

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NUMA PERSPECTIVA ALGÉBRICA

GABRIEL AMORIM FERNANDES

**GOIÂNIA - GOIÁS
2023/2**

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Gabriel Amorim Fernandes

Matrícula: 20182010940111

Título do Trabalho: Um estudo da trigonometria numa perspectiva algébrica

Autorização - Marque uma das opções

- ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
- ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data 01/01/2025 (Embargo);
- ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☒ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, Goiás, 05/12/2023.

Local Data

Documento assinado digitalmente
 **GABRIEL AMORIM FERNANDES**
Data: 06/12/2023 16:07:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Gabriel Amorim Fernandes

UM ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NUMA PERSPECTIVA ALGÉBRICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Licenciatura em Matemática do Insti-
tuto Federal de Goiás - IFG - Câmpus Goiânia,
como requisito parcial para obtenção do título de
Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Professor Dr. Nilton Cezar Ferreira

GOIÂNIA - GOIÁS

2023/2

F363e Fernandes, Gabriel Amorim.
Um estudo da trigonometria numa perspectiva algébrica / Gabriel Amorim Fernandes. –
Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023.
41 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Matemática - trigonometria. 2. Matemática – algébra. I. Ferreira, Nilton Cezar
(orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.
III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

UM ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NUMA PERSPECTIVA ALGÉBRICA

por

GABRIEL AMORIM FERNANDES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 22 de novembro de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Me. João Batista de Paula Abreu (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Me. Uender Barbosa de Souza (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Joao Batista de Paula Abreu, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 22/11/2023 14:23:59.
- Uender Barbosa de Souza, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 22/11/2023 14:23:55.
- Nilton Cezar Ferreira, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 22/11/2023 14:23:04.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 07/11/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 473068

Código de Autenticação: 93bf27e1b4



AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Dr. Nilton Cezar Ferreira, pela sua orientação e paciência ao longo de todo o processo de pesquisa.

Agradeço à minha família, em especial aos meus tios, Adriano e Ivanilde, por todo o apoio durante a graduação.

Por fim, agradeço aos amigos e colegas que estiveram comigo nessa longa jornada.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo abrangente da trigonometria sob uma perspectiva algébrica, explorando tanto as definições tradicionais quanto as tentativas de compreensão da trigonometria por meio de objetos algébricos. Foram abordados aqui os fundamentos da trigonometria usual no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico desde as razões trigonométricas até as funções trigonométricas. A partir disso, iniciou-se uma busca por uma nova compreensão da trigonometria. Nesta busca foi evidenciada a necessidade de construir um parâmetro e utilizou-se para isso a área de um setor circular e medidas de segmento de retas por meio da exploração de semelhança entre triângulos. Por fim, utilizaram-se séries de potências para a construção algébrica do cosseno e do seno na trigonometria convencional. A pesquisa demonstrou que a perspectiva algébrica pode enriquecer a compreensão dos conceitos trigonométricos, conectando aspectos tradicionais com abordagens inovadoras. A hipótese inicial, que propunha que a abordagem algébrica poderia oferecer novas formas de compreender e aplicar a trigonometria, foi confirmada ao demonstrar a possibilidade de construir conceitos trigonométricos utilizando ferramentas algébricas.

Palavras-chave: Álgebra; Geometria; Série de potências; Relações trigonométricas.

ABSTRACT

This work presents a comprehensive examination of trigonometry from an algebraic standpoint, delving into both conventional definitions and efforts to interpret trigonometry through algebraic entities. It covers the fundamentals of conventional trigonometry in the context of right triangles and the trigonometric circle, encompassing topics ranging from trigonometric ratios to trigonometric functions. From this, a quest for a new understanding of trigonometry began. The investigation utilized measurements of the area of a circular sector and measurements of line segments through the exploration of triangle similarity. Finally, power series were employed for the algebraic construction of cosine and sine in traditional trigonometry. The research has illustrated that adopting an algebraic perspective can enhance the comprehension of trigonometric concepts, establishing connections between traditional elements and innovative approaches. The initial hypothesis, asserting that this algebraic approach could offer novel insights into understanding and applying trigonometry, was validated by demonstrating the possibility of constructing trigonometry through the utilization of algebraic concepts.

Keywords: Algebra; Geometry; Power series; Trigonometric relations.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Triângulo retângulo	15
1.2	Interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras	16
1.3	Triângulos retângulos formados por semiretas	17
1.4	Diagonal de um quadrado	18
1.5	Triângulo equilátero	19
1.6	Circunferência trigonométrica em graus	20
1.7	Arco em radiano	21
1.8	Circunferência trigonométrica em radianos	22
1.9	Seno e cosseno de um arco trigonométrico	23
1.10	Tangente de um arco trigonométrico	24
1.11	Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$	27
1.12	Gráfico da função $g(x) = \text{cos}(x)$	28
2.1	Área do segmento circular A	30
2.2	Interpretação geométrica	31
2.3	Gráfico da função $a(t)$	33
2.4	Gráfico da função $b(t)$	33

LISTA DE TABELAS

1.1	Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis	19
1.2	Relações trigonométricas	26
2.1	Tabela Trigonométrica de parâmetros associados aos ângulos notáveis	34

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 A TRIGONOMETRIA USUAL	15
1.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo	15
1.1.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	16
1.1.2 Razões Trigonométricas de Ângulos Notáveis	17
1.2 Circunferência Trigonométrica	20
1.2.1 Construção da Circunferência Trigonométrica	20
1.2.2 Unidade de Medida de Arco e de Ângulo: Radiano	21
1.2.3 Razões Trigonométricas de um Arco Trigonométrico	22
1.2.4 Razões Trigonométricas Inversas	25
1.2.5 Relação Fundamental da Trigonometria e Outras Identidades	25
1.3 Funções Trigonométricas	26
1.3.1 Função Seno	27
1.3.2 Função Cosseno	27
1.3.3 Derivadas das Funções Seno e Cosseno	28
2 UMA NOVA TRIGONOMETRIA: ABORDAGENS, TENTATIVAS E OBSTÁCULOS	29
2.1 Área de uma Região de um Setor Circular	30
2.2 Semelhança Entre Triângulos	31
2.2.1 Funções $a(t)$ e $b(t)$	32
2.2.2 Parâmetros associados aos ângulos notáveis	34
2.2.3 Relação Fundamental da Trigonometria e Outras identidades	35
3 A TRIGONOMETRIA COMO SÉRIES DE POTÊNCIAS	36
3.1 Convergência de $c(x)$ e $s(x)$	36
3.2 Definindo as Funções $c(x)$ e $s(x)$	37
3.3 Relação Fundamental da Trigonometria	38
3.4 Fórmulas de Adição	38

3.5 Periodicidade	39
CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42

INTRODUÇÃO

A trigonometria é uma disciplina matemática fundamental que estuda as relações entre os ângulos e os lados dos triângulos, bem como as funções trigonométricas. Historicamente, essa área da matemática desempenhou um papel crucial em várias aplicações científicas e práticas, desde a medição de distâncias astronômicas até a análise de movimentos oscilatórios. No entanto, ao longo do tempo, matemáticos têm explorado abordagens alternativas para entender os conceitos trigonométricos, especialmente por meio de métodos algébricos.

Este trabalho tem como objetivo principal realizar um estudo da trigonometria sob uma perspectiva algébrica, visando enriquecer a compreensão tradicional desta disciplina. Este estudo engloba tanto a trigonometria tradicional, que chamaremos de "trigonometria usual", quanto as abordagens alternativas e inovadoras e suas potenciais contribuições para a compreensão da matéria. Os objetivos específicos deste trabalho incluem explorar a trigonometria no triângulo retângulo, analisar a circunferência trigonométrica (incluindo sua construção e a unidade de medida em radianos), investigar as funções trigonométricas e explorar novas abordagens e tentativas de compreender a trigonometria a partir de métodos algébricos, além de construir identidades trigonométricas a partir da álgebra. Essa abordagem, ao traduzir conceitos trigonométricos para a linguagem algébrica, permite-nos estabelecer relações fundamentais, como a soma de ângulos, e revelar padrões subjacentes que podem não ser imediatamente evidentes na formulação trigonométrica original.

A problematização central deste estudo reside na busca por construir uma trigonometria alternativa por meio de uma perspectiva algébrica. A hipótese subjacente a esta pesquisa é que uma perspectiva algébrica da trigonometria pode proporcionar novas formas de compreensão e aplicação desses conceitos matemáticos, tornando-se uma ferramenta valiosa para estudantes, professores e pesquisadores da matemática. Este trabalho se estrutura em três seções principais, conforme detalhado no sumário, para abordar de forma mais abrangente os objetivos estabelecidos e contribuir para o avanço do conhecimento na área da trigonometria.

Esperamos que este estudo beneficie estudantes, professores e pesquisadores de diversas maneiras. Para estudantes, aprofundando sua compreensão da trigonometria e suas aplicações matemáticas, proporcionando uma base sólida para o avanço em disciplinas mais avançadas. Para professores, oferecendo recursos robustos que podem enriquecer o processo de ensino, tornando

as aulas mais envolventes e informativas. E para pesquisadores, abrindo possibilidades de novas investigações e descobertas, contribuindo assim para o desenvolvimento contínuo da matemática. Desejamos que esse estudo não apenas forneça conhecimento, mas também inspire a busca pelo saber, promovendo avanços significativos em diversas áreas da matemática.

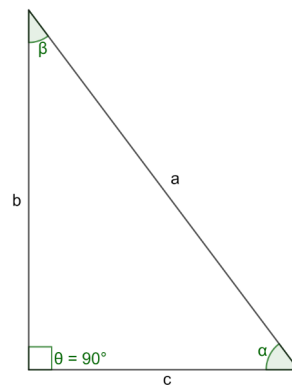
1 A TRIGONOMETRIA USUAL

Para reescrever a trigonometria usual em termos puramente algébricos, sem depender de objetos geométricos, é fundamental conhecer seus elementos, entender seus conceitos e suas definições. Nesse processo, basearemos nossa compreensão na estruturação e nas abordagens apresentadas por [Iezzi \(2016\)](#), [Leonardo \(2016\)](#), [Paiva \(2013\)](#) e [Santos e Maymone \(2018\)](#).

1.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Na geometria euclidiana, um triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto. Na Figura 1.1, ilustramos um triângulo retângulo com os ângulos *alpha* (α), *beta* (β) e *theta* (θ), sendo θ o ângulo reto, que possui um valor de 90 graus.

Figura 1.1: Triângulo retângulo



Fonte: elaborada pelo autor

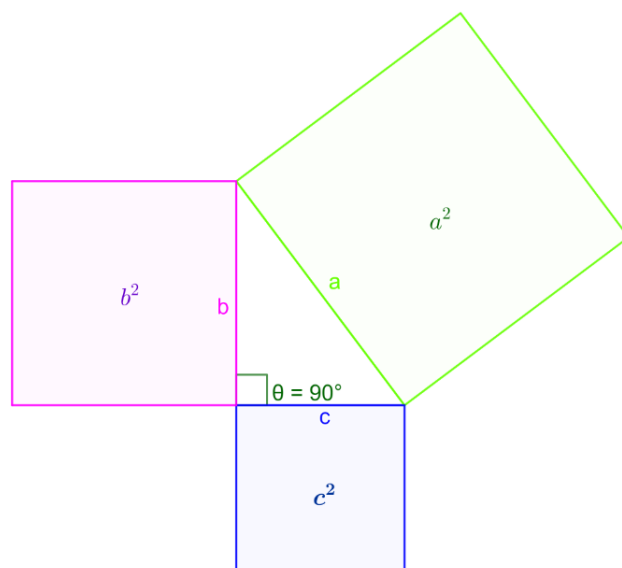
Para melhor explorar as características de um triângulo retângulo, atribuímos algumas denominações aos seus lados. Ainda com base na Figura 1.1, chamamos o lado oposto ao ângulo reto θ de hipotenusa a , o lado oposto ao ângulo α de cateto oposto b , e o lado adjacente ao ângulo α de cateto adjacente c .

Esses lados podem ser relacionados por meio da propriedade da área de um quadrado formado pelos lados do triângulo. Nesse caso, podemos expressar a relação entre os lados a (hipotenusa) e b e c (catetos) da seguinte forma: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (1.1)$$

Essa relação é conhecida como o Teorema de Pitágoras, e uma representação geométrica dela pode ser observada na Figura 1.2.

Figura 1.2: Interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras



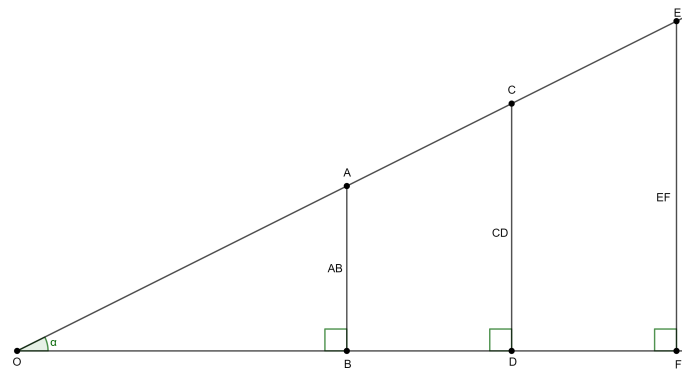
Fonte: elaborada pelo autor

A trigonometria no triângulo retângulo estabelece relações entre os ângulos agudos do triângulo retângulo e seus lados. Essas relações são denominadas razões trigonométricas, e serão apresentadas nos subtópicos a seguir.

1.1.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

A Figura 1.3 ilustra a possibilidade de construir infinitos triângulos retângulos a partir de duas semirretas não paralelas e não coincidentes, de modo que todos esses triângulos compartilham o mesmo ângulo agudo de medida α .

Figura 1.3: Triângulos retângulos formados por semiretas



Fonte: elaborada pelo autor

Nos triângulos $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ e $\triangle OEF$ da Figura 1.3, usando a propriedade da semelhança de triângulos, obtemos as seguintes razões proporcionais:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = r_1$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = r_2$$

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = r_3$$

Podemos nomear as razões proporcionais r_1 , r_2 e r_3 como as razões trigonométricas chamadas, respectivamente, *seno* de α ($\text{sen}(\alpha)$), *coseno* de α ($\text{cos}(\alpha)$) e *tangente* de α ($\text{tg}(\alpha)$). Isso significa que essas razões relacionam os lados de qualquer triângulo retângulo (Figura 1.1) da seguinte maneira:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

1.1.2 Razões Trigonométricas de Ângulos Notáveis

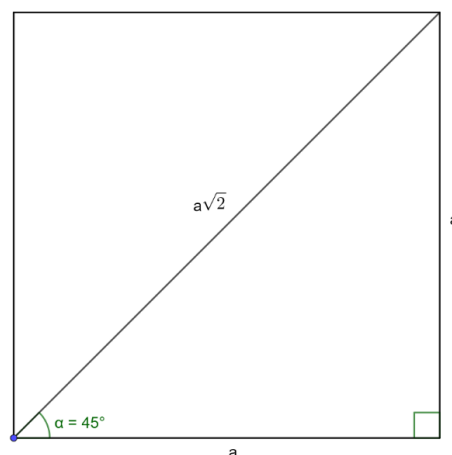
Para facilitar o estudo da trigonometria, é útil conhecer os chamados *Ângulos notáveis*, que são ângulos agudos com medidas de 30° , 45° e 60° . Esses ângulos tornam os cálculos das razões

trigonométricas mais simples.

Ângulo de 45°

Pelo Teorema de Pitágoras (1.1), podemos facilmente demonstrar que a medida de cada diagonal de um quadrado com lado a é $a\sqrt{2}$. Além disso, essa diagonal atua como uma bissetriz interna dos ângulos internos do quadrado, dividindo cada ângulo de 90° em dois ângulos 45° .

Figura 1.4: Diagonal de um quadrado



Fonte: elaborada pelo autor

Quando o ângulo mede 45° , obtemos as seguintes razões trigonométricas:

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

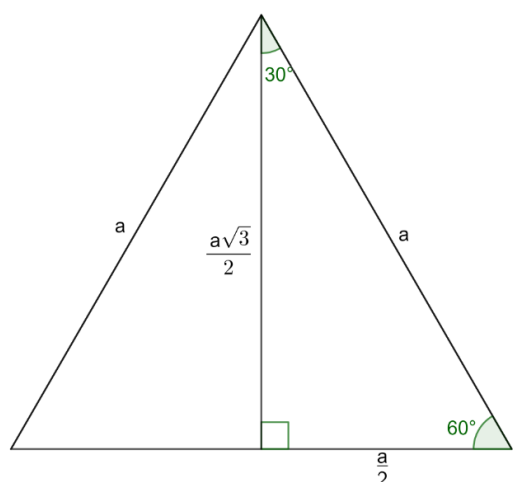
$$\text{cos}(45^\circ) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}(45^\circ) = \frac{\text{sen}(45^\circ)}{\text{cos}(45^\circ)} = \frac{a}{a} = 1$$

Ângulos de 30° e 60°

Em um triângulo equilátero de lado a , onde cada ângulo mede 60° , o Teorema de Pitágoras (1.1) nos permite facilmente mostrar que a medida de qualquer uma de suas alturas é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Nesse caso, a altura age simultaneamente como a bissetriz interna do vértice e a mediana do lado oposto a esse mesmo vértice, resultando em um ângulo interno de 30° e um lado da base com medida $\frac{a}{2}$, conforme ilustrado na Figura 1.5.

Figura 1.5: Triângulo equilátero



Fonte: elaborada pelo autor

Desta forma, podemos obter as razões trigonométrica para o ângulo de 30° , por:

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}, \quad \text{cos}(30^\circ) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{e} \quad \text{tg}(30^\circ) = \frac{\text{sen}(30^\circ)}{\text{cos}(30^\circ)} = \frac{\frac{\frac{a}{2}}{a}}{\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para o ângulo de 60° , temos:

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{cos}(60^\circ) = \frac{1}{2} \quad \text{tg}(60^\circ) = \frac{\text{sen}(60^\circ)}{\text{cos}(60^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Com as razões trigonométricas dos ângulos com medidas de 30° , 45° e 60° , podemos construir uma tabela, denominada Tabela Trigonométrica dos ângulos notáveis (Tabela 1.1).

Tabela 1.1: Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: elaborada pelo autor

Agora, respondemos às seguintes perguntas: podemos determinar as razões trigonométricas para outros ângulos? É possível encontrar os valores das razões trigonométricas dos ângulos obtusos e de outros ângulos? A resposta é sim, podemos. Para facilitar o raciocínio, construiremos uma circunferência denominada Circunferência Trigonométrica, que será abordada no próximo tópico.

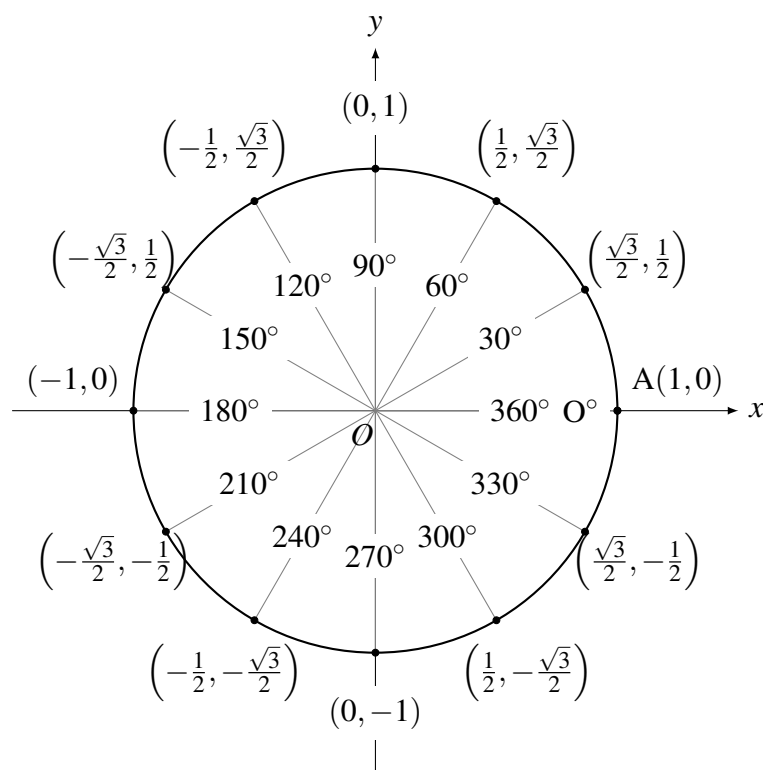
1.2 Circunferência Trigonométrica

A trigonometria desenvolvida no triângulo retângulo se limita aos ângulos compreendidos entre 0 e 90° . Para ampliar a compreensão da trigonometria para outros ângulos, ou seja, os maiores ou iguais a 90° e os menores ou iguais a zero, é preciso fazer o uso de outro objeto geométrico, no caso, uma circunferência denominada circunferência trigonométrica.

1.2.1 Construção da Circunferência Trigonométrica

Conforme vimos anteriormente, as razões trigonométricas (*seno*, *coseno* e *tangente*) de um ângulo agudo em um triângulo retângulo não dependem dos lados do triângulo, mas sim da medida dos ângulos. No entanto, para entender as razões trigonométricas em uma circunferência trigonométrica, primeiro precisamos construí-la. Começamos considerando uma circunferência de raio $r = 1$, cujo centro O coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas, como mostrado na Figura 1.6.

Figura 1.6: Circunferência trigonométrica em graus



Fonte: elaborada pelo autor

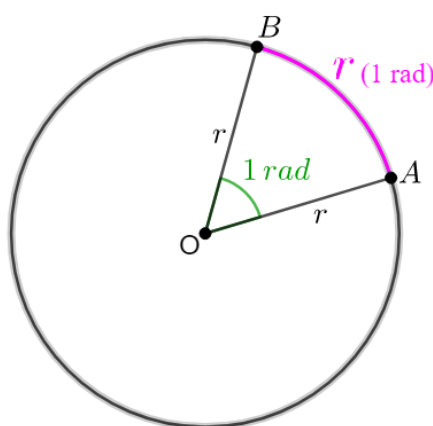
Define-se a origem de todos os arcos na circunferência como o ponto $A(1,0)$. Quando a medida de um arco é no sentido horário, é considerada negativa ($-$), e quando a medida é no

sentido anti-horário, é positiva (+). A circunferência trigonométrica também é conhecida como *Círculo Unitário*.

1.2.2 Unidade de Medida de Arco e de Ângulo: Radiano

Além de medir ângulos em graus ($^{\circ}$), também podemos medir essa grandeza em *radianos* (rad). Um radiano (1 rad) é definido como a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio (r), que é geralmente definido como a distância do centro da circunferência a qualquer ponto nela contido, como ilustrado na Figura 1.7. Assim, o ângulo central que subentende um arco de x rad tem medida de x rad.

Figura 1.7: Arco em radiano



Fonte: elaborada pelo autor

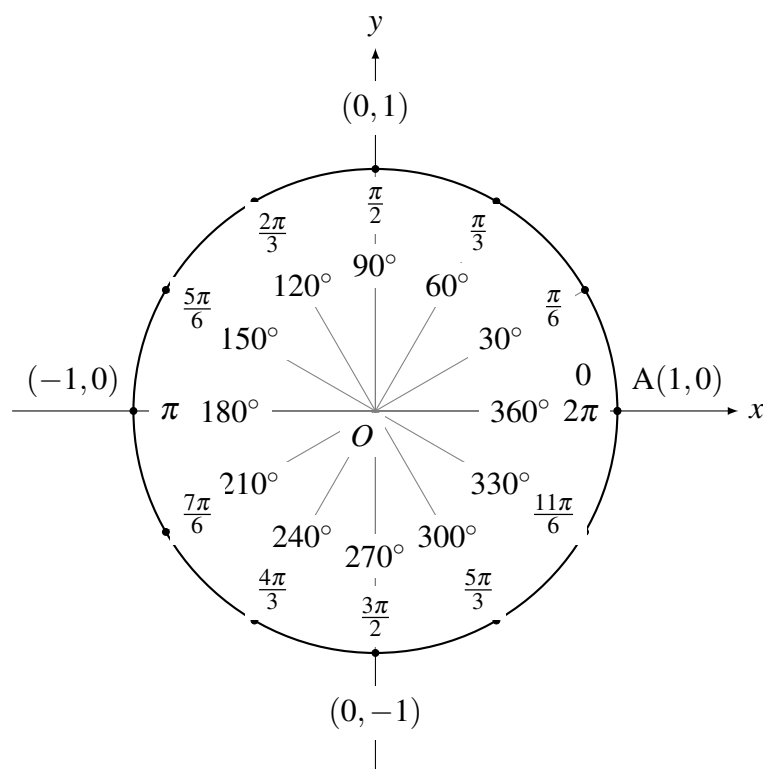
Sabendo que 360 graus é a *medida do arco* que completa uma volta em uma circunferência e que o comprimento desse arco é igual a $2\pi r$ (em que r é o raio da circunferência), podemos determinar sua equivalência em radianos usando a regra de três, de acordo com a proporcionalidade:

medida do arco (rad)	Comprimento do arco
1 rad	r
x	$2\pi r$

$$\frac{1 \text{ rad}}{x} = \frac{r}{2\pi r} \Rightarrow xr = 2\pi r \text{ rad} \Rightarrow x = \frac{2\pi r \text{ rad}}{r} \Rightarrow x = 2\pi \text{ rad}$$

Portanto, $x = 2\pi$ rad é a medida do arco que completa uma volta completa na circunferência, o que equivale a um ângulo de 360° , como ilustrado na Figura 1.8.

Figura 1.8: Circunferência trigonométrica em radianos



Fonte: elaborada pelo autor

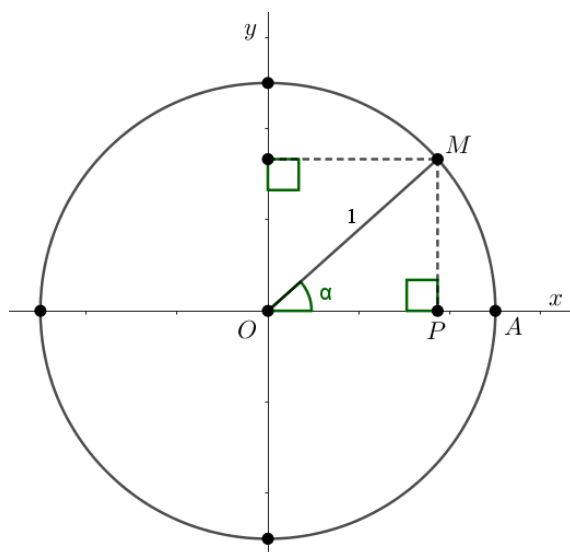
1.2.3 Razões Trigonômétricas de um Arco Trigonômétrico

Neste tópico, iremos estabelecer as razões trigonométricas de maneira semelhante ao que fizemos no triângulo retângulo, porém estendendo para outros ângulos.

1.2.3.1 Seno e Cosseno de um Arco Trigonômétrico

Para definir as razões trigonométricas em uma circunferência trigonométrica, usaremos a definição de *seno* e *cosseno* de um ângulo agudo em um triângulo retângulo. Para isso, considere um ponto M em uma circunferência trigonométrica, onde OM é o raio dessa circunferência, ou seja, $OM = 1$. Além disso, considere um arco $\widehat{AM}$ com medida α , conforme ilustrado na Figura 1.9.

Figura 1.9: Seno e cosseno de um arco trigonométrico



Fonte: elaborada pelo autor

Dessa maneira, determinamos as razões *seno* e *cosseno* por:

$$\cos(\alpha) = \frac{OP}{1} = OP \quad \& \quad \sin(\alpha) = \frac{PM}{1} = PM$$

Ao projetar os catetos do triângulo $\triangle OPM$ nos eixos cartesianos, podemos observar que $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ são, respectivamente, a coordenada y e x do ponto M . Na circunferência trigonométrica, chamamos o eixo das ordenadas (y) de eixo dos *senos* e o eixo das abscissas (x) de eixo dos *cosenos*.

É importante notar que os valores de *seno* e *cosseno* para um ângulo α estão limitados pelo raio da circunferência, que, nesse caso, tem medida 1. Considerando essa limitação e a possibilidade deles serem tanto positivos, quanto negativos, podemos concluir que:

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$$

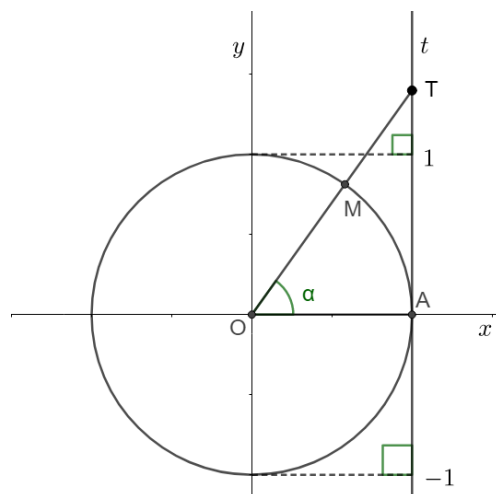
Como o *seno* e o *cosseno* de um arco trigonométrico podem ser representados pelas coordenadas de um ponto (x, y) na circunferência trigonométrica em um plano cartesiano, o sinal (positivo ou negativo) dessas razões trigonométricas está relacionado ao sinal da ordenada e/ou da abscissa desse ponto. Para entender essa relação, dividimos a circunferência trigonométrica em quatro partes, conhecidas como *quadrantes*, e observamos cada ponto dessa circunferência, considerando o sentido anti-horário. O 1º *quadrante* é o conjunto de todos os pontos em que tanto a ordenada quanto a abscissa são positivos (0° a 90°).

Dessa forma, o *seno* é positivo quando a ordenada (eixo y) é positiva, o que ocorre no 1° e 2° quadrante, e é negativo quando a ordenada assume valores negativos, o que acontece no 3° e 4° quadrante. Por outro lado, o *coseno* é positivo quando a abscissa (x) é positiva, o que ocorre no 1° e 4° quadrante, e é negativo quando a abscissa assume valores negativos, o que acontece no 2° e 3° quadrante.

1.2.3.2 Tangente de um Arco Trigonômétrico

De maneira análoga ao que fizemos para *seno* e *coseno*, podemos definir a *tangente* de um arco trigonométrico com base nas definições de *tangente* de um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Para isso, consideramos novamente uma circunferência trigonométrica. Tomamos um arco $\widehat{AM}$ com medida α e uma reta t paralela ao eixo das ordenadas, que passa pelo ponto A , como na Figura 1.10.

Figura 1.10: Tangente de um arco trigonométrico



Fonte: elaborada pelo autor

Pela definição de *tangente* e pela Figura 1.10, temos:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT \rightarrow \text{tg}(\alpha) = AT$$

Dessa forma, a *tangente* de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α é a ordenada (ponto T , na Figura 1.10) do ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{OM}$ com a reta t , também chamada de *eixo das tangentes*.

Diferentemente do *coseno* e *seno*, a *tangente* de um arco trigonométrico não possui restrições em relação ao seu valor, em outras palavras, a *tangente* pode assumir qualquer valor real.

No entanto, se a abscissa for zero, ou seja, se o valor do *coseno* for zero, o valor da *tangente* será indeterminado.

O sinal da *tangente* dependerá do quadrante em que a ordenada do ponto T se encontra, ou seja, em qual quadrante a semirreta $\overrightarrow{OM}$ intercepta o eixo das *tangentes*. Se a interceptação estiver no 1º ou 3º quadrante, a *tangente* terá um sinal positivo; se estiver no 2º ou 4º quadrante, a *tangente* terá um sinal negativo.

1.2.4 Razões Trigonométricas Inversas

Definimos em um triângulo retângulo (Figura 1.1) as razões trigonométricas *seno* ($\text{sen}(\alpha)$), *coseno* ($\text{cos}(\alpha)$) e *tangente* ($\text{tg}(\alpha)$) de um ângulo agudo α . Além disso, também podemos definir as suas razões inversas: a *cossecante* ($\text{cossec}(\alpha)$), a *secante* ($\text{sec}(\alpha)$) e a *cotangente* ($\text{cotg}(\alpha)$) para esse mesmo ângulo agudo α .

Como o próprio nome já diz, as razões trigonométricas inversas são as inversas das razões trigonométricas, ou seja,

$$\begin{aligned}\text{cossec}(\alpha) &= \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{a}{b} \\ \text{sec}(\alpha) &= \frac{1}{\text{cos}(\alpha)} = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{a}{c} \\ \text{cotg}(\alpha) &= \frac{1}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{\text{cos}(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{c}{b}\end{aligned}$$

Com o conhecimento das razões trigonométricas e suas inversas, podemos estabelecer a existência de algumas propriedades chamadas de identidades trigonométricas. Neste trabalho, no entanto, apresentaremos a identidade conhecida como a Relação Fundamental da Trigonometria e as fórmulas de adição.

1.2.5 Relação Fundamental da Trigonometria e Outras Identidades

Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência trigonométrica, como o $\triangle OPM$ na Figura 1.9, em que a hipotenusa é o raio da circunferência e, consequentemente, mede 1 unidade. Sabemos que $OP = \text{cos}(\alpha)$ e $PM = \text{sen}(\alpha)$ aplicando o Teorema de Pitágoras (1.1), obtemos:

$$OP^2 + PM^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$$

$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$ é conhecida como a *Relação fundamental da Trigonometria*, e através dela, podemos derivar várias outras identidades trigonométricas. No entanto, uma vez que o foco deste trabalho está em outro aspecto, não apresentaremos as demonstrações dessas identidades.

Em vez disso, destacaremos algumas delas a seguir, e na Tabela 1.2, listaremos essas e outras identidades.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \phi) &= \sin(\alpha)\cos(\phi) + \cos(\alpha)\sin(\phi), \\ \sin(\alpha - \phi) &= \sin(\alpha)\cos(\phi) - \cos(\alpha)\sin(\phi), \\ \cos(\alpha + \phi) &= \cos(\alpha)\cos(\phi) - \sin(\alpha)\sin(\phi), \\ \cos(\alpha - \phi) &= \cos(\alpha)\cos(\phi) + \sin(\alpha)\sin(\phi).\end{aligned}$$

Tabela 1.2: Relações trigonométricas

1) $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$	2) $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
3) $\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$	4) $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$
5) $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}$	6) $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
7) $1 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$	8) $1 + \operatorname{cotg}^2(\alpha) = \operatorname{cosec}^2(\alpha)$
9) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	10) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
11) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$	12) $\sin(\alpha \pm \phi) = \sin(\alpha)\cos(\phi) \pm \cos(\alpha)\sin(\phi)$
13) $\cos(\alpha \pm \phi) = \cos(\alpha)\cos(\phi) \mp \sin(\alpha)\sin(\phi)$	14) $\operatorname{tg}(\alpha + \phi) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\phi)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\phi)}$
15) $\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 + \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$	16) $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$
17) $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$	18) $ \sin(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$
19) $ \cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$	20) $\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$
21) $\sin(\alpha)\sin(\phi) = \frac{\cos(\alpha - \phi) - \cos(\alpha + \phi)}{2}$	22) $\cos(\alpha)\cos(\phi) = \frac{\cos(\alpha - \phi) + \cos(\alpha + \phi)}{2}$
23) $\sin(\alpha)\cos(\phi) = \frac{\sin(\alpha - \phi) + \sin(\alpha + \phi)}{2}$	24) $\cos(\alpha)\sin(\phi) = \frac{\sin(\alpha + \phi) - \sin(\alpha - \phi)}{2}$
25) $1 \pm \sin(\alpha) = 1 \pm \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$	26) $\sin(\alpha) \pm \sin(\phi) = 2\sin(\frac{\alpha \pm \phi}{2})\cos(\frac{\alpha \mp \phi}{2})$
27) $\cos(\alpha) + \cos(\phi) = 2\cos(\frac{\alpha + \phi}{2})\cos(\frac{\alpha - \phi}{2})$	28) $\cos(\alpha) - \cos(\phi) = -2\sin(\frac{\alpha + \phi}{2})\sin(\frac{\alpha - \phi}{2})$

Fonte: adaptado de Universidade Federal de Pelotas, 2013

1.3 Funções Trigonométricas

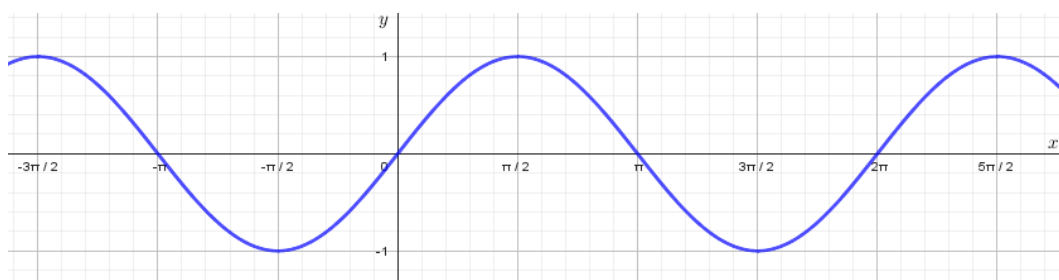
Ao longo do trabalho, tentaremos definir funções e, para fins de comparação, é importante compreender as funções trigonométricas $\sin(x)$ e $\cos(x)$, juntamente com algumas de suas propriedades.

1.3.1 Função Seno

Definimos a função *seno* como uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pela lei de formação dada por $f(x) = \text{sen}(x)$. Como não há restrições em $\text{sen}(x)$, o domínio de f é $D_f = \mathbb{R}$. Conforme vimos anteriormente, $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, o que significa que a imagem de f é $[-1, 1]$, ou seja, $\text{Im}_f \subset [-1, 1]$. Além disso, observamos que $\text{sen}(x) > 0$, para $(x, \text{sen}(x))$ nos 1º e 2º quadrantes, enquanto $\text{sen}(x) < 0$, para $(x, \text{sen}(x))$ nos 3º e 4º quadrantes. Portanto, $f(x) > 0$ nos primeiros dois quadrantes e $f(x) < 0$ nos dois últimos quadrantes.

Também podemos representar o gráfico de $f(x)$, conforme mostrado na Figura 1.11.

Figura 1.11: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$



Fonte: elaborada pelo autor

Podemos observar que a função é periódica, com um período de 2π e deduzir da circunferência trigonométrica, as seguintes relações:

$$\text{sen}(0) = 0, \text{ e}$$

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$

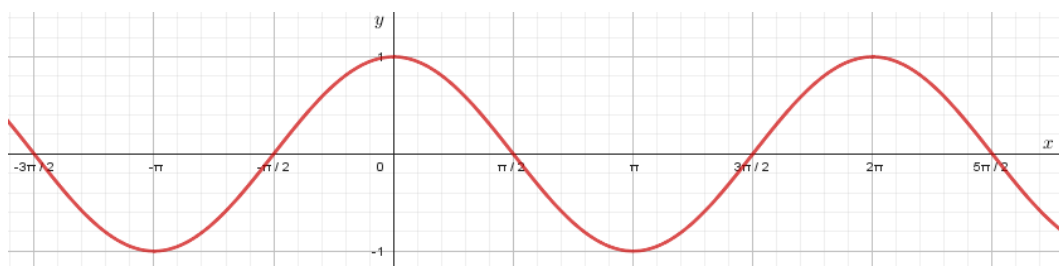
1.3.2 Função Cosseno

De maneira análoga, podemos definir uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com a lei de formação $g(x) = \cos(x)$ e o domínio de g dado por $D_g = \mathbb{R}$. Como vimos anteriormente, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, o que significa que a imagem de g é $[-1, 1]$, isto é, $\text{Im}_g = [-1, 1]$.

Também sabemos que $\cos(x) > 0$, para $(x, \cos(x))$ no 1º e 4º quadrante, e $\cos(x) < 0$, para $(x, \cos(x))$ no 2º e 3º quadrante. Portanto, $g(x) > 0$ no primeiro e quarto quadrante, enquanto $g(x) < 0$ no segundo e terceiro quadrante.

Podemos ver a representação do gráfico de $g(x)$ na 1.12.

Figura 1.12: Gráfico da função $g(x) = \cos(x)$



Fonte: elaborada pelo autor

Pelo gráfico de $g(x)$, na Figura 1.12, podemos ver que sua periodiciade também é de 2π . Temos ainda, pela circunferência trigonométrica:

$$\cos(0) = 1 \text{ e}$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

1.3.3 Derivadas das Funções Seno e Cosseno

[Guidorizzi \(2011\)](#) prova que as derivadas de $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são, respectivamente, $\cos(x)$ e $-\sin(x)$, ou seja:

$$\sin'(x) = \cos(x), \text{ e}$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

Neste capítulo, apresentamos as razões trigonométricas e algumas de suas propriedades com o objetivo de, ao longo do trabalho, comparar tais identidades com os resultados apresentados nos capítulos subsequentes. Com isso em mente, buscaremos desenvolver uma trigonometria algébrica no próximo capítulo.

2 UMA NOVA TRIGONOMETRIA: ABORDAGENS, TENTATIVAS E OBSTÁCULOS

Neste capítulo, apresentamos nossa busca pelo desenvolvimento da Trigonometria algébrica. Inicialmente consideramos dois números reais a e b tais que

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (2.1)$$

A partir disso, resolvemos nomear a como sendo *coseno* ($\cos$) e b como sendo *seno* ($\sin$), ou seja, $a = \cos$ e $b = \sin$. E, com isso, alguns conceitos e propriedades da trigonometria usual podem ser construídos algebricamente. Por exemplo, é possível definir *tangente* ($\tan$), *secante* ($\sec$), *cossecante* ($\csc$) e *cotangente* ($\cot$), por: $\tan = \frac{\sin}{\cos} = \frac{b}{a}$, para $a \neq 0$; $\sec = \frac{1}{\cos} = \frac{1}{a}$, para $a \neq 0$; $\csc = \frac{1}{\sin} = \frac{1}{b}$, para $b \neq 0$; e $\cot = \frac{\cos}{\sin} = \frac{a}{b}$, para $b \neq 0$. Ainda, observa-se que a relação fundamental $\sin^2 + \cos^2 = 1$ já foi estabelecida por $a^2 + b^2 = 1$. Outras relações, decorrentes da fundamental, são construídas naturalmente, como $1 + \tan^2 = \sec^2$ e $\cot^2 + 1 = \csc^2$, bastando dividir todos os termos da relação fundamental por a^2 ou por b^2 .

Apesar de conseguirmos obter algum sucesso na construção da nova trigonometria, ficamos limitados pela falta de uma relação entre os entes trigonométricos (a e b) e um determinado valor fixado, como ocorre na trigonometria usual, em que tem-se uma relação entre as razões trigonométricas e o ângulo. Assim, nosso próximo passo foi tentar estabelecer essa relação, ou seja, buscar um parâmetro para os entes trigonométricos. Observamos que bastava focar em *seno* e *coseno*, pois os outros elementos podem ser escritos em função desses dois.

Em suma, era preciso ter:

$$a = a(x) \text{ ou } \cos = \cos(x)$$

$$b = b(x) \text{ ou } \sin = \sin(x)$$

$$\text{ou ainda, } a = \cos(x) \text{ e } b = \sin(x), \text{ em que } x \in \mathbb{R}$$

Desta forma, neste capítulo, exploramos as abordagens, tentativas e obstáculos que surgiram ao buscar uma relação entre os números reais a e b com outro número real x .

As abordagens surgiram durante o processo de pesquisa, através de discussões com o professor orientador e outros professores acerca do tema. Uma dessas abordagens visou relacionar os números a e b com a área de um setor circular, de forma que a área fosse uma função de a e/ou de

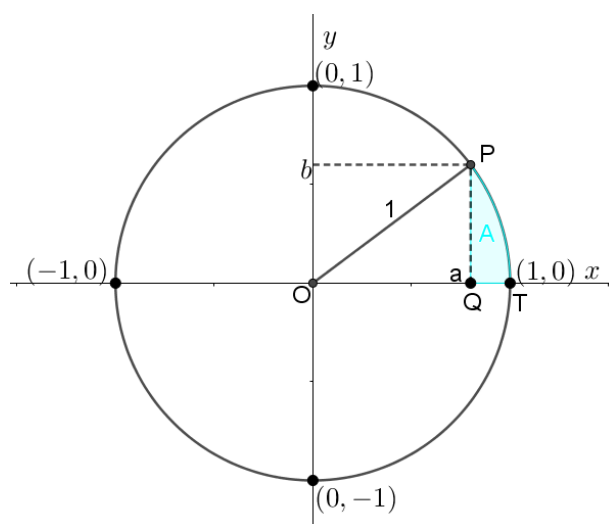
b . Outra tentativa buscou relacionar esses números com um número real t , que estava relacionado com a medida de um segmento de reta, pertencente a uma reta *tangente* à circunferência trigonométrica. Vale ressaltar que o uso de geometria se deu apenas para orientar a parametrização pois, após a obtenção dessa parametrização ela seria definida algebricamente.

2.1 Área de uma Região de um Setor Circular

A primeira abordagem foi uma tentativa de calcular a área de uma região de um setor circular, que é externa ao triângulo $\triangle OPQ$ (2.1), em função de ao menos um número a e/ou b .

Assim, consideramos uma circunferência de raio $r = 1$ com centro em O , coincidindo com a origem do plano cartesiano. Escolhendo um ponto $P(a, b)$ qualquer nessa circunferência, buscamos calcular a área A , que está hachurada na Figura 2.1. Com base nos conhecimentos adquiridos na disciplina de Cálculo Integral e Diferencial I, sabemos que é possível encontrar essa área a partir de uma integral.

Figura 2.1: Área do segmento circular A



Fonte: elaborada pelo autor

Para determinar a função a ser integrada, basta isolar uma das variáveis da equação da circunferência de raio $r = 1$, isto é, $x^2 + y^2 = 1$. Por conveniência, isolamos a variável y e obtemos as funções

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}, \text{ com } a \leq x \leq 1$$

Como estamos considerando apenas o primeiro quadrante, optamos pela função $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Desta maneira, podemos calcular a área pertencida por meio da integral, ou seja:

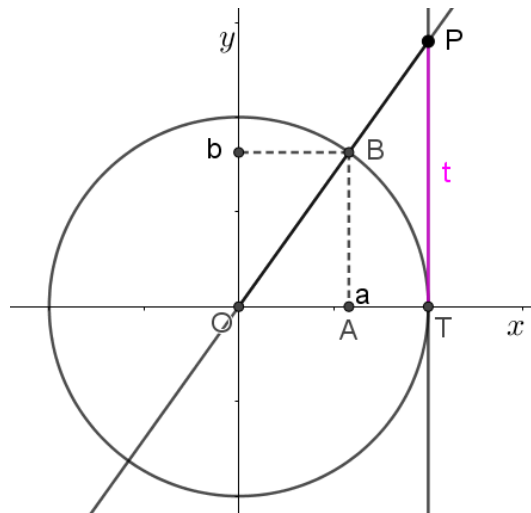
$$A = \int_a^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Mas, ao tentarmos resolver a integral, encontramos um obstáculo: o resultado dessa integral, que seria nosso parâmetro, depende do ângulo, e isso frustrou nossa primeira tentativa. Portanto, buscamos uma abordagem diferente, como veremos a seguir.

2.2 Semelhança Entre Triângulos

Ao buscar uma abordagem diferente da anterior, tentamos estabelecer uma relação entre os números a e b conforme a Equação 2.1, com parâmetro t , obtido por meio da semelhança entre os triângulos $\triangle OTP$ e $\triangle OAB$ na Figura 2.2.

Figura 2.2: Interpretação geométrica



Fonte: elaborada pelo autor

Dessa semelhança entre triângulos, temos que

$$\frac{TP}{AB} = \frac{OT}{OA} \Rightarrow \frac{t}{b} = \frac{1}{a} \Rightarrow t = \frac{b}{a} \quad (2.2)$$

Como $a^2 + b^2 = 1$, $b = \pm\sqrt{1-a^2}$. Assim,

$$t = \frac{b}{a} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \Rightarrow ta = \sqrt{1-b^2} \Rightarrow t^2 a^2 = 1 - a^2 \Rightarrow t^2 a^2 + a^2 = 1 \Rightarrow$$

$$a^2(t^2 + 1) = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{t^2 + 1} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}}$$

Desta forma, podemos expressar o valor de a em função de t .

De maneira análoga, podemos encontrar o valor de b em função de t . como $a^2 + b^2 = 1$, temos $a = \pm \sqrt{1 - b^2}$. Assim,

$$t = \frac{b}{a} \Rightarrow t = \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} \Rightarrow$$

$$t = \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} \Rightarrow t\sqrt{1 - b^2} = b \Rightarrow t^2(1 - b^2) = b^2 \Rightarrow t^2 - t^2b^2 = b^2 \Rightarrow$$

$$t^2 = b^2 + t^2b^2 \Rightarrow t^2 = b^2(1 + t^2) \Rightarrow \frac{t^2}{t^2 + 1} = b^2 \Rightarrow b = \pm \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + 1}}$$

Agora podemos expressar a e b em função de t :

$$a = a(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}}$$

$$b = b(t) = \pm \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + 1}}$$

2.2.1 Funções $a(t)$ e $b(t)$

Entretanto, da forma como estão escritas, $a(t)$ e $b(t)$ não são funções, pois para cada valor de t , existem dois valores possíveis para a e b . Para resolver esse problema e tornar essas expressões semelhantes ao *coseno* e ao *seno* da trigonometria usual, definiremos as funções $a(t)$ e $b(t)$ da seguinte maneira:

$$a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}}, & \text{se } t \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}}, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + 1}}, & \text{se } t \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{t^2}{t^2 + 1}}, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Como $t^2 \neq -1, \forall t \in \mathbb{R}$, podemos determinar os domínios de a e b sendo $D_a = \mathbb{R}$ e $D_b = \mathbb{R}$.

Para determinar a imagem da função a , vamos considerar

$$0 \leq t^2 \Rightarrow 1 \leq t^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{t^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}} \leq 1$$

Assim, a imagem de $a(t)$ é restrita no intervalo $[-1, 1]$, ou seja, $-1 \leq a(t) \leq 1$. Para a imagem de b , temos:

$$0 < 1 \Rightarrow t^2 < t^2 + 1 \Rightarrow \frac{t^2}{t^2 + 1} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + 1}} < 1$$

Portanto, a imagem de b está no intervalo entre -1 e 1 , ou seja, $-1 < b(t) < 1$.

Pelo modo como foram definidas, podemos notar algumas diferenças entre as funções $a(t)$ e $b(t)$, respectivamente, com as funções *cossseno* e *seno* da trigonometria usual. Por exemplo, para a função $a(t)$, temos que $a(-t) = -a(t)$ e não existe $t \in \mathbb{R}$, para o qual $a(t) = 0$. Já a função $b(t)$ não assume valores iguais a 1 e -1 . Além disso, podemos observar que ambas as funções não são periódicas. Outra coisa que podemos observar é que a e b tem sempre o mesmo sinal, ou seja, $a(t) \cdot b(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, isso significa que nenhum t tem relação com ângulos do segundo e quarto quadrantes.

Na Figura 2.3 ilustramos o gráfico de $a(t)$.

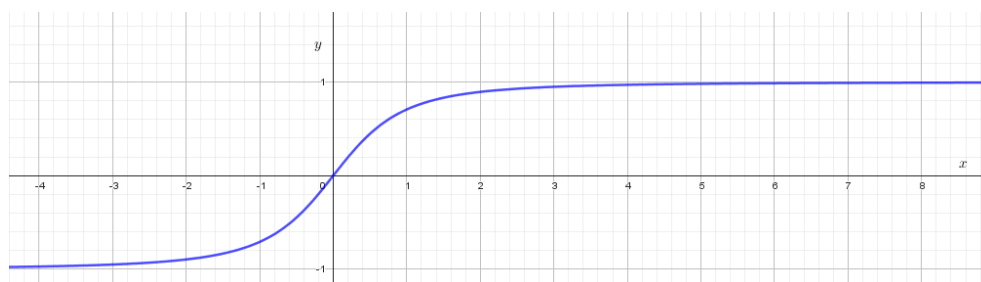
Figura 2.3: Gráfico da função $a(t)$



Fonte: elaborada pelo autor

E a seguir, na Figura 2.4, o gráfico da função $b(t)$:

Figura 2.4: Gráfico da função $b(t)$



Fonte: elaborada pelo autor

2.2.2 Parâmetros associados aos ângulos notáveis

Vamos calcular alguns valores de t associados aos ângulos notáveis da trigonometria usual, a fim de construir uma tabela semelhante à Tabela Trigonométrica dos ângulos notáveis (1.1). A grosso modo, essa variável tem o valor da *tangente* na trigonometria usual.

Para $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, temos

$$a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{9} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{3} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{9}}{\frac{3}{9} + 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}} = \sqrt{\frac{1.3}{3.4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Com $t = 1$:

$$a(1) = \sqrt{\frac{1}{(1)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b(1) = \sqrt{\frac{(1)^2}{(1)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E para $t = \sqrt{3}$:

$$a(\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3})^2 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{3 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$b(\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 + 1}} = \sqrt{\frac{3}{3 + 1}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conhecendo esses valores, podemos construir a tabela de parâmetros associados aos ângulos notáveis (Tabela 2.1):

Tabela 2.1: Tabela Trigonométrica de parâmetros associados aos ângulos notáveis

t	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$a(t)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$b(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Fonte: elaborada pelo autor

Agora, vamos explorar algumas identidades trigonométricas.

2.2.3 Relação Fundamental da Trigonometria e Outras identidades

Neste tópico, demonstraremos identidades trigonométricas usando $a(t)$ e $b(t)$. Vamos começar com a relação fundamental:

$$a^2(t) + b^2(t) = \left(\sqrt{\frac{1}{t^2+1}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}}\right)^2 = \frac{1}{t^2+1} + \frac{t^2}{t^2+1} = \frac{t^2+1}{t^2+1} = 1$$

Mostramos que $a^2(t) + b^2(t) = 1$, ou seja, a relação fundamental da trigonometria. Agora vamos mostrar as fórmulas de adição:

$$a(t+u) = \sqrt{\frac{1}{(t+u)^2+1}} = \sqrt{\frac{1}{t^2+2tu+u^2+1}}$$

$$a(t-u) = \sqrt{\frac{1}{(t-u)^2+1}} = \sqrt{\frac{1}{t^2-2tu+u^2+1}}$$

$$b(t+u) = \sqrt{\frac{(t+u)^2}{(t+u)^2+1}} = \sqrt{\frac{t^2+2tu+u^2}{t^2+2tu+u^2+1}}$$

$$b(t-u) = \sqrt{\frac{(t-u)^2}{(t-u)^2+1}} = \sqrt{\frac{t^2-2tu+u^2}{t^2-2tu+u^2+1}}$$

Com alusão à *tangente*, à *secante*, à *cossecante* e *cotangente*, definiremos as funções $T(t)$, $a(t)^{-1}$, $b(t)^{-1}$ e $T(t)^{-1}$, respectivamente, por:

$$T(t) = \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{\sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}}}{\sqrt{\frac{1}{t^2+1}}} = \sqrt{\frac{t^2}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{1}} = \sqrt{\frac{t^2}{1}} = |t|,$$

$$a(t)^{-1} = \frac{1}{a(t)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2+1}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}} = \sqrt{t^2+1},$$

$$b(t)^{-1} = \frac{1}{b(t)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2}} = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}} \quad \text{para } t \neq 0,$$

$$T(t)^{-1} = \frac{1}{T(t)} = \frac{1}{|t|}$$

Neste tópico, conseguimos construir uma trigonometria algébrica que, apesar de não possuir todas as características e propriedades da trigonometria usual, ela pode ser explorada como uma nova forma de entender uma estrutura matemática. Ressaltamos que apresentamos apenas um recorte do que poderia ser explorado nessa forma de pensar trigonometria.

3 A TRIGONOMETRIA COMO SÉRIES DE POTÊNCIAS

Durante a pesquisa sobre o tema, observamos uma carência de abordagens que desvinculem a trigonometria da geometria, especialmente no contexto da educação básica. Vale ressaltar que, até o momento, encontramos apenas métodos que se apoiam em matemática de nível superior para abordar essa desvinculação. Enquanto a trigonometria tradicionalmente se apoia em conceitos geométricos, a proposta de Lima (2006) apresenta uma perspectiva que transcende essa dependência, sendo notadamente explorada no ensino superior por meio das séries de Taylor. Assim, o autor considera as séries

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n)}}{(2n)!} \text{ e } s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Ao decorrer deste capítulo, veremos que as séries acima correspondem, respectivamente, ao $\cos(x)$ e $\sin(x)$ da trigonometria usual. A seguir, mostraremos a convergência dessas séries.

3.1 Convergência de $c(x)$ e $s(x)$

Como $c(x)$ e $s(x)$ são séries de potência, podemos demonstrar a convergência dessas séries através do teste da razão

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$$

Primeiro, vamos usar a sequência correspondente a $c(x)$, $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Como vamos trabalhar com valor absoluto, podemos simplificar a sequência para $a_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} r_a &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \right|}{\left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|}{\left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x^{2n}| |x^2|}{|(2n+2)!|}}{\frac{|x^{2n}|}{|(2n)!|}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{|(2n+2)(2n+1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = 0 \end{aligned}$$

Assim $r_a = 0 < 1$, independente de x , ou seja, a série $c(x)$ converge no intervalo $x \in (-\infty, +\infty)$.

Agora, usaremos a sequência $b_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para a série $s(x)$. E. pelo motivo anterior, vamos simplificar a expressão para $b_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Assim:

$$\begin{aligned}
r_b &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \right|}{\left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right|}{\left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x^{2n+1}| |x^2|}{[(2n+3)][(2n+2)][(2n+1)!]}}{\frac{|x^{2n+1}|}{[(2n+1)!]}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{[(2n+3)][(2n+2)]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{(2n+3)(2n+3)} \right| = 0
\end{aligned}$$

Como $r_b = 0$, $\forall x$, então $s(x)$ converge no intervalo $x \in (-\infty, +\infty)$.

Sabendo que as séries convergem e que o raio de convergência tanto de $c(x)$ quanto de $s(x)$ está no intervalo $x \in (-\infty, +\infty)$, isto é, possui raio de convergência infinito, vamos expandir essas séries e trabalhar com as funções $c(x)$ e $s(x)$.

3.2 Definindo as Funções $c(x)$ e $s(x)$

Vimos que $c(x)$ e $s(x)$ possuem raio de convergência infinito. Assim, podemos definir, por meio das séries apresentadas, as funções $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo ambas de classe C^∞ , ou seja, podem ser diferenciadas infinitamente.

Expandindo a série $c(x)$, temos

$$\begin{aligned}
c(x) &= \frac{(-1)^0 x^{(2 \cdot 0)}}{(2 \cdot 0)!} + \frac{(-1)^1 x^{(2 \cdot 1)}}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^{(2 \cdot 2)}}{(2 \cdot 2)!} + \frac{(-1)^3 x^{(2 \cdot 3)}}{(2 \cdot 3)!} \\
&+ \frac{(-1)^4 x^{(2 \cdot 4)}}{(2 \cdot 4)!} + \frac{(-1)^5 x^{(2 \cdot 5)}}{(2 \cdot 5)!} + \frac{(-1)^6 x^{(2 \cdot 6)}}{(2 \cdot 6)!} + \frac{(-1)^7 x^{(2 \cdot 7)}}{(2 \cdot 7)!} + \dots \\
&\Rightarrow c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \dots
\end{aligned}$$

Fazendo de maneira análoga com $s(x)$, vamos obter

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \dots$$

Com as séries expandidas, é fácil observar que $c(0) = 1$, $c(-x) = c(x)$, $s(0) = 0$ e $s(-x) = -s(x)$

Também podemos observar que

$$c'(x) = 0 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} - \frac{x^{13}}{13!} + \dots = -s(x) \text{ e}$$

$$s'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \dots = c(x)$$

Agora que conhecemos essas relações, podemos mostrar algumas identidades, começando

pela relação fundamental da trigonometria.

3.3 Relação Fundamental da Trigonometria

Dada a função $f(x) = c^2(x) + s^2(x)$, Observe $f(0) = c^2(0) + s^2(0) = 1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$.
Derivando $f(x)$, temos

$$f'(x) = 2c(x)c'(x) + 2s(x)s'(x)$$

Sabendo que $c'(x) = -s(x)$ e $s'(x) = c(x)$, temos:

$$f'(x) = 2c(x)(-s(x)) + 2s(x)c(x) = -2c(x)s(x) + 2s(x)c(x) = 0$$

Se $f'(0) = 0$, então $f(x)$ é uma função constante. Uma vez que $f(0) = 1$, podemos concluir que $c^2(x) + s^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Ou seja, a relação fundamental da trigonometria.

3.4 Fórmulas de Adição

Podemos, de forma análoga, mostrar as fórmulas de adição:

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$

Para provar as fórmulas citadas considere as funções $f(x) = c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y)$ e $g(x) = s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y)$. Vamos provar que $f(x) = g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Fazendo a derivada de $f(x)$ e $g(x)$, em relação a x , temos:

$$f'(x) = c'(x+y) - c'(x)c(y) + s'(x)s(y) = -s(x+y) + s(x)c(y) + c(x)s(y) = -[s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y)] = -g(x)$$

$$g'(x) = s'(x+y) - s'(x)c(y) - c'(x)s(y) = c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y) = f(x)$$

Agora, considere a função $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Derivando $h(x)$, temos:

$$h'(x) = 2f'(x)f(x) + 2g'(x)g(x) = -2g(x)f(x) + 2f(x)g(x) = 0$$

Uma vez que $h'(x) = 0$, podemos assumir que $h(x)$ é constante. Em outras palavras, $f^2(x) + g^2(x)$ é constante. Dado $f(0) = c(0+y) - c(0)c(y) + s(0)s(y) = c(y) - c(y) + 0 = 0$ e $g(0) = s(0+y) - s(0)c(y) - c(0)s(y) = s(y) - 0 - s(y) = 0$, obtemos $f(0) = g(0) = 0$. Logo $f^2(x) + g^2(x) = 0$. Portanto, $f(x) = g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, então

$$c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y) = 0 \Rightarrow c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

$$s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y) = 0 \Rightarrow s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \blacksquare$$

3.5 Periodicidade

Nesse t3pico provaremos a periodicidade das fun33es $c(x)$ e $s(x)$, mas antes mostraremos que existe $x > 0$ tal que $c(x) = 0$. Para isso, vamos supor, por absurdo, que $\forall x > 0, c(x) > 0$ e chegar numa contradi333o. Sabemos que $s'(x) = c(x)$. Como $c(x) > 0$, ent33o $s(x)$ 33 crescente para todo $x > 0$.

Como $c'(x) = -s(x)$, ent33o $\int s(x) dx = -c(x)$. Desta forma, $\forall x > 1$, temos:

$$c(x) = c(1) - \int_1^x s(t) dt > 0 \Rightarrow c(1) > \int_1^x s(t) dt$$

Se s 33 crescente, vale a desigualdade

$$s(x) > s(1) \Rightarrow \int_1^x s(t) dt > s(1)(x-1), \text{ para } x > 1$$

E portanto:

$$c(1) > s(1)(x-1), \text{ para } x > 1$$

O que 33 um absurdo, pois $c(1)$ 33 constante e $s(1) > 0$. Logo existe $x > 0$ tal que $c(x) = 0$.

O conjunto dos $x > 0$ tais que $c(x) = 0$ 33 fechado, j33 que c 33 cont33nua e $c(0) = 1 > 0$. Esta afirma333o ser33 demonstrada a seguir.

Considere a fun333o $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ cont33nua

Seja A o conjunto dos pontos $a \in B$ tais que $f(a) \neq 0$. Isto 33, $A = \{a \in B / f(a) \neq 0\}$.

Observe que no caso do cosseno, esse conjunto A 33 n33o vazio visto que $c(0) = 1$.

Como f 33 cont33nua, para cada $a \in A$, existe um intervalo $I_a = (a-s, a+s)$ tal que $x \in I_a \cap B \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow I_a \cap B \subset A$. Seja $H = \bigcup_{a \in A} I_a$, ent33o H 33 um conjunto aberto e $H \cap B \subset A$ e $A \subset H \cap B$, ou seja, $A = H \cap B$.

Assim, se B 33 aberto, o conjunto A 33 aberto (pois H 33 aberto). A sendo aberto, seu complementar 33 fechado. $\blacksquare$

Desta forma, o conjunto dos $x > 0$ tais que $c(x) = 0$ 33 fechado e portanto possui um menor elemento positivo tal que $c(x) = 0$. Chamaremos esse menor elemento de $\frac{p}{2}$, ou seja, $c(p/2) = 0$. Mostraremos a seguir a periodicidade das fun333es $c(x)$ e $s(x)$, com per33odo de $2p$.

Da rela333o fundamental da trigonometria, temos $c^2(x) + s^2(x) = 1 \Rightarrow s^2(x) = 1 - c^2(x)$; Al33m disso, usando a f33rmula de adi3333o para $c(x+y)$, encontramos: "

$$c(2x) = c(x+x) = c(x)c(x) - s(x)s(x) = c^2(x) - s^2(x), \Rightarrow c(2x) = c^2(x) - (1 - c^2(x)) = 2c^2(x) - 1$$

Sabendo disso, podemos calcular

$$c(p) = c(p/2 + p/2) = 2c^2(p/2) - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$c(2p) = c(p + p) = 2c^2(p) - 1 = 2(c(p))^2 - 1 = 2(-1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Conhecendo $c(p) = -1$ e $c(2p) = 1$, podemos encontrar os valores de $s(p)$ e $s(2p)$:

$$s(p) = s(p/2 + p/2) = s(p/2)c(p/2) + c(p/2)s(p/2) = s(p/2) \cdot 0 + 0 \cdot s(p/2) = 0$$

$$s(2p) = s(p + p) = s(p)c(p) + c(p)s(p) = 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 0$$

Agora podemos ver a periodicidade de $c(x)$ e $s(x)$:

$$c(x + 2p) = c(x)c(2p) - s(x)s(2p) = c(x) \cdot 1 - s(x) \cdot 0 = c(x),$$

$$s(x + 2p) = s(x)c(2p) + c(x)s(2p) = s(x) \cdot 1 + c(x) \cdot 0 = s(x)$$

Desta forma provamos a periodicidade de $2p$ das funções $c(x)$ e $s(x)$. Podemos trocar a letra do nosso alfabeto p pela letra grega π , para se assemelhar a periodicidade da trigonometria usual. Assim, o período é de 2π .

Neste capítulo, descobrimos que, por meio das séries de Taylor, é possível definir as funções $c(x)$ e $s(x)$, que correspondem às funções *cos seno* e *seno* da trigonometria usual. Além disso, utilizando as razões $\frac{s(x)}{c(x)}$, $\frac{1}{c(x)}$, $\frac{1}{s(x)}$, $\frac{c(x)}{s(x)}$, podemos definir, respectivamente, *tangente*, *secante*, *cos-secante* e *cotangente*. E, as propriedades da trigonometria usual podem ser provadas com base nas propriedades de série de potências, observando sempre sua convergência.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da trigonometria sob uma perspectiva algébrica revelou-se uma jornada rica e desafiadora, proporcionando conhecimentos valiosos sobre uma das disciplinas matemáticas mais fundamentais. Nossa investigação começou explorando os princípios da trigonometria usual, desde a trigonometria no triângulo retângulo até a circunferência trigonométrica e as funções trigonométricas. Também exploramos novas abordagens, considerando aspectos como a área de setores circulares e semelhanças entre triângulos. Além disso, investigamos as séries de potências $c(x)$ e $s(x)$ e descobrimos que elas correspondem, respectivamente, ao cosseno e ao seno da trigonometria usual.

Ao longo deste estudo, nossa hipótese de que uma perspectiva algébrica pode enriquecer a compreensão da trigonometria foi confirmada. Mostramos que é possível construir uma trigonometria por meio do uso de conceitos algébricos.

Esperamos que esta pesquisa beneficie estudantes, professores e pesquisadores, proporcionando uma visão ampla e aprofundada da trigonometria algébrica e seu potencial nas aplicações matemáticas. À medida que continuamos explorando novos horizontes na matemática, a trigonometria na perspectiva algébrica se revela como um campo promissor que enriquece nosso entendimento da disciplina.

Além disso, sugerimos futuras linhas de pesquisa para aprofundar ainda mais o campo. A aplicação da metodologia proposta em sala de aula pode ser explorada, desenvolvendo materiais didáticos específicos e estratégias pedagógicas que utilizem a trigonometria sob a perspectiva algébrica. Uma investigação das funções sob a perspectiva do cálculo, analisando as derivadas e integrais das funções $a(t)$ e $b(t)$ obtidas no capítulo 2, ofereceria uma extensão natural deste estudo. Explorar aplicações práticas da trigonometria algébrica em diversos campos, como física, engenharia e ciência da computação, pode proporcionar percepções valiosas sobre a eficácia dessa abordagem em contextos do mundo real.

Assim, encerramos este estudo com a convicção de que a trigonometria, quando abordada de maneira algébrica, não apenas preserva sua relevância histórica, mas também abre portas para novas descobertas e aplicações matemáticas, contribuindo significativamente para o desenvolvimento contínuo do campo da matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. v. 1.

IEZZI, G. **Matemática: ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 1.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. v. 2.

LIMA, E. L. **Análise real volume 1. Funções de uma Variável**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 1.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 2.

SANTOS, J.; MAYMONE, A. **Matemática**. 4. ed. Brasil: Editora Construir, 2018. (Ensino Fundamental - 6º ao 9º ano - Manual do professor - formação continuada).