

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Curso de Especialização em Matemática

SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL E APLICAÇÕES

por

NATÁLIA ARANTES ANDRADE

Goiânia
2025



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Natalia Arantes Andrade

Matrícula: 20232011160217

Título do Trabalho: Segunda Forma Fundamental e Aplicações

Autorização - Marque uma das opções

1. (X) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 12/09/2025.



Documento assinado digitalmente

NATALIA ARANTES ANDRADE

Data: 15/09/2025 10:33:36-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

NATALIA ARANTES ANDRADE

SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação lato sensu em Matemática - Departamento de Áreas Acadêmicas II - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Geometria diferencial

Orientador(a): Prof^ª. Dr^ª. Karoline Victor Fernandes

Goiânia
2025

A554s Andrade, Natália Arantes.

Segundo forma fundamental e aplicações / Natália Arantes Andrade. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2025.
101f.

Orientação: Prof^a. Dr^a. Karoline Victor Fernandes.

Monografia - Curso de Pós-Graduação lato sensu em Matemática, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Curvatura. 2. Geometria diferencial. I. Fernandes, Karoline Victor (orientação). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III. Título.

CDD 516.36

ATA DE DEFESA DE MONOGRAFIA

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa da Monografia intitulada **Segunda Forma Fundamental e Aplicações**, sob orientação de Karoline Victor Fernandes, apresentada pela aluna **Natalia Arantes Andrade (20232011160217)** do Curso **Especialização em Matemática (Câmpus Goiânia)**. Os trabalhos foram iniciados às **14:00** do dia **29/08/2025** pela Professora presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

- **Karoline Victor Fernandes** (Presidente)
- **Elaine Altino Freire Leite** (Examinadora Interna)
- **Marcio Dias de Lima** (Examinador Interno)

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da Monografia, passou à arguição da candidata. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

☒ Aprovado

☐ Reprovado

Nota :

Observação / Apreciações:

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu **Karoline Victor Fernandes** lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Marcio Dias de Lima** (817.492.281-49), em **29/08/2025 15:13:21** com chave **d8c8d4fa850311f0b0af005056a537a4**.
- **Karoline Victor Fernandes** (695.224.481-68), em **29/08/2025 15:12:45** com chave **c2f91824850311f0821c005056a537a4**.
- **Elaine Altino Freire Leite** (924.152.701-30), em **29/08/2025 15:12:47** com chave **c4419dbe850311f0821c005056a537a4**.

Este documento foi emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifg.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Ata de Projeto Final

Data da Emissão: 29/08/2025

Código de Autenticação: cdf831



Resumo

O presente trabalho discorre sobre a segunda forma fundamental de uma superfície, estrutura geométrica responsável por descrever propriedades extrínsecas da geometria das superfícies, ou seja, aquelas que dependem de sua imersão no espaço ambiente. Por meio dessa forma, é possível obter informações como a curvatura normal, as curvaturas principais, a curvatura de Gauss e a curvatura média. Tais conceitos permitem uma compreensão mais aprofundada do comportamento local das superfícies e de suas variações no espaço. Neste estudo, desenvolvemos essas ideias por meio de definições, exemplos e aplicações que ilustram sua utilidade e importância no contexto da geometria diferencial.

Palavras-chave: Superfícies; segunda forma fundamental; curvatura normal; curvaturas principais; curvatura de Gauss.

Abstract

This work discusses the second fundamental form of a surface, a geometric structure responsible for describing extrinsic properties of surface geometry—that is, those that depend on the surface’s immersion in ambient space. Through this form, it is possible to obtain information such as the normal curvature, principal curvatures, Gaussian curvature, and mean curvature. These concepts allow for a deeper understanding of the local behavior of surfaces and their variations in space. In this study, we develop these ideas through definitions, examples, and applications that illustrate their usefulness and importance within the context of differential geometry.

Keywords: Surfaces; second fundamental form; normal curvature; principal curvatures; Gaussian curvature.

Lista de Figuras

2.1	Hélice Circular	17
2.2	Vetor Tagente	19
2.3	Plano Osculador	20
3.1	Plano	25
3.2	Esfera	26
3.3	Parabolóide Elíptico	27
3.4	Parabolóide Hiperbólico	28
3.5	Cilindro Circular	29
3.6	Catenária	30
3.7	Catenoide	31
3.8	Toro	31
3.9	Tangente	32
3.10	Cilindro	33
3.11	Cone	34
3.12	Hiperbolóide de Revolução	35
3.13	Helicóide	35
3.14	Vetor Normal	38
4.1	Primeira forma	41
4.2	Cilindro Circular S	43
4.3	Helicóide	44
4.4	Área de uma região	47
4.5	Elipsóide	50
4.6	Parabolóide Elíptico	51
4.7	Parabolóide Hiperbólico	52

4.8	Hiperbolóide de Duas Folhas	53
4.9	Parametrização da Esfera Unitária S^2	54
4.10	Projeção Estereográfica	56
4.11	Superfície de Revolução	61
4.12	Plano xy	62
4.13	Toro de Revolução 1	64
4.14	Toro de Revolução 2	65
5.1	Ângulo θ entre vetores normais	73
5.2	Seção normal da superfície determinada por w	73
5.3	Esfera	90
5.4	Helicoide	92
5.5	Hiperboloide de Revolução	94
5.6	Catenoide	97

Sumário

1	Introdução	11
2	Preliminares	12
2.1	Vetores Linearmente Independentes	12
2.2	Base e Dimensão	12
2.3	Transformação Linear	13
2.4	Forma Bilinear	14
2.5	Curvas Parametrizadas Definidas em $\mathbb{R}^3$	16
2.5.1	Definição	16
2.5.2	Exemplos	16
2.5.3	Vetor Tangente, Curva Regular e Mudança de Parâmetros . .	17
2.5.4	Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco	19
3	Teoria Local de Superfícies	23
3.1	Superfície Parametrizadas Regulares	23
3.1.1	Plano	25
3.1.2	Esfera	26
3.1.3	Paraboloide Elíptico	27
3.1.4	Paraboloide Hiperbólico	27
3.1.5	Superfícies de Rotação	28
3.1.6	Superfícies Regradas	32
3.2	Plano Tangente	36
3.3	Vetor Normal	37
3.4	Mudança de Parâmetros	38

4	Primeira Forma Fundamental e Aplicações	41
4.1	Primeira Forma Fundamental	42
4.2	Comprimento	45
4.3	Ângulos	45
4.4	Área	47
4.5	Aplicações	50
5	Segunda Forma Fundamental e Aplicações	68
5.1	A Segunda Forma Fundamental e a Curvatura Normal	68
5.2	Curvaturas Principais; Curvatura de Gauss; Curvatura Média	75
5.3	Aplicações	85
6	Conclusão	102
	Referências	103

1 Introdução

Este trabalho dedica-se ao estudo da Segunda Forma Fundamental de uma superfície, uma estrutura geométrica essencial para descrever propriedades extrínsecas da geometria diferencial, ou seja, aquelas que dependem da imersão da superfície no espaço ambiente. Por meio dessa forma, é possível identificar e analisar características como a curvatura normal, as curvaturas principais, a curvatura de Gauss e a curvatura média, fundamentais para compreender o comportamento local e as variações das superfícies no espaço tridimensional.

O tema aqui tratado está inserido no campo da geometria diferencial, área da matemática que investiga propriedades de objetos geométricos por meio do cálculo diferencial e das estruturas algébricas. A escolha da Segunda Forma Fundamental como objeto de análise justifica-se pela sua importância, tanto teórica quanto prática, ampliando o entendimento da geometria das superfícies para além do que é possível observar apenas pela primeira forma fundamental.

Este estudo tem como objetivo geral conhecer as propriedades da Segunda Forma Fundamental e suas aplicações na descrição das curvaturas locais das superfícies. Para tanto, busca-se como objetivos específicos:

- Caracterizar formalmente a Segunda Forma Fundamental e a curvatura normal;
- Identificar e descrever as curvaturas principais, a curvatura de Gauss e a curvatura média;
- Analisar aplicações que demonstrem a relevância desses conceitos no contexto da geometria diferencial.

Desde a infância, a matemática tem sido uma companheira constante e fonte de fascínio, influenciando minha trajetória acadêmica e minha percepção do mundo. A decisão por estudar a Segunda Forma Fundamental surge do interesse em aprofundar conhecimentos na área de geometria diferencial e contribuir para a disseminação desse conhecimento.

2 Preliminares

Neste capítulo são apresentadas definições e resultados importantes ao estudo da primeira forma fundamental. O texto ao longo do capítulo é baseado em Introdução à Geometria Diferencial de Ketí Tenenblat (Tenenblat, 2008) e Álgebra Linear de Elon Lages Lima (Lima, 2020).

2.1 Vetores Linearmente Independentes

Definição 2.1. Seja V um espaço vetorial, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são ditos linearmente independentes se toda equação vetorial da forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ tem solução única $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Consideramos nessa definição que os coeficientes pertencem ao conjunto dos reais.

Quando essa definição não se efetiva para os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de um espaço vetorial V , eles são chamados linearmente dependentes. Ou seja, se existirem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, nem todos nulos, tais que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$.

2.2 Base e Dimensão

Definição 2.2. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. É chamada de *base* de V , um subconjunto B de V , que satisfaz:

- (i) B é linearmente independente;
- (ii) B gera V , isto é, qualquer vetor de V pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B .

Exemplo 2.3. Sendo $\mathbb{R}^3$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, pois é linearmente independente e gera, de fato, $\mathbb{R}^3$. Se $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, então $(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$ com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Um espaço vetorial pode contar com mais de uma base, todas elas com o mesmo número de vetores. A partir disso, temos que:

Definição 2.4. Seja V um espaço vetorial e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . A dimensão de V é igual ao número de vetores da base ($\dim V = n$).

Podemos considerar dois casos especiais:

(i) Se V não possui base $\Rightarrow \dim V = 0$;

(ii) Se V tem uma base com infinitos vetores $\Rightarrow \dim V = \infty$ (a dimensão de V é infinita).

Exemplo 2.5. Seja $V = \mathbb{R}^2$. O conjunto $B = [(1, 0), (0, 1)]$ é uma base de V . De fato,

$$B(x, y) \subset \mathbb{R}^2,$$

tem-se

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

e,

$$(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x(1, 0) + y(0, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Logo, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Teorema 2.6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n . Então:*

i) Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gera V então B é base de V ;

ii) Se $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é linearmente independente então B é base de V .

2.3 Transformação Linear

Definição 2.7. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $T : U \rightarrow V$ é uma *Transformação Linear* se

$$(1) T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \forall u_1, u_2 \in U, \text{ e}$$

$$(2) T(\lambda u) = \lambda T(u), \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in U.$$

Exemplo 2.8. A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (5x + y, 3x - 2y)$$

é linear.

De fato, se $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ vetores de $\mathbb{R}^2$, então

(a)

$$\begin{aligned}
T(u_1 + u_2) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) \\
&= (5(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2)) \\
&= (5x_1 + 5x_2 + y_1 + y_2, 3x_1 + 3x_2 - 2y_1 - 2y_2) \\
&= (5x_1 + y_1, 3x_1 - 2y_1) + (5x_2 + y_2, 3x_2 - 2y_2) \\
&= T(u_1) + T(u_2).
\end{aligned}$$

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
T(\lambda u_1) &= T(\lambda(x_1, y_1)) \\
&= T(\lambda x_1, \lambda y_1) \\
&= (5\lambda x_1 + \lambda y_1, 3\lambda x_1 - 2\lambda y_1) \\
&= (\lambda(5x_1 + y_1), \lambda(3x_1 - 2y_1)) \\
&= \lambda(5x_1 + y_1, 3x_1 - 2y_1) \\
&= \lambda T(u).
\end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

2.4 Forma Bilinear

Definição 2.9. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de forma bilinear de $U \times V$ em $\mathbb{R}$ se satisfizer:

- (i) $f(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda f(u_1, v) + f(u_2, v)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$.
- (ii) $f(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda f(u, v_1) + f(u, v_2)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in U$ e $v_1, v_2 \in V$.

Dessa forma, uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ é uma forma bilinear se, ao deixarmos uma variável fixa, for linear na outra variável. Vejamos agora os conceitos de forma bilinear simétrica e produto interno.

Definição 2.10. $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita simétrica se

$$B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Definição 2.11. Uma forma bilinear simétrica que satisfaz:

$$B(u, u) \geq 0 \text{ e } B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

é chamado de produto interno.

Exemplo 2.12. A forma $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$B(u, v) = x_u x_v + y_u y_v,$$

$$u = (x_u, y_u), \quad v = (x_v, y_v)$$

é uma forma bilinear simétrica. Mais do que isso, B é, de fato, um produto interno.

Exemplo 2.13. A função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1y_2 - 2x_2y_1$, $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ é uma forma bilinear que não é um produto interno.

Quando uma forma bilinear $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno, denotamos $B(u, v)$ por $\langle u, v \rangle$. Neste caso, a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u) = (\langle u, u \rangle)^{\frac{1}{2}}$ é denominada uma norma em V proveniente do produto interno $\langle \cdot \rangle$ e satisfaz:

- i) $f(u) \geq 0$ e $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
- ii) $f(\lambda u) = |\lambda|f(u)$;
- iii) $f(u + v) \leq f(u) + f(v)$;

Ocorre que no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, fixando o produto interno dado no exemplo 1.12, temos

$$f(u) = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} = (x_u^2 + y_u^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2},$$

isto é,

$$f(u) = \sqrt{x_u^2 + y_u^2},$$

é o comprimento do vetor $\vec{u}$ (com origem no ponto $(0, 0)$ e extremidade u). Por simplicidade usamos, em ambos os casos, apenas u .

Finalmente, fazendo

$$\|u\| = f(u) = \sqrt{x_u^2 + y_u^2},$$

temos que a norma euclidiana ou comprimento de um vetor $u \in \mathbb{R}^2$ denotada por $\|u\|$ é dado pela expressão acima. Em geral, tem-se

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

É importante observar que existem normas que não são provenientes de produtos

internos, mas estas não serão consideradas neste trabalho. Para mais detalhes veja Hoffman e Kunze (1971) e Lima (2020).

2.5 Curvas Parametrizadas Definidas em $\mathbb{R}^3$

Dados os conjuntos de ternos ordenados de números reais $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Podemos destacar alguns subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ nos quais possa ser aplicado o cálculo diferencial. Lembrando que uma função de variável real será diferenciável, se ela possuir em todos os pontos derivadas de todas as ordens (contínuas).

Nessa seção vamos introduzir os conceitos básicos para curvas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

2.5.1 Definição

Definição 2.14. Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável α , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. A variável $t \in I$ é o parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é o traço da curva.

Essa aplicação é da forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, na qual $x(t), y(t), z(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ .

2.5.2 Exemplos

Exemplo 2.15. A aplicação,

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), t \in \mathbb{R},$$

onde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é uma linha reta passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e paralela ao vetor de coordenadas (a, b, c) .

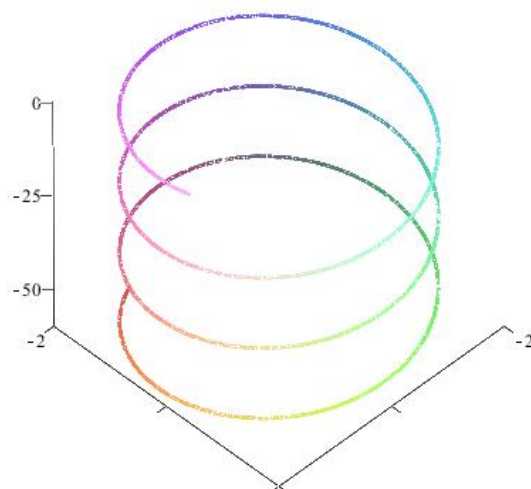
O Exemplo 1.15 representa uma família de curvas planas.

Exemplo 2.16. A curva parametrizada diferenciável

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

$t \in \mathbb{R}, a > 0, b \neq 0$ é a *hélice circular*.

Figura 2.1: Hélice Circular



Fonte: Imagem elaborada pela autora

O traço desta curva está contido no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Se $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ são dois pontos que têm as duas primeiras coordenadas respectivamente iguais, então as terceiras coordenadas diferem por um múltiplo de $2\pi b$.

Definição 2.17. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita plana se existe um plano de $\mathbb{R}^3$ que contém $\alpha(I)$

O exemplo 1.15 é uma curva plana.

2.5.3 Vetor Tangente, Curva Regular e Mudança de Parâmetros

Definição 2.18. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente a α em $t \in I$ é o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. A curva α é regular se $\forall t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$. A reta tangente à curva regular α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, isto é, a reta dada pela função $g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0)$, $r \in \mathbb{R}$.

Definição 2.19. Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável C^∞ , cuja derivada de primeira ordem é não-nula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então, a função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço que α , chamada reparametrização de α por h . A função h é chamada mudança de parâmetro.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e fixemos t_0 e t_1 do intervalo I . Subdividindo o intervalo $[t_0, t_1]$ nos pontos $t_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = t_1$, e ligando retilmente os pontos $\alpha(a_0), \alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)$, obtemos uma linha poligonal inscrita à curva entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$. Esta poligonal tem um comprimento. Consideremos agora todas as poligonais inscritas à curva entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$. Como α é uma curva regular (na realidade, é suficiente que a derivada de primeira ordem da função α exista e seja contínua), pode-se verificar que existe o limite superior do conjunto dos comprimentos dessas linhas poligonais, e é igual a $\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$, que é chamado *comprimento de arco* da curva α de t_0 e t_1 .

Definição 2.20. A aplicação $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$ é denominada *função comprimento de arco* da curva α a partir de t_0 . Esta função é diferenciável de classe C^∞ , pois α é uma curva regular.

Definição 2.21. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita *parametrizada pelo comprimento de arco* se, para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 2.22. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $\forall t \in I, \|\alpha'(t)\| = 1$.

Demonstração. Suponhamos um $\alpha(t)$ parametrizada pelo comprimento de arco, fixemos $t_0 \in I$. Considere a função $s(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada $t \in I$, associa $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$. Se $t_0 \leq t$, então por hipótese, $\int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$; se $t \leq t_0$, então $-s(t) = \int_t^{t_0} \|\alpha'(t)\| dt = t_0 - t$. Portanto, para todo $t \in I, s(t) = t - t_0$ e $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, concluímos que $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$. A recíproca é análoga. $\square$

Proposição 2.23. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então, existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Exemplo 2.24. Consideremos $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Seja $s(t)$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$, isto é,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} \, dt = \sqrt{a^2 + b^2} \, t.$$

A função inversa de s é dada por $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $s \in \mathbb{R}$. Portanto, $\beta = \alpha \circ h$, que a cada s associa

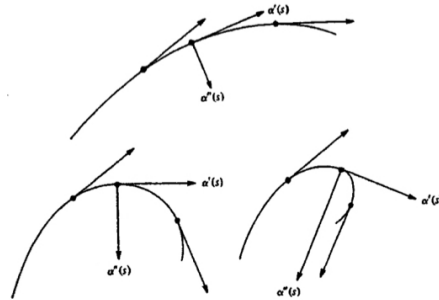
$$\beta(s) = \left(a \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right),$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

2.5.4 Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

Considere uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s , $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Temos que $\alpha'(s)$ é um vetor tangente unitário e o módulo da derivada segunda $|\alpha''(s)|$ mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente de s . Ou seja, $|\alpha''(s)|$ mede quão rápido a curva se afasta da tangente de s em uma vizinhança de s .

Figura 2.2: Vetor Tangente



Fonte: Carmo (2012, p. 20)

Definição 2.25. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ chama-se curvatura de α em s .

É possível observar que ao mudar a orientação, o vetor tangente muda de

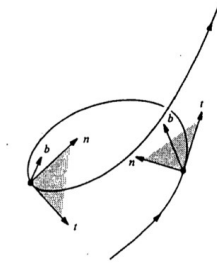
sentido.

$$\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow \frac{d\beta}{d(-s)}(-s) = -\frac{d\alpha}{ds}(s).$$

Além disso, em uma mudança de orientação, $\alpha''(t)$ e a curvatura não variam.

Analisemos agora os pontos nos quais $k(s) \neq 0$. Pela equação $\alpha''(s) = k(s)n(s)$, fica bem definido um vetor unitário $n(s)$ na direção de $\alpha''(s)$. Observe que $\alpha''(s)$ é normal a $\alpha'(s)$, pois ao derivarmos $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ obtemos $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. Dessa forma, $n(s)$ é normal a $\alpha'(s)$ e recebe o nome de vetor normal em s . Chamamos de *plano osculador* em s o plano determinado pelos vetores $\alpha'(s)$ e $n(s)$. Esse plano contém tanto a direção tangente quanto a direção normal principal da curva em s e é o que melhor aproxima a curva em uma vizinhança do ponto $\alpha(s)$.

Figura 2.3: Plano Osculador



Fonte: Carmo (2012, p. 21)

O vetor normal e o plano osculador não estão definidos nos pontos em que $k(s) = 0$ e para a análise das curvas é necessário o plano osculador. Convenientemente, dizemos que $s \in I$ é um ponto singular de ordem 1 se $\alpha''(s) = 0$.

Nos voltemos para as curvas parametrizadas pelo comprimento do arco sem pontos singulares de ordem 1. Indicaremos o vetor tangente unitário de α em s por $t(s) = \alpha'(s)$ e teremos que $t'(s) = k(s)n(s)$. O vetor unitário $b(s) = t(s) \times n(s)$ é normal ao plano osculador e receberá o nome de vetor binormal em s .

Faremos uma análise semelhante a feita para $\alpha'(s)$ no primeiro parágrafo desse tópico. Uma vez que $b(s)$ é unitário, o módulo $|b'(s)|$ medirá a taxa de variação do ângulo do plano osculador em s com os planos osculadores vizinhos. Ou seja, $|b'(s)|$ mede quão rápido a curva se afasta do plano osculador em s em uma vizinhança de s .

No que tange os cálculos de $b'(s)$, devemos observar que, por um lado, que

$b'(s)$ é normal a $b(s)$, e por outro, normal a $t(s)$:

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = t(s) \times n'(s);$$

A partir disso, temos que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$ e vale

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

para alguma função $\tau(s)$.

Definição 2.26. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que $|\alpha''(s)| \neq 0, s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é chamado de torção de α em s .

A torção (τ), diferentemente da curvatura (k), pode ser positiva ou negativa. Ao mudarmos a orientação, o vetor binormal muda de sinal, uma vez que $b = t \times n$. Assim, $b'(s)$ e, conseqüentemente, a torção τ , não variam em uma mudança de orientação.

Em síntese, para cada valor do parâmetro s é associado três vetores unitários e ortogonais $t(s), n(s), b(s)$. Eles constroem o chamado triedro de Frenet em s . É possível obter informações sobre o comportamento de α em uma vizinhança de s a partir das entidades geométricas (curvatura k e torção τ) que as derivadas dos vetores $t(s)$ e $b(s)$ (respectivamente, $t'(s) = kn$, $b'(s) = \tau n$) nos fornecem ao serem expressas na base $\{t, n, b\}$.

Vale destacar as fórmulas de Frenet:

$$\begin{aligned} t' &= kn, \\ n' &= -kt - \tau b, \\ b' &= \tau n. \end{aligned}$$

Omitimos o s por comodidade. Vejamos também algumas denominações comumente utilizadas:

- O plano tb : plano retificante;
- O plano nb : plano normal;
- A reta que passa por $\alpha(s)$ e contém $n(s)$: normal principal em s ;
- A reta que passa por $\alpha(s)$ e contém $b(s)$: binormal em s ;

Fisicamente, é possível pensar em uma curva em $\mathbb{R}^3$ como originada a partir de uma reta entortada (curvatura) ou torcida (torção). Dessa forma, é possível descrever completamente o comportamento local de uma curva por k e τ .

3 Teoria Local de Superfícies

As definições usadas nesse capítulo são advindas dos livros Introdução à Geometria Diferencial de Ketten Tenenblat e Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies de Manfredo Perdigão do Carmo.

3.1 Superfície Parametrizadas Regulares

As Superfícies Parametrizadas Regulares podem ser compreendidas de modo análogo às Curvas Parametrizadas Diferenciáveis. Uma curva é uma aplicação diferenciável α que pode ser vista tanto em $\mathbb{R}^2$ como em $\mathbb{R}^3$. No entanto, em ambos os casos, os domínios estão sempre contidos em $\mathbb{R}$. Dessa forma, a parametrização das Curvas sempre ocorre em função de uma única variável, chamada parâmetro da curva e geralmente denotado por t .

Nas Superfícies, o domínio, por sua vez, é o $\mathbb{R}^2$ e, portanto, a aplicação se dá em função de duas variáveis, as quais representaremos por u e v .

Definição 3.1. Uma Superfície Parametrizada Regular é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, na qual U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que:

- a) X é diferenciável de classe C^∞ ;
- b) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

Assim, denotamos S como a superfície parametrizada em $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $X(u, v)$.

As variáveis u, v são os parâmetros da superfície. O subconjunto S de $\mathbb{R}^3$, obtido pela imagem da aplicação X é denominado traço de X .

Para melhor compreensão do conceito de Superfície Parametrizada Regular, vamos destrinchar as restrições a e b da definição.

- a) Ao mencionar que X é diferenciável de classe C^∞ significa que na aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens.
- b) O item b é equivalente a algumas outras afirmações. Veja:

b.1) dX_q é injetora $\Leftrightarrow$ a matriz $J(u_0, v_0)$ tem posto 2;

$J(u_0, v_0)$ é a matriz jacobiana associada a dX_q nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$. Denotamos essa base por e_1 e e_2 .

$$J(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix}.$$

Dizer que uma matriz tem posto 2 é o mesmo que dizer que ela tem duas linhas e duas colunas linearmente independentes (L.I). Temos também que uma matriz tem duas linhas L.I se, e somente se, ela tem duas colunas L.I. Desse modo, basta verificarmos que suas linhas, ou suas colunas, são linearmente independentes, para concluirmos que a matriz tem posto 2. Na matriz jacobiana acima, as colunas são dadas por dois vetores, o qual denotaremos por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ e exigiremos que sejam linearmente independentes.

$$\begin{aligned} dX_q(e_1) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right), \\ dX_q(e_2) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right). \end{aligned}$$

O que acarreta na próxima afirmação:

b.2) dX_q é injetora $\Leftrightarrow$ os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;

Sabemos também que dois vetores linearmente independentes só podem ser considerados assim se, e somente se, o produto vetorial deles for não nulo. A partir disso, chegamos na última equivalência:

b.3) dX_q é injetora $\Leftrightarrow X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$

Todas essas afirmativas garantem a existência de um plano tangente em cada ponto da superfície.

Considere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada, então se fixarmos um ponto $(u_0, v_0) \in U$, as curvas

$$\begin{aligned} u &\mapsto X(u, v_0), \\ v &\mapsto X(u_0, v), \end{aligned}$$

serão curvas coordenadas de X em (u_0, v_0) . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são vetores tangentes às curvas coordenadas.

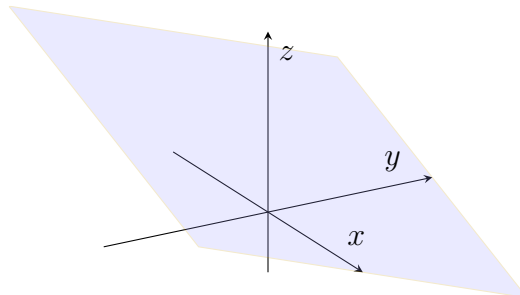
Apresentaremos agora alguns exemplos de superfícies parametrizadas regulares.

3.1.1 Plano

Exemplo 3.2. Sejam $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, e $b = (b_1, b_2, b_3)$ vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$. Consideremos a aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, associa $X(u, v) = p_0 + ua + vb$, isto é

$$X(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3).$$

Figura 3.1: Plano



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Então, X é uma aplicação que define a superfície S e é parametrizada regularmente, pois X é diferenciável e os vetores $X_u = a, X_v = b$ são linearmente independentes. A aplicação X descreve um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto p_0 , ortogonal ao vetor $a \times b$. As curvas coordenadas de X , determinadas por X_u e X_v , descrevem retas do plano, paralelas aos vetores a e b , respectivamente.

3.1.2 Esfera

Exemplo 3.3. Consideremos a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \cos v),$$

na qual $a > 0$ e $U = \mathbb{R} \times (0, \pi) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$.

A aplicação X é diferenciável e os vetores

$$X_u = (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \operatorname{sen} v \cos u, 0)$$

$$X_v = (a \cos v \cos u, a \cos v \operatorname{sen} u, -a \operatorname{sen} v)$$

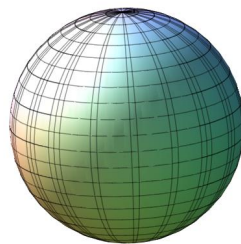
são linearmente independentes, para todo $(u, v) \in U$. De fato,

$$X_u \times X_v = (-a^2 \operatorname{sen}^2 v \cos u, -a^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, -a^2 \operatorname{sen} v \cos v) \text{ e}$$

$$|X_u \times X_v| = a^2 \operatorname{sen} v \neq 0,$$

já que $v \in (0, \pi)$. A imagem de X é a esfera centrada na origem de raio a , menos os dois polos. As curvas coordenadas são os meridianos e os paralelos da esfera.

Figura 3.2: Esfera



Fonte: Imagem elaborada pela autora

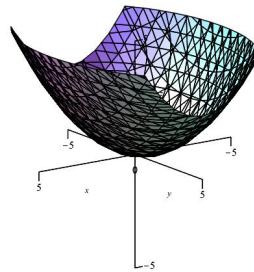
3.1.3 Paraboloide Elíptico

Exemplo 3.4. Seja

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right); \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

onde a e b são constantes não-nulas. A aplicação X é diferenciável e os vetores $X_u = (1, 0, \frac{2u}{a^2})$, $X_v = (0, 1, \frac{2v}{b^2})$ são linearmente independentes para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, X é uma superfície parametrizada regular, cuja imagem é o *paraboloide elíptico*.

Figura 3.3: Paraboloide Elíptico



Fonte: Imagem elaborada pela autora

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

As curvas coordenadas descrevem as parábolas obtidas pela intersecção de S com os planos paralelos a xz e yz .

3.1.4 Paraboloide Hiperbólico

Proposição 3.5. Se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de $\mathbb{R}^2$, então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f .

Demonstração. A diferenciabilidade de X decorre do fato de que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. A matriz jacobiana de X é igual a

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix},$$

que tem posto 2, para todo (u, v) . □

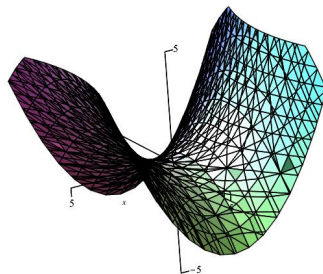
Exemplo 3.6. Dessa proposição temos que a aplicação

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

na qual a e b são constantes não-nulas, é uma superfície parametrizada regular, cujo traço é o parabolóide hiperbólico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Figura 3.4: Parabolóide Hiperbólico



Fonte: Imagem elaborada pela autora

3.1.5 Superfícies de Rotação

Uma superfície de rotação é formada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo fixo contido no mesmo plano. Cada ponto da curva descreve um círculo ao redor do eixo, e a união desses círculos forma a superfície completa.

Cilindro Circular

Esta superfície é uma dos muitos exemplos de superfície de rotação. Elas são criadas pela rotação de um traço de uma curva regular plana em torno de uma reta de $\mathbb{R}^3$ que não intercepta a curva.

Exemplo 3.7. A superfície

$$X(u, v) = (a \cos v, a \sin v, u),$$

na qual $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, descreve o cilindro circular, que é obtido pela rotação da reta $\alpha(u) = (a, 0, u)$ em torno do eixo $0z$.

Figura 3.5: Cilindro Circular



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Proposição 3.8. *Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular tal que $f(u)$ não se anula. Então, a aplicação*

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde $u \in I$ e $v \in \mathbb{R}$ é uma superfície parametrizada regular chamada “superfície de rotação” da curva α em torno do eixo $0z$.

Demonstração. Como α é uma aplicação diferenciável, temos que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. Os vetores

$$\begin{aligned} X_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \\ X_v &= (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

são linearmente independente, pois

$$|X_u \times X_v|^2 = f^2(u)[(g')^2 + (f')^2] \neq 0,$$

já que α é uma curva regular e f não se anula. Portanto, concluímos que X é uma superfície parametrizada regular. $\square$

Os dois exemplos de Superfícies Parametrizadas Regulares a seguir também são exemplos de Superfícies de Rotação.

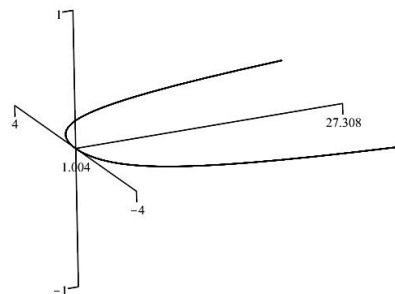
Catenóide

Exemplo 3.9. Consideremos a catenária

$$\alpha(u) = \left(u, a \cosh \frac{u}{a}, 0\right), u \in \mathbb{R},$$

onde $a > 0$ é constante.

Figura 3.6: Catenária



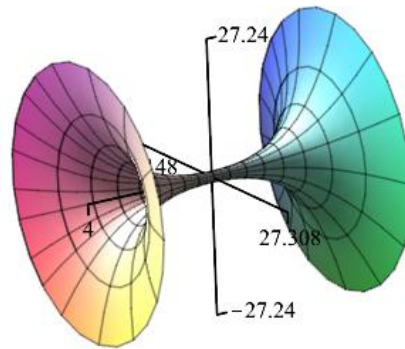
Fonte: Imagem elaborada pela autora

A superfície

$$X(u, v) = \left(u, a \cosh \frac{u}{a} \cos v, a \cosh \frac{u}{a} \sin v\right),$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$, descreve o catenoide, que é obtido pela rotação da catenária α em torno do eixo $0x$.

Figura 3.7: Catenoide



Fonte: Imagem elaborada pela autora

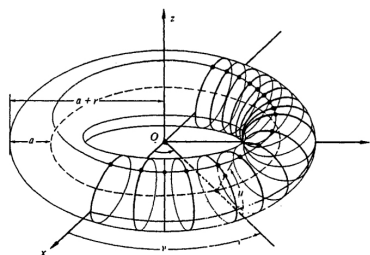
Toro

Exemplo 3.10. Seja $\alpha(u) = (a + r \cos u, 0, r \sin u)$, $u \in \mathbb{R}$, com $0 < r < a$, a curva que descreve a circunferência contida no plano $x \circ y$, centrada no ponto $(a, 0, 0)$, de raio r . Considerando a rotação de α em torno do eixo $0z$, obtemos a superfície de rotação

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$, que descreve o toro.

Figura 3.8: Toro



Fonte: Carmo (2012, p. 73)

3.1.6 Superfícies Regradas

Definição 3.11. Uma família (diferenciável) a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $w(t) \in \mathbb{R}^3, w(t) \neq 0$, tais que ambos $\alpha(t)$ e $w(t)$ sejam diferenciáveis em t . Para cada $t \in I$, a reta L_t passando por $\alpha(t)$ e que é gerada por $w(t)$ é chamada a reta da família em t . Assim, chamamos a superfície parametrizada

$$X(t, v) = \alpha(t) + v w(t), \quad t \in I, v \in \mathbb{R},$$

de superfície regradada gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$.

As retas L_t são as geratrizes, e a curva $\alpha(t)$ é uma diretriz da superfície X . Em alguns casos a expressão *superfície regradada* é usada significando o traço de X .

Os exemplos mais simples de superfícies regradadas são as superfícies tangentes a uma curva regular, os cilindros e os cones.

Superfície tangente

Exemplo 3.12. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular. A superfície definida por $X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t)$ é a superfície tangente de α .

Figura 3.9: Tangente

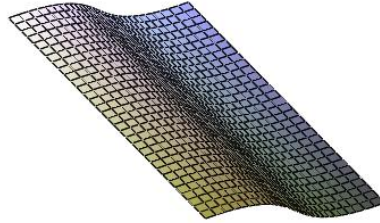


Fonte: Carmo (2012, p. 93)

Cilindro

Vimos anteriormente um cilindro circular criado como uma superfície de rotação. Veja agora um cilindro obtido no âmbito das superfícies regradadas.

Figura 3.10: Cilindro



Fonte: Imagem elaborada pela autora

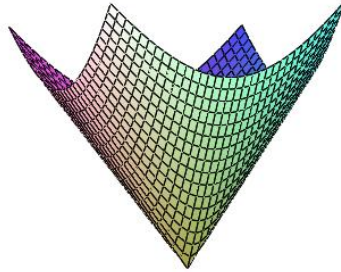
Um cilindro é uma superfície regrada gerada por uma família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}, t \in I$, onde $\alpha(t)$ está contida em um plano P e $w(t)$ é paralelo a uma direção fixa em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.13. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva plana e $w(t)$ é paralelo a uma direção fixa em $\mathbb{R}^3$ obtemos um cilindro. Em particular se $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ e $w(t) = (0, 0, 1)$, a superfície $X(t, v) = (a \cos t, a \sin t, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $a > 0$ descreve um cilindro circular.

Cone

Exemplo 3.14. Um cone é uma superfície regrada por uma família $\{\alpha(t), w(t)\}, t \in I$, onde $\alpha(I) \subset P$ e todas as geratrizes L_t passam por um ponto $p \in P$

Figura 3.11: Cone



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Hiperbolóide de Revolução

Exemplo 3.15. Sejam S^1 o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy , e $\alpha(s)$ uma parametrização de S^1 pelo comprimento de arco. Para cada s , seja $w(s) = \alpha'(s) + e_3$, onde e_3 é o vetor unitário do eixo Oz . Então

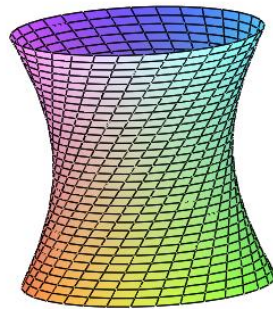
$$x(s, v) = \alpha(s) + v(\alpha'(s) + e_3)$$

é uma superfície regrada. Podemos colocá-la em uma forma mais familiar escrevendo

$$x(s, v) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v);$$

e observando que $x^2 + y^2 - z^2 = 1 + v^2 - v^2 = 1$. Isto mostra que o traço de x é um hiperboloide de revolução.

Figura 3.12: Hiperboloide de Revolução



Fonte: Imagem elaborada pela autora

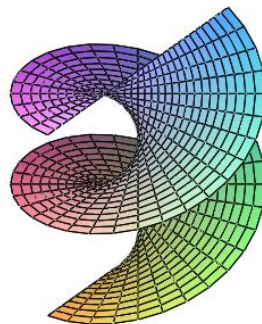
Helicóide

Exemplo 3.16. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

A descrição geométrica dessa superfície é dada da seguinte forma: Seja $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, bu)$ uma hélice circular. Para cada u existe uma única reta ortogonal ao eixo $0z$, que passa por $\alpha(u)$. O traço de X é o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$, obtido pela união dessas retas, que é denominada *helicóide*.

Figura 3.13: Helicóide



Fonte: Imagem elaborada pela autora

3.2 Plano Tangente

Para definirmos e compreendermos plano tangente, usaremos os conceitos de vetor tangente e curva parametrizada diferenciável.

No início desse capítulo fizemos um paralelo entre Superfícies Parametrizadas Regulares e Curvas Parametrizadas Diferenciáveis, reforçando a diferença do domínio entre elas, visto que as duas podem ter como imagem um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Dessa forma, vamos considerar a superfície parametrizada regular $X(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Seja u e v funções diferenciáveis de um parâmetro t , $t \in I \subset \mathbb{R}$, obtemos uma curva diferenciável $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ com o traço contido na nossa superfície $X(u, v)$. Ou seja, a partir de α , uma curva parametrizada da nossa superfície em $\mathbb{R}^3$, determinaremos um vetor tangente e, posteriormente, o plano tangente.

Definição 3.17. Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor w de $\mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

Uma vez que os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são tangentes às curvas coordenadas de X , temos também que eles são vetores tangentes a X .

Definição 3.18. O plano tangente a uma Superfície X em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , que denotamos por $T_q X$, onde $q = (u_0, v_0)$.

Assim sendo, a partir dos vetores tangentes $X_u(q)$ e $X_v(q)$, linearmente independentes pela definição de superfície parametrizada regular, chegaremos ao plano tangente à superfície $T_q X \subset \mathbb{R}^3$. Observe:

Proposição 3.19. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. Então, $T_q X$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.*

Demonstração. Se $w \in T_q X$, então $w = \alpha'(t_0)$, em que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(t_0) = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) \big|_{t=t_0} \\ &= X_u(u_0, v_0) u'(t_0) + X_v(u_0, v_0) v'(t_0), \end{aligned}$$

isto é, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v em (u_0, v_0) . Reciprocamente, suponhamos que

$$w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0),$$

então existe uma curva $\alpha(t)$ da superfície tal que $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$. De fato, basta considerar

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $u(t) = u_0 + at$, e $v(t) = v_0 + bt$, com $t \in \mathbb{R}$. □

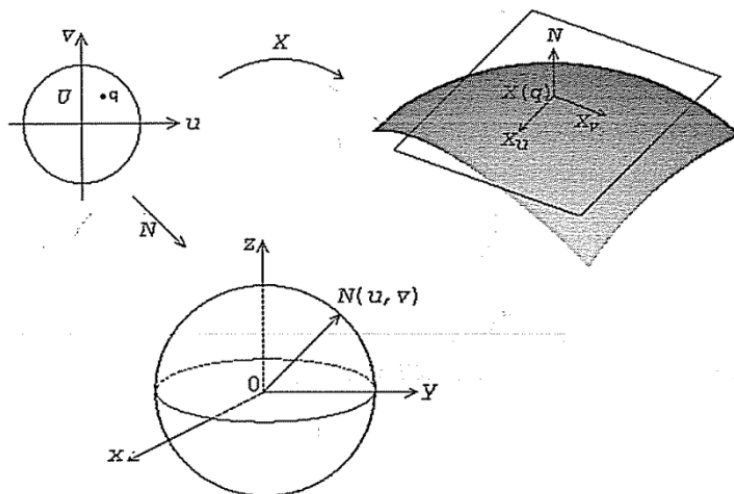
3.3 Vetor Normal

Definição 3.20. Se $X(u, v)$ é uma superfície e $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de $\mathbb{R}^3$ é normal a X em q se é ortogonal a $T_q X$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q .

Considerando o ponto $q = (u_0, v_0)$ e o plano tangente a qual pertence, passará por ele uma única reta ortogonal ao plano. Essa reta pode conter somente dois vetores unitários, em sentidos opostos. Assim fixaremos o vetor unitário normal a X em q como sendo o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Figura 3.14: Vetor Normal



Fonte: Tenenblat (2008, p. 134)

3.4 Mudança de Parâmetros

Ao longo desse capítulo, é possível observar um cilindro circular sendo escrito de duas maneiras diferentes: como superfície de rotação e como superfície regradada. Isso é possível pois duas superfícies parametrizadas podem ter o mesmo traço. Para uma superfície parametrizada regular X pode-se obter diversas superfícies parametrizadas com o mesmo traço. Observe:

Proposição 3.21. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $h : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ é uma aplicação diferenciável, cujo determinante da matriz jacobiana não se anula e $h(\bar{U}) = U$, então $Y = X \circ h$ é uma superfície parametrizada regular que tem o mesmo traço de X .*

Demonstração. A aplicação Y é diferenciável, pois é composta de funções diferenciáveis. Seja

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ h(\bar{u}, \bar{v}) &= (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})). \end{aligned}$$

Vamos verificar que $Y(\bar{u}, \bar{v}) = X \circ h(\bar{u}, \bar{v}) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ satisfaz a condição $Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} \neq 0$. Como

$$Y_{\bar{u}} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right),$$

$$Y_{\bar{v}} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right),$$

temos que:

$$\begin{aligned} Y_{\bar{u}} &= \left(X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \right. \\ Y_{\bar{v}} &= \left. \left(X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} = X_u \times X_v \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)$$

Como $X_u \times X_v \neq 0$ e o determinante da matriz jacobiana de h não se anula, concluímos que $Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} \neq 0$.

A aplicação Y é chamada reparametrização de X por h , sendo h a mudança de parâmetros.

Uma mudança de parâmetros não precisa ser injetora, mas o determinante da matriz jacobiana de h deve ser obrigatoriamente não nulo.

Exemplo 3.22. A superfície

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}^2 - \bar{v}^2), (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma reparametrização de

$$X(u, v) = (u + v, u - v, 4uv), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

por $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ na qual $h(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} - \bar{v})$.

Proposição 3.23. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Para cada $(u_0, v_0) \in U$ existe um aberto V , $(u_0, v_0) \in V \subset U$ e uma mudança de*

parâmetros $h : \bar{U} \rightarrow V$, tal que o traço de $Y = X \circ h$, $Y : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, é o gráfico de uma função diferenciável.

Demonstração. Consideremos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, então, segue-se do teorema da função inversa que existe um aberto $V, (u_0, v_0) \in V \subset U$, tal que F restrita a V admite inversa F^{-1} diferenciável. Seja $\bar{U} = F(V)$ e denotemos por $h : \bar{U} \rightarrow V$ a inversa de F . Vamos verificar que a reparametrização $Y = X \circ h$ descreve o gráfico de uma função diferenciável.

De fato, se $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$, então

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (x \circ h(\bar{u}, \bar{v}), y \circ h(\bar{u}, \bar{v}), z \circ h(\bar{u}, \bar{v})) = (F \circ h(\bar{u}, \bar{v}), z \circ h(\bar{u}, \bar{v})).$$

Como h é inversa de F , concluímos que

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, z \circ h(\bar{u}, \bar{v}));$$

isto é, Y descreve o gráfico da função diferenciável $z \circ h$. □

Exemplo 3.24. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

que descreve o cilindro circular. Fixado o ponto $(\frac{\pi}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$, consideremos a vizinhança desse ponto $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < \pi, v \in \mathbb{R}\}$. Então, a restrição de X ao aberto V admite uma reparametrização

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \sqrt{1 - \bar{u}^2}, \bar{v}), \text{ na qual } -1 < \bar{u} < 1, \bar{v} \in \mathbb{R},$$

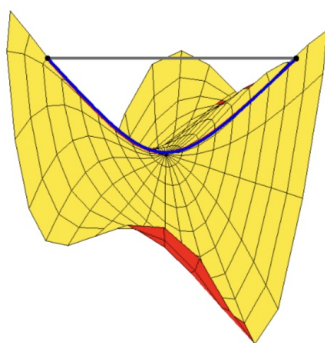
que descreve o gráfico da função $\sqrt{1 - \bar{u}^2}$.

4 Primeira Forma Fundamental e Aplicações

A primeira forma fundamental, também conhecida como primeira forma quadrática, é de grande valor no estudo da teoria local das superfícies. Ela está diretamente relacionada com o comprimento das curvas em uma superfície, o ângulo entre vetores tangentes e a área de regiões da superfície.

É esperado que ao concluir o ensino básico no Brasil, o aluno saiba como calcular a distância entre dois pontos em um plano bidimensional. No entanto, esse caminho já não se faz tão útil quando estamos no $\mathbb{R}^3$ e queremos considerar a superfície como o único caminho possível de um ponto a outro. Na figura 3.1, podemos ver a diferença entre as duas possibilidades.

Figura 4.1: Primeira forma



Fonte: Picado (2006, p. 119)

Assim, no teorema fundamental das superfícies, a primeira forma fundamental, assim como a segunda, nos permite resolver essa questão e determinar uma superfície sem considerar o espaço a que pertence.

Dada a importância e utilidade da mencionada Primeira Forma Fundamental, a analisaremos no decorrer desse capítulo, estudando sobre os ditos comprimentos, ângulos e áreas e fazendo as devidas aplicações.

4.1 Primeira Forma Fundamental

Definição 4.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $\forall q \in U$, a aplicação

$$\begin{aligned} I_q & : T_q X \longrightarrow \mathbb{R} \\ w & \longrightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \end{aligned}$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em q .

Nessa definição, recobramos o conceito de plano tangente $T_q X$. Dessa forma, podemos definir o vetor $w \in T_q X$ para uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$ como:

$$w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0),$$

Sendo a e $b \in \mathbb{R}$. Fazendo as devidas substituições na definição, obtemos:

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Adotaremos uma nova notação a partir de agora. Seja:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0), \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0), \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

Temos que:

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Esta é a primeira forma fundamental ou quadrática. Variando (u, v) temos as funções diferenciáveis $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ como coeficientes da primeira forma quadrática.

As funções E, F, G satisfazem as seguintes propriedades:

- a) $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v) , pois os vetores X_u e X_v são não nulos;
- b) $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$. De fato, como

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2,$$

temos que

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0$$

Exemplo 4.2. Seja $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, onde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e w_1, w_2 são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$, isto é, X descreve o plano ortogonal a $w_1 \times w_2$ que passa por p_0 . Então, $X_u(u, v) = w_1$ e $X_v(u, v) = w_2$. Como w_1 e w_2 são ortonormais, obtendo que os coeficientes da primeira forma quadrática são as funções constantes $E(u, v) = 1, F(u, v) = 0, G(u, v) = 1$.

Exemplo 4.3. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que descreve o cilindro circular $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$.

Figura 4.2: Cilindro Circular S



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Os coeficientes da primeira forma quadrática são dados por $E(u, v) = G(u, v) = 1, F(u, v) = 0$. De fato:

$$X_u(u, v) = (\sin u, -\cos u, 0) \text{ e } X_v(u, v) = (0, 0, 1);$$

Assim temos que:

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u + 0 = 1,$$

$$F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = 0 + 0 + 1 = 1.$$

E portanto, temos a primeira forma quadrática:

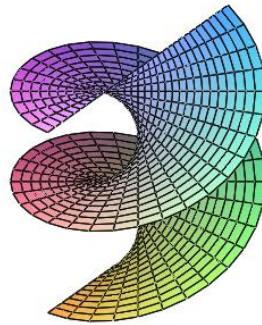
$$I_q(w) = a^2 + b^2.$$

Exemplo 4.4. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

A descrição geométrica dessa superfície é dada da seguinte forma. Seja $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, bu)$ uma hélice circular. Para cada u existe uma única reta ortogonal ao eixo $0z$, que passa por $\alpha(u)$. O traço de X é o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$, obtido pela união dessas retas, que é denominado helicóide.

Figura 4.3: Helicóide



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Visto que:

$$X_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, b) \text{ e } X_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 0);$$

Os coeficientes da primeira forma quadrática de X são dados por

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = v^2 \operatorname{sen}^2 u + v^2 \cos^2 u + b^2 = v^2 + b^2, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = v \operatorname{sen} u \cos u - v \operatorname{sen} u \cos u + 0 = 0, \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = \cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u + 0 = 1. \end{aligned}$$

E portanto, temos a primeira forma quadrática:

$$I_q(w) = (v^2 + b^2)a^2 + b^2.$$

4.2 Comprimento

Definição 4.5. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superfície, então, para $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))} dt,$$

em que usamos o fato de que $\alpha'(t)$ é um vetor tangente à superfície em $q(t) = (u(t), v(t))$.

4.3 Ângulos

O ângulo entre dois vetores não é um segredo da geometria diferencial. Considere dois vetores não nulos, tangentes a X em $q = (u, v)$, w_1 e w_2 . O ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$ determinado por w_1 e w_2 é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1||w_2|}.$$

Essa equação por si só não necessita da teoria local de superfícies, mas vamos expressar $\cos \theta$ em termos da primeira forma fundamental e nos aprofundar no assunto. Temos que a primeira forma fundamental é dada por: $I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$ e $w_1 + w_2$ é um vetor tangente a X em q .

Assim sendo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} I_q(w_1) &= \langle w_1, w_1 \rangle = |w_1|^2, \\ I_q(w_2) &= \langle w_2, w_2 \rangle = |w_2|^2 \text{ e} \\ I_q(w_1 + w_2) &= \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle = |w_1|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle + |w_2|^2. \end{aligned}$$

Fazendo as devidas manipulações algébricas, temos que:

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle &= \frac{|w_1|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle + |w_2|^2 - |w_1|^2 - |w_2|^2}{2} \text{ e} \\ |w_1||w_2| &= \sqrt{|w_1|^2|w_2|^2}; \end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos \theta = \frac{I_q(w_1 + w_2) - I_q(w_1) - I_q(w_2)}{2\sqrt{I_q(w_1)I_q(w_2)}}.$$

Para curvas, usaremos do mesmo raciocínio. Dada duas curvas da superfície $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $\beta(r) = X(u(r), v(r))$ tais que $(u(t_0), v(t_0)) = (u(r_0), v(r_0))$, então o ângulo θ com que as curvas se intersectam é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(r_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)||\beta'(r_0)|}.$$

Em particular, o ângulo formado pelas curvas coordenadas de $X(u, v)$ em (u_0, v_0) é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u||X_v|}(u_0, v_0).$$

Escreveremos a mesma afirmação com os coeficientes da primeira forma fundamental. Sejam eles:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0), \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0), \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Temos que:

$$\cos \theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}.$$

Assim, concluímos que as curvas coordenadas de uma superfície $X(u, v)$ se intersectam ortogonalmente se, e somente se, $F(u, v) = 0$ para todo (u, v) .

4.4 Área

O intuito desse tópico é abordar nocões de área de regiões de uma superfície. Para tal, vamos começar definindo o que seriam essas tais regiões.

Definição 4.6. Uma região D do plano é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ fechado e limitado, cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta de $\mathbb{R}^2$ e cujo bordo, homeomorfo a uma circunferência, é formado por um número finito de traços de curvas regulares.

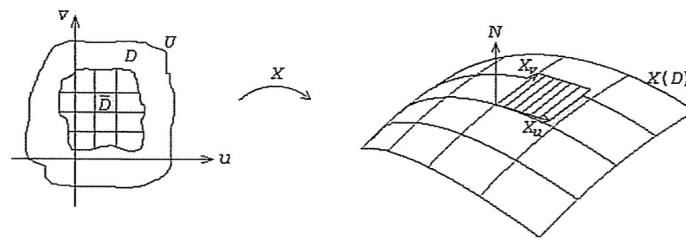
Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e uma região $D \subset U$ de $\mathbb{R}^2$. Denominamos $X(D)$ como a região da superfície X .

Definição 4.7. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de $\mathbb{R}^2$, tal que X restrita ao interior de D é injetiva. A área da região $X(D)$ é dada por

$$A(X(D)) = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} \, du dv;$$

em que E, F, G são coeficientes da primeira forma quadrática.

Figura 4.4: Área de uma região



Fonte: Tenenblat (2008, p. 143)

Geometricamente, fixemos um ponto $(u_0, v_0) \in D$. A área do paralelogramo formado pelos vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ é dada por $|X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)|$.

Este valor é aproximadamente igual a área de uma região em $X(\bar{D})$ em que $\bar{D} \subset D$ é um retângulo com vértice em (u_0, v_0) e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados u e v . Além disso, lembramos que $|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}$.

A área de uma região da superfície é invariante por mudança de coordenadas. Para melhor compreensão, vamos considerar uma reparametrização $X(u, v) = X \circ h(\bar{u}, \bar{v})$ de X por h , na qual $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $h : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ é uma mudança de coordenadas. Sejam $\bar{D} \subset \bar{U}$ e $D \subset U$ regiões do plano tais que $D = h(\bar{D})$. Assim, $A(X(D)) = A(X(\bar{D}))$. De fato, se $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$, então

$$\int \int_{\bar{D}} |X_{\bar{u}} \times X_{\bar{v}}| d\bar{u} d\bar{v} = \int \int_{\bar{D}} |X_u \times X_v| |\det J(h)| d\bar{u} d\bar{v} = \int \int_D |X_u \times X_v| du dv,$$

em que $J(h)$ se refere a matriz jacobianada de h e a última igualdade decorre do teorema de mudança de variáveis para integrais duplas.

Ao trabalharmos decomposição de áreas, podemos proceder de maneira semelhante à matemática básica. Assim, a área total é a soma das áreas decompostas, independente da decomposição. Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular e Q um subconjunto de $X(U)$ que pode ser decomposto em um número finito de regiões, então definimos a área de Q como soma das áreas das regiões da decomposição.

Exemplo 4.8. Seja S uma esfera de raio r cuja parametrização é dada por:

$$\begin{aligned} X(\theta, \varphi) &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta), \\ V &= \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}. \end{aligned}$$

Para a superfície em questão, temos

$$\begin{aligned} X_\theta &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta), \\ X_\varphi &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Calculando os coeficientes E, F e G , obtemos

$$\begin{aligned} E(\theta, \varphi) &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2, \\ F(\theta, \varphi) &= \langle X_\theta, X_\varphi \rangle = -r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0, \\ G(\theta, \varphi) &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^4 \operatorname{sen}^2 \theta} = r^2 \operatorname{sen} \theta.$$

Sabemos que $0 < \theta < \pi$ e $0 < \varphi < 2\pi$, então a área total de S^2 é dada por:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \, d\theta \right] d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left[-\cos \theta \Big|_0^\pi \right] d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} [-\cos \pi - (-\cos 0)] d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} 2 d\varphi \\ &= 2r^2 (\varphi \Big|_0^{2\pi}) \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

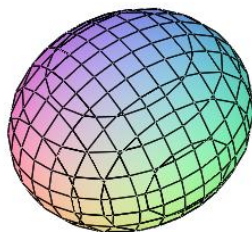
4.5 Aplicações

Os exercícios resolvidos nesse tópico podem ser encontrados nas páginas 117 a 121 do livro Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies de Manfredo Perdigão do Carmo (2012).

1. Calcule, para os pontos regulares, a primeira forma fundamental das seguintes superfícies parametrizadas:

a) $X(u, v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos u)$; **elipsóide**.

Figura 4.5: Elipsóide



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Solução:

Seja w um vetor tangente à superfície em um ponto $X(u, v)$, dado na base X_u, X_v por

$$w = AX_u + BX_v.$$

A primeira forma fundamental da superfície parametrizada é:

$$\begin{aligned} I(w) = |w|^2 &= \langle AX_u + BX_v, AX_u + BX_v \rangle \\ &= A^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2AB \langle X_u, X_v \rangle + B^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= A^2 E + 2ABF + B^2 G. \end{aligned}$$

Para o elipsóide em questão, temos:

$$X_u = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, -c \sin u),$$

$$X_v = (-a \sin u \sin v, b \sin u \cos v, 0).$$

Sendo os coeficientes:

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u,$$

$$F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = b^2 \sin u \cos u \sin v \cos v - a^2 \sin u \cos u \sin v \cos v,$$

$$G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \sin^2 u \sin^2 v + b^2 \sin^2 u \cos^2 v.$$

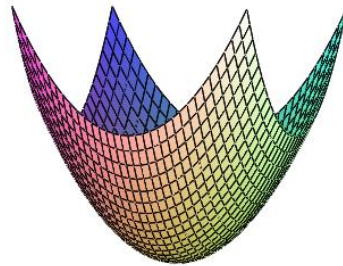
E, portanto:

$$I(w) = A^2(a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v - c \sin^2 u)$$

$$+ 2AB(b^2 - a^2)(\sin u \cos u \sin v \cos v) + B^2 \sin^2 u(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v).$$

b) $X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$; **paraboloide elíptico.**

Figura 4.6: Paraboloide Elíptico



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Solução:

$$X_u = (a \cos v, b \sin v, 2u),$$

$$X_v = (-a \sin v, b \cos v, 0).$$

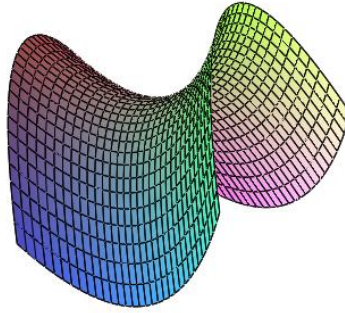
$$\begin{aligned}
E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 4u^2, \\
F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = -a^2 u \sin v \cos v + b^2 u \sin v \cos v, \\
G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = a^2 u^2 \sin^2 v + b^2 u^2 \cos^2 v.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a primeira forma fundamental da superfície é:

$$\begin{aligned}
I(w) &= A^2(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 4u^2) + 2AB(b^2 - a^2)(u \sin v \cos v) \\
&+ B^2 u^2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v).
\end{aligned}$$

c) $X(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$; **parabolóide hiperbólico.**

Figura 4.7: Parabolóide Hiperbólico



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Solução:

$$\begin{aligned}
X_u &= (a \cosh v, b \sinh v, 2u), \\
X_v &= (au \sinh v, bu \cosh v, 0).
\end{aligned}$$

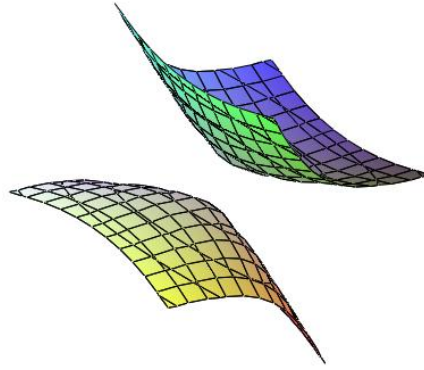
$$\begin{aligned}
E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v + 4u^2, \\
F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = a^2 u \sinh v \cosh v + b^2 u \sinh v \cosh v, \\
G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = a^2 u^2 \sinh^2 v + b^2 u^2 \cosh^2 v.
\end{aligned}$$

E assim, temos a primeira forma fundamental:

$$I(w) = A^2(a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v + 4u^2) + 2AB(a^2 + b^2)(u \sinh v \cosh v) + B^2 u^2(a^2 \sinh^2 v + b^2 \cosh^2 v).$$

- d) $X(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$; **hiperbolóide de duas folhas.**

Figura 4.8: Hiperbolóide de Duas Folhas



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Solução:

$$X_u = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u),$$

$$X_v = (-a \sinh u \sin v, b \sinh u \cos v, 0).$$

Sendo os coeficientes:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 u \cos^2 v + b^2 \cosh^2 u \sin^2 v + c^2 \sinh^2 u,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = b^2 \sinh u \cosh u \sin v \cos v - a^2 \sinh u \cosh u \sin v \cos v,$$

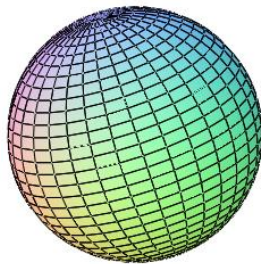
$$G = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \sinh^2 u \sin^2 v + b^2 \sinh^2 u \cos^2 v.$$

E, portanto:

$$I(w) = A^2(a^2 \cosh^2 u \cos^2 v + b^2 \cosh^2 u \sin^2 v + c^2 \sinh^2 u) + 2AB(b^2 - a^2)(\sinh u \cosh u \sin v \cos v) + B^2 \sinh^2 u(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v).$$

2. Seja $X(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ uma parametrização da esfera unitária S^2 . Seja P o plano $x = z \cotg \alpha, 0 < \alpha < \pi$ e β o ângulo agudo que a curva $P \cap S^2$ faz com o semi-meridiano $\varphi = \varphi_0$. Calcule $\cos \beta$.

Figura 4.9: Parametrização da Esfera Unitária S^2



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Solução:

$$P = \{(z \cotg \alpha, y, z), y, z \in \mathbb{R}\};$$

A interseção $P \cap S^2$ ocorre quando

$$z^2 \cotg^2 \alpha + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - z^2(\cotg^2 \alpha + 1)}.$$

Seja

$$\alpha(t) = (\sin t \cos \varphi_0, \sin t \sin \varphi_0, \cos t)$$

uma parametrização do semimeridiano $\varphi = \varphi_0$ e

$$\beta(t) = (t \cotg \alpha, \sqrt{1 - t^2(\cotg^2 \alpha + 1)}, t)$$

uma parametrização de $P \cap S^2$. Tais curvas se intersectam quando

$$\begin{cases} t_0 \cot g \alpha = \operatorname{sen} t_0 \cos \varphi_0 \\ \sqrt{1 - t_0^2(\cot g^2 \alpha + 1)} = \operatorname{sen} t_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \\ t_0 = \cos t_0 \end{cases}$$

$$1 = \cos^2 t_0 + \operatorname{sen}^2 t_0 \Rightarrow 1 = t_0^2 + \frac{t_0^2 \cot g^2 \alpha}{\cos^2 \varphi_0} \Rightarrow t_0^2 = \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cot g^2 \alpha + \cos^2 \varphi_0}.$$

Portanto,

$$\cos \beta = \cos \left(\frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|} \right).$$

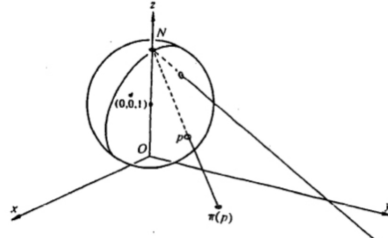
3. Obtenha a primeira forma fundamental da esfera na parametrização dada pela projeção estereográfica.

Solução:

Uma maneira de definir um sistema de coordenadas para a esfera S^2 , dada por $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$, é considerar a chamada projeção estereográfica $\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, que leva um ponto $p = (x, y, z)$ da esfera S^2 menos o pólo norte $N = (0, 0, 2)$ sobre o plano xy . Seja $(u, v) = \pi(x, y, z)$, onde $(x, y, z) \in S^2 - \{N\}$ e $(u, v) \in \text{plano } xy$. Observe que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ é dada por

$$\pi^{-1} \begin{cases} x = \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \\ y = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \\ z = \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4}. \end{cases}$$

Figura 4.10: Projeção Estereográfica



Fonte: Carmo (2012, p. 79)

Além disso, utilizando a projeção estereográfica, é possível cobrir a esfera com duas vizinhanças coordenadas.

Considerando essas informações, temos:

$$X(u, v) = \pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right).$$

Sendo as derivadas parciais

$$\begin{aligned} X_u &= \left(\frac{4(u^2 + v^2 + 4) - 8u^2}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{4u(u^2 + v^2 + 4) - 4u(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right) \\ &= \left(\frac{-4u^2 + 4v^2 + 16}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{16u}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_v &= \left(\frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{4(u^2 + v^2 + 4) - 8v^2}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{4v(u^2 + v^2 + 4) - 4v(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right) \\ &= \left(\frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{4u^2 - 4v^2 + 16}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{16v}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right). \end{aligned}$$

E os coeficientes

$$\begin{aligned} E &= \frac{(-4u^2 + 4v^2 + 16)^2 + 64u^2v^2 + 256u^2}{(u^2 + v^2 + 4)^4}, \\ F &= \frac{-8uv(-4u^2 + 4v^2 + 16) - 8uv(4u^2 - 4v^2 + 16) + 256uv}{(u^2 + v^2 + 4)^4} = 0, \\ G &= \frac{64u^2v^2 + (4u^2 - 4v^2 + 16)^2 + 256v^2}{(u^2 + v^2 + 4)^4}. \end{aligned}$$

Logo, se w é um vetor tangente a $X(u, v)$, dado na base $\{X_u, X_v\}$ por $w = AX_u + BX_v$, temos que:

$$\begin{aligned} I(w) &= A^2 \left[\frac{(-4u^2 + 4v^2 + 16)^2 + 64u^2v^2 + 256u^2}{(u^2 + v^2 + 4)^4} \right] \\ &\quad + B^2 \left[\frac{64u^2v^2 + (4u^2 - 4v^2 + 16)^2 + 256v^2}{(u^2 + v^2 + 4)^4} \right]. \end{aligned}$$

4. **Mostre que a área A de uma região limitada R da superfície $z = f(x, y)$ é**

$$A = \int \int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy,$$

onde Q é a projeção ortogonal de R sobre o plano xy .

Solução:

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dado por $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$, em que $U \subset D_f$ (domínio de f) e $R \subset X(U)$. Assim, a área de R é dada por

$$A(R) = \int \int_Q |X_x \times X_y| \, dx \, dy,$$

e $Q = X^{-1}(R) = \pi(R)$, sendo $\pi(x, y, z) = (x, y)$;

Mas $X_x = (1, 0, f_x)$ e $X_y = (0, 1, f_y)$. Logo,

$$\begin{aligned} |X_x \times X_y| &= \left| \text{Det} \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix} \right| \\ &= |(-f_x, -f_y, 1)| \\ &= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$A(R) = \int \int_Q |X_x \times X_y| dx dy = \int \int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy;$$

em que Q é a projeção ortogonal de R sobre o plano xy .

5. **As curvas coordenadas de uma parametrização $X(u, v)$ constituem uma rede de Tchebyshev se os comprimentos dos lados opostos de qualquer quadrilátero formado por elas são iguais. Mostre que uma condição necessária e suficiente para que isso aconteça é**

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Solução:

- ($\Rightarrow$) Sejam $(u_0, v_0) \in U$ fixo e $(u, v) \in U$ fixo porém arbitrário. Sejam $\alpha_1(t) = X(t, v_0)$ e $\alpha_2(t) = X(t, v)$ curvas coordenadas da parametrização X . Sabemos que os comprimentos de arcos de α_1 e α_2 , entre u_0 e u , são dados por

$$\int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v_0)} dt \quad \text{e} \quad \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v)} dt,$$

respectivamente. Como estamos supondo que as curvas coordenadas constituem uma rede de Tchebyshev, segue que

$$\int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v_0)} dt = \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v)} dt, \quad \forall (u, v) \in U.$$

Diferenciando com respeito a u , temos

$$\sqrt{E(u, v_0)} = \sqrt{E(u, v)}, \quad \forall (u, v) \in U.$$

Logo $E(u, v_0) = E(u, v)$, para todo $(u, v) \in U$, e, portanto,

$$\frac{\partial E}{\partial v}(u, v) = 0 \quad \forall (u, v) \in U.$$

De maneira análoga teremos $\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = 0$.

($\Leftarrow$) Se $\frac{\partial E}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = 0$, então $E = E(u)$ e $G = G(v)$. Portanto, os comprimentos dos lados opostos do quadrilátero formado pelas curvas coordenadas são iguais, já que

$$\int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v_0)} dt = \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v)} dt,$$

e

$$\int_{v_0}^v \sqrt{G(u_0, t)} dt = \int_{v_0}^v \sqrt{G(u, t)} dt,$$

$(u_0, v_0), (u, v) \in U$. Logo as curvas coordenadas constituem uma rede de Tchebyshef.

6. **Prove que sempre que as curvas coordenadas constituem uma rede de Tchebyshef (ver exercício 5) é possível reparametrizar a vizinhança coordenada de tal maneira que os novos coeficientes da primeira forma fundamental são**

$$E = 1, \quad F = \cos \theta, \quad G = 1.$$

onde θ é o ângulo formado pelas curvas coordenadas.

Solução:

Pelo exercício anterior, os comprimentos dos lados opostos de qualquer quadrilátero formado pelas curvas coordenadas de uma parametrização $X(u, v)$ são iguais (Rede de Tchebyshef) se, e somente se, $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$. E,

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \Rightarrow E = E(u) \text{ e } G = G(v).$$

Reparametrizamos a vizinhança coordenada pela mudança de coordenada $h(u, v) =$

$(\bar{u}, \bar{v})$, em que

$$\bar{u}(u, v) = \int_0^u \sqrt{E(\bar{u})} d\bar{u} \text{ e } \bar{v}(u, v) = \int_0^v \sqrt{G(\bar{v})} d\bar{v}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \bar{X}(h(u, v)) = \bar{X}(\bar{u}, \bar{v}), \\ X_u &= \bar{X}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \bar{X}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = \bar{X}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}, \\ X_v &= \bar{X}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \bar{X}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \bar{X}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = \sqrt{E(u)}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \sqrt{G(v)},$$

Portanto,

$$\begin{aligned} X_u &= \bar{X}_{\bar{u}} \sqrt{E(u)}, \\ \Rightarrow |X_u|^2 &= |\bar{X}_{\bar{u}}|^2 E \\ \Rightarrow E &= \bar{E} E \Rightarrow \bar{E} = 1. \end{aligned}$$

Obs.: E não pode ser zero pois $E = |X_u|^2$ e X_u é a coluna da derivada de X , que é injetiva.

Analogamente, $\bar{G} = 1$. Finalmente,

$$\bar{F} = \langle \bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}} \rangle = \left\langle \frac{X_u}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u||X_v|} = \cos \theta,$$

em que θ é o ângulo formado pelas curvas coordenadas. Portanto, descobrimos uma nova parametrização da vizinhança coordenada tal que

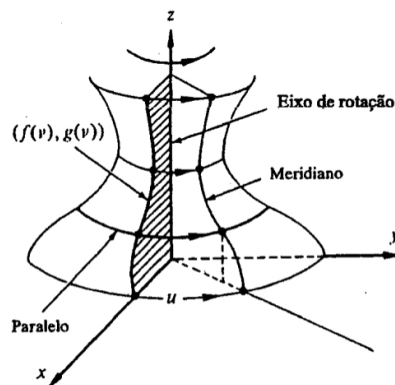
$$\bar{E} = 1, \quad \bar{F} = \cos \theta \text{ e } \bar{G} = 1.$$

- 7. Mostre que uma superfície de revolução sempre pode ser parametrizada de modo que**

$$E = E(v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Solução:

Figura 4.11: Superfície de Revolução



Fonte: Carmo (2012, p. 90)

Seja S uma superfície de revolução. Então S é o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana C em torno de um eixo no plano que não encontra curva. Consideremos o plano xz como o plano da curva e o eixo O_z como o eixo de rotação. Seja

$$\begin{cases} x = f(v) \\ z = g(v) \end{cases}; \alpha(v) = (f(v), g(v)), v \in I$$

parametrização de C pelo comprimento de arco, isto é, $f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1$. Seja θ o ângulo de rotação em torno do eixo O_z . Assim, obtemos a parametrização de S

$$X(\theta, v) = (f(v) \cos \theta, f(v) \sin \theta, g(v)), v \in I, \theta \in (0, 2\pi)$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-f(v) \sin \theta, f(v) \cos \theta, 0), \\ X_v &= (f'(v) \cos \theta, f'(v) \sin \theta, g'(v)). \end{aligned}$$

Corroborando na nossa afirmação inicial:

$$E = f^2(v) \operatorname{sen}^2 \theta + f^2(v) \cos^2 \theta = f^2(v) = E(v),$$

$$F = -f(v)f'(v)\operatorname{sen} \theta \cos \theta + f(v)f'(v)\operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0,$$

$$G = f'(v)^2 \cos^2 \theta + f'(v)^2 \operatorname{sen}^2 \theta + g'(v)^2 = f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1.$$

8. Seja $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ o plano xy e seja $X : U \rightarrow P$ uma parametrização de P dada por

$$X(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta),$$

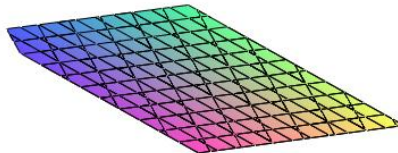
onde

$$U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental de P nesta parametrização.

Solução:

Figura 4.12: Plano xy



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Calculemos E , F e G . Observe que

$$X_\rho = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \text{ e } X_\theta = (-\rho \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \theta).$$

Assim,

$$E = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

$$F = -\rho \sin \theta \cos \theta + \rho \sin \theta \cos \theta = 0,$$

$$G = \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2.$$

Portanto, $E = 1$, $F = 0$ e $G = \rho^2$.

9. Seja S uma superfície de revolução e C a sua curva geratriz. Seja s o comprimento de um arco de C e denote por $\rho = \rho(s)$ a distância do ponto correspondente a s em C ao eixo de rotação.

- a) (Teorema de Pappus.) Mostre que a área de S é

$$2p \int_0^l \pi(s) ds,$$

onde l é o comprimento de C .

Solução:

Seja

$$\begin{cases} x = f(s) \\ z = g(s) \end{cases}; \alpha(s) = (f(s), g(s)), s \in I$$

parametrização de C pelo comprimento de arco. Seja

$$X(\theta, s) = (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, g(s)), s \in I, \theta \in (0, 2\pi)$$

parametrização de S . Assim,

$$X_\theta = (-f(s) \sin \theta, f(s) \cos \theta, 0),$$

$$X_s = (f'(s) \cos \theta, f'(s) \sin \theta, g'(s)).$$

e $E = f(s)^2$, $F = 0$ e $G = 1$. Logo $|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}$.

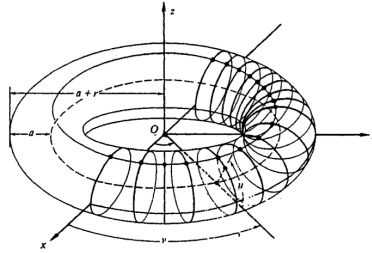
$$A(S) = \int \int_Q |X_\theta \times X_s| d\theta ds = \int \int_Q \sqrt{EG - F^2} d\theta ds = \int \int_Q \sqrt{f^2(s)} d\theta ds.$$

Observe que $\rho(s) = |f(s)| = \sqrt{f^2(s)}$. Assim,

$$A(S) = \int_0^l \int_0^{2\pi} \rho(s) \, d\theta ds = \int_0^l \rho(s) \theta \Big|_0^{2\pi} ds = 2\pi \int_0^l \rho(s) \, ds.$$

b) **Aplique a parte a para calcular a área de um toro de revolução.**

Figura 4.13: Toro de Revolução 1



Fonte: Carmo (2012, p. 73)

Solução:

Considere o círculo de raio r e centro $(a, 0)$ no plano xz .

$$\alpha(u) = (a + r \cos u, r \sin u), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Temos que

$$\begin{aligned} |\alpha'(u)| &= |(-r \sin u, r \cos u)| = \sqrt{r^2(\sin^2 u + \cos^2 u)} = r \\ S(u) &= \int_0^u |\alpha'(u)| du = \int_0^u r \, du = ru \\ \Rightarrow u(s) &= \frac{s}{r}. \end{aligned}$$

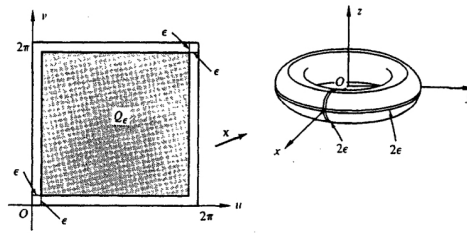
Assim, reparametrizando $\alpha(u)$ pelo comprimento de arco, temos

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \left(a + r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}\right), \quad 0 < s < 2\pi r \\ \Rightarrow p(s) &= a + r \cos \frac{s}{r}. \end{aligned}$$

Logo, por a), temos

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_0^{2\pi r} p(s) ds = 2\pi \int_0^{2\pi r} \left(a + r \cos \frac{s}{r} \right) ds \\ &= 2\pi \left(as + r^2 \sin \frac{s}{r} \right) \Big|_0^{2\pi r} = 4\pi r^2 a. \end{aligned}$$

Figura 4.14: Toro de Revolução 2



Fonte: Carmo (2012, p. 117)

10. (Famílias de Curvas Ortogonais)

- a) Sejam E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície regular S na parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Sejam $\varphi(u, v) = \text{const.}$ e $\psi(u, v) = \text{const.}$ duas famílias de curvas regulares em $X(U) \subset S$. Prove que essas duas famílias são ortogonais (i.e., sempre que duas curvas de famílias distintas se intersectam, as suas retas tangentes são ortogonais) se e somente se

$$E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u = 0.$$

Solução:

Seja $f : X(U) \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f = \varphi \circ X^{-1}$. Seja C_1 uma curva da família $\varphi(u, v) = \text{const.}$, isto é,

$$\begin{aligned} C_1 &= f^{-1}(c), c = \text{const.} \\ &= (\varphi \circ X^{-1})^{-1}(c) \\ &= \{p \in X(U); \varphi(X^{-1}(p)) = c\}. \end{aligned}$$

Seja $\alpha : I \rightarrow X(U)$ uma parametrização de C_1 , ou seja, $\alpha(t) = X(\bar{\alpha}(t))$, onde $\bar{\alpha} : I \rightarrow U$, $\bar{\alpha}(t) = (u_1(t), v_1(t))$, é uma curva $\bar{C}_1$ em U dada por $\varphi^{-1}(c)$. Assim,

temos que $\langle \bar{\alpha}', \nabla \varphi \rangle = 0$ e, portanto,

$$\bar{\alpha}' = \lambda_1(-\varphi_v, \varphi_u).$$

Considere agora $C_2 \perp C_1$ uma curva da família $\psi(u, v) = \text{const.}$ De forma análoga, considere $\beta : J \rightarrow X(U)$, dada por

$$\beta(s) = X(\bar{\beta}(s)) = X(u_2(s), v_2(s)),$$

parametrização de $\bar{C}_2$ na qual $\bar{\beta} = (u_2, v_2)$ é parametrização de $\bar{C}_2$. Portanto $\langle \bar{\beta}', \nabla \psi \rangle = 0$ e, assim,

$$\bar{\beta}' = \lambda_2(-\psi_v, \psi_u).$$

Logo,

$$\begin{aligned} C_1 \perp C_2 &\Leftrightarrow \langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle dX_q \bar{\alpha}', dX_q \bar{\beta}' \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 \langle dX_q(-\varphi_v, \varphi_u), dX_q(-\psi_v, \psi_u) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle -X_u \varphi_v + X_v \varphi_u, -X_u \psi_v + X_v \psi_u \rangle = 0, \end{aligned}$$

Portanto,

$$C_1 \perp C_2 \Leftrightarrow E\varphi_v \psi_v - F(\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u) + G\varphi_u \psi_u = 0;$$

como queríamos demonstrar.

- b) **Aplique a parte a para mostrar que na vizinhança coordenada $X(U)$ do helicóide $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ com $0 < u < 2\pi$ e $-\infty < v < \infty$, as duas famílias de curvas regulares**

$$\begin{aligned} v \cos u &= \text{const.}, & v &\neq 0, \\ (v^2 + a^2) \sin^2 u &= \text{const.}, & v &\neq 0, \quad u \neq \pi, \end{aligned}$$

são ortogonais.

Solução:

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Tome

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= v \cos u = \text{const.}, \quad v \neq 0, \quad \text{e} \\ \psi(u, v) &= (v^2 + a^2) \sin^2 u = \text{const.}, \quad v \neq 0, \quad u \neq \pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_u &= (-v \sin u, v \cos u, a), \\ X_v &= (\cos u, \sin v, 0).\end{aligned}$$

Assim, temos que $E = v^2 + a^2$, $F = 0$ e $G = 1$.

$$\begin{aligned}\varphi_u &= -v \sin u, \\ \varphi_v &= \cos u, \\ \psi_u &= 2(v^2 + a^2) \sin u \cos u, \\ \psi_v &= 2v \sin^2 u.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u = \\ 2v(v^2 + a^2) \sin^2 u \cos u - 2v(v^2 + a^2) \sin^2 u \cos u = 0.\end{aligned}$$

Logo, por a), as duas famílias de curvas regulares são ortogonais.

5 Segunda Forma Fundamental e Aplicações

No capítulo anterior, foi abordada a primeira forma fundamental, cuja importância reside na descrição das propriedades intrínsecas de uma superfície regular, tais como medidas de comprimento, ângulo e área. Em continuidade a esse estudo, este capítulo dedica-se à *segunda forma fundamental*, também conhecida como *segunda forma quadrática*, uma estrutura geométrica essencial para a análise das propriedades extrínsecas da superfície. Serão exploradas suas relações com as curvaturas locais da superfície, incluindo a curvatura normal e as curvaturas principais, que fornecem informações fundamentais sobre o comportamento e a variação da superfície no espaço ambiente.

5.1 A Segunda Forma Fundamental e a Curvatura Normal

Definição 5.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $q = (u_0, v_0) \in U$, a *segunda forma quadrática* de X em q é uma aplicação $II_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada vetor $w \in T_q X$ associa $II_q(w)$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos $II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$, onde N é o vetor normal a X .

Temos que $II_q(w)$ não depende da curva escolhida. De fato, seja

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

e consideremos uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $q = (u(t_0), v(t_0))$ e $w = \alpha'(t_0)$, isto é,

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), \quad (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b).$$

Como

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned}\alpha''(t) = & u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2X_{uu}(u(t), v(t)) + \\ & + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2X_{vv}(u(t), v(t)) + \\ & v''(t)X_v(u(t), v(t)),\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}II_q(w) &= \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle \\ \Rightarrow II_q(w) &= a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0),\end{aligned}$$

e, portanto, $II_q(w)$ não depende da curva α . Denotando

$$\begin{aligned}e(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0), \\ f(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0), \\ g(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0),\end{aligned}$$

obtemos

$$II_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2ab f(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0).$$

Ao variar os valores de (u, v) , obtemos as funções diferenciáveis $e(u, v)$, $f(u, v)$, $g(u, v)$, denominadas *coeficientes da segunda forma quadrática* da superfície parametrizada X .

Definição 5.2. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. A *função curvatura normal* em q é uma aplicação $k_n : T_q X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_q X$ não-nulo, associa

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}.$$

Exemplo 5.3. Obtenha a segunda forma quadrática e a curvatura normal da superfície de rotação $X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, com $a < u < b$, $0 < v < 2\pi$ e

$f(u) > 0$, gerada pela rotação da curva $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ em torno do eixo Oz , conforme definido na Proposição 3.8.

Para essa superfície, temos as seguintes derivadas

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \\ X_v(u, v) &= (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, g''(u)), \\ X_{uv}(u, v) &= (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

Convém supor que a curva geratriz seja parametrizada pelo comprimento de arco, isto é,

$$(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1,$$

para todo u no intervalo considerado. Essa hipótese simplifica várias expressões, incluindo o cálculo do vetor normal da superfície.

Calculando o produto vetorial $X_u \times X_v$, obtemos

$$X_u \times X_v = (-f(u)g'(u) \cos v, -f(u)g'(u) \sin v, f'(u)f(u)).$$

E a partir dele, encontramos a norma

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{(-f(u)g'(u) \cos v)^2 + (-f(u)g'(u) \sin v)^2 + (f'(u)f(u))^2} \\ &= \sqrt{f(u)^2 g'(u)^2 (\cos^2 v + \sin^2 v) + f'(u)^2 f(u)^2} \\ &= \sqrt{f(u)^2 g'(u)^2 + f'(u)^2 f(u)^2} \\ &= f(u) \sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2} \\ &= f(u) \cdot 1 = f(u). \end{aligned}$$

e o vetor normal

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \\ &= \frac{(-f(u)g'(u) \cos v, -f(u)g'(u) \sin v, f'(u)f(u))}{f(u)} \\ &= (-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u)). \end{aligned}$$

Dessa forma, vamos calcular os coeficientes da segunda forma quadrática:

$$\begin{aligned}
 e(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) \\
 &= \langle (f''(u_0) \cos v_0, f''(u_0) \sin v_0, g''(u_0)), (-g'(u_0) \cos v_0, -g'(u_0) \sin v_0, f'(u_0)) \rangle \\
 &= -f''(u_0)g'(u_0) + g''(u_0)f'(u_0) = f'(u_0)g''(u_0) - f''(u_0)g'(u_0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) \\
 &= \langle (-f'(u_0) \sin v_0, f'(u_0) \cos v_0, 0), (-g'(u_0) \cos v_0, -g'(u_0) \sin v_0, f'(u_0)) \rangle \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0) \\
 &= \langle (-f(u_0) \cos v_0, -f(u_0) \sin v_0, 0), (-g'(u_0) \cos v_0, -g'(u_0) \sin v_0, f'(u_0)) \rangle \\
 &= f(u_0)g'(u_0).
 \end{aligned}$$

E chegamos na segunda forma quadrática:

$$\begin{aligned}
 II_q(w) &= a^2 e(u_0, v_0) + 2ab f(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0) \\
 &= a^2 [f'(u_0)g''(u_0) - f''(u_0)g'(u_0)] + 2ab \cdot 0 + b^2 (f(u_0)g'(u_0)) \\
 &= a^2 [f'(u_0)g''(u_0) - f''(u_0)g'(u_0)] + b^2 f(u_0)g'(u_0).
 \end{aligned}$$

Para descobrirmos a curvatura normal da superfície, devemos descobrir também a primeira forma quadrática dela. Os coeficientes da primeira forma quadrática $I_q(w)$ são (ver Seção 4.5 para mais detalhes):

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle = (f'(u_0))^2 + (g'(u_0))^2 = 1,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle = f(u_0)^2.$$

Logo, a primeira forma quadrática é:

$$I_q(w) = a^2 \cdot 1 + b^2 f(u)^2 = a^2 + b^2 f(u)^2.$$

Finalmente, vamos calcular a curvatura normal $k_n(w)$. Ela é dada por:

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{a^2 [f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)] + b^2 f(u)g'(u)}{a^2 + b^2 f(u)^2}.$$

Vamos agora analisar a interpretação geométrica desse resultado. A curvatura normal mede o quanto a superfície está se curvando na direção de um vetor tangente. No caso da superfície de rotação, essa curvatura depende da forma da curva geratriz $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ e da rotação dessa curva em torno do eixo Oz .

O termo $f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)$ representa a curvatura da curva geratriz no plano. Já o termo $f(u)g'(u)$ está ligado ao efeito da rotação: quanto mais afastada do eixo Oz (isto é, quanto maior $f(u)$), maior a curvatura causada pela rotação.

Portanto, a expressão final de $k_n(w)$ mostra como esses dois fatores contribuem para a curvatura da superfície: a curvatura da curva original e a influência da rotação. Isso evidencia que a geometria local da superfície de rotação depende tanto da forma da curva que está sendo girada quanto da forma como ela se posiciona em relação ao eixo de rotação.

Qualquer que seja um número real $\lambda \neq 0$, a função curvatura normal $k_n(w) = k_n(\lambda w)$, para $w \in T_q X$ não-nulo.

Com efeito, seja $w = aX_u(u_0, v_0)$, em que $(a, b) \neq (0, 0)$ e e_0, f_0, g_0 os coeficientes da segunda forma quadrática em (u_0, v_0) . Temos

$$\begin{aligned} k_n(\lambda w) &= \frac{II_q(\lambda w)}{I_q(\lambda w)} = \frac{\lambda^2 a^2 e_0 + 2\lambda^2 ab f_0 + \lambda^2 b^2 g_0}{\lambda^2 \langle w, w \rangle} = \\ &= \frac{a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0}{\langle w, w \rangle} = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = k_n(w). \end{aligned}$$

Vamos considerar no plano tangente $T_q X$ um vetor unitário w . Seja $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva regular da superfície parametrizada pelo comprimento de arco tal que

$$\begin{aligned} (u(s_0), v(s_0)) &= q \\ \alpha'(s_0) &= w. \end{aligned}$$

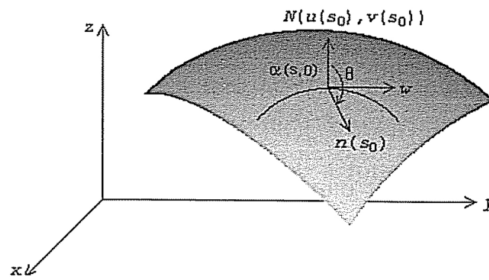
Seja $n(s_0)$ o vetor normal a α em s_0 e θ o ângulo formado pelos vetores $n(s_0)$ e

$N(u(s_0), v(s_0))$. Se a curvatura da curva α em s_0 , $k(s_0) \neq 0$, então

$$\begin{aligned} k_n(w) &= II_q(w) = \langle \alpha''(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle \\ &= k(s_0) \langle n(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle \\ &= k(s_0) \cos \theta, \end{aligned}$$

onde $n(s_0)$ é o vetor normal a α em s_0 e θ é o ângulo formado pelos vetores $n(s_0)$ e $N(u(s_0), v(s_0))$.

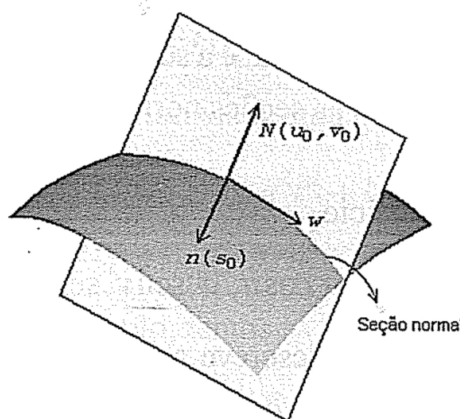
Figura 5.1: Ângulo θ entre vetores normais



Fonte: Tenenblat (2008, p. 155)

Já vimos que $II_q(w)$ e $k_n(w)$ não dependem da curva α escolhida. Assim, vamos aplicar a igualdade $k_n(w) = k(s_0) \cos \theta$ na curva mais conveniente, a *seção normal da superfície determinada por w* . Essa curva é obtida pela interseção do traço de $X(u, v)$, para (u, v) suficientemente próximos de (u_0, v_0) , com o plano que contém o ponto $X(u_0, v_0)$ e é ortogonal a $w \times N(u_0, v_0)$.

Figura 5.2: Seção normal da superfície determinada por w



Fonte: Tenenblat (2008, p. 155)

Sob estas condições, a seção normal corresponde ao traço de uma curva regular plana definida por $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $(u(s_0), v(s_0)) = (u_0, v_0)$ e $\beta'(s_0) = w$. Se a curvatura da curva no ponto s_0 for zero, ou seja, $k(s_0) = 0$ (equivalente a $\beta''(s_0) = 0$), então $k_n(w) = II_q(w) = 0$. Por outro lado, se $k(s_0) > 0$, o vetor normal à curva no ponto s_0 é dado por $n(s_0) = \pm N(u_0, v_0)$, onde N é o vetor normal da superfície. Dessa forma, temos que

$$k_n(w) = II_q(w) = \pm k(s_0).$$

Dessa forma, podemos concluir que se w é um vetor unitário tangente à superfície em q , então a curvatura da seção normal em q determinada por w é igual a $|k_n(w)|$.

Além disso, se w é um vetor não-nulo de $T_q X$, então

$$II_q(w) = |w|^2 k_n(w).$$

Ou seja, $|II_q(w)|$ é igual à curvatura da seção normal a X em q , determinada por w , multiplicada por $|w|^2$.

Exemplo 5.4. Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular que representa um plano em $\mathbb{R}^3$, então a curvatura normal e a segunda forma fundamental são identicamente nulas. De fato, todas as seções normais correspondem a retas, cuja curvatura é zero.

Exemplo 5.5. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \cos v),$$

$a > 0, u \in \mathbb{R}, 0 < v < \pi$. Essa parametrização é a usual da esfera de raio a .

- Todas as seções normais são circunferências de raio a , logo a curvatura normal é constante e igual a $1/a$.
- O vetor normal

$$N(u, v) = (-\operatorname{sen} v \cos u, -\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -\cos v)$$

aponta para o interior da esfera, visto que é o negativo do vetor posição unitário.

- Utilizando a relação

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)},$$

onde $I_q(w) = |w|^2$ é a primeira forma fundamental, concluímos que a segunda forma quadrática $II_q(w)$ é igual a $|w|^2/a$, para todo $q = (u, v)$ e $w \in T_qX$.

5.2 Curvaturas Principais; Curvatura de Gauss; Curvatura Média

Na seção anterior, determinamos a função curvatura normal. Nessa seção, observaremos que ela admite um valor máximo e um valor mínimo.

Os valores máximo e mínimo da função curvatura normal em um ponto q serão denominados *curvaturas principais*. A partir desses valores, definiremos a *curvatura de Gauss* e a *curvatura média*.

Denotaremos por E_0, F_0, G_0, e_0, f_0 e g_0 os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas de uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$ em um ponto $q = (u_0, v_0)$.

Proposição 5.6. *Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e k_n a função curvatura normal de X em $q = (u_0, v_0)$. Então, existem vetores unitários e ortogonais $w_1, w_2 \in T_qX$ tais que $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são os valores mínimo e máximo da função k_n .*

Demonstração. Se k_n é uma função constante, então quaisquer dois vetores unitários e ortogonais de T_qX satisfazem as condições da proposição.

Suponhamos, então, que k_n não é constante. Consideremos a função

$$\tilde{k}_n : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\tilde{k}_n(a, b) = k_n(aX_u(q) + bX_v(q)),$$

com $(a, b) \neq (0, 0)$. Isto é,

$$\tilde{k}_n(a, b) = \frac{a^2e_0 + 2abf_0 + b^2g_0}{a^2E_0 + 2abF_0 + b^2G_0}.$$

A função $\tilde{k}_n$ é diferenciável, pois estamos considerando apenas pontos (a, b) diferentes de $(0, 0)$. Além disso, para todo $\lambda \neq 0$, temos:

$$\tilde{k}_n(\lambda a, \lambda b) = \tilde{k}_n(a, b).$$

Assim, para estudar os valores máximo e mínimo de $\tilde{k}_n$, basta restringi-la ao conjunto de vetores de comprimento 1, ou seja, à circunferência $C \subset \mathbb{R}^2$ definida por:

$$C = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}.$$

Como $\tilde{k}_n$ é uma função contínua definida sobre a circunferência C , que é fechada e limitada, ela atinge valores máximo e mínimo nesse conjunto. Portanto, existem pontos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sobre C tais que:

$$k_1 = \tilde{k}_n(a_1, b_1), \quad k_2 = \tilde{k}_n(a_2, b_2),$$

onde k_1 e k_2 são, respectivamente, os valores mínimo e máximo da função $\tilde{k}_n$ restrita a C .

Portanto, para todo vetor não nulo $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, temos que o valor de $\tilde{k}_n(a, b)$ está limitado pelos números reais k_1 e k_2 , isto é,

$$k_1 \leq \tilde{k}_n(a, b) \leq k_2.$$

Além disso, como assumimos que k_n não é constante, esses extremos são distintos, ou seja,

$$k_1 < k_2.$$

Agora, definimos os vetores em $T_q X$:

$$\bar{w}_1 = a_1 X_u(q) + b_1 X_v(q) \quad \text{e} \quad \bar{w}_2 = a_2 X_u(q) + b_2 X_v(q),$$

que correspondem, respectivamente, às direções onde a função $\tilde{k}_n$ atinge seus valores mínimo e máximo.

Pela definição da função $\tilde{k}_n$, temos que para qualquer vetor $w \in T_q X \setminus \{0\}$,

$$k_1 = k_n(\bar{w}_1) \leq k_n(w) \leq k_n(\bar{w}_2) = k_2.$$

Ou seja, os vetores $\bar{w}_1$ e $\bar{w}_2$ definem os extremos da curvatura normal na direção de

w .

Para concluir a prova, precisamos mostrar que esses vetores são ortogonais. Isso ocorre porque (a_1, b_1) e (a_2, b_2) , pontos onde $\tilde{k}_n$ atinge seus extremos, são pontos críticos da função, ou seja, as derivadas parciais de $\tilde{k}_n$ nesses pontos são iguais a zero.

Ao calcular essas derivadas parciais, chegamos ao seguinte sistema de equações lineares para cada ponto crítico:

$$(e_0 - k_1 E_0)a_1 + (f_0 - k_1 F_0)b_1 = 0, \quad (5.1)$$

$$(e_0 - k_2 E_0)a_2 + (f_0 - k_2 F_0)b_2 = 0, \quad (5.2)$$

$$(f_0 - k_1 F_0)a_1 + (g_0 - k_1 G_0)b_1 = 0, \quad (5.3)$$

$$(f_0 - k_2 F_0)a_2 + (g_0 - k_2 G_0)b_2 = 0. \quad (5.4)$$

Se a_1, a_2, b_1, b_2 são todos diferentes de zero, fazemos o seguinte: multiplicamos a equação (5.1) por a_2 e subtraímos da equação (5.2) multiplicada por a_1 . De forma semelhante, multiplicamos a equação (5.3) por b_2 e subtraímos da equação (5.4) multiplicada por b_1 . Somando as duas expressões resultantes, obtemos:

$$(k_1 - k_2)(a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + b_1 b_2 G_0) = 0.$$

Como $k_1 \neq k_2$, concluímos que

$$\langle \bar{w}_1, \bar{w}_2 \rangle = a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + b_1 b_2 G_0 = 0,$$

ou seja, os vetores $\bar{w}_1$ e $\bar{w}_2$ são ortogonais com respeito ao produto interno induzido pela primeira forma fundamental.

De maneira análoga, pode-se mostrar que essa ortogonalidade também vale nos casos em que algum dos números a_1, a_2, b_1, b_2 seja zero.

Assim, encontramos dois vetores ortogonais $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ — que não necessariamente são unitários (embora $a_i^2 + b_i^2 = 1$ para $i = 1, 2$) — que correspondem aos pontos onde a função curvatura normal k_n atinge seus valores mínimo e máximo.

Por fim, definindo os vetores unitários

$$w_1 = \frac{\bar{w}_1}{|\bar{w}_1|}, \quad w_2 = \frac{\bar{w}_2}{|\bar{w}_2|},$$

e lembrando que $k_n(\lambda w) = k_n(w)$ para todo $\lambda \neq 0$, concluímos que w_1 e w_2 satisfazem

as condições da proposição, ou seja, são os vetores principais de curvatura no ponto q .

□

Usando a notação da proposição anterior, definimos os vetores w_1 e w_2 como os *vetores principais* de X no ponto q . As curvaturas associadas a esses vetores, k_1 e k_2 , são chamadas de *curvaturas principais* em q . As direções do espaço tangente T_qX determinadas por esses vetores são conhecidas como *direções principais*.

O produto das curvaturas principais, dado por

$$K(q) = k_1 \cdot k_2,$$

é chamado de *curvatura gaussiana* de X no ponto q . Já a média aritmética dessas curvaturas,

$$H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

recebe o nome de *curvatura média* de X em q .

Com base nessas definições, as curvaturas principais k_1 e k_2 podem ser encontradas como as raízes da equação quadrática

$$x^2 - 2H(q)x + K(q) = 0,$$

relacionando diretamente a curvatura média e a curvatura gaussiana com os valores extremos da curvatura normal em q .

Uma reparametrização da superfície pode mudar o sinal da curvatura média, mas não altera a curvatura gaussiana. Considere $\bar{X} = X \circ h$, onde h é uma mudança de parâmetros. Suponha que $\bar{K}, \bar{H}, \bar{k}_n$ representem, respectivamente, a curvatura gaussiana, a curvatura média e a função curvatura normal da nova parametrização $\bar{X}$ no ponto $\bar{q}$, e que K, H, k_n sejam as mesmas quantidades associadas à parametrização original X no ponto $h(\bar{q})$.

Como vimos na seção anterior, a função curvatura normal se transforma da seguinte forma:

$$\bar{k}_n = \pm k_n,$$

sendo o sinal positivo ou negativo conforme o tipo de mudança feita pelos parâmetros. Ou seja, o sinal é positivo se $\det J(h) > 0$ e negativo se $\det J(h) < 0$.

Isso significa que as curvaturas principais associadas a $\bar{X}$ em $\bar{q}$ coincidem com as da parametrização original, ou mudam ambas de sinal. Assim, a curvatura média,

que é a média das curvaturas principais, também pode mudar de sinal:

$$\bar{H}(\bar{q}) = \pm H(h(\bar{q})).$$

Por outro lado, como o produto de dois números que mudam simultaneamente de sinal continua o mesmo, a curvatura gaussiana permanece inalterada:

$$\bar{K}(\bar{q}) = K(h(\bar{q})).$$

Exemplo 5.7. Seja X uma superfície parametrizada regular que descreve um plano. Já vimos que, nesse caso, a curvatura normal em qualquer ponto é identicamente nula. Como a curvatura normal coincide com a curvatura na direção de um vetor tangente unitário, isso significa que todas as direções têm curvatura igual a zero.

Portanto, as curvaturas principais são $k_1 = k_2 = 0$, e qualquer vetor unitário no plano tangente é um vetor principal. Como consequência, a curvatura gaussiana e a curvatura média também são nulas em todos os pontos da superfície.

Exemplo 5.8. Vimos anteriormente que a esfera de raio $a > 0$, dada pela parametrização

$$X(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v),$$

com $u \in \mathbb{R}$ e $0 < v < \pi$, possui curvatura normal constante igual a $k_n = \frac{1}{a}$ em todos os pontos.

Isso significa que todas as direções tangentes têm a mesma curvatura. Assim, qualquer vetor unitário tangente é um vetor principal, e as curvaturas principais são

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{a}.$$

Como consequência, temos:

$$K \equiv \frac{1}{a^2} \quad \text{e} \quad H \equiv \frac{1}{a},$$

isto é, a curvatura gaussiana e a curvatura média são constantes e positivas em toda a superfície.

Proposição 5.9. (*Fórmula de Euler*) Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, $q = (u_0, v_0)$, k_1, k_2 as curvaturas principais de X em q e w_1, w_2 vetores

principais em q . Para todo vetor $w \in T_q X$ tal que $|w| = 1$, se

$$w = \cos \theta w_1 + \sin \theta w_2,$$

então

$$k_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Demonstração. Seja

$$w_1 = a_1 X_u(q) + b_1 X_v(q),$$

$$w_2 = a_2 X_u(q) + b_2 X_v(q),$$

tais que $k_1 = k_n(w_1) \leq k_n(w_2) = k_2$. Consideremos um vetor arbitrário de $T_q X$ da forma

$$w = \cos \theta w_1 + \sin \theta w_2.$$

Expandindo em termos de X_u e X_v , temos

$$w = (\cos \theta a_1 + \sin \theta a_2) X_u + (\cos \theta b_1 + \sin \theta b_2) X_v.$$

A curvatura normal em w é dada por

$$\begin{aligned} k_n(w) &= (\cos \theta a_1 + \sin \theta a_2)^2 e_0 + 2(\cos \theta a_1 + \sin \theta a_2)(\cos \theta b_1 + \sin \theta b_2) f_0 \\ &\quad + (\cos \theta b_1 + \sin \theta b_2)^2 g_0, \end{aligned}$$

onde e_0, f_0, g_0 são os coeficientes da segunda forma fundamental de X em q .

Desenvolvendo esta expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} k_n(w) &= \cos^2 \theta (a_1^2 e_0 + 2a_1 b_1 f_0 + b_1^2 g_0) + \sin^2 \theta (a_2^2 e_0 + 2a_2 b_2 f_0 + b_2^2 g_0) \\ &\quad + 2 \sin \theta \cos \theta (a_1 a_2 e_0 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) f_0 + b_1 b_2 g_0) \end{aligned}$$

E assim,

$$k_n(w) = \cos^2 \theta k_1 + \sin^2 \theta k_2 + 2A \sin \theta \cos \theta. \quad (5.5)$$

em que definimos

$$\begin{aligned} k_1 &= a_1^2 e_0 + 2a_1 b_1 f_0 + b_1^2 g_0 \\ k_2 &= a_2^2 e_0 + 2a_2 b_2 f_0 + b_2^2 g_0 \\ A &= a_1 a_2 e_0 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) f_0 + b_1 b_2 g_0. \end{aligned}$$

Vamos demonstrar que a constante A deve ser zero. Sabemos que, para todo θ , a desigualdade

$$k_n(w) \leq k_2$$

é válida. Substituindo a expressão para $k_n(w)$ (5.5), temos:

$$\cos^2 \theta k_1 + \sin^2 \theta k_2 + 2A \sin \theta \cos \theta \leq k_2 = \cos^2 \theta k_2 + \sin^2 \theta k_2.$$

Reorganizando os termos, obtemos:

$$\cos^2 \theta (k_1 - k_2) + 2A \sin \theta \cos \theta \leq 0,$$

ou equivalentemente,

$$\cos^2 \theta (k_2 - k_1) - 2A \sin \theta \cos \theta \geq 0.$$

Dividindo por $\cos^2 \theta$ (para $\theta \neq \frac{\pi}{2}$), resulta:

$$(k_2 - k_1) - 2A \tan \theta \geq 0.$$

Agora, suponha que $A \neq 0$. Se $A > 0$, podemos escolher um θ próximo, mas menor que $\frac{\pi}{2}$, tal que $2A \tan \theta > k_2 - k_1$. Isso contradiz a desigualdade acima. De forma semelhante, se $A < 0$, ao escolher θ ligeiramente maior que $\frac{\pi}{2}$, teremos novamente $2A \tan \theta > k_2 - k_1$, gerando contradição.

Portanto, a única possibilidade sem contradição é que $A = 0$.

Com isso, simplificamos a expressão para a curvatura normal:

$$k_n(w) = \cos^2 \theta k_1 + \sin^2 \theta k_2.$$

□

Na proposição a seguir, verificamos como a curvatura média $H(q)$ e a curvatura gaussiana $K(q)$ podem ser obtidas a partir dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas.

Proposição 5.10. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $q = (u_0, v_0)$, então*

$$H(q) = \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

$$K(q) = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

Demonstração. Seja k_0 uma curvatura principal em q , na direção do vetor

$$w = a_0 X_u(q) + b_0 X_v(q).$$

Então, temos o sistema

$$(e_0 - k_0 E_0) a_0 + (f_0 - k_0 F_0) b_0 = 0,$$

$$(f_0 - k_0 F_0) a_0 + (g_0 - k_0 G_0) b_0 = 0.$$

Isso decorre do fato de que k_0 é um extremo (mínimo ou máximo) da função

$$\frac{a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0}{a^2 E_0 + 2ab F_0 + b^2 G_0}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

avaliada em (a_0, b_0) . Ao calcular as derivadas parciais dessa função e igualá-las a zero, obtemos o sistema acima.

Como (a_0, b_0) é uma solução não trivial do sistema, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser zero:

$$\begin{vmatrix} e_0 - k_0 E_0 & f_0 - k_0 F_0 \\ f_0 - k_0 F_0 & g_0 - k_0 G_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Isso implica que k_0 satisfaz a equação quadrática

$$x^2 - \frac{e_0G_0 - 2f_0F_0 + E_0g_0}{E_0G_0 - F_0^2}x + \frac{e_0g_0 - f_0^2}{E_0G_0 - F_0^2} = 0.$$

Pela relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação quadrática, concluímos que

$$H(q) = \frac{1}{2} \frac{e_0G_0 - 2f_0F_0 + E_0g_0}{E_0G_0 - F_0^2} \quad \text{e} \quad K(q) = \frac{e_0g_0 - f_0^2}{E_0G_0 - F_0^2}.$$

□

Como dito anteriormente, a proposição que acabamos de demonstrar fornece uma forma prática de calcular a curvatura gaussiana $K(u, v)$ e a curvatura média $H(u, v)$ de uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$, usando os coeficientes das primeiras e segundas formas quadráticas.

Resolvendo a equação quadrática

$$x^2 - 2H(u, v)x + K(u, v) = 0,$$

obtemos as curvaturas principais k_1 e k_2 da superfície. No próximo passo, mostraremos como determinar os vetores principais correspondentes a k_1 e k_2 .

Proposição 5.11. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Um vetor não-nulo $w = a_0X_u(q) + b_0X_v(q)$ tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ é uma direção principal de curvatura principal k_0 se, e só se, a_0, b_0 satisfazem o sistema de equações*

$$\begin{aligned} (e_0 - k_0E_0)a_0 + (f_0 - k_0F_0)b_0 &= 0 \\ (f_0 - k_0F_0)a_0 + (g_0 - k_0G_0)b_0 &= 0 \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que w é uma direção principal em q , associada à curvatura principal k_0 , ou seja, $k_n(w) = k_0$. Conforme demonstrado anteriormente (Proposição 5.10), os coeficientes a_0 e b_0 satisfazem o sistema acima.

Reciprocamente, suponha que a_0, b_0 satisfazem esse sistema. Como (a_0, b_0) é uma solução não trivial, o determinante do sistema deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} e_0 - k_0E_0 & f_0 - k_0F_0 \\ f_0 - k_0F_0 & g_0 - k_0G_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pelo resultado da Proposição 5.10, isso implica que k_0 é uma curvatura principal. Para concluir que w é uma direção principal, resta verificar que $k_n(w) = k_0$.

Suponha inicialmente que $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Multiplicando a primeira equação do sistema por a_0 e a segunda por b_0 , e somando as duas, obtemos:

$$a_0^2(e_0 - k_0 E_0) + 2a_0 b_0(f_0 - k_0 F_0) + b_0^2(g_0 - k_0 G_0) = 0,$$

o que implica que

$$a_0^2 e_0 + 2a_0 b_0 f_0 + b_0^2 g_0 = k_0(a_0^2 E_0 + 2a_0 b_0 F_0 + b_0^2 G_0).$$

Portanto,

$$k_n(w) = \frac{a_0^2 e_0 + 2a_0 b_0 f_0 + b_0^2 g_0}{a_0^2 E_0 + 2a_0 b_0 F_0 + b_0^2 G_0} = k_0.$$

Nos casos em que $a_0 = 0$ ou $b_0 = 0$, o sistema se reduz a uma equação escalar, e verifica-se de forma análoga que também se tem $k_n(w) = k_0$.

Assim, w é uma direção principal correspondente à curvatura principal k_0 . $\square$

Observamos que as soluções do sistema da proposição anterior fornecem direções principais. Para obter os vetores principais, basta considerar os vetores unitários nessas direções.

Exemplo 5.12. Consideremos o parabolóide hiperbólico dado por

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculando os coeficientes das formas quadráticas no ponto $q = (0, 0)$, obtemos:

$$E(0, 0) = 1, \quad F(0, 0) = 0, \quad G(0, 0) = 1,$$

$$e(0, 0) = -2, \quad f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0) = 2.$$

Pela Proposição 5.9, segue que a curvatura média e a curvatura gaussiana em q são

$$H(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad K(0, 0) = -4.$$

As curvaturas principais são obtidas resolvendo a equação:

$$x^2 - 2H(0, 0)x + K(0, 0) = x^2 - 4 = 0,$$

cujas soluções são $k_1 = -2$ e $k_2 = 2$.

Para cada valor de k_0 , determinamos as direções principais resolvendo o sistema

$$\begin{aligned}(e_0 - k_0 E_0)a_0 + (f_0 - k_0 F_0)b_0 &= 0, \\ (f_0 - k_0 F_0)a_0 + (g_0 - k_0 G_0)b_0 &= 0.\end{aligned}$$

No caso de $k_1 = -2$, o sistema tem como solução $w_1 = X_u(0, 0) = (1, 0, 0)$, e para $k_2 = 2$, obtemos $w_2 = X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$. Esses vetores são, portanto, os vetores principais associados às curvaturas principais em q .

Entre as superfícies em $\mathbb{R}^3$, destacam-se duas classes com propriedades notáveis: aquelas com curvatura gaussiana constante e as chamadas *superfícies mínimas*, caracterizadas por curvatura média nula em todos os pontos.

Uma superfície é dita de curvatura gaussiana constante quando a função K assume um valor fixo em toda a superfície. Já uma superfície mínima é aquela para a qual $H = 0$ em todo ponto.

O plano é um exemplo simples de superfície mínima com curvatura gaussiana constante igual a zero. Outros exemplos de superfícies mínimas incluem a catenoide e o helicóide. Nesses casos, como $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$, segue que $k_1 = -k_2$, o que implica $K = k_1 k_2 \leq 0$.

5.3 Aplicações

Apresentaremos nessa seção, soluções de alguns exercícios propostos no livro Introdução à Geometria Diferencial de Ketí Tenenblat (Tenenblat, 2008), páginas 159 a 174.

1. **Obtenha a segunda forma quadrática e a função curvatura normal da superfícies**

$$X(u, v) = (a \sin v \cos u, a \sin v \sin u, a \cos v),$$

$a > 0, u \in \mathbb{R}, 0 < v < \pi$, **que descreve a esfera de raio a .**

Solução:

A superfície dada é uma parametrização da esfera de raio a . Todas as seções normais da esfera são circunferências de raio a , o que implica que a curvatura normal em qualquer direção tangente é constante e igual a $1/a$.

O vetor normal unitário, apontando para o interior da esfera, é:

$$N(u, v) = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, -\cos v)$$

Assim, a segunda forma quadrática é:

$$II_q(w) = \frac{1}{a}|w|^2, \text{ para todo } w \in T_q X$$

e a curvatura normal é

$$k_n = \frac{1}{a}$$

2. **Obtenha a segunda forma quadrática e a função curvatura normal da superfície que descreve o gráfico de uma função diferenciável**
 $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

Solução:

Para essa superfície, temos as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, f_u(u, v)), \\ X_v &= (0, 1, f_v(u, v)), \\ X_{uu} &= (0, 0, f_{uu}(u, v)), \\ X_{uv} &= (0, 0, f_{uv}(u, v)), \\ X_{vv} &= (0, 0, f_{vv}(u, v)). \end{aligned}$$

Calculando o produto vetorial $X_u \times X_v$, obtemos:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1).$$

A partir disso, encontramos a norma:

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{(-f_u)^2 + (-f_v)^2 + 1^2} = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}.$$

Logo, o vetor normal unitário é:

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

Vamos calcular agora os coeficientes da segunda forma quadrática:

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}, N \rangle = \left\langle (0, 0, f_{uu}), \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \right\rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, \\ f(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}, N \rangle = \left\langle (0, 0, f_{uv}), \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \right\rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, \\ g(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}, N \rangle = \left\langle (0, 0, f_{vv}), \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \right\rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a segunda forma quadrática:

$$\begin{aligned} II_q(w) &= a^2 e(u_0, v_0) + 2ab f(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0) \\ &= a^2 \left(\frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \right) + 2ab \left(\frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \right) + b^2 \left(\frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{a^2 f_{uu} + 2ab f_{uv} + b^2 f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular os coeficientes da primeira forma quadrática:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + f_u^2, \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle = f_u f_v, \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + f_v^2. \end{aligned}$$

Logo, a primeira forma quadrática é:

$$\begin{aligned} I_q(w) &= a^2 E + 2ab F + b^2 G \\ &= a^2(1 + f_u^2) + 2ab f_u f_v + b^2(1 + f_v^2). \end{aligned}$$

Finalmente, a curvatura normal $k_n(w)$ é dada por:

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{a^2 f_{uu} + 2ab f_{uv} + b^2 f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} \cdot [a^2(1 + f_u^2) + 2ab f_u f_v + b^2(1 + f_v^2)]}.$$

3. **Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $\bar{X} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de X pela mudança de parâmetros $h : V \rightarrow U$. Relacione os coeficiente da primeira e segunda formas quadráticas de $\bar{X}$ em $\bar{q} \in V$ com os de X em $h(\bar{q})$.**

Solução:

Seja $\bar{X} = X \circ h$ uma reparametrização de X pela mudança de variáveis $h : V \rightarrow U$. Seja um vetor arbitrário $w = a\bar{X}_{\bar{u}} + b\bar{X}_{\bar{v}}$, com $\bar{X}_{\bar{u}} = d\bar{X}_{\bar{q}}(e_1)$ e $\bar{X}_{\bar{v}} = d\bar{X}_{\bar{q}}(e_2)$.

Como $d\bar{X}_{\bar{q}} = dX_{h(\bar{q})} \circ dh_{\bar{q}}$, segue que

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\bar{q}}(w) &= \langle d\bar{X}_{\bar{q}}(w), d\bar{X}_{\bar{q}}(w) \rangle \\ &= \langle d\bar{X}_{\bar{q}}(a, b), d\bar{X}_{\bar{q}}(a, b) \rangle \\ &= \langle dX_{h(\bar{q})}dh_{\bar{q}}(a, b), dX_{h(\bar{q})}dh_{\bar{q}}(a, b) \rangle \\ &= I_{h(\bar{q})}(dh_{\bar{q}}(a, b)). \end{aligned}$$

Analogamente, a segunda forma quadrática satisfaz

$$\bar{II}_{\bar{q}}(w) = II_{h(\bar{q})}(dh_{\bar{q}}(a, b)).$$

4. **Considere a superfície**

$$X(u, v) = (f(u), g(u), v),$$

onde $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ é uma curva regular. Verifique que, para cada $q = (u, v)$, existe uma direção w , tangente a X em q , para a qual a curvatura normal se anula.

Solução:

Considere a superfície parametrizada por

$$X(u, v) = (f(u), g(u), v),$$

onde $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ é uma curva regular.

Calculamos as derivadas parciais:

$$X_u = (f'(u), g'(u), 0), \quad X_v = (0, 0, 1).$$

O vetor normal unitário é

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(g'(u), -f'(u), 0)}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}.$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{f''(u)g'(u) - g''(u)f'(u)}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \quad g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0.$$

Assim, para um vetor tangente $w = aX_u + bX_v$, as formas quadráticas valem

$$II_q(w) = a^2e, \quad I_q(w) = a^2(f'(u)^2 + g'(u)^2) + b^2.$$

Portanto, a curvatura normal é

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{a^2e}{a^2(f'(u)^2 + g'(u)^2) + b^2}.$$

Note que, ao escolher $a = 0$, isto é, na direção de X_v , obtemos

$$k_n(w) = 0.$$

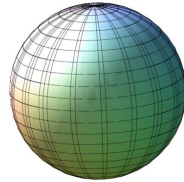
Logo, para cada ponto $q = (u, v)$, existe uma direção tangente — a direção de X_v — em que a curvatura normal se anula.

5. Considere a esfera de raio $a > 0$ descrita por

$$X(u, v) = (a \sin v \cos u, a \sin v \sin u, a \cos v),$$

$$u \in \mathbb{R}, v \in (0, \pi).$$

Figura 5.3: Esfera



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Verifique que a curvatura gaussiana é constante igual a $1/a^2$. Dê um exemplo de uma curva regular de X cuja curvatura k é constante e diferente de $1/a$.

Solução:

Considere a superfície parametrizada por

$$X(u, v) = (a \sin v \cos u, a \sin v \sin u, a \cos v),$$

com $u \in \mathbb{R}$ e $v \in (0, \pi)$, que representa uma esfera de raio $a > 0$.

Calculamos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$X_u = (-a \sin v \sin u, a \sin v \cos u, 0), \quad X_v = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, -a \sin v).$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \sin^2 v, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = a^2.$$

Derivando novamente, obtemos:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, 0), \\ X_{uv} &= (-a \cos v \sin u, a \cos v \cos u, 0), \\ X_{vv} &= (-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, -a \cos v). \end{aligned}$$

O vetor normal unitário é dado por:

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{a}(\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v).$$

A partir disso, obtemos os coeficientes da segunda forma fundamental:

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = -a \sin^2 v, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \quad g = \langle X_{vv}, N \rangle = -a.$$

Logo, a curvatura gaussiana é:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(-a \sin^2 v)(-a)}{a^4 \sin^2 v} = \frac{a^2 \sin^2 v}{a^4 \sin^2 v} = \frac{1}{a^2},$$

isto é, constante e igual a $\frac{1}{a^2}$.

Para a segunda parte da questão, consideramos o paralelo obtido ao fixar $v = v_0 \in (0, \pi)$. A curva

$$\beta(u) = X(u, v_0) = (a \sin v_0 \cos u, a \sin v_0 \sin u, a \cos v_0)$$

é uma circunferência de raio $a \sin v_0$, cuja curvatura é

$$k = \frac{1}{a \sin v_0}.$$

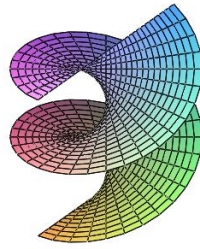
Trata-se de uma curvatura constante e, para $v_0 \neq \frac{\pi}{2}$, temos $k \neq \frac{1}{a}$, como solicitado.

6. Prove que o helicóide

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu), \quad b > 0,$$

é uma superfície mínima cuja curvatura gaussiana K satisfaz a relação $-1/b^2 \leq K < 0$.

Figura 5.4: Helicoide



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Solução:

Seja a superfície parametrizada por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu), \quad b > 0.$$

Calculamos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$X_u = (-v \sin u, v \cos u, b),$$

$$X_v = (\cos u, \sin u, 0).$$

A primeira forma fundamental é dada por:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = v^2 + b^2,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1.$$

Calculamos agora as derivadas de segunda ordem:

$$X_{uu} = (-v \cos u, -v \sin u, 0),$$

$$X_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0),$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0).$$

O vetor normal é dado por:

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Calculamos o produto vetorial:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -v \sin u & v \cos u & b \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} = (-b \sin u, b \cos u, -v),$$

e sua norma:

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{b^2 + v^2}.$$

Assim, o vetor normal unitário é:

$$N = \frac{(-b \sin u, b \cos u, -v)}{\sqrt{b^2 + v^2}}.$$

A segunda forma fundamental tem coeficientes:

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle = \left\langle (-v \cos u, -v \sin u, 0), \frac{(-b \sin u, b \cos u, -v)}{\sqrt{b^2 + v^2}} \right\rangle \\ &= \frac{vb(\cos u \sin u - \sin u \cos u)}{\sqrt{b^2 + v^2}} = 0, \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle = \left\langle (-\sin u, \cos u, 0), \frac{(-b \sin u, b \cos u, -v)}{\sqrt{b^2 + v^2}} \right\rangle \\ &= \frac{b(\sin^2 u + \cos^2 u)}{\sqrt{b^2 + v^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + v^2}}, \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = \langle (0, 0, 0), N \rangle = 0. \end{aligned}$$

A curvatura média é:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0 \cdot 1 - 2f \cdot 0 + 0 \cdot (v^2 + b^2)}{(v^2 + b^2)(1) - 0} = 0.$$

Logo, o helicóide é uma superfície mínima.

A curvatura gaussiana é:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-f^2}{(v^2 + b^2)(1)} = -\frac{b^2}{(v^2 + b^2)^2}.$$

Como $b > 0$ e $v^2 \geq 0$, temos:

$$0 < \frac{b^2}{(v^2 + b^2)^2} \leq \frac{1}{b^2},$$

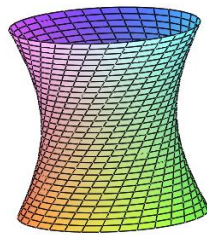
logo

$$-\frac{1}{b^2} \leq K < 0.$$

Portanto, o helicóide é uma superfície mínima cuja curvatura gaussiana satisfaz a desigualdade $-\frac{1}{b^2} \leq K < 0$.

7. **Verifique que a curvatura gaussiana de um hiperbolóide de uma folha é negativa.**

Figura 5.5: Hiperboloide de Revolução



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Solução:

Considere o hiperbolóide de uma folha parametrizado por

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, b \sinh v),$$

onde $a, b > 0$, $u \in [0, 2\pi)$ e $v \in \mathbb{R}$.

Calculamos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} X_u &= (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0), \\ X_v &= (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, b \cosh v). \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 v, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \sinh^2 v + b^2 \cosh^2 v. \end{aligned}$$

As derivadas de segunda ordem são:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-a \cosh v \cos u, -a \cosh v \sin u, 0), \\ X_{uv} &= (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, 0), \\ X_{vv} &= (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, b \sinh v). \end{aligned}$$

O vetor normal unitário é

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Calculando o produto vetorial,

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \cosh v \sin u & a \cosh v \cos u & 0 \\ a \sinh v \cos u & a \sinh v \sin u & b \cosh v \end{vmatrix} \\ &= (ba \cosh^2 v \cos u, ba \cosh^2 v \sin u, -a^2 \cosh v \sinh v). \end{aligned}$$

E sua norma é

$$\|X_u \times X_v\| = a \cosh v \sqrt{b^2 \cosh^2 v + a^2 \sinh^2 v}.$$

Assim,

$$N = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} (ba \cosh^2 v \cos u, ba \cosh^2 v \sin u, -a^2 \cosh v \sinh v).$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{-a^2 b \cosh^3 v}{\|X_u \times X_v\|}, \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{a^2 b \cosh v}{\|X_u \times X_v\|}. \end{aligned}$$

A curvatura gaussiana é dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG},$$

pois $f = 0$ e $F = 0$.

Substituindo os valores, temos

$$\begin{aligned} K &= \frac{\frac{-a^2 b \cosh^3 v}{\|X_u \times X_v\|} \cdot \frac{a^2 b \cosh v}{\|X_u \times X_v\|}}{a^2 \cosh^2 v \cdot (a^2 \sinh^2 v + b^2 \cosh^2 v)} \\ &= \frac{-a^4 b^2 \cosh^4 v}{\|X_u \times X_v\|^2}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

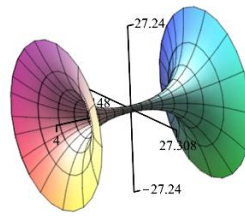
$$K < 0,$$

para todo $v \in \mathbb{R}$.

Portanto, a curvatura gaussiana do hiperbolóide de uma folha é negativa em toda a superfície.

8. Verifique que a catenóide é uma superfície mínima.

Figura 5.6: Catenoide



Fonte: Imagem elaborada pela autora

Solução:

Considere a catenóide parametrizada por

$$X(u, v) = (a \cosh(v/a) \cos u, a \cosh(v/a) \sin u, v),$$

onde $a > 0$, $u \in [0, 2\pi)$, e $v \in \mathbb{R}$.

Calculamos as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} X_u &= (-a \cosh(v/a) \sin u, a \cosh(v/a) \cos u, 0), \\ X_v &= (\sinh(v/a) \cos u, \sinh(v/a) \sin u, 1). \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2(v/a), \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \sinh^2(v/a) + 1 = \cosh^2(v/a). \end{aligned}$$

Calculamos o vetor normal unitário:

$$N = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \cdot (a \cosh(v/a) \cos u, a \cosh(v/a) \sin u, -a \sinh(v/a) \cosh(v/a))$$

As derivadas segundas necessárias são:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-a \cosh(v/a) \cos u, -a \cosh(v/a) \sin u, 0), \\ X_{uv} &= (-\sinh(v/a) \sin u, \sinh(v/a) \cos u, 0), \\ X_{vv} &= \left(\frac{1}{a} \cosh(v/a) \cos u, \frac{1}{a} \cosh(v/a) \sin u, 0\right). \end{aligned}$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle = -a^2 \cosh^2(v/a) \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = \cosh^2(v/a). \end{aligned}$$

A curvatura média H é dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE}{EG} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-a^2 \cosh^2(v/a))(\cosh^2(v/a)) + (\cosh^2(v/a))(a^2 \cosh^2(v/a))}{a^2 \cosh^4(v/a)} = 0. \end{aligned}$$

Como $H = 0$ em todos os pontos, a catenóide é uma superfície mínima.

9. Considere a superfície

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

que descreve o gráfico de uma função diferenciável $f(x, y)$. Obtenha $K(x, y)$ e $H(x, y)$.

Primeiramente, os coeficientes das primeiras e segundas formas fundamentais para a parametrização $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ são dados por

$$\begin{aligned} E &= 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2, \\ e &= \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad f = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad g = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned}$$

Substituindo esses coeficientes nas fórmulas clássicas de curvatura gaussiana e

curvatura média,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)},$$

obtemos as expressões

$$K(x, y) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

e

$$H(x, y) = \frac{(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_xf_yf_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}},$$

que foram utilizadas nas resoluções das questões a seguir.

- a) **Prove que X tem curvatura gaussiana identicamente nula se, e só se, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$.**

A curvatura gaussiana da superfície é dada por

$$K(x, y) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Como o denominador é estritamente positivo para todo (x, y) , temos que $K(x, y) \equiv 0$ se, e só se,

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0.$$

- b) **Verifique que X é uma superfície mínima se, e só se,**

$$(1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} = 0.$$

A curvatura média da superfície é dada por

$$H(x, y) = \frac{(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_xf_yf_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

Como o denominador é estritamente positivo para todo (x, y) , temos que $H(x, y) \equiv 0$ se, e só se,

$$(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_xf_yf_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx} = 0.$$

Reescrevendo os termos, obtemos:

$$(1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} = 0,$$

o que conclui a verificação.

10. **Verifique que, para toda superfície de rotação, as direções tangentes aos meridianos e paralelos são direções principais**

Solução:

Considere uma superfície de rotação parametrizada por

$$X(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u)),$$

$$a < u < b, 0 < v < 2\pi, \varphi(u) > 0.$$

Nas superfícies de rotação, os paralelos são obtidos fazendo u constante e os meridianos são obtidos fazendo v constante. Convém supor que a curva é parametrizada pelo arco.

Calculamos a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \varphi(u)^2. \end{aligned}$$

O vetor normal unitário é

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

As derivadas segundas são

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (\varphi''(u) \cos v, \varphi''(u) \sin v, \psi''(u)), \\ X_{uv} &= (-\varphi'(u) \sin v, \varphi'(u) \cos v, 0), \\ X_{vv} &= (-\varphi(u) \cos v, -\varphi(u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental, como vimos no exemplo 5.3,

são

$$e = \varphi' \psi'' - \varphi'' \psi', \quad f = 0, \quad g = \varphi \cdot \psi'.$$

Seja $w = aXu + bXv$

$$K_n(w) = \frac{a^2 e + b^2 g}{a^2 + b^2 G}$$

Calculando os pontos críticos de K_n obtemos o sistema

$$\begin{cases} (2a)e(a^2 + b^2 G) - (a^2 e + b^2 g)(2a) = 0 \\ (2b)g(a^2 + b^2 G) - (a^2 e + b^2 g)(2b)G = 0 \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} 2ab^2(eG - g) = 0 \\ 2a^2b(g - eG) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Ou seja, os vetores X_u e X_v , tangentes aos meridianos e paralelos respectivamente, correspondem às direções principais. Além disso, se $a = 0$ (paralelos),

$$K_n = \frac{g}{G} = \frac{\varphi \psi'}{\varphi^2} = \frac{\psi'}{\varphi}.$$

Se $b = 0$ (meridianos),

$$K_n = e = \varphi' \psi'' - \varphi'' \psi.$$

6 Conclusão

Este trabalho apresentou um estudo detalhado da Segunda Forma Fundamental das superfícies, destacando seu papel fundamental na descrição das propriedades extrínsecas da geometria diferencial. Por meio da caracterização formal dos coeficientes e da análise das curvaturas associadas — curvaturas principais, curvatura normal, curvatura média e curvatura de Gauss — foi possível compreender como essa estrutura permite descrever o comportamento local das superfícies imersas no espaço tridimensional.

Além disso, foram discutidas aplicações que ilustram a relevância da Segunda Forma Fundamental, demonstrando sua utilidade no cálculo de medidas geométricas e na análise das variações locais das superfícies. Com isso, evidenciou-se a importância desse objeto geométrico para além da primeira forma fundamental, ampliando o entendimento da geometria das superfícies e abrindo caminho para estudos mais profundos na área.

Dessa forma, espera-se que este trabalho contribua para o aprofundamento do conhecimento em geometria diferencial e sirva de base para estudos posteriores.

Referências

CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Linear Algebra**. Second. New Jersey: Prentice Hall, 1971.

LIMA, E. L. **Linear Algebra**. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. ISBN 9786599052835.

PICADO, J. **Apontamentos de Geometria Diferencial**. São Paulo: Universidade de Coimbra, 2006.

TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008.