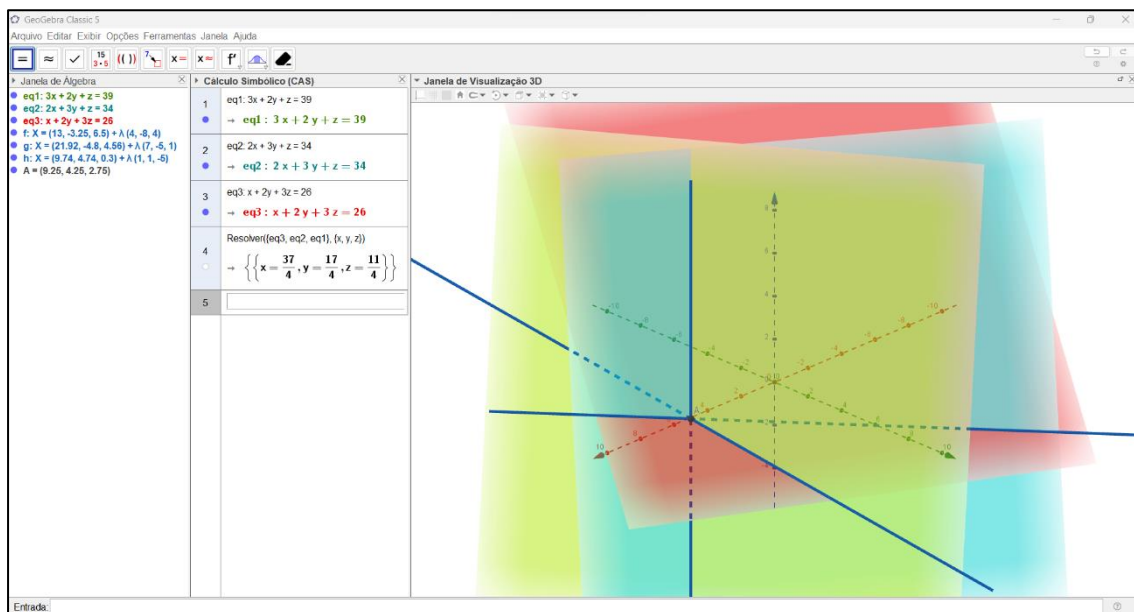


Figura 19 - Situação-Problema - Modelação da ação

Fonte: *Software GeoGebra* - Plano produzido pela autora.

A transformação do modelo para estudo de suas propriedades de forma pura, consiste na terceira ação, e possibilita a reconstrução do modelo visando analisar as propriedades da relação universal. Portanto, essa transformação permite que os alunos façam a análise em ambos aspectos, concreto e abstrato. Uma forma de realizar essa é através dos métodos de resolução aplicados para solução de sistemas possíveis no GeoGebra, por exemplo, a solução por sistema matricial e a mesma obtenção do conjunto solução desejado. Com o intuito de aperfeiçoar o aprendizado do aluno e a construção do conceito aplicado.

Temos como quarta ação, a construção de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral, ou seja, um sistema de tarefas que podem ser resolvidas com a aplicação do conceito de Sistema Linear, integra a realização de atividades particulares diversas, modulações da tarefa inicial, que podem ser concluídas pela relação geral descoberta pelo aluno. Em que o aluno se vale dos conceitos teóricos já apresentados para conclusão da tarefa envolvendo sistemas lineares. Proponhamos, a aplicação de questões com sistemas 3×3 para resolução pelos métodos descritos e confirmação (auxiliador) dos resultados no *software GeoGebra*.

Com o monitoramento da realização das ações anteriores, a quinta ação, temos a asseguarção da realização e execução correta das ações pelo aluno, verificando, se as questões intelectuais e cognitivas postas foram devidamente atendidas e assim como a qualidade da realização. Ao decorrer dessa trajetória o aluno tem que enxergar um indicio de conexão entre as tarefas dispostas e cabe ao professor assimilar se o

procedimento está sendo executado e analisar a aprendizagem já desenvolvida, impulsionando em seus alunos a realização de uma reflexão consciente sobre a atividade, envolvendo a revisão de suas ações mentais.

A finalização das ações se realiza com a avaliação individual do aluno e a verificação da aprendizagem do conceito, e se o aluno se apropriou da relação geral e consegue utilizar das relações particulares do objeto. Ao concretizar esse processo educativo, o docente deve ter ao caminhar do processo acompanhar detalhadamente o desenrolar do processo de ensino-aprendizagem conceitual por meio da atividade de estudo desenvolvida, para encontrar e reorientar possíveis dificuldades e efetuar mudanças necessárias.

O desenvolvimento desse processo de ações é um processo árduo, mas, resulta na apropriação de novos conhecimentos, através de uma metodologia única e que implica no aluno o conceito científico.

Para conhecermos os métodos de resolução dos Sistemas Linear, primeiramente, apresentamos a história do seu desenvolvimento e do seu conceito, a sua definição e somente assim introduzimos alguns possíveis métodos para a solução. O GeoGebra foi proposto para a interpretação geométrica dos Sistemas Lineares e um auxílio para obtenção dos resultados esperados, o *software* é de excelente valia para aulas mais expositivas que incentivará no estudante, relembrar e fixar os conhecimentos já apresentados.

A organização da atividade de estudo foi pautada na aplicabilidade do conteúdo no cotidiano, portanto, em situações reais, que possivelmente trará ao aluno mais interesse ao efetivar o estudo do objeto e foca na execução das seis ações apresentadas por Davydov na concepção da atividade de estudo.

CONCLUSÃO

O uso de Sistema Lineares está relacionado a diversos problemas do nosso cotidiano e constatamos isso na análise histórica do conteúdo, das resoluções e da construção conceitual do objeto que se originou por meio da necessidade do indivíduo em resolver parte desses problemas. A partir disso, salientamos a importância da História da Matemática na instituição de ensino, e pautado nesse trabalho o contexto lógico-histórico e a implementação da Teoria do Ensino Desenvolvidor com mais força em sala de aula, para que os conteúdos sejam repassados com mais relevância e proximidade com a realidade dos alunos.

A escolha do Teoria do Ensino Desenvolvidor de Davydov, é suma relevância para o crescimento profissional e trabalho docente, pois se centraliza na conceitualização científica e teórica do objeto, por parte do aluno, o tornando mais autônomo. E auxiliar essa metodologia com uso de tecnologia é de um ar aprimorador único. A união do conteúdo de Sistemas Lineares com a aplicabilidade do *software* GeoGebra para o auxílio de sua interpretação geométrica ressalta um método de ensino possível para a fuga do recurso tradicional educacional, com a aplicabilidade conteudista e monótona.

O desenvolvimento estrutural do trabalho, com introdução a teoria de Vygotsky foi essencial para a sistematização do Ensino Desenvolvidor e a análise do experimento didático formativo, pela a Zona de Desenvolvimento Proximal e a mediação Simbólica, que foi posteriormente induzida na Mediação com Tecnologia para a inclusão do GeoGebra na formulação da proposta da atividade de estudo.

Concluirmos, que o uso de metodologias educacionais com as novas tecnologias digitais é sim possível, e cada vez mais necessário dentro de sala, especialmente para a área da Educação Matemática. Sendo de utilidade múltipla para a potencialização do discente que com a orientação centrada e correta conseguirá conectar amplos aspectos, de teoria, prática e inovação.

Como sugestão para elaboração de futuros trabalhos, sobre o Ensino Desenvolvidor com conteúdo de Sistemas Lineares e auxílio do GeoGebra indicamos:

- A análise de resolução de sistemas, com o uso do comando “Planilha” no GeoGebra;
- A análise dos métodos de resolução apresentados com o GeoGebra;

- O uso de sistemas 4×4 e 5×5 no GeoGebra.
- E a execução da atividade de estudo efetiva em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, Aline Mota de Mesquita. **Atividade de estudo do conceito de transformação linear na perspectiva da teoria do desenvolvimento de V. V. Davydov**. Tese (Pós-Graduação em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2018.
- BOLDRINI, José Luiz, et al. **Álgebra Linear**. 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Bücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- DAVYDOV, V. V. **Problemas do Ensino Desenvolvidor - A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia**. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. 1988.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- FREITAS, R. A. M. da M. **Formação de conceitos na aprendizagem escolar e atividade de estudo como forma básica para a organização do ensino**. In: Educativa, Goiânia, 2016.
- GeoGebra, 2023. Disponível em: < <https://www.geogebra.org/?lang=pt>>. Acesso em: 29/05/2023.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: ciências e aplicações**. Vol. 2. São Paulo, 2010.
- LIBÂNEO, J. C. **A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasily Davydov**. Universidade Católica de Goiás. Revista Brasileira da Educação. Set/Out/Nov/Dez, 2004
- LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. **Vygotsky, Leontiev e Davydov: contribuições da teoria histórico-cultural para a didática**. In: SILVA, C. C.; SUANNO, M. V. R. Didática e interfaces. Rio de Janeiro: Deescubra, 2007.
- LIBANEIO, J. C.; FREITAS, Raquel Aparecida Marra da Madeira. **Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico**. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdes (Orgs.). **Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: Editora Edufu, 2013, v. 1, p. 315-350.
- PEIXOTO, Joana. **Tecnologias e relações pedagógicas: a questão da mediação**. Revista de Educação Pública, v. 25, n. 59, p. 367-379, 2016.
- REGO, Teresa Cristina. **Vygotsky: Uma perspectiva histórico-cultural da educação**. 25ª ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 2014.
- SANTANA, Erivaldo Gomes de. **Sistemas Lineares 3x3: Uma Visão Geométrica Com o Geogebra 3d**. Dissertação – Universidade Federal da Bahia – UFBA, Bahia, 2015.