

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO
NA PERSPECTIVA DO LIVRO DIDÁTICO**

AMANDA ALTINO DOS SANTOS

**GOIÂNIA – GOIÁS
2022**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Amenda Altino dos Santos
Matrícula: 20173030940043
Título do Trabalho: Demonstrações matemáticas no plano do Ensino Médio na perspectiva do livro didático

Autorização - Marque uma das opções

- ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
- ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
- ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2** ou **3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais incluídos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia _____ 12/10/22
Local Data

Amenda Altino dos Santos
Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

AMANDA ALTINO DOS SANTOS

**DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO
NA PERSPECTIVA DO LIVRO DIDÁTICO**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado
ao Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Goiás – IFG – Câmpus
Goiânia, como requisito parcial para obtenção
do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira

GOIÂNIA - GOIÁS
2022

237d Santos, Amanda Altino dos.

Demonstrações matemáticas no 1ºAno do Ensino Médio na perspectiva do livro didático / Amanda Altino dos Santos. – Goiânia : Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2022.

38f.

Orientador: Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Educação matemática. I. Ferreira, Nilton Cezar (orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III. Título.

CDD 510.07

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Lana Cristina Dias Oliveira CRB1/ 2.631
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

2022



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

**DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO NA PERSPECTIVA DO LIVRO
DIDÁTICO**

por

AMANDA ALTINO DOS SANTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Dr. Nilton Cezar Ferreira

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 04 de fevereiro de 2022, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Glen Cézar Lemos (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Luciano Duarte Da Silva (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Glen Cezar Lemos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 04/02/2022 11:18:15.
- Luciano Duarte da Silva, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 04/02/2022 11:16:26.
- Nilton Cezar Ferreira, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 04/02/2022 11:16:05.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 01/02/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 241547

Código de Autenticação: 8ebec6e898



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Rua 75, nº 46, Centro, GOIÂNIA / GO, CEP 74055-110
(62) 3227-2805 (ramal: 2805)

AGRADECIMENTOS

A Deus por me proporcionar viver tudo isso, inclusive os obstáculos e as vitórias dessa trajetória, pois foram esses obstáculos e essas vitórias que contribuíram para me tornar quem eu sou atualmente.

Aos meus pais, que me apoiaram na escolha deste curso sem nenhuma cobrança, sempre me mostrando o caminho a ser seguido. Hoje consigo perceber que não poderia haver caminho melhor que a educação, pois a sabedoria é o bem mais valioso que o ser humano pode conseguir.

À minha família, por sempre estarem me incentivando a continuar meus estudos, a crescer profissionalmente e nunca desistir.

À minha prima Elaine e a minha tia Regina, que não mediram esforços para me ajudar, e sempre me orientaram, desde quando eu era pequena, o quão valioso é estudar e como a profissão docente é importante e, por isso, devo me orgulhar da minha escolha.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Nilton, por toda paciência, sabedoria, pelos conselhos e por todo esforço em me ajudar a realizar este trabalho.

RESUMO

O objetivo desse trabalho foi o de compreender como são tratadas as demonstrações matemáticas em um livro didático do 1º ano do Ensino Médio. Com intuito de alcançar esse objetivo foi escolhido um livro didático, adotado em diversas escolas brasileiras. Esse livro foi submetido a um processo de análise qualitativa, da qual buscou-se entender como os autores apresentam as proposições e como eles tratam o processo de demonstração dessas proposições. Como resultado, observou-se que a quantidade de proposições demonstradas é superior ao das não demonstradas. Além disso, pôde-se perceber que, seguindo as orientações de livros didáticos, é possível ensinar os conteúdos do 1º ano do Ensino Médio com ênfases em demonstrações matemáticas.

Palavras-chave: Demonstração Matemática. Ensino Médio. Livro Didático. Proposições.

ABSTRACT

The objective of this work was to understand how mathematical demonstrations are treated in a textbook for the 1st year of high school. In order to achieve this goal, a textbook was chosen, adopted in several Brazilian schools. This book underwent a process of qualitative analysis, which sought to understand how the authors present the propositions and how they deal with the process of demonstrating these propositions. As a result, it was observed that the number of demonstrated propositions is higher than the unproven propositions. In addition, it was possible to perceive that, following the guidelines of textbooks, it is possible to teach the contents of the 1st year of secondary school with an emphasis on mathematical demonstrations.

Keywords: Mathematical Demonstration. Secondary School. Textbook. Propositions.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Comparação entre números de proposições demonstradas e não demonstradas	33
Gráfico 2- Comparação entre o número de proposições relativas a conceitos formais e informais.....	35

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Informações sobre os capítulos de 1 a 4.....	27
Quadro 2 – Informações sobre os capítulos de 5 a 8.....	30
Quadro 3- Informações sobre os capítulo de 9 a 13	32

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Construção de um triângulo retângulo com um ângulo de 45°	22
Figura 2 – Demonstração de uma proposição apresentada no capítulo 1.....	28
Figura 3- Proposição não demonstrada no capítulo 1.....	28
Figura 4- Demonstração da proposição relacionada a conceitos formais no capítulo 2.....	29
Figura 5 – Exemplo de conceito informal	29
Figura 6 – Uma das demonstrações do livro relacionada ao conceito de Módulo	31
Figura 7- Aplicação importante ao conteúdo de logaritmo	31
Figura 8- Proposição não demonstrada capítulo 11.....	33

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 ASPECTOS METODOLÓGICOS	15
2.1 Situando a pesquisa.....	15
2.2 Procedimentos metodológicos	16
3 DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS.....	17
3.1 Métodos de demonstração	18
3.1.1 Método direto	18
3.1.2 Método indireto.....	19
3.2 Outros recursos para demonstração	21
3.2.1 Prova por construção	21
3.2.2 Prova por contraexemplo.....	23
4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....	26
4.1 Descrição e análise dos capítulos de 1 a 4	26
4.2 Descrição e análise dos capítulos de 5 a 8	29
4.3 Descrição e análise dos capítulos de 9 a 13	31
4.4 A análise das evidências.....	33
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

Demonstração matemática (ou prova) é algo muito presente no cotidiano dos estudantes de graduação em Matemática (Licenciatura ou Bacharelado). Durante meu percurso acadêmico, senti muita dificuldade em relação ao processo de demonstração matemática, tanto para fazer como entender uma demonstração. Essa deficiência se deu por se tratar de algo novo, isto é, no meu Ensino Médio não houve ênfase sobre esse processo, isso me fez questionar se essa dificuldade era uma particularidade da minha formação ou era algo que acontece com frequência em outras instituições de ensino. Entretanto, acreditamos que essa dificuldade tem uma ligação direta com a maneira que esse tema é tratado no Ensino Médio. Essas inquietações me motivaram a propor essa temática de investigação, pois para que se construa uma boa formação

os alunos devem chegar ao ensino secundário [consequentemente na graduação] com uma experiência já considerável de actividades de investigação em matemática, durante a qual tiveram numerosas ocasiões para **argumentar e demonstrar**, e refletir com a ajuda do professor sobre essa experiência matemática (VELOSO,1998, p.362, grifo nosso)

Inicialmente nossa proposta era investigar o que de fato ocorre em sala de aula, ou seja, ouvir dos professores se, e como, eles trabalham demonstrações matemáticas em suas aulas. No entanto, devido a algumas dificuldades nossas, decidimos ter como objeto de investigação o livro didático, por acreditar que ele é a base de orientação do professor em suas aulas. Além disso, a ideia inicial era de observar os três anos do Ensino Médio, porém demandaria um tempo maior do que tínhamos disponível, por isso optamos em escolher apenas uma das séries, no caso, o 1º ano do Ensino Médio.

O objetivo deste trabalho foi de **compreender como são tratadas as demonstrações matemáticas em um livro didático do 1º ano do Ensino Médio**. Para isso, escolhemos o livro: *Matemática: ciência e aplicações*, Iezzi et al. (2016).

Buscando alcançar nosso objetivo, fizemos uma leitura geral, observando quais proposições eram apresentadas no livro e quais delas eram demonstradas. Essas informações foram postas em três quadros para facilitar a organização e o nosso entendimento das informações e, consequentemente, auxiliar-nos no processo de análise.

Este texto foi dividido em cinco capítulos, sendo o primeiro esta introdução, onde é apresentada uma visão geral de todo trabalho realizado. O segundo traz os aspectos metodológicos, onde são apresentados os procedimentos propostos e implementados no desenvolvimento desta pesquisa. O terceiro capítulo apresenta uma fundamentação teórica sobre demonstrações matemáticas, discorrendo sobre o que é demonstração, ou prova, e sobre

os métodos de demonstrações matemáticas utilizados. No capítulo quatro é feita uma descrição das informações coletadas e uma análise do livro investigado. Por fim, no último capítulo, são trazidas as considerações, sob um olhar crítico da pesquisadora, baseado em sua experiência como professora e na fundamentação teórica apresentada.

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Nesta pesquisa, buscamos investigar como as demonstrações de proposições matemáticas são tratadas no 1º ano do Ensino Médio. Para isso, fizemos uma leitura sistemática de um livro do 1º ano do Ensino Médio, evidenciando e analisando as proposições contidas nele. A partir disso, buscamos entender a relação entre a quantidade de proposições demonstradas e não demonstradas. Tentamos entender também por que nem todas as proposições enunciadas nesse livro são demonstradas. Para facilitar esse trabalho, dividimos nossa tarefa por grupos de capítulos do livro investigado, isto é, categorizamos os capítulos do livro por meio de um Quadro, separando os conteúdos enunciados de maneira formal dos enunciados de maneira informal. Dentro dessas categorias, formal e informal, foram destacadas e analisadas as proposições apresentadas.

2.1 Situando a pesquisa

Buscando alcançar o objetivo desta pesquisa, **compreender como são tratadas as demonstrações matemáticas em um livro didático do 1º ano do Ensino Médio**, primeiramente selecionamos um livro didático aprovado pelo PNLD – Programa Nacional do Livro Didático. O livro escolhido para essa investigação foi *Matemática: ciência e aplicações*, Iezzi et al. (2016). A escolha desse livro se deu por ele ter autores renomados, ser adotado por várias instituições públicas¹ e privadas e, principalmente, por ser um dos livros que tivemos acesso.

Do ponto de vista da abordagem, apesar de termos apresentado diversos dados quantitativos sobre o livro investigado, nossa pesquisa se constitui (caráter predominante) como qualitativa, pois pesquisa qualitativa

considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. (KAUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010, p.26)

Do ponto de vista dos objetivos, nossa pesquisa se constitui como descritiva, isto é, “visa descrever as características de determinada população ou fenômeno, ou o estabelecimento de relações entre variáveis” (KAUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010, p.28). Uma pesquisa

¹ Em uma pesquisa que realizamos, constatamos que esse livro foi adotado nas escolas: Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Instituto Federal da Bahia, Escola de Educação Básica Irmã Maria Tereza, Colégio Estadual José Candido Rosa.

descritiva busca um amplo grau de generalização, ou seja, pretende descrever todo acontecido, cabendo ao pesquisador realizar um estudo detalhado das evidências levantadas.

Para melhor orientar nosso processo de análise de dados, propusemos as seguintes questões:

- 1) Quantos conceitos são enunciados formalmente e quantos são enunciados informalmente?
- 2) Quantas proposições são enunciadas no livro investigado?
- 3) Quantas proposições enunciadas são demonstradas no livro?
- 4) Existem proposições enunciadas e não demonstradas no livro? Se sim, por quê?
- 5) Qual a relação de uma proposição demonstrada no livro didático com a formalização, ou não, do conceito relativo a essa proposição?

2.2 Procedimentos metodológicos

Buscando responder as perguntas de pesquisa, elaboramos um conjunto de estratégias e procedimentos para nos guiar neste processo de investigação. Primeiramente fizemos um estudo sobre demonstração matemática, para entendermos o que é demonstração matemática, como ela se constitui e é classificada. Em seguida, realizamos a escolha de um livro do 1º ano do Ensino Médio para ser analisado. A partir disso, fizemos uma leitura flutuante que “consiste em estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações” (BARDIN, 2011, p. 126). Durante essa leitura, categorizamos todos os conteúdos de cada capítulo, tópico a tópico, buscando identificar de que forma eles eram apresentados (por meio de definição, de propriedades, teoremas, exemplos, exercícios etc.) e quais proposições estavam presente em cada tópico e, também, quais dessas proposições eram provadas no livro. Para melhor entendimento e execução do processo de análise, colocamos os dados em Quadros (Quadros 1,2 e 3). Em cada Quadro foram evidenciados os conceitos e as proposições de cada capítulo, para facilitar o processo de análise. Durante essa análise, foram observadas se as proposições apresentadas eram, ou não, demonstradas no livro didático. A partir disso, procuramos entender como as demonstrações eram feitas ou porque elas não eram realizadas.

3 DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

A matemática, quando pensada de forma estruturada e com mais formalismo, se fundamenta sobre dois entes: definição e proposição. A definição é responsável por criar denominações para objetos matemáticos de acordo com suas características, ou seja, definir significa nomear objetos de uma classe que possuem uma ou mais características comuns. Por exemplo, quando definimos número par como “todo número inteiro divisível por dois”, não estamos criando um objeto novo, estamos apenas nomeando os números inteiros, objetos matemáticos já existentes, que possuem a característica de ser divisível por 2. Por outro lado, quando analisamos objetos matemáticos com suas especificidades, em geral, apresentadas por uma definição, observando sua composição dentro do contexto da matemática, ou sua relação com outros objetos, dentre outras coisas, podemos evidenciar afirmações que podem ser estabelecidas sobre esses objetos, e essas afirmações podem ser verdadeiras ou falsas, com exceção das afirmações indefiníveis, também conhecidas como paradoxos. Essas afirmações que são verdadeiras ou falsas são chamadas proposições e são enunciadas como teoremas quando podem ser provadas, ou seja, quando é possível apresentar uma prova da sua veracidade, ou como axiomas quando são admitidas como verdadeiras por não ser possível prová-las.

Se existem proposições que podem ser provadas e se provar, ou entender uma prova, é importante para o processo de ensino-aprendizagem, deve ser necessário saber o que é uma prova e como fazê-la. Prova é “aquilo que demonstra que uma afirmação ou um fato são verdadeiros” (HOUAISS; VILLAR, 2009, p. 1567). Segundo esses mesmos autores, prova é sinônimo de demonstração. Porém, essa definição de prova não consegue dar conta de explicar como e quando podemos garantir que uma prova matemática foi realmente concluída e, principalmente, se ela está correta.

Segundo Carnielli e Epstein (2005), a maioria dos matemáticos não se preocupam em clarificar precisamente o que é uma prova, por não julgarem isso necessário. Eles sabem intuitivamente o que é uma prova correta e o que não é. Esses autores, então, questionam de onde vem essa intuição dos matemáticos, e acreditam que ela é oriunda do resultado da imitação e de correções e ajustes, durante o processo de aprendizagem de matemática, em que cada geração vai passando à próxima uma maneira de se expressar matematicamente, construindo, assim, uma cultura dentro da matemática. Como as culturas mudam com o passar do tempo, os padrões utilizados em provas atualmente são bem diferentes daqueles usados no tempo de Euclides, ou mesmo no tempo de Leibniz e Newton, quando o Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvido. Inclusive, como afirma Carnielli e Epstein (2005), a maioria dos matemáticos

acreditam que o padrão das provas atualmente é mais alto e que fazemos matemática melhor que as gerações anteriores.

Carnielli e Epstein (2005) também chamam a atenção para que, independentemente das mudanças ocorridas ao longo do tempo nos processos de se fazer provas matemáticas, é preciso ter em mente que uma prova é uma forma de comunicação, em que a demonstração consiste na apresentação ou no particular arranjo dos argumentos que produzem a prova. Observando que quando se constrói uma prova tenta-se convencer alguém (possivelmente a si mesmo) de que uma afirmação decorre de outras, e se essas outras são verdadeiras (foram provadas ou já foram aceitas como verdadeiras) então aquela que se quer provar também é verdadeira.

Consideraremos neste texto demonstração como sinônimo de prova, apesar de alguns matemáticos, como afirmam Carnielli e Epstein (2005), considerar uma demonstração como uma versão informal de uma prova, que simplesmente apresentam ideias gerais a partir das quais uma prova pode ser construída.

3.1 Métodos de demonstração

Demonstrar, ou provar, uma proposição matemática nem sempre é uma coisa fácil e pode exigir habilidades que poucos possuem. De fato, uma demonstração, mesmo que aparentemente simples, pode demandar um esforço muito além do que se esperava a priori e demorar dias, meses e até vários anos para ser concluída. Por exemplo, o *Último Teorema de Fermat*, que pode ser enunciado de uma forma tão singela “a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução inteira para $n > 2$ ” demorou, segundo Singh (2001), mais de 300 anos para ser provada e somente a parte final da demonstração, a prova da conjectura de Tanyama-Shimura, tinha 130 páginas. Diante disso, a habilidade para se fazer demonstração matemática não é uma coisa que se ensina, essa habilidade parece ser algo nata e/ou algo que vai se aprimorando ao longo de um árduo trabalho prático que exige muita dedicação e persistência.

Apesar de a habilidade em se fazer demonstração matemática ser algo que se adquire por meio de experiências práticas, que não podem simplesmente ser ensinada, alguns estudiosos, baseado em observações de como os matemáticos fazem demonstrações, classificou os processos utilizados para se fazer uma prova matemática. E, a princípio, estabeleceram dois métodos: Direto e Indireto. E, além disso, evidenciaram outros recursos que podem ser usados no processo de demonstração, como: exibir um contraexemplo; construir objetos que poderão auxiliar na argumentação, aplicar princípios (postulados ou proposições já provadas) próprios para garantir a veracidade de alguma afirmação etc.

3.1.1 Método direto

Segundo Garbi (2010), neste método parte-se de premissas ou de axiomas, e evidencia a veracidade do que se quer provar, por meio de uma sequência direta de inferências. Neste caso, a prova se constitui de uma classe de proposições postas em sequência, onde a última proposição dessa sequência é o que se deseja provar. Sendo verdadeira a primeira proposição dessa sequência, mostra-se que a segunda também é verdadeira e, novamente, sendo a segunda verdadeira, mostra-se que a terceira é verdadeira. Isso é feito até que a penúltima proposição é mostrada como verdadeira e, a partir dela, mostra-se que a última, no caso a que se pretendia provar inicialmente, é verdadeira.

Para ilustrar um exemplo desse método usaremos a seguinte proposição “Sendo A , B e C conjuntos quaisquer, se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ ”. Para se provar essa proposição, primeiramente é preciso entender o que significa dizer que um conjunto está contido em outro, ou seja, o que significa $X \subset Y$, sendo X e Y dois conjuntos. Para entender o significado dessa expressão basta recorrer a definição de inclusão de conjuntos, em que é usado o símbolo $\subset$. Essa definição estabelece que $X \subset Y$ se todo elemento de X é também um elemento de Y e, para facilitar uma demonstração, podemos escrever isso da seguinte forma “se para todo $x \in X$, tem-se $x \in Y$ ”, ou seja, essa expressão é equivalente a $X \subset Y$. Assim, a demonstração que queremos fazer pode ser feita tomando um elemento x qualquer em A e mostrar que x é também um elemento de C . Essa demonstração pode ser feita da seguinte forma: “tomando $x \in A$, como $A \subset B$, temos $x \in B$ e como $B \subset C$, temos $x \in C$, portanto $A \subset C$ ”. Note que nessa demonstração, considerou-se a premissa $x \in A$ (primeira proposição considerada verdadeira), em seguida mostrou-se que $x \in B$ (segunda proposição) usando como argumento a hipótese $A \subset B$. A partir disso, mostrou-se que $x \in C$ (terceira proposição) usando como argumento a hipótese $B \subset C$. Em seguida, concluiu-se que $A \subset C$ (terceira e última proposição, a que se pretendia provar inicialmente) usando como argumento o fato de que para qualquer $x \in A$, tem-se $x \in C$.

3.1.2 Método indireto

Esse método, também conhecido como *contradição* ou *redução ao absurdo*, “consiste em assumir por hipótese que a proposição que se quer demonstrar é falsa [...]. Se disso derivamos uma contradição, então não podemos assumir tal hipótese, e, portanto, a proposição é necessariamente verdadeira” (CARNIELLI; EPSTEIN, 2005b, p. 59).

Esse método é muito usado em várias áreas da matemática, como Álgebra e Teoria de Números, e é considerado muito eficiente para se fazer demonstração. Vale ressaltar que nem toda demonstração pode ser feita usando esse método, pois nem sempre será fácil, ou mesmo

possível, se chegar a uma contradição. Ademais, não existe um método que se aplique a todos os tipos de demonstração, assim, para se conseguir demonstrar uma proposição, primeiramente é preciso descobrir o método certo e conseguir implementá-lo.

Para entendermos como se aplica o Método Indireto, vamos fazer dois exemplos, o primeiro, mais simples, que será usado na argumentação do segundo. Nesses exemplos, precisamos da definição de número par e de número ímpar. Define-se número par como “todo número inteiro que pode ser escrito na forma $2n$, com n inteiro” e número é ímpar “todo número inteiro que pode ser escrito na forma $2n+1$, com n inteiro”.

Como primeiro exemplo do uso do Método Indireto, vamos fazer a demonstração da proposição “se a^2 é um número par, então a também é par”. Pelo Método Indireto, admitiremos, por hipótese, que a^2 é par e supomos, por contradição, que a não é par. Se a não é par, então a é ímpar, logo a pode ser escrito na forma $2n+1$, com $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $a = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$ e, conseqüentemente, $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$. Para simplificar essa expressão, podemos considerar $m = 2n^2 + 2n$, disso decorre que $m \in \mathbb{Z}$ $a^2 = 2m + 1$. Como a^2 pode ser escrito como o dobro de um número inteiro, a^2 é ímpar, mas isso é absurdo, pois, por hipótese, a^2 é par. Observe que ao se supor que a não é par obtém-se uma contradição, portanto a deve ser um número par.

Como segundo exemplo, vamos fazer a demonstração da proposição “ $\sqrt{2}$ é um número irracional”. De antemão já percebemos a impossibilidade da utilização do Método Direto, visto que, não se tem, em um contexto elementar, uma definição para números irracionais. De fato, para se definir número irracional seria preciso um estudo aprofundado de sequências e números reais, incluindo outras definições, como convergência, e seria necessário demonstrar outras proposições para estabelecer tal definição, como a proposição “existem sequências de números racionais que convergem para um número que não é racional”.

Diante dessa impossibilidade de se apoiar em uma definição de número irracional para se fazer uma demonstração, podemos provar a afirmação proposta, “ $\sqrt{2}$ é um número irracional”, com base na dicotomia entre número racional e irracional, isto é, se um número real não é irracional, então ele é racional. Isso, de certa forma, já induz ao Método Indireto, pois para provar que um número é irracional basta provar que ele não é racional e, para isso, basta supor que esse número seja racional e obter uma contradição.

Suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Por definição, todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros, sendo $b \neq 0$. Como $\frac{a}{b}$ corresponde a uma classe de frações, ou seja, pode ser escrita de infinitas formas, por exemplo, $\frac{1}{2}$ pode ser escrita como $\frac{2}{4}$ ou $\frac{-2}{-4}$ ou $\frac{3}{6}$ ou $\frac{4}{8}$, etc., podemos escolher $\frac{a}{b}$ com sendo a forma mais simplificada do número racional, ou seja, àquela em que não se tem um divisor comum para a e b , exceto, é claro, 1 e -1 que são divisores de todos os números, isso é equivalente a dizer que $\text{mdc}(a,b)=1$. Logo, podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$.

Dessa última igualdade, concluímos que a^2 é par, pois a^2 é o dobro de um número inteiro. O fato de a^2 ser par nos leva a concluir, com base na demonstração que fizemos anteriormente, que a também é par. Sendo a um número par, podemos escrever $a = 2n$, com n inteiro. Substituindo a por $2n$ na expressão $a^2 = 2b^2$, temos $(2n)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2$. Dessa última igualdade, concluímos que b^2 é par, pois ele é o dobro do número inteiro n^2 . Como já provamos anteriormente, se b^2 é par, então b também é par, mas isso é absurdo, pois mostramos que a também é par. E se a e b são números pares, então ambos são divisíveis por 2, o que contraria o fato de $\text{mdc}(a,b)=1$. Concluímos que ao supor que $\sqrt{2}$ não é um número irracional obtemos uma contradição, portanto $\sqrt{2}$ deve ser irracional.

3.2 Outros recursos para demonstração

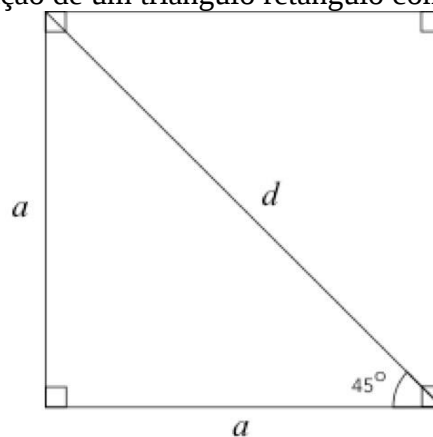
Além dos dois métodos, direto e Indireto, citados anteriormente, para se fazer uma demonstração matemática, dispomos de outros recursos que podem ser, inclusive, combinados com esses dois métodos. O conhecimento desses recursos é importante para quem deseja desenvolver habilidades para fazer provas matemáticas. A seguir apresentaremos cada um desses recursos, juntamente com um exemplo para explicitar como colocá-lo em prática.

3.2.1 Prova por construção

Esse recurso consiste em se construir um objeto matemático, figura, equação, função etc., de forma que esse objeto exiba explicitamente a veracidade do que pretendemos provar ou nos auxilie de maneira eficiente na argumentação da demonstração.

Para demonstrar como utilizar esse recurso de demonstração, vamos fazer a prova de $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Para fazermos essa demonstração, precisamos saber a definição de seno e, conhecer o teorema de Pitágoras. Sendo a e b , respectivamente, a hipotenusa e o cateto oposto de um ângulo α , interno de um triângulo retângulo, então, por definição, $\sin \alpha = \frac{b}{a}$. Se c é o outro cateto desse triângulo, então, pelo Teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Com base nessas informações, podemos fazer a demonstração da proposição dada, por meio da construção de um triângulo retângulo em que um dos seus ângulos internos seja 45° . E uma forma de se conseguir isso, seria dividir um quadrado em duas partes, por uma de suas diagonais, como mostra a figura a seguir.

Figura 1- Construção de um triângulo retângulo com um ângulo de 45°



Fonte: Elaborado pela autora

Podemos identificar, na Figura 1, um triângulo retângulo de hipotenusa d e com dois catetos iguais a a . Pelo Teorema de Pitágoras, temos $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{2}$. Usando a definição de seno, podemos calcular o seno de 45° por $\sin 45^\circ = \frac{a}{d} =$

$$\frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como outro exemplo, vamos provar a proposição “se um número natural $n > 1$ não é primo, então n é divisível por algum número primo p . Para demonstrar essa proposição, precisamos saber o que é número primo. Número primo, por definição, é todo número natural maior que 1 e que possui como divisores apenas o 1 e ele próprio. Um outro conhecimento necessário é o de uma proposição denominada Princípio da Boa Ordem, ou Princípio do Menor

Número Natural, que estabelece que todo subconjunto, não vazio, de números naturais possui um menor elemento.

Dessa vez, combinaremos um processo construtivo com o Método Indireto. Começamos construindo um conjunto S , constituído de todos os divisores de n diferentes de 1 e do próprio n , ou seja, $s = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ divide } n\}$. Como n não é primo, por hipótese, ele possui pelo menos um divisor a diferente de 1 e dele mesmo, logo $a \in S$ e, portanto, S não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordem, S possui um mínimo, que chamaremos de p . Vamos usar o Método Indireto para provar que p é primo, ou seja, vamos supor que p não seja primo e obter uma contradição. Assim, considerando que p não é primo, p possui um divisor b , diferente de 1 e do próprio p , logo $1 < b < p$. Como b divide p e p divide n , temos que b divide n , consequentemente $b \in S$, mas isso é absurdo, pois $b < p$ e p é o mínimo de S . Portanto, p é primo e p é um divisor de n .

3.2.2 Prova por contraexemplo

Esse tipo de demonstração acontece quando queremos provar que uma dada afirmação não é sempre verdadeira, ou sempre falsa. Para isso, basta exibir um objeto, ou evidenciar uma situação, que contrarie a afirmação, ou seja, mostrar que, para aquele caso, a afirmação não é sempre verdadeira, ou não é sempre falsa. Esse método pode ser usado desde casos elementares, em que conseguimos facilmente determinar um contraexemplo, até casos mais complexo em que o contraexemplo precisa ser construído, necessitando assim de uma combinação com uma demonstração construtiva e, muitas vezes, há a necessidade também do uso do Método Direto ou Indireto.

Um exemplo bem simples seria provar que não é verdadeira a afirmação “todo número primo é ímpar”. Para isso, basta exibir como contraexemplo no número 2, que só possui como divisores o 1 e ele próprio, logo 2 é primo e não é ímpar.

Para um segundo exemplo, consideremos a afirmação “qualquer que seja n natural, $n^2 + 41n + 41$ é um número primo”. Podemos mostrar que essa afirmação não é sempre verdadeira tomando $n = 41$. Com efeito, $41^2 + 41 \cdot 41 + 41 = 2 \cdot 41^2 + 41 = 41(2 \cdot 41 + 1) = 41 \cdot 83$, logo $n^2 + 41n + 41$, para $n = 41$, é divisível por 41 e por 83, portanto não é um número primo. Observe que para todo número natural n , menor que 41, essa afirmação é verdadeira.

Muitas vezes, a busca por um contraexemplo é feita quando desconfiamos que alguma afirmação não é sempre verdadeira, ou sempre falsa. E encontrar esse contraexemplo pode não ser uma coisa fácil, podendo, inclusive, produzir uma nova proposição sobre a existência desse contraexemplo, essa proposição seria do tipo “não existe um objeto que satisfaça tal situação”.

Como exemplo, podemos citar o último Teorema de Fermat, isto é, a proposição “a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução inteira para $n > 2$ ”. Inicialmente, os matemáticos que desconfiaram que essa afirmação não era válida para todo $n > 2$, buscaram um contraexemplo que contrariasse essa afirmação, ou seja, buscaram uma terna de números inteiros x , y e z que satisfizessem a equação $x^3 + y^3 = z^3$, ou outra com grau maior que 3, mas é lógico que não encontraram esse contraexemplo, pois, mais de 300 anos depois que esse teorema foi enunciado, ele foi provado.

Quando um contraexemplo não é encontrado e não se consegue provar a não existência dele, temos uma conjectura. Uma conjectura é uma proposição em que se tem convicção de sua validade, porém ninguém conseguiu prová-la. Como exemplo de uma conjectura, evidenciada pela falta de um contraexemplo, podemos citar a conjectura dos números quase perfeitos. Para entendermos essa conjectura, primeiro precisamos entender o que é um número perfeito e um número quase perfeito. Um número natural é chamado perfeito se a soma de seus divisores, excluindo-o, for igual ao próprio número. 6 é um número perfeito, pois os divisores de 6 são: 1, 2, 3 e 6 e soma desses divisores, excluindo o próprio 6, é $1 + 2 + 3 = 6$. Um número é quase perfeito quando a soma de seus divisores, excluindo o próprio número, se difere desse número por apenas uma unidade. Por exemplo, 8 é um número quase perfeito, de fato, os divisores de 8 são: 1, 2, 4 e 8 e soma desses divisores, excluindo o 8, é $1 + 2 + 4 = 7$ que se difere de 8 por apenas uma unidade. A proposição “não existe um número natural cuja soma de seus divisores, excluindo o próprio número, exceda esse número em apenas uma unidade” é um exemplo de uma proposição que não foi provada e não se conseguiu um contraexemplo que contrariasse essa afirmação, ou seja, um número em que a soma de seus divisores, excluindo o próprio número, dê uma unidade a mais que esse número. Depois de muita procura por contraexemplo, sem sucesso, acredita-se que esse contraexemplo não exista e, portanto, conjecturou-se essa afirmação”, ou seja, acredita-se que ela seja verdadeira, mas como não ainda não foi provada, ela não pode ser considerada um teorema, é apenas uma “conjectura”.

Apesar de usarmos o termo “prova por contraexemplo”, muitas vezes a prova é feita exibindo-se um exemplo. Porém, as duas formas são equivalentes, pois depende somente de como se enuncia a proposição. Por exemplo, se ao invés de enunciar “qualquer que seja n natural, $n^2 + 41n + 41$ é um número primo”, fosse enunciado “ $n^2 + 41n + 41$ **não** é primo, para todo n ”, que são duas proposições equivalentes, a demonstração seria feita exibindo um valor para n em que $n^2 + 41n + 41$ não fosse primo. Neste caso, 41 não seria um contraexemplo, ou

seja, um valor que iria contrariar a proposição, mas sim um exemplo, isto é, um valor que iria satisfazer a proposição.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Os dados que compõem a nossa pesquisa foram obtidos por meio de uma leitura sistemática do livro *Matemática: ciência e aplicações*, Iezzi et al. (2016). A partir dessa leitura, foram construídos três quadros. Esses quadros nos auxiliaram na organização das informações, facilitando evidenciar aquelas relacionadas à nossa proposta de investigação, ou seja, informações que nos ajudaram a responder as nossas questões de pesquisa. Nossa escolha em dividir o conjunto de informações, categorizadas por nós a partir do livro didático investigado, se deu em virtude do grande número de informações que, em um único quadro, se tornaria muito extenso, dificultando sua apresentação e o nosso processo de análise.

Muitos conceitos são utilizados no livro sem serem definidos, acreditamos que os autores consideraram esses conceitos como sendo de conhecimento do aluno, obtido em séries anteriores. Na nossa investigação, esses conceitos, não definidos, foram chamados **Informais**, pois, pela nossa percepção, os autores consideraram que os estudantes conheciam os significados de alguns objetos de maneira intuitiva (informal), como é o caso de frações, número par, número ímpar etc. Muitas vezes, com intuito de revisar ou clarificar um conceito, os autores o introduzem a partir de uma ideia intuitiva para que o leitor possa produzir significado para algum objeto. Uma maneira muito usada para construção informal de um conceito é por meio de exemplos capazes de levar o leitor a conceber esse conceito. Em algumas situações, no livro, os conceitos são apresentados de maneira formalizada, ou seja, por meio de uma definição. Nestes casos, esses conceitos foram chamados, neste trabalho, de **Formais**.

Durante a apresentação das informações, sistematizadas nos quadros mencionados, buscamos, dentre outras coisas, identificar quais e quantas proposições são fundamentadas em conceitos formais e informais, além disso, quais delas são demonstradas no livro investigado. E, a partir disso, tentar entender qualitativamente como os autores do livro didático investigado se posicionam em relação ao processo de demonstração para esse nível.

Primeiramente, nos itens 4.1, 4.2 e 4.3, são apresentados os quadros mencionados, juntamente com uma descrição das informações colocadas neles, e no item 4.4 é feita uma análise das informações, por meio de uma discussão geral sobre todo o livro, com fortes posicionamentos da pesquisadora, baseados no seu entendimento sobre a relação entre demonstração matemática e ensino-aprendizagem.

4.1 Descrição e análise dos capítulos de 1 a 4

No Quadro 1, são apresentadas informações dos capítulos 1, 2, 3 e 4. Essas informações referem-se a quais conteúdos têm seus conceitos trazidos de maneira formal e quais são

apresentados de maneira informal, juntamente com o número de proposições demonstradas e o número de proposições não demonstradas.

Quadro 1 – Informações sobre os capítulos de 1 a 4

		Conceitos	Quantidade de proposições Demonstrada	Quantidade de proposições não Demonstradas
Capítulo 1	Formal	Igualdade de conjunto; Subconjuntos – Relação de Inclusão; Intersecção; conjunto das partes; reunião; diferença e complementar.	1	10
	Informal	Conjuntos; elementos; pertinência; diagrama de Venn e conjunto.	0	0
Capítulo 2	Formal	Números inteiros opostos; módulo de um número inteiro; o conjunto $\mathbb{Q}$, intervalos Reais; Razão, Proporção; Porcentagem; inverso; quadrado perfeito;	1	0
	Informal	Números naturais; número inteiro; número par; número ímpar; número primo; múltiplo de 3; interpretação geométrica dos números inteiros, número racional; forma decimal das frações; decimais exatos; dízima periódica; fração; Representação geométrica do conjunto dos números racionais; números irracionais; número real; média aritmética.	3	8
Capítulo 3	Formal	função; Notação; Domínio e contradomínio; Determinação de domínio; Conjunto Imagem; ponto de máximo e mínimo; função par e função ímpar; taxa média de variação;	0	0
	Informal	Relação; função; Noção intuitiva; Funções definidas por fórmulas; Leitura informal de gráficos; O plano cartesiano; gráficos; Análise de gráficos, função crescente e decrescente; zero de uma função;	0	0
Capítulo 4	Formal	Função do 1º grau; Gráfico de função de 1º grau; Raiz de uma equação do 1º grau; Função afim crescente e decrescente; Sinal; grandezas inversamente proporcionais.	3	0
	Informal	Função do 1º grau; Intersecção de retas; Função constante;; Taxa média de variação de função afim; Inequações; coeficiente angular e linear; Grandezas diretamente proporcionais.	1	0

Fonte: Elaborado pela autora

No capítulo 1 do livro investigado, como pode ser observado no Quadro 1, não há nenhuma proposição posta sobre conceitos informais, mas há 11 proposições apresentadas dentro dos conceitos formais em que, destas, apenas uma, relacionada aos conceitos de Intersecção e Reunião, foi demonstrada. Essa proposição afirma que a quantidade de elementos na união de dois conjuntos é a soma do número de elementos dos dois conjuntos, subtraída a quantidade de elementos da intersecção entre esses dois conjuntos. A demonstração dessa proposição, apresentada no livro, é mostrada na Figura 2.

Figura 2 – Demonstração de uma proposição apresentada no capítulo 1

• Pelo diagrama ao lado, vê-se que:

$$A = X \cup (A \cap B) \text{ e } A \cup B = X \cup B$$

Como $X \cap (A \cap B) = \emptyset$, então temos:

$$n(A) = n(X) + n(A \cap B) \quad \textcircled{1}$$

Como $X \cap B = \emptyset$, então temos:

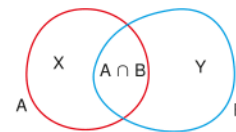
$$n(A \cup B) = n(X) + n(B) \quad \textcircled{2}$$

Assim, de $\textcircled{1}$ temos: $n(X) = n(A) - n(A \cap B)$, que, substituído em $\textcircled{2}$, resulta em:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Em particular, se **A** e **B** são disjuntos, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$, temos:

$$n(A \cap B) = 0 \text{ e, nesse caso, } n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$



Fonte: Iezzi et al. (2016 p.13)

Em algumas situações, o livro não faz a demonstração das proposições enunciadas, porém deixa claro que se trata de uma afirmação cabível de demonstração ao dizer que ela será aceita sem demonstração, como pode ser visto na Figura 3.

Figura 3- Proposição não demonstrada no capítulo 1

► Propriedades da interseção e da reunião

Vamos admitir, sem demonstração, a validade de cada uma das seguintes propriedades.

Quaisquer que sejam os conjuntos **A**, **B** e **C**:

- **Idempotente:** $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$
- **Comutativa:** $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$
- **Associativa:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 14)

O capítulo 2 apresenta apenas uma proposição relacionada a conceitos formalizados, e esta proposição é demonstrada. Em relação aos conceitos informais têm-se 11 proposições, em que três são demonstradas.

A Figura 4 apresenta os conceitos formais relacionados à única proposição demonstrada, juntamente com sua demonstração.

Figura 4- Demonstração da proposição relacionada a conceitos formais no capítulo 2**▶ Proporção**

Dadas duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, chama-se **proporção** a igualdade entre essas razões:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (\text{lê-se: } a \text{ está para } b \text{ assim como } c \text{ está para } d)$$

Em uma proporção, os números **a** e **d** são chamados **extremos**, e os números **b** e **c** são chamados **meios**.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ vale a propriedade:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Para demonstrá-la, basta multiplicar os dois membros da igualdade por $b \cdot d \neq 0$:

$$b \cdot d \cdot \frac{a}{b} = b \cdot d \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Dizemos que o produto dos extremos (**a** e **d**) é igual ao produto dos meios (**b** e **c**).

Por exemplo, na proporção $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ temos $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 = 18$; em $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ temos $1 \cdot 16 = 4 \cdot 4$.

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 34)

Como pode ser visto no Quadro 1, no capítulo 3, que trata de conteúdos relacionados a conceitos formais e informais de funções, não há nenhuma proposição enunciada.

No capítulo 4, vemos que há apenas três proposições estabelecidas sobre os conceitos formais: *gráfico de uma função do primeiro grau*, *raiz de uma equação do primeiro grau* e *coeficiente linear*, todas demonstradas. Nesse capítulo, há somente uma proposição sobre conceitos informais, e ela também foi demonstrada.

Na Figura 5, é apresentado um exemplo de conceito informal apresentado no livro.

Figura 5 – Exemplo de conceito informal**▶ Função linear**

Um caso particular de função afim é aquele em que $b = 0$. Nesse caso, temos a função afim **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax$ com **a** real e $a \neq 0$, que recebe a denominação especial de **função linear**.

Exemplos:

- $f(x) = 3x$, em que $a = 3$ e $b = 0$.
- $f(x) = -4x$, em que $a = -4$ e $b = 0$.
- $f(x) = x$, em que $a = 1$ e $b = 0$. Nesse caso a função **f** recebe o nome de **função identidade**.

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 71)

4.2 Descrição e análise dos capítulos de 5 a 8

No Quadro 2, a seguir, são apresentadas as proposições relacionadas a conceitos formais e informais dos capítulos de 5 a 8, e o número de proposições demonstradas e não demonstradas.

Quadro 2 – Informações sobre os capítulos de 5 a 8

		Conceitos	Quantidade de proposições Demonstrada	Quantidade de proposições não Demonstradas
Capítulo 5	Formal	Função quadrática; Parábola; Raízes de uma equação do 2º grau; Soma e produto das raízes; Forma fatorada; Coordenadas do vértice.	4	2
	Informal	Gráfico; Quantidade de raízes; Conjunto imagem; Esboço da parábola; Sinal; Inequações.	0	1
Capítulo 6	Formal	Módulo de um número real; função modular.	4	1
	Informal	Função definida por mais de uma sentença; Gráfico; Equações modulares; Inequações modulares.	0	2
Capítulo 7	Formal	Propriedades de potência, Raiz enésima; Função exponencial.	1	14
	Informal	Função exponencial; Potência de expoente inteiro negativo; Potência de expoente racional; Potência de expoente irracional, Potência de expoente real; Gráfico; Número de Euler, Gráfico; Equação exponencial.	3	3
Capítulo 8	Formal	Logaritmo; Logaritmo do produto; Logaritmo do quociente; Logaritmo da potência; Aplicação importante.	9	0
	Informal	Consequências; Sistemas de logaritmo; Função logaritmica; Gráfico de uma função logaritmica; Função exponencial e função logaritmica; Equações exponenciais.	5	0

Fonte: Elaborado pela autora

Como pode ser observado no Quadro 2, no capítulo 5 têm-se 6 proposições sobre conceitos formais, sendo quatro demonstradas e duas não demonstradas. Em relação aos conceitos informais tem-se somente uma proposição, e ela não é demonstrada.

No capítulo 6, têm-se quatro proposições demonstradas e uma não demonstrada, relacionadas a conceitos formais. Apenas duas proposições aparecem sobre os conceitos informais e nenhuma delas é demonstrada. Vale ressaltar que todas as proposições demonstradas neste capítulo são sobre a existência de propriedades de Módulo e Função Modular. Uma dessas demonstrações pode ser vista na figura 6.

Figura 6 – Uma das demonstrações do livro relacionada ao conceito de Módulo

$$I) \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$$

Demonstração:

É imediata, pois: se $x > 0$, $|x| = x > 0$

se $x < 0$, $|x| = -x > 0$

e se $x = 0$, $|x| = 0$

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 121)

No capítulo 7, há 14 proposições não demonstradas e apenas uma demonstrada, relacionadas aos conceitos formais. Sobre os conceitos informais são apresentadas seis proposições, sendo 3 demonstradas e 3 não demonstradas.

O capítulo 8 apresenta nove proposições demonstradas sobre conceitos formais, sendo uma delas, relacionada ao conteúdo de logaritmo, trazida em um tópico denominado “Aplicação importante”. Essa demonstração pode ser vista na figura 7. Sobre conteúdos relacionados a conceitos informais têm-se 5 proposições, todas demonstradas. Vale ressaltar que neste capítulo não há nenhuma proposição não demonstrada.

Figura 7- Aplicação importante ao conteúdo de logaritmo

Sejam **a** e **b** reais positivos e diferentes de 1. Temos que:

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \quad \text{ou} \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Demonstração:

Basta escrever $\log_b a$ na base **a**, de acordo com a propriedade da mudança de base:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}, \text{ ou seja, } \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

Note que, como $b \neq 1$, o denominador $\log_a b$ é diferente de zero.

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 159)

4.3 Descrição e análise dos capítulos de 9 a 13

No Quadro 3 são apresentadas informações relacionadas aos capítulos de 9 a 13. Esse Quadro, da mesma forma que os anteriores, apresenta informações divididas entre conceitos formais e informais, evidenciando o número de proposições demonstradas, ou não demonstradas, relacionadas a cada tipo de conceito.

Quadro 3- Informações sobre os capítulo de 9 a 13

		Conceitos	Quantidade de proposições Demonstrada	Quantidade de proposições não Demonstradas
Capítulo 9	Formal	Progressão aritmética, classificação, Termo geral de uma PA, Soma dos n primeiros termos de uma PA, Progressão geométrica, classificação, Termo geral de uma PG, Soma dos n primeiros termos de uma PG, Soma dos n termos de uma PG infinita.	4	2
	Informal	Sequência numérica, Termo Geral, Progressão aritmética e função afim, PG e função exponencial,	0	0
Capítulo 10	Formal	Semelhança de triângulos, Teorema de Tales, Teorema fundamental da semelhança, Critérios de semelhança, Consequência da semelhança de triângulos, relações métricas, Aplicações notáveis.	10	4
	Informal	Semelhança, Razão de semelhança,.	0	0
Capítulo 11	Formal	Seno e cosseno de um ângulo agudo, Triângulo equilátero, Quadrado	2	2
	Informal	Razões trigonométricas, Tangente de um ângulo agudo, Tabela de razões trigonométricas,	4	0
Capítulo 12	Formal	Área do retângulo, Área do Quadrado, Área do paralelogramo, Área do triângulo, Área do triângulo equilátero, Área do losango, Área do trapézio, Área de um polígono regular,	7	0
	Informal	Área do círculo, Área do setor circular, Área da coroa circular, Área do segmento circular,	3	0
Capítulo 13	Formal	Frequência relativa.	0	0
	Informal	Amostragem, Variável, Representação Gráfica.	0	0

Fonte: Elaborado pela autora

No capítulo 9, pode-se observar que não há nenhuma proposição relacionadas a conceitos informais. São 6 proposições referente aos conceitos formais, quatro destas foram demonstradas e duas não demonstradas.

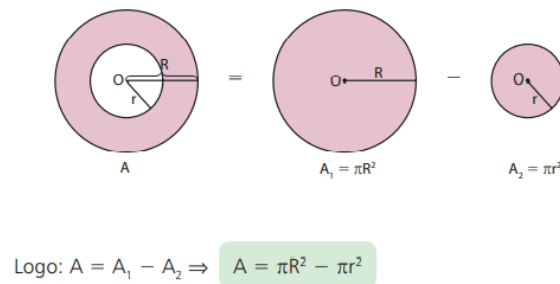
No capítulo 10 há 14 proposições referente a conceitos formais, 10 destas proposições foram demonstradas e apenas 4 não foram demonstradas. Da mesma forma que ocorreu no capítulo 9, não há proposições relacionadas a conceitos informais.

O capítulo 11 apresenta quatro proposições referente aos conceitos formais, sendo duas demonstradas e duas não demonstradas. Referente aos conceitos informais, têm-se 4

proposições, todas demonstradas. Algumas demonstrações são feitas pelo Método Direto, utilizando representações visuais, como pode ser visto na figura 8.

Figura 8- Proposição não demonstrada capítulo 11

Observe que a área de uma coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos círculos cujos raios medem R e r .



Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 247)

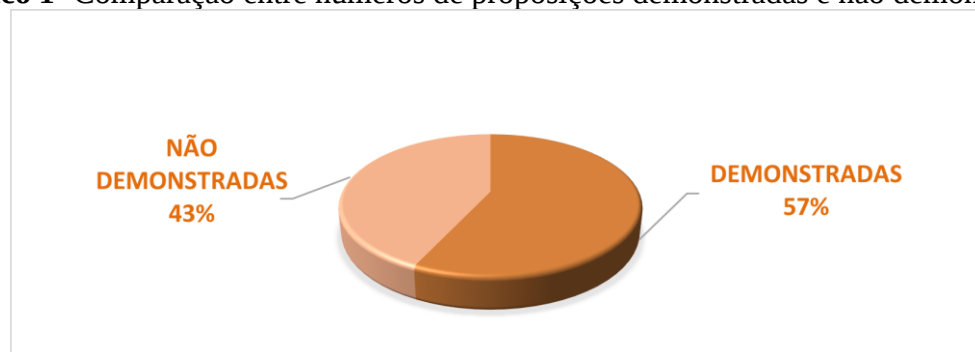
O capítulo 12 apresenta 7 proposições sobre conceitos formais, todas elas demonstradas. Sobre conceitos informais têm-se 3 proposições, todas também demonstradas.

O último capítulo, capítulo 13, é bem pequeno em comparação com os outros capítulos. Esse capítulo é sobre Estatística básica e não traz nenhuma proposição.

4.4 A análise das evidências

No livro investigado foram enunciadas 114 proposições, das quais 65 foram demonstradas e 49 não foram demonstradas, correspondendo, respectivamente, a 57% e 43%. Essa comparação é ilustrada no gráfico 1.

Gráfico 1- Comparação entre números de proposições demonstradas e não demonstradas



Fonte: Elaborado pela autora

A princípio, acreditávamos que o número de proposições não demonstradas fosse superior aos das demonstradas, inclusive com uma grande diferença, pois, baseado na nossa experiência como professores de Educação Básica, nesse estágio, em geral, não se têm muitos estudantes com nível de abstração suficiente para entender demonstrações matemáticas, principalmente, apenas por meio de leituras. Mais difícil ainda, é que esses estudantes sejam capazes de fazer todas as demonstrações das proposições enunciadas no livro investigado. Vale ressaltar que, como foi colocada nas descrições, existem proposições cuja demonstração requer conhecimento em nível mais elevado, por exemplo, o Teorema de Tales. Além disso, mesmo que todas as demonstrações fossem colocadas no livro, seria inviável trabalhar todas durante o ano letivo, inclusive acreditamos que nem todas as demonstrações feitas no livro poderiam ser reproduzidas e discutidas pelo professor durante as aulas, devido a limitação de tempo, a quantidade de conteúdo a serem trabalhados e a dificuldade de se ensinar demonstração. Porém, é importante que se trabalhe a maior quantidade possível de demonstrações matemáticas, pois, como afirmam Carnielli e Epstein (2005), demonstração matemática é uma forma de comunicação que consiste na apresentação ou no particular arranjo que produz a prova. Nesse sentido, o conhecimento sobre o processo de demonstração torna-se de grande importância para a aprendizagem de Matemática.

Ressaltemos que, apesar de muitas das proposições apresentadas no livro-texto não serem provadas, os autores demonstram preocupação e enfatizam, de certa forma, a necessidade do aluno em entender demonstração matemática, ao afirmarem que

Do ponto de vista da Matemática, prevalece o método dedutivo, em que uma propriedade matemática só é validada por meio de uma demonstração. Na Matemática, uma propriedade (ou um teorema) é uma proposição do tipo “Se p então q ”, em que p é a hipótese e q é a tese. A demonstração é uma sequência (finita) de passos lógicos que permitem, a partir de p , concluir que q é verdadeira. (IEZZI et al., 2016, p.22)

E, ainda, os autores apresentam, na página 22, um exemplo especificamente para ilustrar o que é uma demonstração matemática.

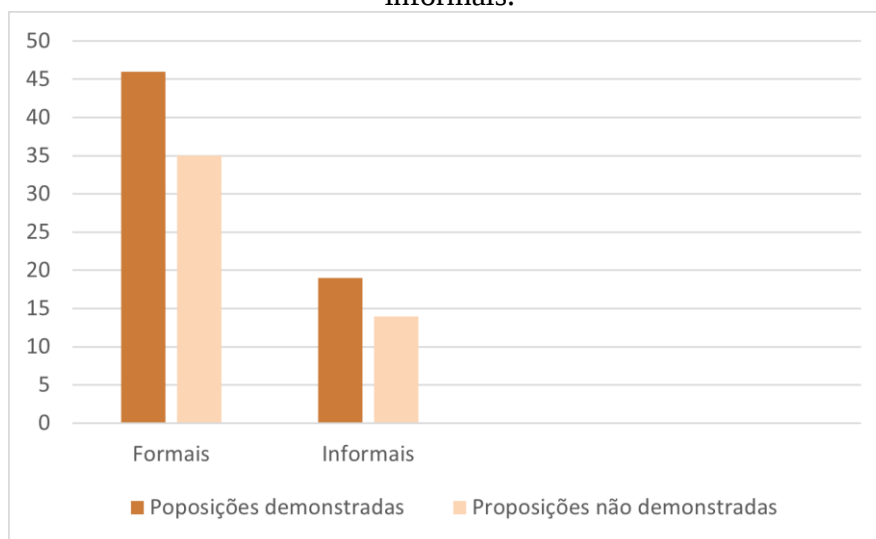
Além disso, podemos perceber a preocupação dos autores sobre a discussão da validade de uma proposição, mesmo quando as proposições não são demonstradas, pois, às vezes, eles apresentam proposições enfatizando que elas não serão demonstradas, “Vamos admitir, sem demonstração, a validade de cada uma das seguintes propriedades [...]” (IEZZI et al., 2016, p.14).

Há alguns casos em que as proposições podem ser consideradas axiomas, como “ $\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição e à multiplicação” (IEZZI et al., 2016, p.19). Essa afirmação não

poderia ser demonstrada, pois ela é fundamentada sobre objetos sem definição (números naturais) e, além disso, a adição e a multiplicação não poderiam ser apresentadas formalmente neste contexto. Portanto, proposições desse tipo devem ser admitidas sem demonstração, ou seja, como axiomas.

As proposições relacionadas a conceitos formais totalizam 81, sendo 46 delas demonstradas e 35 não demonstradas, enquanto as proposições definidas sobre conceitos informais somam 33, das quais 19 são demonstradas e 14, não. O Gráfico 2 apresenta uma relação comparativa dessas informações.

Gráfico 2- Comparação entre o número de proposições relativas a conceitos formais e informais.



Fonte: Elaborado pela autora

Como podemos observar, o número de proposições demonstradas relacionadas a conceitos formais é bem maior que o das relacionadas a conceitos informais. Isso já era esperado, pois, como afirma Garbi (2010, p.33), “[...] definições matemáticas [...] necessitam ser rigorosas, para evitar dubiedades que comprometeriam a qualidade das provas.”. Nesse sentido, tem-se maior dificuldades em se fazer demonstrações matemáticas utilizando apenas conceitos informais, pois conceitos informais são aqueles considerados de conhecimento do indivíduo ou construídos por meio de exemplos ou outras situações capazes de levar esse indivíduo a produzir significados relevantes para os objetos matemáticos conceituados. Diante disso, torna-se mais difícil utilizar esses conceitos, construídos intuitivamente, para fundamentar uma demonstração matemática, visto que uma demonstração matemática precisa ser feita de maneira formalizada, e em linguagem matemática, ou seja, tem que ter argumentos, e não simplesmente expor suas ideias de maneira escrita.

Portanto, levando em consideração todo estudo feito por nós, do livro didático; a dificuldade dos estudantes com o processo de demonstração matemática; a necessidade do cumprimento de um conteúdo programático, dentro de um tempo pré-estabelecido; e uma quantidade de conteúdos ainda não estudados, necessários para se fazer algumas demonstrações de proposições apresentadas no livro-texto, concluímos que o livro superou nossas expectativas, visto que os autores teve o cuidado em observar a necessidade de se fazer, ou pelo menos entender, uma demonstração matemática. Além do grande número de demonstrações feitas são apresentadas também sugestões para que o leitor (incluindo professor) possa desenvolver sua habilidade em fazer demonstrações. Vale ressaltar também que houve uma preocupação dos autores em escrever as demonstrações de maneira clara e em nível de conhecimento compatível com a série (1º ano do Ensino Médio), inclusive quando se tratava de demonstrações semelhantes, como em um grupo de propriedades, uma delas era demonstrada, enquanto as outras eram deixadas como exercícios.

Gostaríamos de enfatizar que nosso trabalho se restringiu exclusivamente sobre o livro didático. Diante disso, não podemos mensurar os resultados práticos de um trabalho feito por um professor em sala de aula, pois, primeiramente, não é possível saber como esse professor faria a utilização desse livro em sala de aula, se o seguiria à risca ou ignoraria partes, dentre elas as relacionadas às demonstrações matemáticas. Em segundo, destacamos outros fatores que deveriam ser levados em consideração: a aceitação e as habilidades dos estudantes em fazer e entender demonstrações matemáticas. Apesar disso, acreditamos que o livro didático investigado tem qualidades suficientes para cumprir seu papel no que tange ao processo de demonstração matemática para uma turma inicial do Ensino Médio.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A habilidade para fazer e entender uma demonstração matemática pode ser considerada importante para o desenvolvimento da capacidade do aluno em aprender matemática e, até mesmo, outras disciplinas que necessitem de raciocínio lógico e de uma capacidade de argumentação. Acreditamos que essa habilidade não pode ser adquirida a curto prazo, por isso, quanto antes envolver o estudante nesse processo, melhor. Neste sentido, temos uma ideia convicta de que esse trabalho poderia ser feito a partir das séries iniciais, por meio de questionamentos elementares que necessitassem de uma argumentação embasada nos conceitos introduzidos pelo professor. Dessa forma, quando o estudante chegar ao Ensino Médio, já no primeiro ano, o professor poderá fazer um trabalho mais consistente de matemática, apresentando e discutindo demonstração de maneira formalizada, exigido, inclusive, argumentações escritas.

Diante do que foi exposto, acreditamos que o livro didático tem um papel fundamental no processo de desenvolvimento de habilidades do estudante em relação a demonstração matemática. E, como foi observado neste trabalho, um livro didático, com as características do livro investigado nesta pesquisa, apesar de poder ser aprimorado, já é capaz de auxiliar professores e estudantes nesse processo. A pergunta que se faz, levando em consideração que o livro propõe um ensino com base em demonstração, é se o professor do primeiro ano do ensino médio trabalha essas demonstrações proposta pelo livro. Para responder essa questão acreditamos que sejam necessárias mais pesquisas nessa linha.

Temos a convicção de que nossa pesquisa é apenas um ponto de partida para adentrar nesse tema, que acreditamos ser de grande relevância para o processo de ensino-aprendizagem de matemática, pois nossa investigação se limitou a apenas o estudo de um livro didático, e apenas a umas das séries do Ensino Médio. No entanto, a partir dela, visualizamos um cem-números de outros trabalhos que poderiam ser desenvolvidos nessa mesma esteira. Acreditamos que valeria a pena fazer uma pesquisa comparativa desse livro com outros livros do primeiro ano do Ensino Médio, aprovados no PNLD, e seria igualmente relevante abordar esse tema em pesquisas com foco em outras séries do Ensino Médio e até mesmo no Ensino Fundamental. Uma outra pesquisa importante, nessa mesma linha, seria uma investigação que buscasse evidenciar a origem das dificuldades, de estudantes do primeiro período de Licenciatura em Matemática, em entender e fazer demonstrações matemáticas. Além dessas, uma outra investigação, que inclusive começamos a desenvolver, seria entender o que ocorre efetivamente em sala de aula, ou seja, como os professores de matemática da educação básica tratam esse tema em suas aulas.

Em suma, essas nossas inquietações poderiam ser configuradas em uma pergunta: “se nos cursos superiores, incluindo principalmente os de Licenciatura em Matemática, os professores enfatizam a necessidade de saber fazer justificativas formais (demonstração matemática), considerando que o entendimento e o desenvolvimento da capacidade do estudante sobre essas justificativas demandam longo prazo, observando que os livros didáticos, pelo menos já no início do Ensino Médio fazem uma abordagem consistente sobre isso, por que os estudantes de Graduação têm tanta dificuldade em entender e fazer demonstração matemática?”

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução Luís Antero Reto; Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2011.

CARNIELLI, W.; EPSTEIN, R. L. **Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da Matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 2005a.

GARBI, G. G. C. Q. D. São Paulo: LF Editorial, 2010.

GIL, A. C. **MÉTODOS E TÉCNICAS DE PESQUISA SOCIAL**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

GODOY, A. **Introdução á pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. 3. ed. [s.l.] revista de administração de empresas, 1995.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 1

GARDI, G. G. C.Q.D.: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. São Paulo: LF Editorial, 2010.

KAUARK, F. S.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. Metodologia da pesquisa: um guia prático. Itabuna-BA: Via Litterarum, 2010.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**. Tradução Jorge Luiz Calife. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.

VELOSO, E. **Geometria - Temas Actuais**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.