

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**UMA BREVE INTRODUÇÃO A TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS:
ISOMETRIAS E HOMOTETIA**

EDUARDO BARROS DE CARVALHO

**GOIÂNIA - GOIÁS
2025**

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Eduardo Barros de Carvalho

Matrícula: 20182010940154

Título do Trabalho: UMA BREVE INTRODUÇÃO A TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: ISOMETRIAS E HOMOTETIA

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

EDUARDO BARROS DE CARVALHO

TÍTULO DO TRABALHO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Goiás - IFG - Câmpus
Goiânia, como requisito parcial para obten-
ção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Professora Dr^a. Karoline Victor Fernandes

GOIÂNIA - GOIÁS
2025

C331b Carvalho, Eduardo Barros de.

Uma breve introdução a transformações geométricas: isometrias e homotetia / Eduardo Barros de Carvalho. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2025.

89 f.: il.

Orientadora: Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Transformações geométricas. 2. Isometrias. 3. Homotetia. 4. Plano cartesiano. I. Fernandes, Karoline Victor (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 516.3

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulada **Uma breve introdução a transformações geométricas: Isometrias e Homotetias**, sob orientação de Karoline Victor Fernandes, apresentada pelo aluno **Eduardo Barros de Carvalho (20182010940154)** do Curso **Licenciatura em Matemática (Câmpus Goiânia)**. Os trabalhos foram iniciados às **16:00** do dia **20/08/2025** pela Professora presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

- **Karoline Victor Fernandes** (Presidente)
- **Jose Eder Salvador de Vasconcelos** (Examinador Interno)
- **Marcio Dias de Lima** (Examinador Interno)
- **Uender Barbosa de Souza** (Examinador Suplente Interno)

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo do Trabalho de Conclusão de Curso, passou à arguição do candidato. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

☒ Aprovado

☐ Reprovado

Nota :

Observação / Apreciações:

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu **Karoline Victor Fernandes** lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Marcio Dias de Lima** (817.492.281-49), em **20/08/2025 16:42:15** com chave **c5f874c87dfd11f0b903005056a537a4**.
- **Uender Barbosa de Souza** (017.037.691-55), em **20/08/2025 16:43:21** com chave **edcd73b87dfd11f0b903005056a537a4**.
- **Jose Eder Salvador de Vasconcelos** (012.039.784-64), em **20/08/2025 16:42:53** com chave **dd12bc4a7dfd11f0a386005056a537a4**.
- **Karoline Victor Fernandes** (695.224.481-68), em **20/08/2025 16:42:09** com chave **c28098f27dfd11f093d5005056a537a4**.

Este documento foi emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifg.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Ata de Projeto Final

Data da Emissão: 20/08/2025

Código de Autenticação: 34d3d7



Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, que sempre me apoiou e me deu suporte durante o curso. Ao corpo docente de Matemática do Instituto Federal de Goiás, Campus Goiânia, cujos professores foram uma grande fonte de inspiração ao longo desta jornada acadêmica, servindo como guias e nos proporcionando experiências únicas. Aos meus colegas de curso que sempre me ajudaram e apoiaram, mesmo que muitos deles não tenham conseguido chegar ao final dessa longa jornada.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que me concedeu força, sabedoria, paciência, resiliência, clareza e orientação ao longo desta jornada. Sua presença constante foi uma fonte de inspiração e conforto em todos os momentos.

Agradeço à minha família pelo apoio incondicional, amor e incentivo ao longo dos anos. Seu apoio emocional e encorajamento foram fundamentais para meu sucesso acadêmico.

Aos professores do corpo docente de Matemática do Instituto Federal de Goiás, Campus Goiânia, expressei minha sincera gratidão. Suas habilidades pedagógicas, dedicação ao ensino e conselhos foram essenciais para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Cada um de vocês deixou uma marca em minha jornada.

À minha orientadora, professora Dra. Karoline, por ter-me aceitado nesse projeto e ter tido uma incrível e imensurável paciência.

Agradeço aos colegas de classe e amigos que estiveram ao meu lado durante todo o percurso acadêmico, me ajudando e motivando. Sua amizade, apoio mútuo e colaboração foram de extrema importância nessa longa jornada.

Gostaria de agradecer também ao professor Bruno por ter me inspirado a escolher este curso, por ter sido um incrível professor e amigo durante o período do ensino médio.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os funcionários e profissionais envolvidos na minha formação educacional, desde administradores até bibliotecários e técnicos de laboratório. Seu trabalho muitas vezes passa despercebido, mas é fundamental para o funcionamento eficaz da instituição de ensino.

A todos vocês, o meu mais sincero obrigado. Palavras nunca serão suficientes para demonstrar o quanto serei eternamente grato por cada contribuição que fizeram para a minha jornada educacional.

Resumo

Este trabalho explora as transformações geométricas no plano cartesiano, concentrando-se nas isometrias (translação, reflexão e rotação) e na homotetia. Para que o leitor compreenda todos os conceitos, o trabalho inicia-se com um capítulo de conhecimentos preliminares. Em seguida, cada transformação é apresentada com definições claras e exemplos práticos, que ajudam a desenvolver o raciocínio geométrico. As isometrias são abordadas com ênfase em sua característica principal: a preservação da forma e do tamanho da figura original. Discute-se como elas mantêm a distância entre os pontos e os ângulos, resultando em uma nova figura que é congruente à inicial. Em contraste, a homotetia é detalhada como uma transformação que foca em ampliação e redução de figuras. Ela preserva a forma e as proporções, mas altera o tamanho, criando figuras que são semelhantes à original. Ao final, uma série de exercícios é proposta para solidificar a compreensão e a visualização dos conceitos.

Palavras-chave: Transformações Geométricas; Isometrias; Homotetia.

Abstract

This work explores geometric transformations on the Cartesian plane, focusing on isometries (translation, reflection, and rotation) and homothety. To ensure the reader understands all the concepts, the work begins with a chapter on preliminary knowledge. Following that, each transformation is presented with clear definitions and practical examples, which help to develop geometric reasoning. Isometries are approached with an emphasis on their main characteristic: the preservation of the original figure's shape and size. It discusses how they maintain the distance between points and angles, resulting in a new figure that is congruent to the initial one. In contrast, homothety is detailed as a transformation that focuses on the enlargement and reduction of figures. It preserves the shape and proportions but alters the size, creating figures that are similar to the original. Finally, a series of exercises is proposed to solidify the understanding and visualization of the concepts.

Keywords: Geometric Transformations; Isometries; Homothety

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de correspondência de pontos	17
2.2	Exemplos de pontos A e B	18
2.3	Pontos colineares A , B e C	18
2.4	Segmento AB	19
2.5	$\overrightarrow{AB}$ à esquerda e $\overleftarrow{AB}$ à direita	20
2.6	Ilustração do Teorema 2.10	20
2.7	Ponto médio de $\overline{AC}$	20
2.8	Exemplos de conjuntos convexos	21
2.9	Exemplos de conjuntos não convexos	21
2.10	ângulo $\widehat{BAC}$	22
2.11	Pontos interiores e exteriores de $\widehat{BAC}$	23
2.12	$m\widehat{BOA} = 45$	24
2.13	Construção do ângulo $\widehat{PAB}$	24
2.14	Soma dos ângulos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{DAC}$	24
2.15	Par linear $\widehat{DAC}$	25
2.16	Pares lineares congruentes	25
2.17	Ângulos $\widehat{DAE}$ e $\widehat{CAB}$	26
2.18	Circunferência e Círculo	27
2.19	Exemplos de cordas de uma circunferência	27
2.20	Polígono $ABCDEF$	28
2.21	Polígono $FGHIJ$	28
2.22	Ângulos internos e externos de um polígono	29
2.23	Triângulo ABC	30
2.24	Os triângulos ABC e DEF são congruentes	31
2.25	Caso $L.A.L.$ de congruência de triângulos	31
2.26	Triângulo isósceles ABC	32
2.27	$\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $\widehat{AOB}$	32
2.28	Ilustração do Teorema 2.41	33
2.29	Ilustração do Teorema 2.43	33
2.30	Ilustração do Teorema 2.44	34

2.31	Caso onde B está entre H e C	34
2.32	Caso onde $H = B$	35
2.33	Ilustração do Teorema 2.45	35
2.34	Ilustração do Teorema 2.47	36
2.35	Caso onde P não pertence a $\overline{AB}$	36
2.36	Ângulo externo $\widehat{ACD}$ do $\triangle ABC$	37
2.37	Ilustração do Teorema 2.51	38
2.38	Ilustração do Corolário 2.52	39
2.39	Ilustração da existência do Teorema 2.53	39
2.40	Ilustração da unicidade do Teorema 2.53	40
2.41	Ilustração do Teorema 2.54	40
2.42	Ilustração do Teorema 2.55	41
2.43	Ilustração do Teorema 2.57	42
2.44	Ilustração do Teorema 2.58	42
2.45	Ilustração do Teorema 2.60	43
2.46	Reta r transversal às retas s e t	43
2.47	Ilustração do Teorema 2.64	43
2.48	Ilustração da contradição do Teorema 2.64	44
2.49	Ângulos correspondentes $\hat{x}$ e $\hat{z}$	44
2.50	Segmento AB sobre a transversal	47
2.51	Segmentos congruentes sobre a transversal	47
2.52	Triângulos ABC e DEF semelhantes	48
2.53	Caso de semelhança $A.A.A.$	48
2.54	Caso de semelhança $L.A.L.$	49
2.55	Caso de semelhança $L.L.L.$	49
3.1	Transformação dos pontos $AB = T(A)T(B)$	51
3.2	A isometria T leva ponto colineares em pontos colineares	51
3.3	A isometria T preserva ângulos	52
3.4	A isometria T preserva paralelismo entre retas	53
3.5	$T_{AB}(X)$ quando A, B e X são colineares	54
3.6	$T_{AB}(X)$ quando A, B e X não são colineares	54
3.7	$T_{BA}(X)$ quando A, B e X são colineares	54
3.8	$T_{BA}(X)$ quando A, B e X não são colineares	54
3.9	Triângulo XYZ	55
3.10	T_{AB} do triângulo XYZ	55
3.11	Ângulo $\widehat{AOB}$ e número a positivo	56
3.12	Pontos R e S pedidos pelo exemplo	56
3.13	Representação gráfica de R_rP	57

3.14	Eixo de simetria do triângulo isósceles ABC	58
3.15	Eixo de simetria de um segmento AB qualquer	59
3.16	Eixo de simetria de ângulo qualquer	59
3.17	Eixo de simetria do trapézio isósceles	59
3.18	Um paralelogramo não possui eixo de simetria	60
3.19	Eixos de simetria do losango	60
3.20	Eixos de simetria do retângulo	60
3.21	Eixos de simetria do quadrado	61
3.22	Eixos de simetria do triângulo equilátero	61
3.23	Eixos de simetria de um pentágono regular	61
3.24	Eixos de simetria de um hexágono regular	62
3.25	Eixos de simetria de uma circunferência	62
3.26	Triângulo ABC e a reta r	62
3.27	Reflexão do triângulo ABC em relação a reta r	63
3.28	Representação do problema proposto	63
3.29	Solução do problema proposto	64
3.30	Representação do problema proposto	64
3.31	Solução do problema proposto	65
3.32	Ângulo orientado $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	65
3.33	Ângulo orientado $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$	66
3.34	Rotação $\Delta_{AC,\theta}$	66
3.35	Rotação $\Delta_{OX,\theta}$	66
3.36	Ângulo em que a figura será rotacionada	67
3.37	Rotação $\Delta_{O,75}$ do segmento AB	67
3.38	Ângulo a ser realizada a rotação	67
3.39	Rotação $\Delta_{O,-120}$ da semicircunferência de cento C	68
3.40	Rotação $\Delta_{O,180}$ do ponto P	68
3.41	Ângulo em que o triângulo será rotacionado	68
3.42	Rotação $\Delta_{A,60}$ do triângulo ABC	69
3.43	Rotações $\Delta_{A,60}, \Delta_{A,120}, \Delta_{A,180}, \Delta_{A,-120}, \Delta_{A,-60}$ do triângulo ABC	69
3.44	Rotação $\Delta_{O,180}$ do paralelogramo $ABCD$	70
3.45	Rotação $\Delta_{O,90}$ do quadrado $ABCD$	70
3.46	Rotação $\Delta_{O,72}$ do pentágono $ABCDE$	70
3.47	Rotação $\Delta_{O,144}$ do pentágono $ABCDE$	71
3.48	Rotação $\Delta_{O,120}$ do triângulo equilátero ABC	71
4.1	$H_{V,k}(AB)$	75
4.2	$H_{V,k}(r)$ quando $V \notin r$	76
4.3	$H_{V,k}(r)$ quando $V \in r$	76

4.4	Triângulo ABC e seu homotético $A'B'C'$	77
4.5	$H_{V,k}(\mathbf{C}(C,r))$	77
4.6	$H_{V,\frac{2}{3}}(A)$	80
4.7	$H_{B,-\frac{2}{3}}(AB)$	81
4.8	Inscrição do retângulo áureo no triângulo ABC	81
4.9	$H_{A,3}(ABDCE)$	82
5.1	Problema proposto em Geometria plana e construções	83
5.2	Problema proposto em Geometria plana e construções	83
5.3	Problema proposto em Geometria plana e construções	84
5.4	Representação gráfica da solução	84
5.5	Problema proposto em Geometria plana e construções	85
5.6	Representação gráfica da solução	85
5.7	Problema proposto em Geometria plana e construções	86
5.8	Representação gráfica da solução	87
5.9	Representação gráfica da solução	88

1 Introdução

No amplo campo da geometria, a compreensão de como as formas se movimentam, se transformam e se relacionam no plano é fundamental. Duas das transformações geométricas mais importantes e frequentemente estudadas são as isometrias e as homotetias. Embora ambas alterem a posição de figuras, elas o fazem de maneiras distintas, cada uma com suas próprias propriedades e aplicações cruciais em diversas áreas da matemática e além.

As isometrias, do grego *iso* que significa "igual" e *metron* que significa "medida" são transformações que preservam a forma e o tamanho de uma figura. Em outras palavras, quando uma figura passa por uma isometria, ela é movida no espaço sem ser esticada, encolhida ou distorcida. Isso significa que comprimentos de segmentos, medidas de ângulos e áreas de figuras permanecem inalterados. As isometrias podem ser visualizadas como "movimentos rígidos" e incluem translações, rotações e reflexões.

Cada isometria manipula uma figura geométrica escolhida para alterar sua posição no plano cartesiano. A translação permite deslocar uma figura para uma direção desejada, mantendo suas características iniciais. A reflexão espelha uma figura desejada em relação a uma reta no plano cartesiano. A rotação gira a figura desejada em torno de um ponto escolhido no plano cartesiano.

Por outro lado, as homotetias, do grego *homoios* que significa "semelhante" e *tetos* que significa "posição" são transformações que modificam o tamanho de uma figura, mas mantêm sua forma e orientação. Elas atuam como uma "ampliação" ou "redução" de uma figura a partir de um ponto fixo, chamado centro de homotetia, e por um fator de escala específico. Diferente das isometrias, as homotetias não preservam o comprimento dos segmentos, mas mantêm a proporcionalidade entre eles, além de preservar as medidas dos ângulos.

As homotetias são importantes para entender conceitos de semelhança de figuras, projeções e modelagem em diferentes escalas, com aplicações em cartografia, arquitetura e engenharia, onde a representação de objetos em diferentes tamanhos é comum.

Utilizaremos nesse trabalho como base de construção teórica os conceitos presentes nos livros de (Rezende, 2008) e (Wagner; Carneiro, 2007).

O estudo dessas transformações é de suma importância para a compreensão de conceitos presentes na geometria, tendo em vista que estão presentes em diversas áreas, como arte, arquitetura, computação gráfica, escalas de mapas, maquetes e projetos de engenharia. Juntas, essas transformações oferecem ferramentas poderosas para analisar e manipular formas no espaço, revelando a beleza da geometria.

Esse trabalho em primeiro momento, busca fazer uma breve revisão de conceitos

fundamentais da geometria para uma melhor compreensão do tema central, seguido de uma introdução sobre isometrias, apresentando as principais definições, propriedades e exemplos de situações envolvendo sua utilização, em seguida apresentando a homotetia, suas definições, propriedades e exemplos. Ao final temos uma lista de exercícios para melhor fixação do conteúdo apresentado.

2 Noções Fundamentais

Antes de adentrarmos nas definições de transformações no plano, é necessário revisar algumas definições fundamentais da geometria euclidiana para a melhor compreensão e contextualização das propriedades utilizadas nos capítulos seguintes. A base teórica utilizada será predominantemente os livros (Rezende, 2008) e (Wagner; Carneiro, 2007).

2.1 Retas e Ângulos

Nessa seção serão apresentadas algumas definições e propriedades acerca das retas e dos ângulos. Iniciar-se-á com os termos indefinidos: ponto e reta. O plano será visto como o conjunto composto de pontos e as retas são seus subconjuntos. Iniciaremos com os postulados abaixo e, com suas consequências.

2.1.1 Retas

Os três postulados a seguir são conhecidos como Postulados de Incidência.

Postulado 1. Dado dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Postulado 2. Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos.

Os pontos que estão em uma mesma reta são chamados de **pontos colineares**.

Postulado 3. Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.

Utilizando apenas os postulados de incidência, podemos perceber que os pontos de uma reta não podem ser representados pela figura usual de uma reta "contínua". Podemos considerar como exemplo, um "plano" sendo um conjunto formado por três pontos A , B e C , e considerar como "retas" os subconjuntos $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$.

Definição 2.1. Duas retas são chamadas de paralelas, se não se interseccionam, isto é, se nenhum ponto pertence a ambas as retas. Se duas retas distintas se interseccionam, são chamadas de retas concorrentes.

Como consequência dos postulados e da Definição 2.1 acima, temos que:

Teorema 2.2. Duas retas concorrentes se interseccionam em um único ponto.

Demonstração. Considere r e s duas retas concorrentes em um ponto A . Seja B um outro ponto que esteja em ambas as retas. Temos pelo Postulado 1, que a reta r é a reta determinada pelos pontos A e B . Por consequência da unicidade apresentada nesse postulado, r e s seriam a mesma reta, o que contradiz a hipótese inicial de serem concorrentes. Logo, A é único. $\square$

Como consequência dos postulados anteriores, têm-se que:

Teorema 2.3. *a)* Dada uma reta, existe pelo menos um ponto não pertencente a ela.

b) Dado um ponto qualquer, existe pelo menos uma reta não passando por ele.

c) Dado um ponto qualquer, existem pelo menos duas retas que passam por ele.

Postulado 4. (Postulado da Distância) A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes.

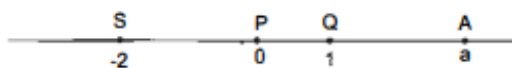
O número obtido pelo postulado acima é chamado de **distância entre os dois pontos**, os pontos são chamados de coincidentes se forem o mesmo ponto.

Será denotado por AB a distância entre os pontos A e B .

Postulado 5. (Postulado da Régua) Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que:

1. Cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real.
2. Cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta.
3. A distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.

Figura 2.1: Exemplo de correspondência de pontos



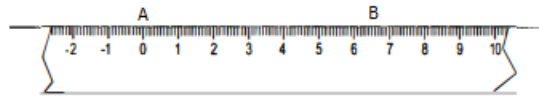
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Foi estabelecido na figura que o S está em correspondência com o número -2 , o ponto P com o número 0 , o ponto Q com o número 1 e o ponto A com o número a .

Podemos observar que este postulado nos dá a ideia de "continuidade" da reta. É chamado de postulado da régua porque nos permite, através de uma "régua infinita" colocada sobre uma reta, medir a distância entre dois pontos quaisquer da reta.

Uma correspondência como descrito no postulado acima é chamada de **sistema de coordenadas para a reta**. O número correspondente a qualquer ponto da reta é chamado de **coordenada do ponto**. Dessa forma, caso tenhamos dois pontos A e B cujas coordenadas são a e b respectivamente, a *distância entre os pontos A e B* é dada por $AB = |b - a|$.

Postulado 6. (Postulado da Colocação da Régua) Dados dois pontos A e B numa reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja positiva.

Figura 2.2: Exemplos de pontos A e B 

Fonte: Elaborada pelo autor

Definição 2.4. Sejam A , B e C três pontos colineares e distintos quando tomados dois a dois. Se $AB + BC = AC$, dizemos que B está entre A e C , que será denotado por $A - B - C$.

Figura 2.3: Pontos colineares A , B e C 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Podemos observar que se temos $A - B - C$ temos também $C - B - A$.

Para compreensão dos teoremas seguintes, será necessária a relação "estar entre" para números reais, que será definida do seguinte modo: se a , b e c são números reais, dizemos que y está entre x e z se $x < y < z$ ou $z < y < x$. Em ambos os casos será utilizada a notação $x - y - z$.

Teorema 2.5. Sejam dados uma reta e três pontos A , B . e C pertencentes a ela, com coordenadas x, y e z , respectivamente. Se $x - y - z$, então $A - B - C$.

Demonstração. Se $x < y < z$, então $AB = |y - x| = y - x$, $BC = |z - y| = z - y$ e $AC = |z - x| = z - x$. Logo, temos $AB + BC = (y - x) + (z - y) = z - x = AC$. Logo, $A - B - C$. Se $z < y < x$, de forma análoga, podemos obter $C - B - A$. $\square$

Teorema 2.6. Dados três pontos distintos pertencentes à mesma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Demonstração. Sejam A , B e C pontos colineares distintos. Mostraremos inicialmente que um deles está entre os outros dois.

Sejam x , y e z as coordenadas dos pontos A , B e C , respectivamente. Por propriedades de números reais, apenas um, entre os números x , y e z , está entre os outros dois. Pelo Teorema 2.6 obtemos que o correspondente ponto A , B ou C está entre os outros dois.

Para demonstração da unicidade, considere que um dos pontos, por exemplo o ponto B , está entre os pontos A e C , iremos demonstrar que não podemos ter A que está entre B e C e nem C que está entre A e B .

De fato, se A estivesse entre os pontos B e C , teríamos que $BA + AC = BC$. Como por hipótese B está entre A e C , temos que $AB + BC = AC$. Como resultado de ambos teremos $2AB = 0$, o que seria impossível, tendo em vista que A e B são pontos distintos. De forma análoga é possível demonstrar que C não pode estar entre A e B . $\square$

Teorema 2.7. Se A e B são pontos distintos quaisquer, então:

1. Existe um ponto C tal que $A - B - C$.
2. Existe um ponto C' tal que $C' - A - B$.
3. Existe um ponto D tal que $A - D - B$.

Demonstração. Sejam x e y as coordenadas dos pontos A e B , respectivamente. Suponha que $x < y$. Tome o ponto C com a coordenada $y + 1$, o ponto C' com coordenada $x - 1$ e o ponto D com coordenada $\frac{x+y}{2}$, dessa forma os itens (1), (2) e (3) acima são facilmente verificados. No caso em que $y < x$ o procedimento é análogo. $\square$

Podemos então, neste contexto, passar a denotar por $\overleftrightarrow{AB}$ a reta determinada pelos pontos A e B , o que lemos reta AB .

Definição 2.8. Sejam A e B pontos distintos.

- a) O **segmento de reta** AB , ou simplesmente **segmento** AB , o qual é denotado por $\overline{AB}$, é definido como sendo o conjunto de pontos A e B , e dos pontos X tais que $A - X - B$. Os pontos A e B são denominados *extremidades do segmento* AB .

Figura 2.4: Segmento AB



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- b) A **medida** ou *comprimento* de um segmento AB é definida como a distância entre os pontos A e B e, como tal, é denotada por AB .
- c) A **semi-reta de origem** A **contendo o ponto** B , a qual é denotada por $\overrightarrow{AB}$, é definida como a união dos pontos do segmento AB com o conjunto dos pontos X tais que $A - B - X$. O ponto A é denominado *origem* da semi-reta.

Se A está entre B e C , então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas **semi-retas opostas**.

Definição 2.9. Dois segmentos que possuem a mesma medida são chamados **segmentos congruentes**.

Figura 2.5: $\overrightarrow{AB}$ à esquerda e $\overleftarrow{AB}$ à direita

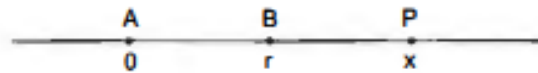


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Teorema 2.10. (Teorema da Localização de Pontos) Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta e seja x um número positivo. Então existe um único ponto P em AB tal que $AP = x$.

Demonstração. Pelo Postulado da Colocação da Régua, podemos escolher um sistema de coordenadas para a reta $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja um número positivo r .

Figura 2.6: Ilustração do Teorema 2.10

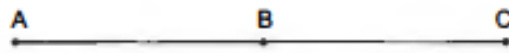


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Seja P o ponto cuja coordenada é o número positivo x . Então P pertence a $\overrightarrow{AB}$ e $AP = |x - 0| = |x| = x$. Como somente um ponto da semi-reta tem a coordenada x , somente um ponto da semi-reta estará a uma distância x de A . $\square$

Definição 2.11. Um ponto B é **ponto médio de um segmento** AC se B está entre A e C , e $AB = BC$.

Figura 2.7: Ponto médio de $\overline{AC}$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Teorema 2.12. Todo segmento tem um único ponto médio.

Demonstração. Inicialmente iremos provar a existência do ponto médio. Queremos um ponto B , tal que $AB + BC = AC$ e que $AB = BC$.

Considere um número real positivo $x = \frac{1}{2}AC$. Pelo Teorema 2.10, existe um único ponto B na semi-reta AC tal que $AB = x$.

Como o ponto B está em $\overrightarrow{AC}$, temos que B está em $\overline{AC}$ ou $A - C - B$, sendo $B \neq A$, e $B \neq C$.

Se B está em $\overline{AC}$ temos $A - B - C$, logo $AB + BC = AC$ e portanto

$$BC = AC - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC = AB.$$

Se B é tal que $A - C - B$ então temos que $AC + CB = AB$ e portanto

$$CB = \frac{1}{2}AC - AC = -\frac{1}{2}AC < 0$$

o que é um absurdo. Logo temos $AB + BC = AC$ e $AB = BC$, ou seja, B é ponto médio de AC .

Para provarmos a unicidade do ponto médio, suponhamos que exista outro ponto M , que seria outro ponto médio de AC , isto é, um ponto M que satisfaz $AM + MC = AC$ e $AM = MC$.

Dessa forma, teríamos que $2AM = AC$, ou seja, $AM = \frac{1}{2}AC$ e pelo Teorema 2.10, M coincidiria com B . Logo $\overline{AC}$ possui um único ponto médio. $\square$

Definição 2.13. Um conjunto é convexo se, para todo par de pontos distintos A e B desse conjunto, o segmento AB está inteiramente contido nele.

Figura 2.8: Exemplos de conjuntos convexos



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 2.9: Exemplos de conjuntos não convexos



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Postulado 7. (Postulado da Separação do Plano) Dada uma reta, os pontos que não pertencem a ela formam dois conjuntos disjuntos tais que

1. Cada um dos conjuntos é convexo.
2. Se A pertence a um dos conjuntos e B ao outro, então o segmento AB intersecciona a reta.

Definição 2.14. Dada uma reta r , os conjuntos determinados pelo postulado anterior são chamados **semiplanos**, e r é chamada **origem** de cada um deles. Dizemos que r separa o plano em dois semiplanos. Se dois pontos A e B estão no mesmo semiplano, dizemos que A e B **estão no mesmo lado de** r , se A está em um dos semiplanos e B no outro, dizemos que A e B **estão em lados opostos da reta** r .

Observação 2.15. Em relação à reta que separa um plano em dois semiplanos, temos que:

1. Se dois pontos pertencem ao mesmo semiplano, então o segmento determinado por estes pontos está no mesmo semiplano.
2. Se dois pontos estão em semiplanos diferentes, então o segmento determinado por estes pontos corta a reta.

Teorema 2.16. Dado os pontos A , B , C e a reta r segue que:

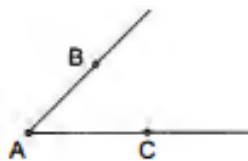
- a) Se A e B estão em lados opostos de uma reta r , e B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão no mesmo lado de r .
- b) Se A e B estão em lados opostos de uma reta r , e B e C estão no mesmo lado de r , então A e C estão em lados opostos de r .

2.1.2 Ângulos

De acordo com (Rezende, 2008), existem controvérsias entre estudiosos quanto à definição de ângulo. Vamos aqui dar uma definição, que será utilizada no decorrer do desenvolvimento da teoria aqui apresentada.

Definição 2.17. Um ângulo é a união de duas semi-retas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semi-retas AB e AC , então essas semi-retas são chamadas lados do ângulo, e o ponto A é chamado **vértice do ângulo**. Tal ângulo é denominado ângulo BAC ou ângulo CAB e representado por $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{CAB}$, respectivamente. Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A e representado por $\hat{A}$.

Figura 2.10: ângulo $\widehat{BAC}$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Observação 2.18. Na Definição 2.17, ângulo é simplesmente um conjunto que é a união de duas semi-retas de mesma origem não contidas na mesma reta. No capítulo seguinte, será introduzido o conceito de ângulos orientados, que são ângulos nos quais são destacados o lado inicial e final. Nesse caso, os lados inicial e final podem ser coincidentes, definindo um ângulo de medida zero, ou opostos, definindo um ângulo de medida 180.

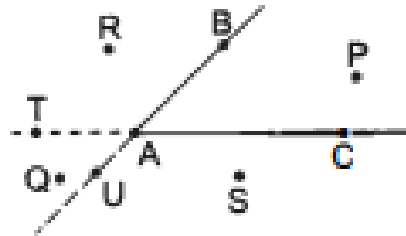
Definição 2.19. Dizemos que o ponto P está no interior do ângulo $\widehat{BAC}$ ou é ponto interior do ângulo $\widehat{BAC}$ se os pontos P e B estão no mesmo lado da reta AC e os pontos P e C estão no mesmo lado da reta AB . O interior do ângulo $\widehat{BAC}$ é o conjunto de todos os seus pontos interiores.

É possível mostrar que o interior de um ângulo é um conjunto convexo e que a união de um ângulo com o seu interior também é um conjunto convexo.

O exterior de $\widehat{BAC}$ é o conjunto dos pontos que não estão no interior e não estão no próprio ângulo $\widehat{BAC}$. Um ponto desse tipo é chamado de ponto exterior do ângulo $\widehat{BAC}$.

Na figura abaixo, P é ponto interior de $\widehat{BAC}$, pois P e B estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ e P e C estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Os pontos Q, R, T, S e U são pontos exteriores do $\widehat{BAC}$.

Figura 2.11: Pontos interiores e exteriores de $\widehat{BAC}$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

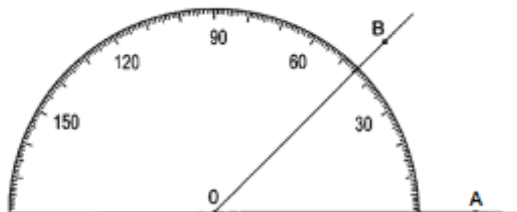
Postulado 8. (Postulado da Medida de Ângulos) A cada ângulo $\widehat{BAC}$ corresponde a um único número real entre 0 e 180.

Definição 2.20. Pelo postulado anterior, tem-se que:

- O número correspondente ao postulado anterior é chamado medida do ângulo, o que é denotado por $m\widehat{BAC}$.
- Ângulos que têm a mesma medida são chamados **ângulos congruentes**.

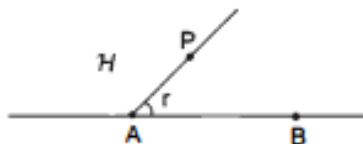
Se $\widehat{BAC}$ e $\widehat{PQR}$ são congruentes, isto é denotado por $\widehat{BAC} \cong \widehat{PQR}$.

Observação 2.21. A notação $m\widehat{BAC}$ representa a medida em graus do ângulo $\widehat{BAC}$, isto é, o número de graus do ângulo. Não será utilizado o símbolo ($^\circ$) para expressar essa medida.

Figura 2.12: $m\widehat{BOA} = 45$ 

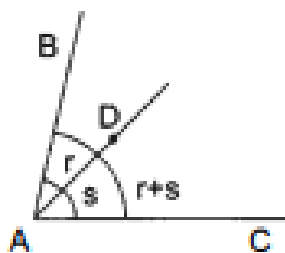
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Postulado 9. (Postulado da Construção do Ângulo). Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta contida na reta origem de um semiplano H . Para cada número r entre 0 e 180 existe exatamente uma semi-reta AP com P em H , tal que $m\widehat{PAB} = r$.

Figura 2.13: Construção do ângulo $\widehat{PAB}$ 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Postulado 10. (Postulado de Adição de Ângulos) Se D é um ponto interior do $\widehat{BAC}$, então $m\widehat{BAC} = m\widehat{BAD} + m\widehat{DAC}$.

Figura 2.14: Soma dos ângulos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{DAC}$ 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Na figura acima, r é a medida do ângulo $\widehat{BAD}$, s a medida do ângulo $\widehat{DAC}$ e $r + s$ denota a medida do ângulo $\widehat{BAC}$.

Definição 2.22. Se a soma das medidas de dois ângulos é 180, então dizemos que os ângulos são **suplementares** e que cada um é o **suplemento** do outro.

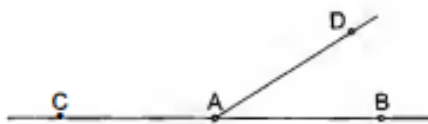
Definição 2.23. Se a soma das medidas de dois ângulos é 90, então os ângulos são chamados complementares, e cada um é o complemento do outro.

Um ângulo com medida menor que 90 é chamado **ângulo agudo**, e um ângulo com medida maior que 90 é chamado de **ângulo obtuso**.

É importante observar que estas definições não estão relacionadas às posições dos ângulos, apenas com suas medidas.

Definição 2.24. Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semi-retas opostas e $\overrightarrow{AD}$ é uma outra semi-reta, então $\widehat{BAD}$ e $\widehat{DAC}$ formam um **par linear**.

Figura 2.15: Par linear $\widehat{DAC}$



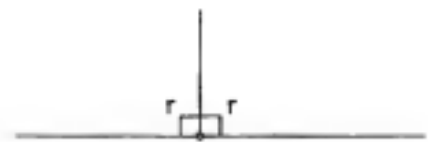
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Postulado 11. (Postulado do Suplemento) Se dois ângulos formam um par linear, então são suplementares.

Observação 2.25. Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ duas semi-retas tais que: ou são semi-retas opostas e D é um ponto pertencente a um dos semiplanos determinados pela reta AB , ou não estão contidas na mesma reta e D é um ponto interior ao ângulo $\widehat{BAC}$ por elas formado. Em ambos os casos, os ângulos DAB e DAC são chamados ângulos adjacentes.

Definição 2.26. Se os dois ângulos de um par linear são congruentes, então cada um é um **ângulo reto**.

Figura 2.16: Pares lineares congruentes



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Observação 2.27. Observe que pelo Postulado do Suplemento temos que um ângulo reto é um ângulo de medida 90.

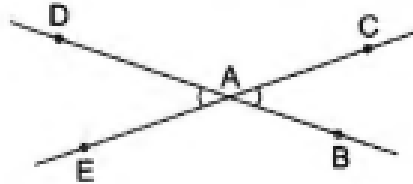
Definição 2.28. Dois conjuntos, sendo cada um deles uma reta, uma semi-reta, ou um segmento, são **perpendiculares** se as retas que os contêm determinam um ângulo reto. Se uma reta r é perpendicular a uma reta s , isso será denotado por $r \perp s$.

Definição 2.29. Dois ângulos são **opostos pelo vértice** se os lados de um são as semi-retas opostas aos lados do outro.

Teorema 2.30. Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração. Considere os ângulos opostos pelo vértice $\widehat{BAC}$ e $\widehat{DAE}$ tais que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE}$, e $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sejam dois pares de semi-retas opostas. Então, pelo Postulado do Suplemento, $\widehat{BAC}$ e $\widehat{CAD}$, e $\widehat{CAD}$ e $\widehat{DAE}$ são pares de ângulos suplementares. Assim $\widehat{BAC}$ e $\widehat{EAD}$ têm o mesmo suplemento. Portanto $m\widehat{CAB} = m\widehat{DAE}$. $\square$

Figura 2.17: Ângulos $\widehat{DAE}$ e $\widehat{CAB}$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Teorema 2.31. Se duas retas que se cortam formam um ângulo reto, então formam quatro ângulos retos.

Demonstração. Considere r e s duas retas que se cortam em um ponto A . Considere também os pontos B e D pertencentes a r tal que $B-A-D$ e os pontos C e E pertencentes a s tal que $C-A-E$. Pela Definição 2.24 temos que $\widehat{DAC}$ e $\widehat{BAC}$ são um par linear, e pelo Postulado do Suplemento temos que $\widehat{DAC}$ e $\widehat{BAC}$ são suplementares, como o ângulo $\widehat{DAC} = 90$ temos que $\widehat{BAC} = 90$. Pelo Teorema 2.30 temos que $m\widehat{DAE} = m\widehat{BAC} = 90$ e $m\widehat{DAC} = m\widehat{EAB} = 90$, ou seja, todos os ângulos formados são ângulos retos. $\square$

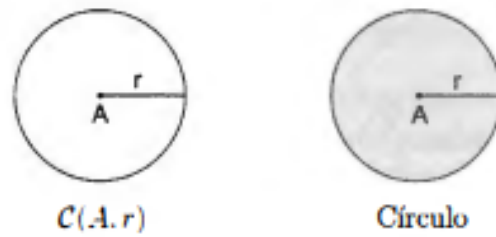
Definição 2.32. Sejam A um ponto e r um número real positivo. Definimos a **circunferência** de centro A e raio r , a qual denotamos por $C(A, r)$, como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância r do ponto A .

O **interior** de $C(A, r)$ é o conjunto de todos os pontos X tais que $AX < r$. Um ponto desse tipo é chamado **ponto interior** da circunferência.

O **exterior** de $C(A, r)$ é o conjunto de todos os pontos X tais que $AX > r$. Um ponto desse tipo é chamado ponto **exterior** da circunferência.

A união de uma circunferência com seu interior é chamada uma **região circular fechada** ou **círculo**.

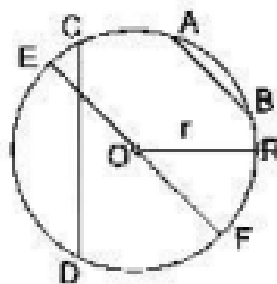
Figura 2.18: Circunferência e Círculo



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Definição 2.33. Chamamos de **corda** de uma circunferência qualquer segmento cujas extremidades sejam pontos pertencentes à circunferência. Qualquer corda de uma circunferência que contenha seu centro é chamada de **diâmetro** da circunferência. Um **raio** é também um segmento com uma extremidade sendo um ponto da circunferência e a outra, o centro da mesma. A medida do diâmetro da circunferência é o dobro da medida de seu raio.

Na figura abaixo $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são cordas da $C(O, r)$, sendo $\overline{EF}$ um diâmetro.



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Definição 2.34. Duas **circunferências** (ou também dois *círculos*) que possuem raios congruentes são **congruentes**.

Definição 2.35. Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 3$, uma sequência de n pontos distintos tais que os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ têm as seguintes propriedades:

- Nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades.
- Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

A união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ é chamada **polígono**, o qual será denotado polígono $A_1A_2\dots A_n$.

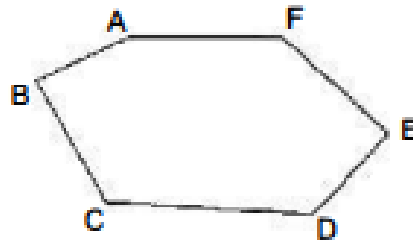
Os pontos $A_1, \dots, A_n$ são chamados **vértices** do polígono e os segmentos são seus **lados**.

A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada **perímetro** do polígono.

Definição 2.36. Um polígono é dito **convexo** se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados.

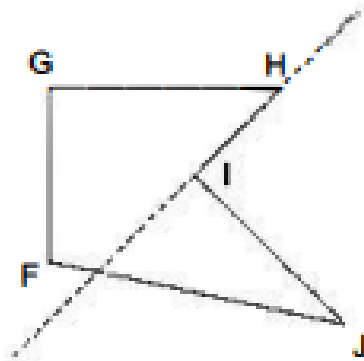
Assim, o polígono $ABCDE$ abaixo é convexo e o polígono $FGHTJ$ não é convexo.

Figura 2.20: Polígono $ABCDEF$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 2.21: Polígono $FGHIJ$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

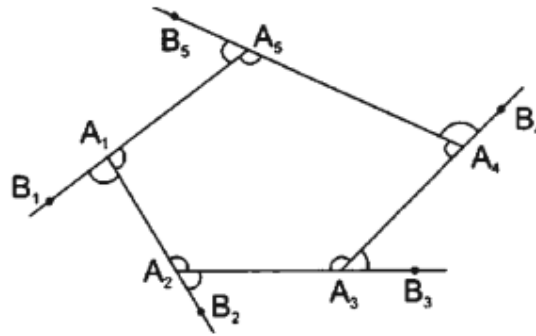
Os **ângulos** do polígono convexo são $\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$, $i = 2, \dots, n - 1$, e os ângulos $A_{n-1}A_nA_1$ e $A_nA_1A_2$.

São chamados **ângulos externos** do polígono convexo $A_1A_2\dots A_n$ cada um dos ângulos $B_iA_iA_{i+1}$, $i = 2, \dots, n - 1$, $B_nA_nA_1$ e $B_1A_1A_2$ em que B_i , distinto de A_i , é um ponto qualquer da semi-reta oposta a $\overrightarrow{A_iA_{i-1}}$, onde B_n distinto de A_n , está na semi-reta

oposta à $\overrightarrow{A_n A_{n-1}}$ e B_1 é distinto de A_1 , está, na semi-reta oposta à $\overrightarrow{A_1 A_n}$, ou também os seus correspondentes ângulos opostos pelo vértice.

Na figura 2.22, $\widehat{A_5 A_1 A_2}$, $\widehat{A_1 A_2 A_3}, \dots$ são ângulos do polígono $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ e $\widehat{B_2 A_2 A_3}$, $\widehat{B_3 A_3 A_4}$, são alguns de seus ângulos externos.

Figura 2.22: Ângulos internos e externos de um polígono



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Cada polígono é denominado de acordo com seu número de lados. Dessa forma, um polígono de 3 lados é chamado **triângulo**, um de 4 lados, **quadrilátero**, um de 5 lados **pentágono**, um de 6 lados, **hexágono** e, assim, um de n lados é chamado **n-ágono**.

Um **polígono regular** é um polígono convexo que possui seus lados dois a dois congruentes e seus ângulos dois a dois congruentes.

2.2 Congruência de Triângulos

Nesta seção será apresentado os três primeiros casos de congruência de triângulos e algumas de suas consequências.

2.2.1 Congruência

De definições anteriores temos que:

- Dois **segmentos** são **congruentes** se possuem a mesma medida ou comprimento.
- Dois **ângulos** são **congruentes** quando possuem a mesma medida.

De maneira geral, duas **figuras planas** são **congruentes** se uma delas puder ser deslocada, sem que sejam modificadas sua forma nem suas medidas, até que passe a coincidir com a outra. Se duas figuras F_1 e F_2 forem congruentes, isso será denotado por $F_1 \cong F_2$.

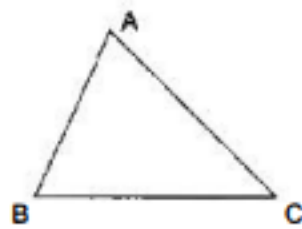
São congruentes, por exemplo, duas circunferências de mesmo raio.

E não são congruentes, por exemplo, duas circunferências que possuem raios diferentes.

Pode-se observar, dessa forma, que a congruência entre figuras planas satisfaz as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

Como definido anteriormente, por **triângulo** entendemos um polígono de três lados. Um triângulo ABC , denotado por $\triangle ABC$, tem por elementos os três **vértices**, que são os pontos A , B e C , os três lados, que são os segmentos AB , BC e CA e os três ângulos internos, que são $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ e $\widehat{CAB}$.

Figura 2.23: Triângulo ABC



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Um triângulo pode ser categorizado:

a) Quanto à medida de seus lados:

1. **triângulo equilátero**, quando possui os três lados dois a dois congruentes.
2. **triângulo isósceles**, quando possui dois de seus lados congruentes entre si. O terceiro lado é chamado **base** do triângulo isósceles.
3. **triângulo escaleno**, aquele em que quaisquer dois de seus lados têm medidas diferentes.

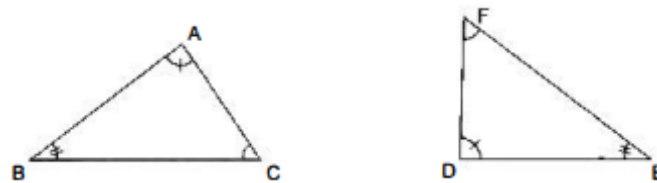
b) Quanto à medida de seus ângulos internos:

1. **triângulo retângulo**, quando possui um ângulo reto. Neste caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa** e os outros dois são chamados **catetos**.
2. **triângulo acutângulo**, quando possui os três ângulos agudos.
3. **triângulo obtusângulo**, quando possui um ângulo obtuso.
4. **triângulo equiângulo**, quando possui os três ângulos dois a dois congruentes

A congruência de triângulos se apresenta da seguinte forma:

Definição 2.37. Dois **triângulos** são **congruentes** se for possível definir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim, definida a correspondência $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$, entre os triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$, $\hat{C} \cong \hat{F}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, dizemos que os dois triângulos são congruentes, o que denotamos por $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Figura 2.24: Os triângulos ABC e DEF são congruentes



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Para verificarmos a congruência entre dois triângulos pela Definição 2.37, seria preciso verificarmos essas seis congruências entre seus elementos. Alguns resultados, entretanto, os chamados **casos de congruência entre triângulos**, vêm contribuir para facilitar essa verificação.

2.2.2 Os Três Primeiros Casos de Congruência de Triângulos e Consequências

O primeiro caso é apresentado em forma de postulado, os demais, como teoremas que são consequências desse postulado.

Postulado 12. (Primeiro Caso de Congruência de Triângulos ou Caso L.A.L.) Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Figura 2.25: Caso L.A.L. de congruência de triângulos



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Teorema 2.38 (Teorema do Triângulo Isósceles). Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração. Considere a correspondência que leva o triângulo ABC nele mesmo de modo que $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$. Por hipótese obtemos $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ e,

Figura 2.26: Triângulo isósceles ABC 

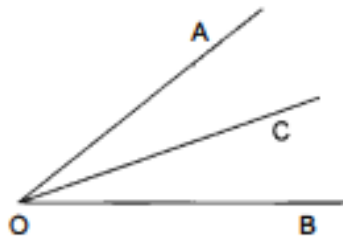
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

como $\widehat{A} \cong \widehat{A}$ segue, pelo caso $L.A.L$ de congruência de triângulos, que $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. Como consequência, temos $\widehat{B} \cong \widehat{C}$. $\square$

A recíproca desse teorema também é verdadeira, mas sua prova requer a demonstração do segundo caso de congruência.

Corolário 2.39. Todo triângulo equilátero possui seus três ângulos com a mesma medida.

Definição 2.40. Uma semi-reta OC é uma bissetriz de um ângulo $\widehat{AOB}$ se C está no interior de $\widehat{AOB}$ e $\widehat{AOC} \cong \widehat{BOC}$. Neste caso, temos $m\widehat{AOC} = m\widehat{BOC} = \frac{1}{2}m\widehat{AOB}$.

Figura 2.27: $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $\widehat{AOB}$ 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

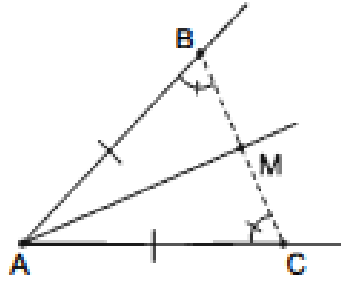
Teorema 2.41. Todo ângulo tem exatamente uma bissetriz.

Demonstração. Considere o ângulo $\widehat{A}$ da figura:

Tome os pontos B e C , um em cada lado de $\widehat{A}$, tais que $AB = AC$. Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, que está no interior de $\widehat{A}$. Pelo Teorema 2.38 aplicado ao triângulo ACB , obtemos a congruência dos ângulos ABM e ACM . Pelo caso $L.A.L.$ de congruência de triângulos, obtemos $\triangle ABM \cong \triangle ACM$. Como consequência temos $\widehat{BAM} \cong \widehat{CAM}$. Portanto $\overrightarrow{AM}$ é bissetriz do $\widehat{BAC}$.

Para mostrar a unicidade da bissetriz, suponha que uma outra semi-reta, AD , seja também uma bissetriz de $\widehat{A}$. Então $m\widehat{BAD} = m\widehat{BAM} = \frac{1}{2}m\widehat{BAC}$, do que resulta que $\overrightarrow{AD}$ coincide com $\overrightarrow{AM}$, pelo Postulado 9. Portanto $\overrightarrow{AM}$ é a única bissetriz de $\widehat{A}$. $\square$

Figura 2.28: Ilustração do Teorema 2.41



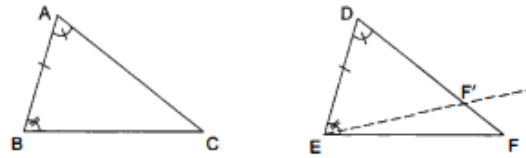
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Definição 2.42. Uma **bissetriz de um triângulo** é um segmento da bissetriz de cada ângulo do triângulo compreendido entre o vértice correspondente e o lado oposto.

Teorema 2.43. (Segundo Caso de Congruência de Triângulos ou Caso *A.L.A.*) Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$, então os triângulos são congruentes.

Demonstração. Considere os triângulos ABC e DEF , satisfazendo as hipóteses do teorema.

Figura 2.29: Ilustração do Teorema 2.43



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Seja F' um ponto da semi-reta DF tal que $DF' = AC$.

Ao compararmos os triângulos ABC e DEF' teremos que, como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF'}$, segue que eles são congruentes pelo caso *L.A.L.* Portanto $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF'}$.

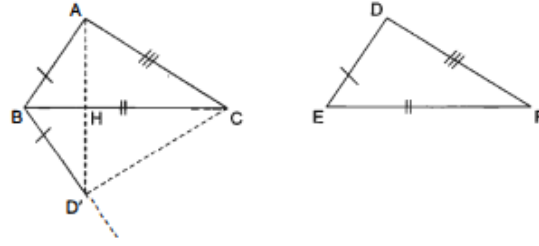
Como consequência desse fato e da hipótese segue que $\widehat{DEF} \cong \widehat{DEF'}$. Pelo Postulado 9, $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{EF'}$ coincidem.

Portanto F e F' são o mesmo ponto e temos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ □

Teorema 2.44. (Terceiro Caso de Congruência de Triângulos ou Caso *L.L.L.*) Se dois triângulos têm os três pares de lados correspondentes congruentes, então são triângulos congruentes.

Demonstração. Considerem os triângulos ABC e DEF tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$.

Figura 2.30: Ilustração do Teorema 2.44



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

No semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o ponto A , consideremos uma semi-reta de origem B formando com $\overleftrightarrow{BC}$ um ângulo congruente ao $\widehat{DEF}$. Escolhamos sobre ela um ponto D' tal que $BD' = DE$. Pelo caso *L.A.L.*, obtemos $\triangle D'BC \cong \triangle DEF$.

Agora vamos demonstrar que $\triangle ABC \cong \triangle D'BC$.

Vamos supor primeiro que H está entre B e C , como na figura anterior.

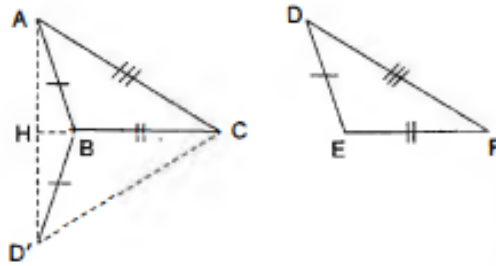
Pelo Teorema 2.38 aplicado a $\triangle BD'A$ e $\triangle CAD'$ respectivamente, obtemos $\widehat{BAD'} \cong \widehat{BD'A}$ e $\widehat{CAD'} \cong \widehat{CD'A}$.

Ao utilizarmos o Postulado 10, obtemos

$$m\widehat{BAC} = m\widehat{BAD'} + m\widehat{D'AC} = m\widehat{BD'A} + m\widehat{AD'C} = m\widehat{BD'C}.$$

Como consequência tem-se pelo caso *L.A.L.* que $\triangle ABC \cong \triangle D'BC$.

No caso em que B está entre H e C como na figura abaixo, ou ainda, no caso em que C está entre B e H , é demonstrado analogamente que $\triangle D'BC \cong \triangle DEF$ e que $\triangle ABC \cong \triangle D'BC$.

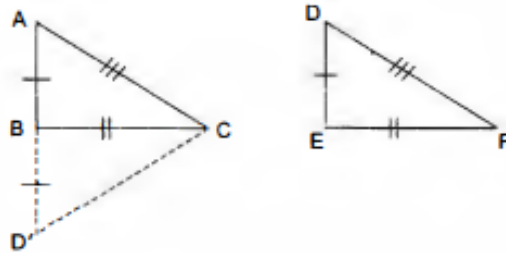
Figura 2.31: Caso onde B está entre H e C 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Em ambos os casos, temos por transitividade que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Agora para o caso em que $H = B$, isto é, A , B e D' são colineares.

Neste caso, $\widehat{A} \cong \widehat{D'}$, pelo Teorema 2.38 e, por transitividade, $\widehat{A} \cong \widehat{D}$. E novamente, pelo caso *L.A.L.* obtemos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Figura 2.32: Caso onde $H = B$ 

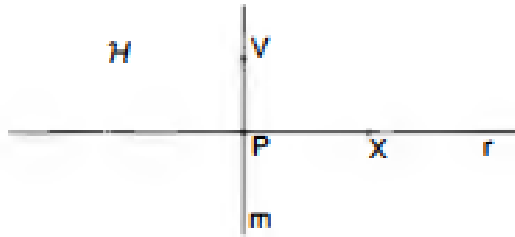
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Os outros dois, casos, $H = C$ ou $B - C - H$, são exatamente análogos aos casos anteriores. $\square$

Teorema 2.45. Por um ponto de uma reta dada passa uma única reta perpendicular a essa reta.

Demonstração. Considerem a reta r e o ponto P pertencente a r .

Figura 2.33: Ilustração do Teorema 2.45



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Seja H um dos semiplanos que contêm r como origem, e seja X um ponto de r distinto de P . Pelo Postulado 10, existe um ponto V em H tal que $\widehat{XPV}$ é um ângulo reto. Seja m a reta PV . Então $m \perp r$ e, assim, temos demonstrado que existe pelo menos uma reta que satisfaz as condições do teorema.

Para demonstrar a unicidade suponha que existam duas retas distintas m_1 e m_2 , passando pelo ponto P e perpendiculares a r , e contendo respectivamente os pontos V_1 e V_2 ambos pertencentes a H .

As retas m_1 e m_2 contêm respectivamente as semi-retas PV_1 e PV_2 , que estão no mesmo semiplano H , que tem r como origem. Pela Definição 2.28, $m\widehat{XPV_1} = 90$. De modo análogo, $m\widehat{XPV_2} = 90$. O que contradiz o Postulado 10, que diz que existe somente uma semi-reta PV com V em H , tal que $m\widehat{XPV} = 90$. Portanto tem-se uma única reta passando por P e perpendicular a r . $\square$

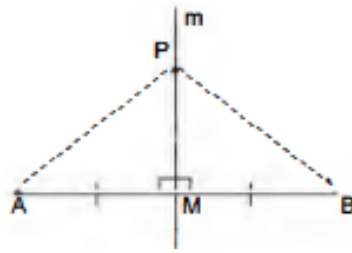
Definição 2.46. A **mediatriz** de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio.

Todo segmento tem exatamente um ponto médio, e pelo ponto médio passa exatamente uma reta perpendicular. Assim, a mediatriz é única.

Teorema 2.47. A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento.

Demonstração. Seja $\overline{AB}$ um segmento com ponto médio M . Seja m a mediatriz de $\overline{AB}$ e seja P um ponto pertencente a m .

Figura 2.34: Ilustração do Teorema 2.47



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

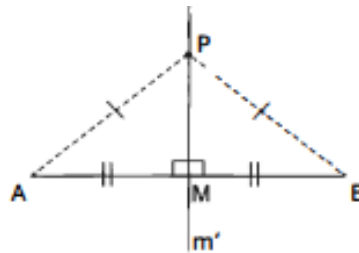
Se P está no segmento AB , então $P = M$ e portanto $PA = PB$, pela definição de ponto médio.

Se P não está no segmento $\overline{AB}$, então temos $PM = PM$, $MA = MB$ e $\widehat{PMA} = \widehat{PMB}$ pela hipótese. Pelo Postulado 12, temos $\triangle PMA \cong \triangle PMB$. Portanto $PA = PB$. Nos dois casos obtemos que P é equidistante dos pontos A e B .

Agora, seja P um ponto equidistante dos pontos A e B . Se P está em $\overline{AB}$, então P coincide com o ponto médio M de $\overline{AB}$, e, portanto, P está em m .

Consideremos agora o caso em que P não pertence a $\overline{AB}$.

Figura 2.35: Caso onde P não pertence a $\overline{AB}$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Seja $m' = \overleftrightarrow{PM}$. Como $PM = PM$, $MA = MB$ e $PA = PB$, pelo Teorema 2.44 temos $\triangle PMA \cong \triangle PMB$. Portanto $m\widehat{PMA} \cong m\widehat{PMB} = 90$, e, pela Definição 2.28, m'

é perpendicular a $\overline{AB}$. Pela unicidade da mediatriz temos $m = m'$ e, portanto, P está em m . $\square$

Definição 2.48. Uma **mediana** de um triângulo é um segmento cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto.

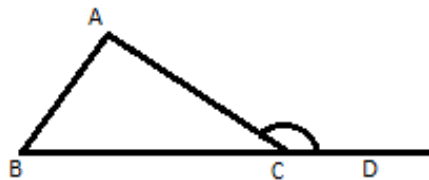
Teorema 2.49. Dado um triângulo isósceles ABC com base BC , a mediana desde o vértice A desse triângulo coincide com a bissetriz do triângulo correspondente ao ângulo $\hat{A}$.

Demonstração. Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, se M é ponto médio temos que $BM = MC$ e AM a mediana. E como $\triangle ABC$ é isósceles temos que $AB = AC$. Ao compararmos os triângulos formados $\triangle BAM$ e $\triangle CMA$ teremos que $AB \cong AC$, $BM \cong MC$ e a mediatriz AM é lado comum aos dois triângulos. Pelo Teorema 2.44 temos que $\triangle BAM \cong \triangle CMA$. O que implica que $\widehat{mBAM} \cong \widehat{mCAM}$, ou seja, AM é bissetriz do ângulo $\hat{A}$. $\square$

2.3 Desigualdades Geométricas

Definição 2.50. Se C está entre B e D então $\widehat{ACD}$ é um **ângulo externo** do triângulo ABC .

Figura 2.36: Ângulo externo $\widehat{ACD}$ do $\triangle ABC$



Fonte: Elaborada pelo autor

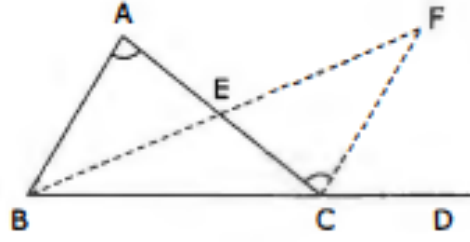
Neste caso, os ângulos A e B são os **ângulos internos não adjacentes** ao ângulo externo $\widehat{ACD}$.

Teorema 2.51 (Teorema do Ângulo Externo). Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos seus ângulos internos não adjacentes.

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer.

Seja um ponto D tal que C está entre B e D , demonstraremos que $\widehat{ACD} > \hat{A}$ e $\widehat{ACD} > \hat{B}$.

Figura 2.37: Ilustração do Teorema 2.51



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Seja E o ponto médio de $\overline{AC}$ e seja F o ponto da semi-reta oposta a $\overrightarrow{EB}$ tal que $EF = EB$.

Temos $\triangle BEA \cong \triangle FEC$ pelo Postulado 12, já que $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ e $\overline{BE} \cong \overline{FE}$ por construção e $\widehat{BEA} \cong \widehat{FEC}$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

Como consequência temos que $\widehat{A} \cong \widehat{ECF}$.

Podemos verificar que o ponto F é ponto interior ao ângulo $\widehat{ACD}$, pelo Postulado 10 aplicado aos ângulos ACD , ACF e FCD , obtemos $\widehat{ACD} > \widehat{A}$.

Para o caso $\widehat{ACD} > \widehat{B}$:

Tome G como sendo o ponto médio de $\overline{BC}$ e H o ponto da semi-reta oposta $\overrightarrow{AG}$ tal que $AG = GH$.

Tome o segmento $\overline{CH}$, poderemos formar o $\triangle GHC$ e verificar que $\triangle ABG \cong \triangle GHC$ pelo Postulado 10, pois, $\overline{BG} \cong \overline{GC}$, $\widehat{AGB} \cong \widehat{CGH}$ e $AG = GH$.

Portanto $\widehat{B} \cong \widehat{GCH}$ e pela Definição 2.29 temos que $\widehat{B} \cong \widehat{FCD}$. Pelo Postulado 10 aplicado aos ângulos ACD , ACF e FCD , temos que $\widehat{ACD} > \widehat{B}$.

Por consequência temos que $\widehat{ACD} = \widehat{A} + \widehat{B}$

□

Corolário 2.52. Se um triângulo tem um ângulo reto, então os seus outros dois ângulos são agudos.

Demonstração. Consideremos o $\triangle ABC$, retângulo em B , e o ponto D com B entre C e D . Podemos observar que $\widehat{DBA}$ e $\widehat{ABC}$ formam um par linear, portanto ambos são ângulos retos.

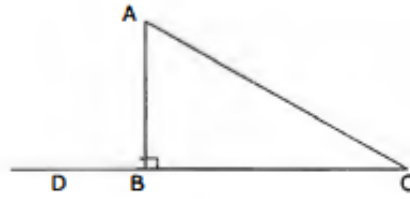
Pelo Teorema 2.51 $m\widehat{ABD} > m\widehat{C}$, e portanto $m\widehat{BCA} < 90$.

De maneira análoga, temos que $m\widehat{BAC} < 90$.

□

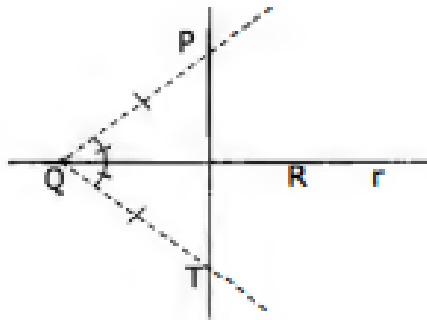
Teorema 2.53. Por um ponto não pertencente a uma reta, existe uma única reta perpendicular à reta dada.

Figura 2.38: Ilustração do Corolário 2.52



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 2.39: Ilustração da existência do Teorema 2.53



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Demonstração. Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a ela.

Primeiro provamos sua existência. Vamos construir por P uma reta conveniente e mostrar que ela é perpendicular à reta r . Sejam Q e R dois pontos distintos quaisquer de r . Se $\overrightarrow{PQ}$ ou $\overrightarrow{PR}$ for perpendicular a r , não há mais o que construir.

Caso contrário, consideremos, no semiplano determinado por r e que não contém P , uma semi-reta com origem no ponto Q , formando com $\overrightarrow{QR}$ um ângulo congruente ao $\widehat{PQR}$.

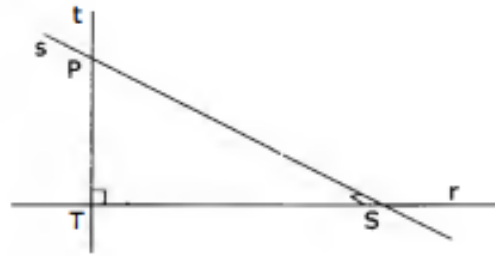
Seja T um ponto dessa semi-reta tal que $QP = QT$. O triângulo QTP assim determinado é isósceles com base $\overline{PT}$, sendo $\overrightarrow{QR}$ a bissetriz do ângulo $\widehat{TQP}$. Logo $\overrightarrow{PT}$ é perpendicular a r .

Agora provemos sua unicidade. Suponhamos que pelo ponto P não pertencente à reta r passem duas retas s e t , ambas perpendiculares à reta r , as quais cortam r nos pontos S e T respectivamente.

Dessa forma temos $\widehat{PTS}$ e $\widehat{PST}$ ambos ângulos retos do triângulo PTS , o que contradiz o Corolário 2.52. Logo a reta perpendicular é única. $\square$

Dado um ponto A e uma reta r , o ponto A' onde a perpendicular por A encontra a reta r é chamado **pé da perpendicular baixada de A até r** , ou também, **projeção**

Figura 2.40: Ilustração da unicidade do Teorema 2.53



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

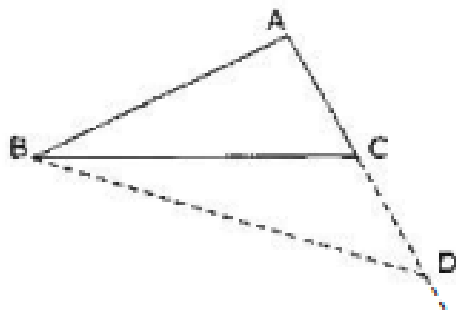
ortogonal de A sobre r (ou simplesmente projeção de A sobre r) e denotado por $proj_r A$. O ponto A'' pertencente à reta AA' tal que $A''A' = A'A$ é o simétrico do ponto A em relação à reta r .

A projeção ortogonal de um segmento AB qualquer sobre a reta r é o segmento $A'B'$, denotado por $proj_r AB$, tal que $A' = proj_r A$ e $B' = proj_r B$.

Teorema 2.54. Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados não são congruentes, e o ângulo maior é o oposto ao lado maior.

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer. Suponhamos $AB > AC$.

Figura 2.41: Ilustração do Teorema 2.54



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Seja D o ponto da $\overrightarrow{AC}$, tal que $AD = AB$. Sendo então ABD um triângulo isósceles, temos $\widehat{ABD} \cong \widehat{ADB}$.

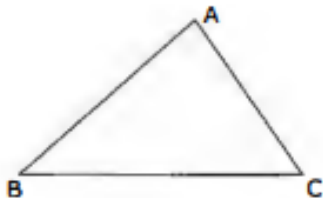
Da hipótese segue que $AD > AC$, e então C está entre A e D . Portanto, C está no interior do $\widehat{ABD}$ e, assim, pelo Postulado 10, obtemos $\widehat{mABD} > \widehat{mABC}$. Pelo Teorema 2.51 aplicado ao triângulo CBD , temos $\widehat{mADB} < \widehat{mACB}$. Com isso $\widehat{mABC} < \widehat{mABD} = \widehat{mADB} < \widehat{mACB}$.

A recíproca desse teorema também é válida. □

Teorema 2.55. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes, e o lado maior é o oposto ao ângulo maior.

Demonstração. Consideremos um $\triangle ABC$ com $m\hat{C} > m\hat{B}$. Queremos mostrar que $AB > AC$.

Figura 2.42: Ilustração do Teorema 2.55



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Tem-se três possibilidades para as medidas AB e AC : $AB = AC$, $AB < AC$ e $AB > AC$. Se $AB = AC$, então, pelo Teorema 2.38, temos que $\hat{B} \cong \hat{C}$, o que contradiz a hipótese. Se $AB < AC$, então pelo Teorema 2.55 temos $m\hat{C} < m\hat{B}$, o que contradiz a hipótese. Logo, a única possibilidade verdadeira é $AB > AC$. $\square$

Definição 2.56. Definimos **distância de um ponto A a uma reta r dada**, o que denotamos por $d(A, r)$ como:

- a) $d(A, r) = 0$, se A está em r .
- b) $d(A, r) = AA'$, onde A' é o pé da reta perpendicular a r passando por A , se A está fora de r .

2.3.1 Desigualdade Triangular

Teorema 2.57 (Desigualdade Triangular). A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado

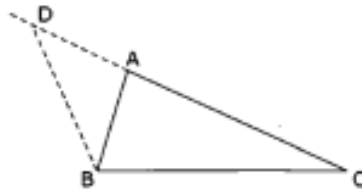
Demonstração. Consideremos ABC um triângulo qualquer. Queremos mostrar que $AB + AC > BC$.

Seja D um ponto da semi-reta oposta a $\overrightarrow{AC}$ tal que $AD = AB$. O triângulo ADB é então isósceles com base $\overline{BD}$. Como A está entre C e D , temos $DC = DA + AC$, ou seja, $DC = AB + AC$. Temos, $\widehat{BDC} \cong \widehat{DBA} < \widehat{DBC}$ e, pelo Teorema 2.55 aplicado ao triângulo DBC obtemos $BC < DC$. Logo $AB + AC > BC$, $\square$

2.4 Postulado das Paralelas e a Geometria Euclidiana

Nesta seção, após alguns resultados, será apresentado o Postulado das Paralelas ou Postulado de Euclides, que caracteriza a Geometria Euclidiana.

Figura 2.43: Ilustração do Teorema 2.57



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

2.4.1 Condições para o Paralelismo de Retas

Teorema 2.58. Duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.

Demonstração. Sejam s e t retas distintas perpendiculares a uma mesma reta r .

Figura 2.44: Ilustração do Teorema 2.58



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Se s e t não fossem paralelas, r , s e t determinariam um triângulo com dois ângulos retos, o que é absurdo, pois contradiz o Corolário 2.52. $\square$

Observação 2.59. Quando uma reta r for paralela a uma reta s , esse fato será denotado por $r \parallel s$.

Teorema 2.60. Por um ponto não pertencente a uma reta, passa pelo menos uma reta paralela à reta dada.

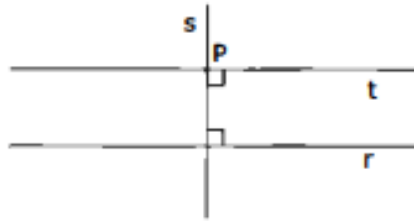
Demonstração. Considere a reta r e um ponto P não pertencente a ela.

Seja s a reta passando por P e perpendicular a r , e seja t a reta passando por P e perpendicular a s . Pelo Teorema 2.60, temos que $t \parallel r$. $\square$

Definição 2.61. Uma **transversal** a duas retas é uma reta que intersecciona essas duas retas em dois pontos distintos. Neste caso dizemos que as duas retas são cortadas pela transversal.

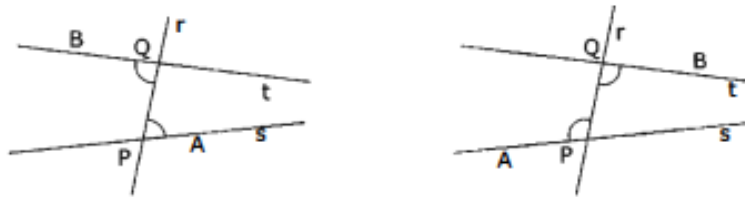
Observação 2.62. Se s e t forem concorrentes, uma reta que cruza as duas retas no ponto comum não é uma transversal.

Figura 2.45: Ilustração do Teorema 2.60



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Definição 2.63. Seja r uma transversal às retas s e t , interseccionando-as nos pontos P e Q , respectivamente. Seja A um ponto de s e B um ponto de t , tais que A e B estejam em lados opostos de r . Os ângulos APQ e BQP são chamados **ângulos alternos internos** formados por s , t e a transversal r .

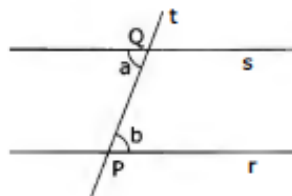
Figura 2.46: Reta r transversal às retas s e t 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Teorema 2.64. Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas.

Demonstração. Sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal nos pontos P e Q respectivamente. Sejam $\hat{a}$ e $\hat{b}$ os ângulos alternos internos congruentes.

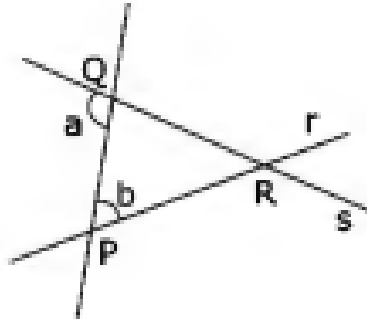
Figura 2.47: Ilustração do Teorema 2.64



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Se r e s se interseccionam em algum ponto R , como na figura abaixo, elas formam um triângulo RQP do qual $\hat{a}$ é um ângulo externo, sendo $\hat{b}$ um ângulo interno não adjacente a ele.

Figura 2.48: Ilustração da contradição do Teorema 2.64



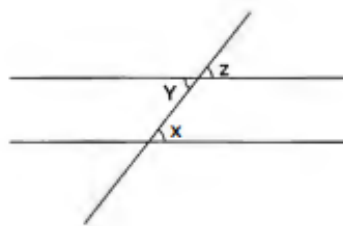
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Pelo Teorema 2.51 temos $\hat{a} > \hat{b}$, o que contradiz nossa hipótese.

Logo r e s são paralelas. □

Definição 2.65. Sejam $\hat{x}$ e $\hat{y}$ ângulos alternos internos formados por duas retas cortadas por uma transversal. Se $\hat{z}$ tal que $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são ângulos opostos pelo vértice, então $\hat{x}$ e $\hat{z}$ são ditos **ângulos correspondentes**.

Figura 2.49: Ângulos correspondentes $\hat{x}$ e $\hat{z}$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Teorema 2.66. Se duas retas são cortadas por uma transversal, e se dois ângulos correspondentes são congruentes, então as retas são paralelas.

2.4.2 O Postulado das Paralelas

Postulado 13. (Postulado das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.

Teorema 2.67. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

Teorema 2.68. Segue que:

- a) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam pares de ângulos correspondentes congruentes.
- b) Duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.
- c) Se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então é perpendicular à outra.
- d) A medida de cada ângulo de um triângulo equilátero é 60.

Teorema 2.69. A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180.

Corolário 2.70. .

- a) Seja dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então o terceiro par é também de ângulos correspondentes congruentes.
- b) Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.
- c) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes.

2.4.3 Quadriláteros

Definição 2.71. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.

Lados opostos de um quadrilátero são dois de seus lados que não se interseccionam. Dois lados são **consecutivos** se têm um vértice comum.

Uma **diagonal** é um segmento que une dois vértices não consecutivos.

Definição 2.72. Um **paralelogramo** é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos, isto é, as retas que contêm esses lados são paralelas .

Teorema 2.73. Em um paralelogramo valem as seguintes propriedades:

- a) Cada diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes. Isto é, se $ABCD$ é um paralelogramo, então $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ e $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.
- b) Dois lados opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

- c) Dois ângulos opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.
- d) Dois ângulos consecutivos quaisquer em um paralelogramo são suplementares.

Corolário 2.74. Se r e s são retas paralelas e se A e B são dois pontos quaisquer em r , então as distâncias de A e B a s são iguais.

Definição 2.75. A **distância entre duas retas paralelas** é a distância de qualquer ponto de uma delas à outra.

Teorema 2.76. O segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade de seu comprimento.

Definição 2.77. .

- a) Um **losango** é um paralelogramo cujos lados são congruentes.
- b) Um **retângulo** é um paralelogramo cujos ângulos são retos.
- c) Um **quadrado** é um retângulo cujos lados são congruentes.

Teorema 2.78. É válido afirmar que:

- a) Se um paralelogramo tem um ângulo reto, então tem quatro ângulos retos, e o paralelogramo é um retângulo.
- b) Em um losango, as diagonais são perpendiculares e se biseccionam.
- c) Se as diagonais de um quadrilátero se biseccionam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.

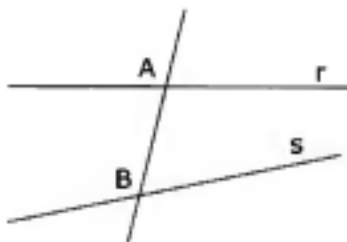
2.4.4 O Teorema Fundamental da Proporcionalidade e o Teorema de Tales

Definição 2.79. Se uma transversal intersecciona duas retas r e s , respectivamente, nos pontos A e B , dizemos que r e s determinam o segmento AB sobre a transversal.

Se uma transversal intersecciona três retas r , s e t nos pontos A , B e C , respectivamente, e se $AB = BC$, então dizemos que as três retas determinam segmentos congruentes sobre a transversal.

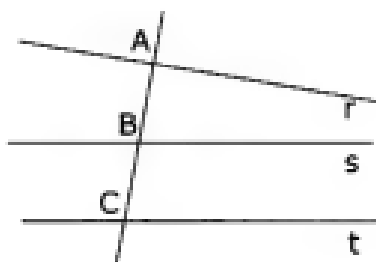
Teorema 2.80. Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, então determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Corolário 2.81. Se três ou mais retas paralelas determinam segmentos congruentes em uma transversal, então determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.

Figura 2.50: Segmento AB sobre a transversal

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 2.51: Segmentos congruentes sobre a transversal



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Lema 2.82. Dados dois segmentos AB e CD , temos $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m}$ onde n e m são números inteiros positivos se, e somente se, existe um segmento de comprimento, tal que $AB = nc$ e $CD = mc$.

Observação 2.83. Observamos que, quando $\frac{AB}{CD}$ é um número irracional a situação acima não ocorre.

Teorema 2.84 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados em pontos distintos, então ela os divide na mesma razão.

Temos a recíproca desse teorema.

Teorema 2.85. Se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.

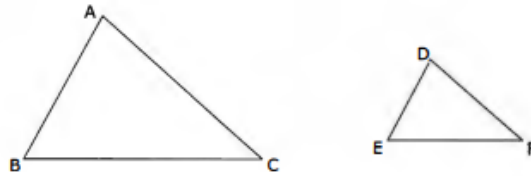
Teorema 2.86 (Teorema de Tales). Se duas retas são transversais a um conjunto de três ou mais retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre a outra.

2.5 Semelhança de Triângulos

Definição 2.87. Seja S uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência S é uma semelhança, e dizemos que os triângulos são semelhantes.

Consideremos os triângulos ABC e DEF como na figura.

Figura 2.52: Triângulos ABC e DEF semelhantes



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ para denotar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF , com a correspondência que leva A em D , B em E , e C em F .

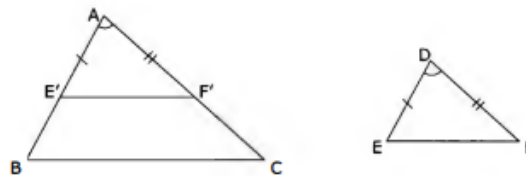
Dessa maneira, se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ temos $m\hat{A} = m\hat{D}$, $m\hat{B} = m\hat{E}$, $m\hat{C} = m\hat{F}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{DF}$.

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de **razão de proporcionalidade** ou **razão de semelhança entre os dois triângulos**.

Pode-se observar que dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança igual a um, então eles são congruentes.

Teorema 2.88. (*O Teorema de Semelhança A.A.A.*) Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

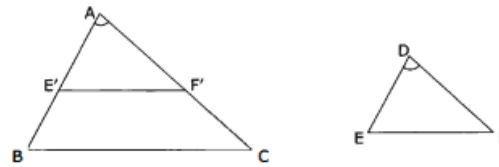
Figura 2.53: Caso de semelhança A.A.A.



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Teorema 2.89. (*O Teorema de Semelhança L.A.L.*) Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

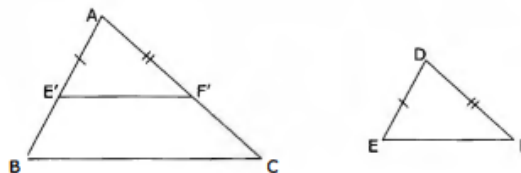
Figura 2.54: Caso de semelhança $L.A.L.$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Teorema 2.90. (*O Teorema de Semelhança L.L.L.*) Se dois triângulos ABC e DEF são tais que seus lados satisfazem a relação $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Figura 2.55: Caso de semelhança $L.L.L.$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

3 Transformações no Plano

Transformações geométricas são funções que associam a cada ponto do plano um outro ponto também do plano através de certas relações. Uma transformação no plano Π é uma função $F : \Pi \rightarrow \Pi$ que associa a cada ponto X do plano a um outro ponto X' tal que $X' = T(X)$.

As transformações que utilizaremos aqui são todas *bijetivas*, ou seja, transformações em que pontos distintos possuem sempre imagens distintas e também que cada ponto do plano é imagem de um outro ponto desse plano.

Uma transformação T possui as seguintes propriedades:

- a) Uma transformação bijetiva $T : \Pi \rightarrow \Pi$ possui uma inversa $T^{-1} : \Pi \rightarrow \Pi$ onde para todo ponto X' de Π , $T^{-1}(X')$ é o único ponto X do plano Π tal que $T(X) = X'$.
- b) Uma transformação identidade $Id : \Pi \rightarrow \Pi$ é definida por $Id(X) = X$ para todo ponto X do plano Π .
- c) Dada duas transformações T_1 e T_2 no plano definimos a composta $T_1 \circ T_2 : \Pi \rightarrow \Pi$ como a transformação que a cada ponto X do plano Π , associa o ponto

$$X' = (T_1 \circ T_2)(X) = T_1(T_2(X)).$$

- d) Para qualquer transformação bijetiva T temos

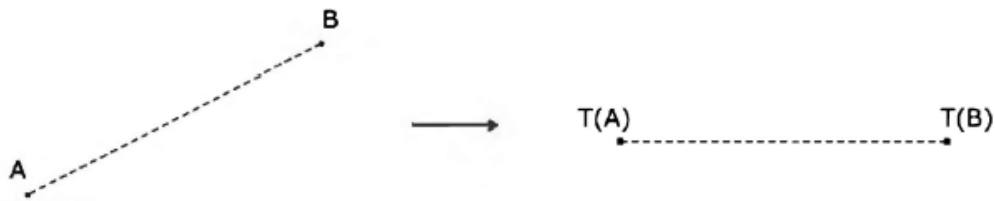
$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id.$$

- e) Se F é uma figura (portanto um conjunto de pontos de Π) definiremos $T(F) = [T(X), X \in F]$.

3.1 Isometrias e a Congruência

Definição 3.1. Isometrias são transformações no plano que preservam distâncias, isto é, se T é uma isometria, para qualquer par de pontos A e B valem a relação $T(A)T(B) = AB$ para quaisquer pontos A e B do plano Π .

Figura 3.1: Transformação dos pontos $AB = T(A)T(B)$



Fonte:

Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

A partir da Definição 3.1, pode-se facilmente verificar que a transformação inversa de uma isometria é também uma isometria.

Teorema 3.2. Uma isometria T possui as seguintes propriedades:

- a) T leva pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se A, B e C são pontos tais que, B está entre A e C , então $T(B)$ está entre $T(A)$ e $T(C)$, ou seja, T preserva a relação "estar entre".
- b) T leva retas em retas. Como consequência dos itens a) e b), T leva semi-retas em semi-retas; leva ângulos em ângulos e segmentos em segmentos.
- c) T preserva medidas de ângulos.
- d) T preserva paralelismo entre retas, isto é, se r e s são retas paralelas, então $T(r)$ e $T(s)$ também são paralelas.
- e) T leva circunferências em circunferências.

Demonstração. .

- a) Consideremos os pontos colineares A, B e C , tais que $A - B - C$ e sejam A', B' e C' suas imagens pela isometria T .

Figura 3.2: A isometria T leva pontos colineares em pontos colineares



Fonte:

Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Como $A - B - C$ então $AB + BC = AC$. Sendo T uma isometria, segue que $A'B' + B'C' = A'C'$, ou seja, B' está entre A' e C' e, portanto, A', B' e C' são colineares.

- b) Consideremos a reta AB . Como T leva pontos colineares em pontos colineares, então $T(\overleftrightarrow{AB}) \subset \overleftrightarrow{A'B'}$.

Analogamente $T^{-1}(\overleftrightarrow{A'B'}) \subset \overleftrightarrow{AB}$. Então, $\overleftrightarrow{A'B'} = T(T^{-1}(\overleftrightarrow{AB})) \subset T(\overleftrightarrow{AB})$. Portanto $T(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{A'B'}$.

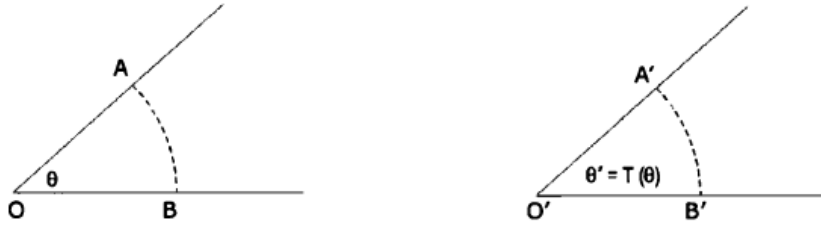
Seja a semi-reta $\overrightarrow{AB}$. Como $\overrightarrow{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$, consequentemente pelos itens a) e b) teremos que $T(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$.

Tomemos o segmento $\overline{AB}$. Como $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$ por consequência dos itens a) e b) teremos que $T(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$.

Seja o ângulo $\widehat{AOB}$ formado pelos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Como consequência dos itens a) e b) citados anteriormente teremos que $\overline{OA} = \overline{O'A'}$ e $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ logo $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$

- c) Consideremos o ângulo θ com vértice O e sua imagem $\hat{\theta}' = T(\hat{\theta})$ um ângulo com vértice O' .

Figura 3.3: A isometria T preserva ângulos



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Ao escolhermos pontos A e B , um em cada lado de θ , tal que $OA = OB$. Como A' e B' são imagens de A e B pela isometria T , temos $O'A' = O'B'$.

Ainda pela definição temos que $A'B' = AB$.

Logo pelo caso *L.L.L.* os triângulos AOB e $A'O'B'$ são congruentes, ou seja, portanto os ângulos θ e θ' também são congruentes.

- d) Consideremos as retas paralelas r e s e suas imagens $r' = T(r)$ e $s' = T(s)$.

Figura 3.4: A isometria T preserva paralelismo entre retas



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Suponhamos, por absurdo, que as retas r' e s' sejam concorrentes no ponto O , com $O = T(A) = T(B)$, sendo A ponto de s e B ponto de r . Isso contraria a definição de isometria tendo em vista que A e B são pontos distintos do plano.

Logo r' e s' são paralelas.

- e) Consideremos a circunferência $C(O, r)$ (circunferência C de centro O e raio r). Pela definição de isometria obtemos facilmente que $T(C(O, r)) \subset C(T(O), r)$. Agora, seja Q' um ponto de $C(T(O), r)$, ou seja, $T(O)Q' = r$. Temos então que $T(O)T(Q') = r$ para um Q qualquer. Portanto $\overline{OQ} = r$, isto é, Q' é imagem do ponto Q tal que $Q \in C(O, r)$.

□

Estas propriedades nos levam às seguintes definições de congruência entre duas figuras planas.

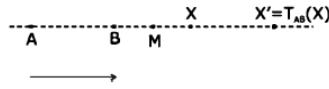
Definição 3.3. Duas figuras F e G no plano são congruentes se existe uma isometria tal que G é imagem de F por essa isometria.

Definição 3.4. A identidade I tal que $I(A) = A$ para qualquer ponto A do plano, é uma isometria.

3.1.1 Translação

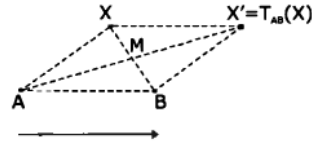
Definição 3.5. Sejam A e B pontos distintos do plano. A translação $T_{AB}(X)$ é a isometria que leva um ponto X do plano ao ponto $T_{AB}(X) = X'$, tal que $ABX'X$ é um paralelogramo, se A , B e X não são colineares. Se A , B e X são colineares, então T_{AB} é tal que $\overline{XX'}$ está na reta AB e os segmentos AX' e BX possuem o mesmo ponto médio.

Figura 3.5: $T_{AB}(X)$ quando A , B e X são colineares



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 3.6: $T_{AB}(X)$ quando A , B e X não são colineares

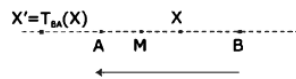


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

É importante ressaltar que o sentido de X para X' é o mesmo de A para B , e que também é válido para o caso não colinear que, $\overline{AX'}$ e $\overline{BX}$ têm o mesmo ponto médio M .

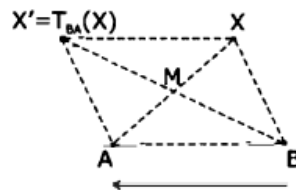
Dado os mesmos pontos A e B , pode-se também considerar a translação T_{BA} onde é definida da mesma forma que T_{AB} porém com sentido oposto ao sentido de T_{AB} .

Figura 3.7: $T_{BA}(X)$ quando A , B e X são colineares



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 3.8: $T_{BA}(X)$ quando A , B e X não são colineares

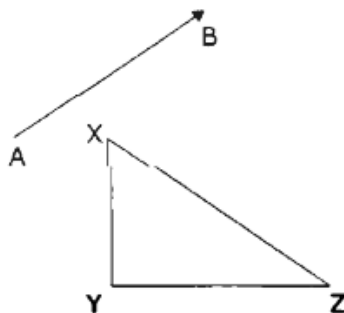


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Nesse caso M será o ponto médio dos segmentos AX e BX' e será formado o paralelogramo $ABXX'$.

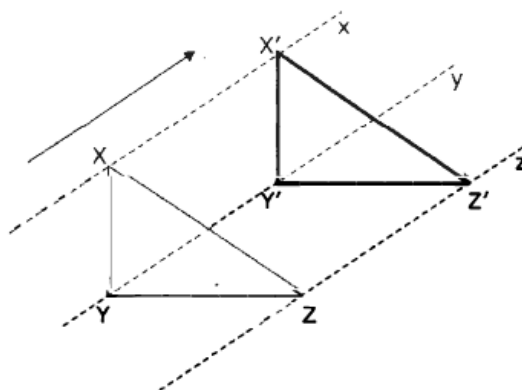
Exemplos

1. Dados os pontos A e B , determinar a translação T_{AB} de um triângulo XYZ dado pela figura.

Figura 3.9: Triângulo XYZ 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Demonstração. Sejam X , Y e Z pontos que formam o triângulo XYZ e $\overline{AB}$ o segmento formado pelos pontos A e B , ao transportarmos $\overline{AB}$ sobre as retas x , y e z , paralelas a $\overline{AB}$ que passam pelos pontos X , Y e Z respectivamente, no sentido de A para B teremos os pontos X' , Y' e Z' , o triângulo $X'Y'Z'$ é a translação que procuramos.

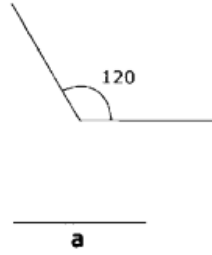
Figura 3.10: T_{AB} do triângulo XYZ 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

□

2. Dado um ângulo $\widehat{AOB}$ e um número a positivo. Encontre um ponto R em $\overrightarrow{OB}$ e um ponto S em $\overrightarrow{OA}$, tal que $RS = a$ e $m\widehat{SRB} = 120$.

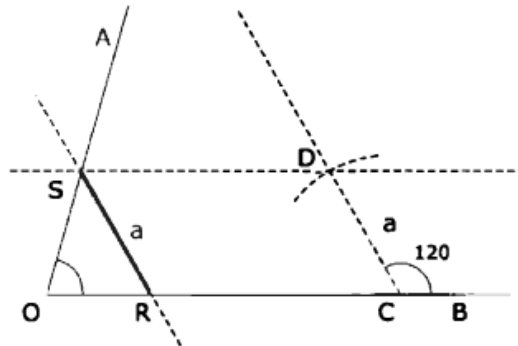
Figura 3.11: Ângulo $\widehat{AOB}$ e número a positivo



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Demonstração. Temos como primeiro caso que, se $m\widehat{AOB} = 120$, podemos transportar o segmento com medida a na semi-reta $\overrightarrow{OA}$ partindo do ponto O , teremos assim o ponto S em $\overrightarrow{OA}$ e o ponto R estará coincidindo com o ponto O , ou seja, $\overline{RS} = \overline{OS}$. Caso $m\widehat{AOB} \neq 120$ deveremos considerar um ponto C em $\overrightarrow{OB}$ tal que O, C e B são colineares. Ao transportarmos um segmento com medida a em uma semi-reta com origem no ponto C que forme um ângulo de 120° com $\overrightarrow{CB}$ o obtivermos um ponto D . O ponto S será obtido pela interseção de $\overrightarrow{OA}$ com a reta paralela a $\overrightarrow{OB}$ pelo ponto D .

Figura 3.12: Pontos R e S pedidos pelo exemplo



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

O Ponto R será obtido através da translação T_{DS} do ponto C .

□

3.1.2 Reflexão em Retas

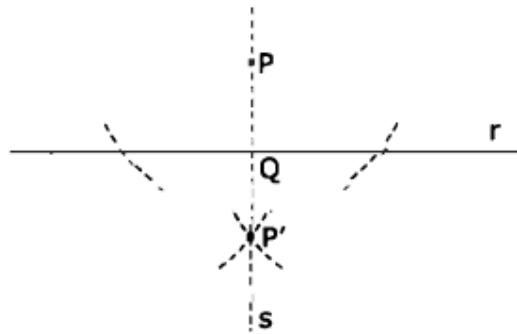
Definição 3.6. Considere uma reta r . A isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P em seu simétrico P' em relação à reta r , é chamada de reflexão na reta r ,

ou simetria de reflexão na reta r a qual vamos indicar por R_r . A reta r é chamada de eixo de reflexão de R_r .

Em seguida, determinaremos graficamente o simétrico P' de um ponto P não pertencente a uma reta r em relação à mesma.

Basta considerar uma reta s , perpendicular à r que contenha o ponto P , e tomarmos P' em s , onde $P \neq P'$, tal que $P'Q = PQ$, onde $Q = \text{proj}_r P$. Podemos observar que a reta r é a mediatriz de $\overline{PP'}$.

Figura 3.13: Representação gráfica de $R_r P$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

As propriedades a seguir são consequências imediatas da Definição 3.6.

Propriedades da Reflexão em Retas

Valem as propriedades:

- $R_r(P) = P$ se e somente se P é ponto de r .
- Se s é uma reta perpendicular a r , então $R_r(s) = s$.
- $R_r(R_r(P)) = P$, para todo ponto P do plano.
- A transformação inversa de uma reflexão em uma reta r é uma reflexão nessa mesma reta.

Demonstração.

- Seja P um ponto pertencente à reta r . Para determinarmos $R_r(P)$ podemos traçar uma reta s perpendicular a r que contenha o ponto P , em seguida tomamos um ponto P' em s tal que $PQ = QP'$, onde $Q = \text{proj}_r P$. Podemos observar que $\text{proj}_r P = P$, ou seja, $Q = P$ o que implica que $Q = P = P'$ como resultado teremos que $R_r(P) = P$.

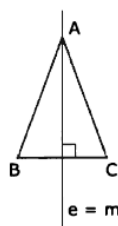
- b) Sejam as retas r e s tal que s é perpendicular a r . Para determinarmos $R_r(s)$ podemos tomar um ponto S qualquer pertencente a s e outro ponto S' também pertencente a s tal que $SQ = QS'$ onde $Q = \text{proj}_r S$. Podemos observar que para cada ponto $S \in s$ existe também $S' \in s$, ou seja, $R_r(s) = s$.
- c) Caso $P \neq P'$, ou seja, o ponto $P \notin r$, basta traçarmos uma reta s , perpendicular à r que contenha o ponto P , e tomarmos P' em s , tal que $PQ = P'Q$, onde $Q = \text{proj}_r(P)$, assim teremos P' onde $P' = R_r(P)$. Ao realizarmos $R_r(P')$ podemos novamente considerar uma reta s perpendicular à r que contenha o ponto P' e tomarmos P em s , tal que $P'Q = PQ$, onde $Q = \text{proj}_r(P')$, assim teremos P onde $P = R_r(P')$, sendo assim $R_r(R_r(P)) = P$. Caso $P = P'$, ou seja, $P \in r$ segue o item a.
- d) Temos que a transformação inversa será aquela que levará o resultado, nesse caso P' , ao seu "ponto original" P . Considere uma reta r e um ponto P' , como demonstrado no item anterior podemos levar P' em P através da transformação $R_r(P') = P$, onde a mesma tem o papel de transformação inversa "desfazendo" a reflexão, ou seja, nesse caso $R_r(P') = R_r^{-1}(P')$, por consequência temos que a transformação inversa de uma reflexão sobre uma reta r também é uma reflexão sobre essa mesma reta.

□

Algumas figuras podem coincidir com suas imagens pela reflexão em relação a alguma reta r . Dizemos que essas figuras são simétricas em relação a r , ou ainda, que elas possuem simetria de reflexão em reta ou simetria axial. Nesse caso r é chamada de eixo de simetria da figura, o qual será denotado pela letra e .

Como exemplo temos um triângulo isósceles ABC , o qual possui eixo de simetria igual à mediatriz da base $\overline{BC}$ do triângulo.

Figura 3.14: Eixo de simetria do triângulo isósceles ABC

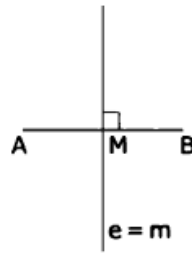


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Outros exemplos de importantes figuras geométricas que possuem um ou mais eixos de simetria:

- Um segmento AB possui como eixo de simetria a sua mediatriz.

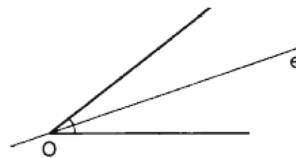
Figura 3.15: Eixo de simetria de um segmento AB qualquer



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- Um ângulo possui a reta suporte de sua bissetriz como eixo de simetria.

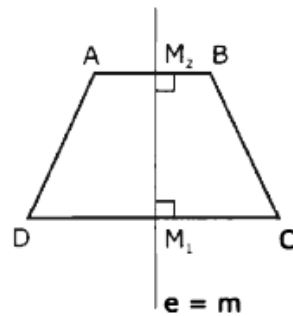
Figura 3.16: Eixo de simetria de ângulo qualquer



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- O trapézio isósceles também possui como eixo de simetria a mediatriz de suas bases.

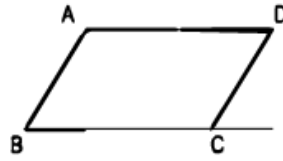
Figura 3.17: Eixo de simetria do trapézio isósceles



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- O paralelogramo, em geral, não possui eixo de simetria

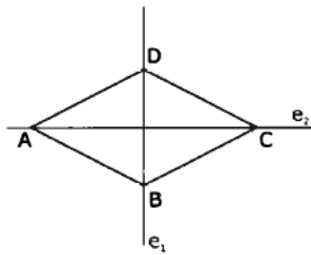
Figura 3.18: Um paralelogramo não possui eixo de simetria



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

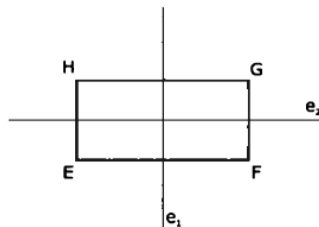
- Mas os particulares, losango e o retângulo possuem dois eixos de simetria e_1 e e_2 .

Figura 3.19: Eixos de simetria do losango



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

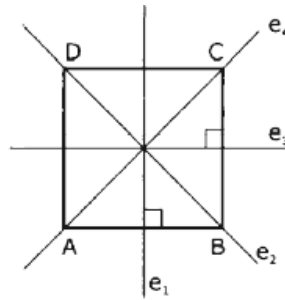
Figura 3.20: Eixos de simetria do retângulo



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- O quadrado é simétrico em relação a quatro eixos de simetria, que são as retas suporte de suas diagonais e as mediatrizes dos seus lados.

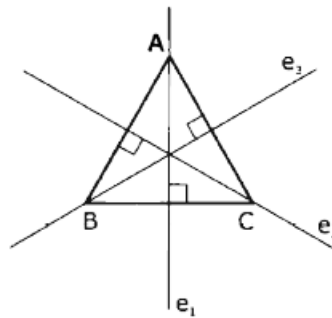
Figura 3.21: Eixos de simetria do quadrado



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- O triângulo equilátero possui simetria em relação a três eixos, que são as retas suportes de suas medianas.

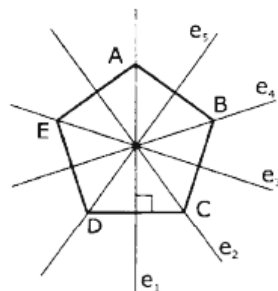
Figura 3.22: Eixos de simetria do triângulo equilátero



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

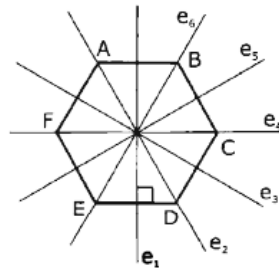
- Generalizando, qualquer polígono regular de n lados possui n eixos de simetria.

Figura 3.23: Eixos de simetria de um pentágono regular



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

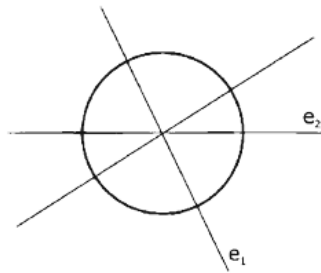
Figura 3.24: Eixos de simetria de um hexágono regular



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- A circunferência possui simetria em relação a reta suporte de qualquer um de seus diâmetros.

Figura 3.25: Eixos de simetria de uma circunferência

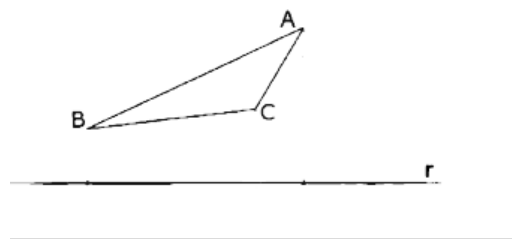


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Exemplos de Aplicações da Reflexão em Retas

1. Determinaremos a reflexão do triângulo ABC em relação a uma reta r , sendo que o triângulo está contido inteiramente em um dos semiplanos determinados pela reta r .

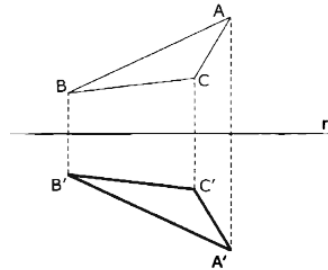
Figura 3.26: Triângulo ABC e a reta r



Fonte: Elaborada pelo autor

Pode-se observar que o sentido da rotação dos vértices A', B' e C' é oposto ao sentido de rotação dos vértices A, B e C do triângulo original.

Figura 3.27: Reflexão do triângulo ABC em relação a reta r



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

2. Uma mulher mora na casa A , quer buscar água no rio r e levá-la à casa B , do mesmo lado do rio. Determinaremos graficamente o menor caminho a ser percorrido, para que essa tarefa possa ser realizada.

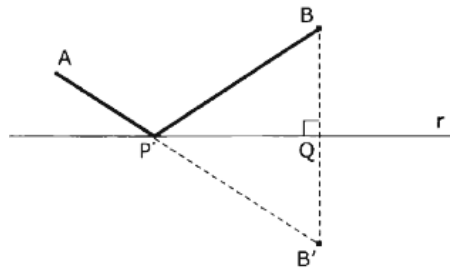
Figura 3.28: Representação do problema proposto



Fonte: Elaborada pelo autor

O menor caminho seria APB , com o ponto P pertencente à intersecção da reta r com o segmento AB' e $B' = R_r(B)$. Essa afirmação é válida, pois $AB' = AP + PB'$ e, $PB = PB'$ pela congruência de triângulos retângulos PQB e PQB' , onde $Q = proj_r B$. Para qualquer outro ponto P' de r tal que $P \neq P'$ teremos, pela desigualdade triangular $AP' + P'B' > AB'$ e, portanto, $AP' + P'B > AB$.

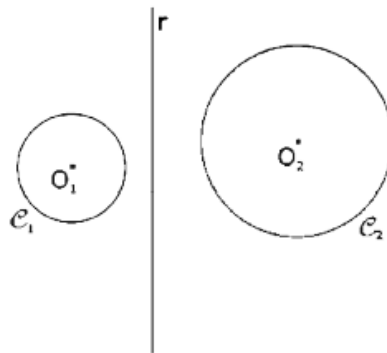
Figura 3.29: Solução do problema proposto



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

3. Considere uma reta r e duas circunferências C_1 e C_2 , de centros O_1 e O_2 respectivamente, situadas uma em cada lado de r , como na figura. Vamos construir um quadrado $ABCD$ que tenha dois vértices opostos em r e, os outros dois, um em cada uma das circunferências.

Figura 3.30: Representação do problema proposto

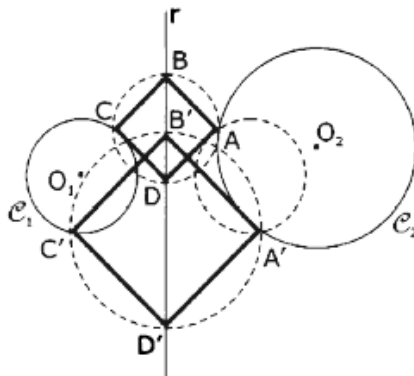


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Supondo o problema possa ser resolvido e que os vértices B e $D \in r$, temos que as diagonais de um quadrado são perpendiculares e congruentes, portanto os outros dois vértices devem ser simétricos em relação a r . Logo, o vértice A pode ser encontrado pela intersecção de C_2 com $C'_1 = R_r(C_1)$ e $C = R_r(A)$. Determinadas as posições de A e C no plano, podemos facilmente construir o quadrado $ABCD$.

Nesse caso podemos ter duas soluções onde, por consequência da intersecção de C_2 com $C'_1 = R_r(C_1)$ teremos os pontos A utilizado na primeira solução e o ponto A' que, ao aplicarmos $R_r(A')$ teremos o ponto C' , e como B' e D' pertencem a r poderemos também montar o quadrado $A'B'C'D'$. O problema pode admitir nenhuma, uma ou duas soluções dependendo do número de pontos de intersecção entre C_2 e C'_1 .

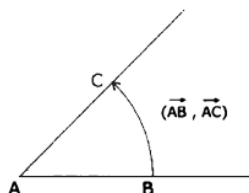
Figura 3.31: Solução do problema proposto



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

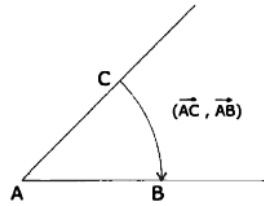
3.1.3 Rotação

Para que possamos definir rotação, será necessária antes compreender a noção de **ângulo orientado**, isto é, um ângulo no qual estão bem determinados seu lado inicial, que é chamado de *origem do ângulo*, e seu lado final, a *extremidade*. Como exemplo, considere o ângulo $\widehat{BAC}$ da figura, onde foi escolhida a semi-reta AB como seu lado inicial, e a semi-reta AC como seu lado final. Dizemos que este ângulo está orientado de $\overrightarrow{AB}$ para $\overrightarrow{AC}$ e o denotamos por $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Este ângulo é considerado diferente do ângulo orientado $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

Figura 3.32: Ângulo orientado $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 3.33: Ângulo orientado $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

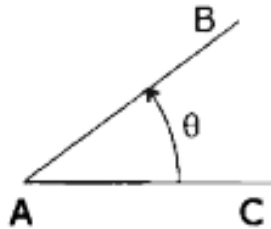


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

São considerados ângulos orientados com medida positiva, também chamados de ângulos positivos, aqueles orientados no sentido anti-horário, e ângulos com medidas negativas, aqueles orientados no sentido horário.

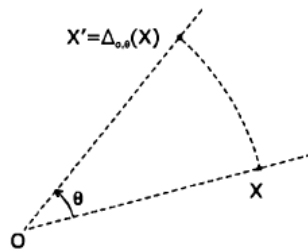
Definição 3.7. Seja O um ponto no plano e θ um número real onde $-180 < \theta \leq 180$. A rotação de centro O e ângulo θ é a isometria $\Delta_{O,\theta}$ que deixa fixo o ponto O e leva o ponto X , $X \neq O$, no ponto $X' = \Delta_{O,\theta}(X)$, tal que, $OX = OX'$ e a medida do ângulo orientado $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX'})$ é igual a θ se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq 180$. Além disso, $OX' = OX$, sendo O o ponto médio de $\overline{XX'}$, se $\theta = 180$ e $X' = X$ se $\theta = 0$

Figura 3.34: Rotação $\Delta_{AC,\theta}$



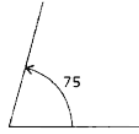
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 3.35: Rotação $\Delta_{OX,\theta}$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

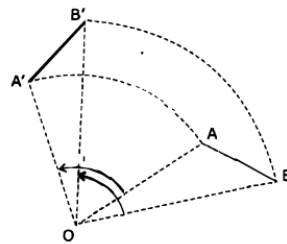
Figura 3.36: Ângulo em que a figura será rotacionada



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

No exemplo a seguir temos a aplicação da rotação $\Delta_{O,75}$ do segmento AB dado ao redor do ponto O dado.

Figura 3.37: Rotação $\Delta_{O,75}$ do segmento AB

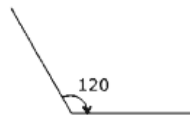


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

O segmento $A'B'$ é a imagem pela rotação $\Delta_{O,75}$ do segmento AB dado.

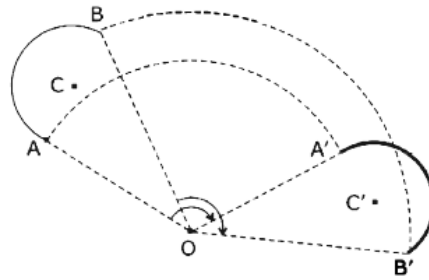
A seguir, a aplicação da rotação $\Delta_{O,-120}$ da semicircunferência dada ao redor do ponto O .

Figura 3.38: Ângulo a ser realizada a rotação



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

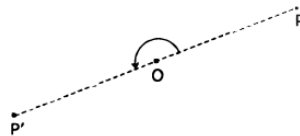
Figura 3.39: Rotação $\Delta_{O,-120}$ da semicircunferência de centro C



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Caso $\theta = 180$, a rotação $\Delta_{O,\theta}$ é chamada particularmente de **meio-giro**, ou **reflexão em relação a o ponto fixo O** . Ela associa a cada ponto P do plano, o ponto $P' = \Delta_{O,180}(P)$, tal que, O é o ponto médio do segmento PP' .

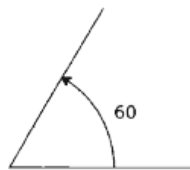
Figura 3.40: Rotação $\Delta_{O,180}$ do ponto P



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Vamos executar a rotação do triângulo ABC ao redor do ponto A no sentido anti-horário.

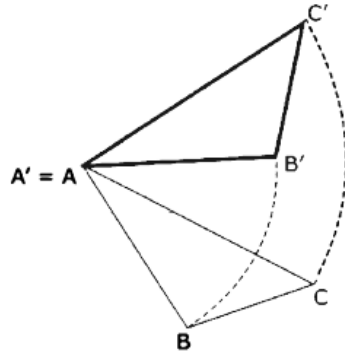
Figura 3.41: Ângulo em que o triângulo será rotacionado



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

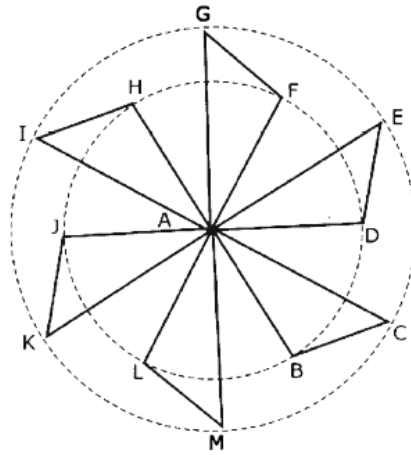
Se executarmos as rotações $\Delta_{A,60}, \Delta_{A,120}, \Delta_{A,180}, \Delta_{A,-120}, \Delta_{A,-60}$ do triângulo ABC , teremos como resultado a figura abaixo.

Figura 3.42: Rotação $\Delta_{A,60}$ do triângulo ABC



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 3.43: Rotações $\Delta_{A,60}, \Delta_{A,120}, \Delta_{A,180}, \Delta_{A,-120}, \Delta_{A,-60}$ do triângulo ABC



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Pode-se observar que B, D, F, H, J e L são pontos da mesma circunferência $C(A, AB)$ e C, E, G, I, K e M estão na circunferência $C(A, AC)$.

Esta figura é um exemplo de uma figura que possui simetria θ -rotacional, onde $\theta = 60$, que será definida a seguir.

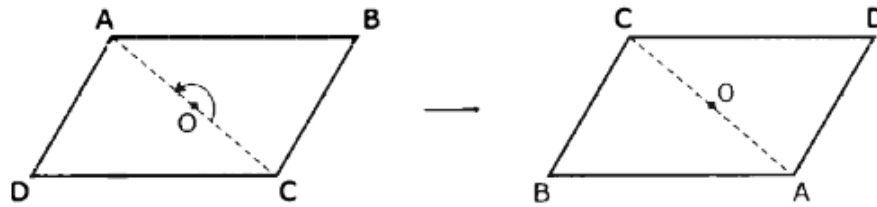
Definição 3.8. Uma figura tem simetria de rotação de um ângulo θ , ou tem simetria θ -rotacional, quando coincide com sua imagem pela rotação do ângulo θ ao redor de seu centro.

Pode-se observar que uma figura possui simetria θ -rotacional se, e somente se, possui simetria $-\theta$ -rotacional. Não importando o sentido da rotação, iremos tomar sempre θ em seu valor absoluto. A seguir, alguns exemplos:

- O paralelogramo, que não possui simetria de reflexão, mas possui simetria 180-

rotacional.

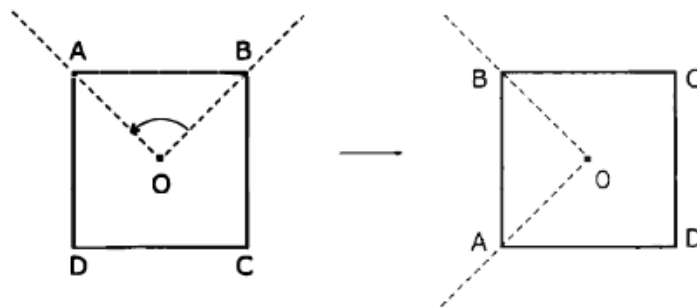
Figura 3.44: Rotação $\Delta_{O,180}$ do paralelogramo $ABCD$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- O quadrado, que possui simetria 90-rotacional e também 180-rotacional.

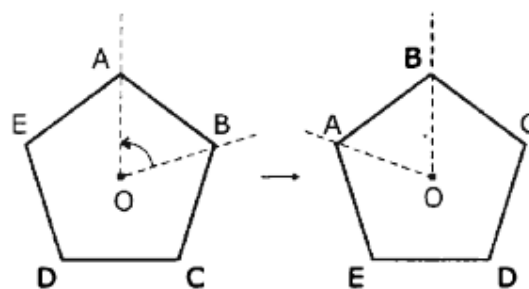
Figura 3.45: Rotação $\Delta_{O,90}$ do quadrado $ABCD$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- O pentágono regular que possui simetria 72-rotacional e também 144-rotacional.

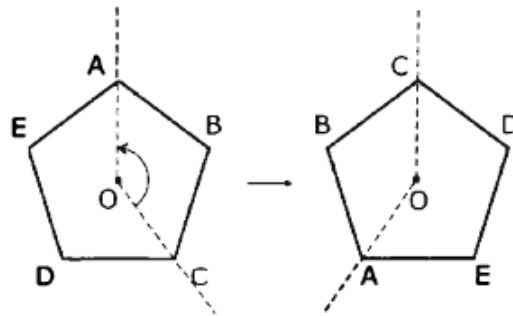
Figura 3.46: Rotação $\Delta_{O,72}$ do pentágono $ABCDE$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

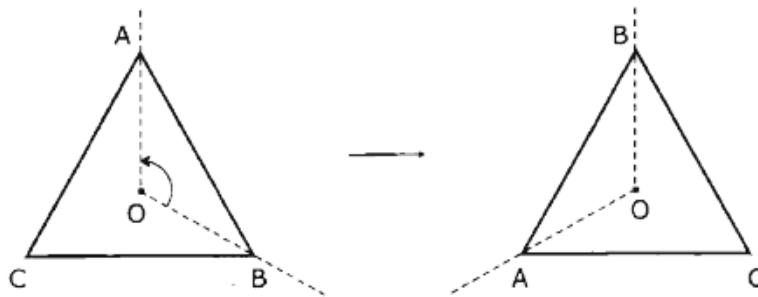
- O triângulo equilátero que possui simetria 120-rotacional

Figura 3.47: Rotação $\Delta_{O,144}$ do pentágono $ABCDE$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Figura 3.48: Rotação $\Delta_{O,120}$ do triângulo equilátero ABC



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- Generalizando, qualquer polígono regular de n -lados possui simetria θ -rotacional, onde $\theta = i\frac{360}{n}$, i é um número inteiro positivo, sendo $i = 0, \dots, \frac{n}{2}$ para n par, ou $i = 0, \dots, \frac{n-1}{2}$ para n ímpar.

4 Homotetia e Semelhança

Assim como as isometrias, homotetias são transformações no plano que fornecem soluções mais convenientes a certos problemas de construções geométricas, entre estes, problemas que envolvem tangência.

Enquanto duas figuras isométricas têm as mesmas dimensões e forma, ou seja, são congruentes, duas figuras homotéticas possuem apenas a forma em comum. Teremos que duas figuras homotéticas são semelhantes. Em particular, dois polígonos homotéticos possuem os lados correspondentes paralelos.

4.1 Homotetias e Semelhanças

Definição 4.1. Fixado um ponto V no plano e um número real $k \neq 0$, a **homotetia** de **centro** V e **razão** k é a transformação isométrica $H_{V,k}$, que associa cada ponto P do plano ao ponto P' , onde $P' = H_{V,k}(P)$ desse plano tal que:

- a) $H_{V,k}(V) = V$.
- b) $VP' = |k|VP$.
- c) Os pontos V , P e P' são colineares. Se $k > 0$, P' está na semi-reta VP ; se $k < 0$, V está entre P e P' .

O ponto P' é chamado de *homotético* de P na homotetia de centro V e razão de homotetia k .

Se $k > 0$, a homotetia é chamada de **homotetia direta**, e se $k < 0$, **homotetia inversa**.

Observação 4.2. A posição dos pontos V , P e P' depende do número k .

Quando $0 < k < 1$ o ponto P' está entre V e P .

Quando $k > 1$ o ponto P está entre V e P' .

Quando $k < 0$ o ponto V está entre P' e P .

Quando $k = 1$ o ponto P' coincide com P , ou seja, $H_{V,1}$ é a transformação identidade.

Quando $k = -1$, o ponto $H_{V,-1}$ coincide com a rotação de centro V e ângulo de medida 180.

Exemplo 4.3. .

- a) Quando $k = \frac{2}{3}$, ou seja, $0 < k < 1$.



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- b) Quando $k = 3$, ou seja, $k > 1$.



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- c) Quando $k = -\frac{1}{3}$, ou seja, $k < 1$.



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- d) Quando $k = 1$.



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- e) Quando $k = -1$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Proposição 4.4. A transformação inversa de uma homotetia $H_{V,k}$ é a homotetia $H_{V,\frac{1}{k}}$.

Demonstração. Pelas definições de homotetia, temos que $H_{V,k}(A) = A'$. Temos que a inversa de uma transformação T é a transformação T^{-1} de modo que $T(T^{-1}(A)) = T^{-1}(T(A)) = A$, ou seja, $H^{-1}(H(A)) = A$, o que implica que $H^{-1}(A') = A$, e como $VA' = |k|VA$, temos por consequência que $VA = \frac{1}{k}VA'$, ou ainda que $H_{V,\frac{1}{k}}(A') = A$. $\square$

A seguir, algumas propriedades das homotetias

Propriedade 4.5. *Dados um ponto V , um número real k , e a homotetia $H_{V,k}$, são verdadeiras:*

- a) *A homotetia $H_{V,k}$ transforma pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se A , B e C são pontos tais que B está entre A e C , então $H_{V,k}(B)$ está entre $H_{V,k}(A)$ e $H_{V,k}(C)$, ou seja, $H_{V,k}$ conserva a relação "estar entre".*

Demonstração. Tome A , B e C , pontos colineares, com B estando entre os pontos A e C .

Sejam A' , B' e C' os homotéticos dos pontos A , B e C , respectivamente pela homotetia $H_{V,k}$. Pela definição de homotetia temos que:

- a) V , A e A' são colineares, de modo que $VA' = |k|VA$.
- b) V , B e B' são colineares, de modo que $VB' = |k|VB$.
- c) V , C e C' são colineares, de modo que $VC' = |k|VC$.

Como os pontos A , B e C são colineares, temos que, ao multiplicarmos suas distâncias até o ponto V por $|k|$, suas novas distâncias (VA' , VB' e VC') também serão colineares.

Como temos que o ponto B está entre os pontos A e C , logo é válida a relação $AB + BC = AC$. Ao multiplicarmos ambos lados da igualdade por $|k|$ teremos que:

$$|k|(AB + BC) = |k|(AC) \implies |k|AB + |k|BC = |k|AC$$

Pela definição de homotetia temos que:

$$VA' = |k|VA, VB' = |k|VB \text{ e } VC' = |k|VC$$

também é correto afirmar que:

- a) $AB = VB - VA$
- b) $BC = VC - VB$
- c) $AC = VC - VA$

logo temos que a equação $|k|AB + |k|BC = |k|AC$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$|k|(VB - VA) + |k|(VC - VB) = |k|(VC - VA)$$

aplicando a propriedade distributiva temos:

$$|k|VB - |k|VA + |k|VC - |k|VB = |k|VC - |k|VA$$

ou seja,

$$VB' - VA' + VC' - VB' = VC' - VA' \implies A'B' + B'C' = A'C'$$

□

b) $H_{V,k}$ leva retas em retas.

Demonstração. Tome a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Como $H_{V,k}$ leva pontos colineares em pontos colineares, então $H_{V,k}(\overleftrightarrow{AB}) \subset \overleftrightarrow{A'B'}$.

Analogamente $H_{V,k}^{-1}(\overleftrightarrow{A'B'}) \subset \overleftrightarrow{AB}$. Então $\overleftrightarrow{A'B'} = H_{V,k}(H_{V,k}^{-1}(\overleftrightarrow{A'B'})) \subset H_{V,k}(\overleftrightarrow{AB})$.

□

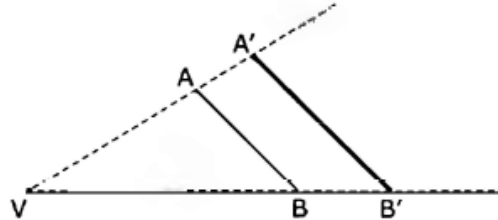
Como consequência de a) e b), a homotetia $H_{V,k}$ transforma semi-retas em semi-retas, transforma ângulos em ângulos e, também, segmentos em segmentos.

c) Se V , A e B são pontos não colineares, então o segmento $A'B'$, homotético do segmento AB , é tal que $A'B' = |k|AB$ e é paralelo a $\overline{AB}$ quando $k \neq 1$. Quando V , A e B forem colineares o segmento $A'B'$ está contido na reta AB .

Demonstração. .

Temos que: $VA' = |k|VA$; V ângulo comum; e $VB' = |k|VB$.

Figura 4.1: $H_{V,k}(AB)$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Logo, pelo caso *L.A.L.* (Teorema 2.89) de semelhança de triângulos, os triângulos AVB e $A'VB'$ são semelhantes onde a razão de semelhança é igual a $|k|$. Assim temos que $A'B' = |k|AB$ e $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ se $k \neq 1$.

Caso A e B forem colineares

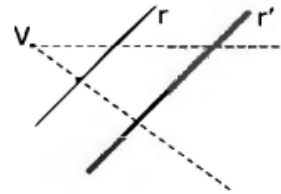
Se os pontos A e B forem colineares, teremos que $V - A - B$, pelas Propriedades 4.5 a) e 4.5 b) temos que $H_{V,k}$ leva pontos colineares em pontos colineares e segmentos em segmentos logo o segmento $\overline{A'B'} \subset \overleftrightarrow{AB}$.

□

Propriedade 4.6. Também são válidas:

1. O homotético de uma reta r é uma reta r' tal que:
 - a) r' é paralelo a r , se $V \notin r$.

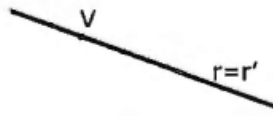
Figura 4.2: $H_{V,k}(r)$ quando $V \notin r$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

- b) $r' = r$, se $V \in r$.

Figura 4.3: $H_{V,k}(r)$ quando $V \in r$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

As demonstrações das partes a) e b) desta propriedade são uma consequência imediata das propriedades anteriores e da recíproca do Teorema 2.84.

2. A figura homotética de um triângulo ABC é um triângulo $A'B'C'$ semelhante ao primeiro, onde sua razão de semelhança é dada por $|k|$.

Demonstração. Consideremos o centro de homotetia V , o triângulo ABC e seu homotético $A'B'C'$ como na figura.

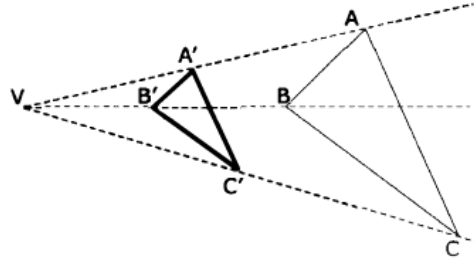
Como consequência da propriedade 4.5, temos que:

$$A'B' = |k|AB, B'C' = |k|BC \text{ e } A'C' = |k|AC,$$

ou seja,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = |k|$$

Figura 4.4: Triângulo ABC e seu homotético $A'B'C'$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

e, portanto, pelo caso $L.L.L.$ (Teorema 2.90) de semelhança de triângulos segue o resultado. $\square$

3. A homotetia preserva medida de ângulos.

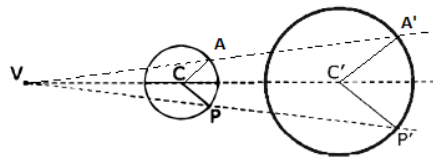
Esta demonstração também é uma consequência imediata da Propriedade 4.5.

Mas geralmente, temos que uma homotetia transforma qualquer figura F em uma figura F' semelhante a F . E, como mencionado no início desse capítulo, como consequência das propriedades acima segue que polígono homotéticos são semelhantes, porém conservando os lados homólogos paralelos.

4. A figura homotética de uma circunferência de raio r é uma circunferência de raio r' tal que $r' = |k|r$.

Demonstração. Consideremos a circunferência $\mathbf{C}(C, r)$. Seja um ponto P pertencente a essa circunferência. Sejam C' e P' os respectivos pontos homotéticos de C e P .

Figura 4.5: $H_{V,k}(\mathbf{C}(C, r))$



Fonte: Elaborada pelo autor

Pela propriedade 4.5, temos $C'P' = |k|CP = |k|r$.

Afirmamos que $H_{V,k}(\mathbf{C}(C, r)) = \mathbf{C}(C', r')$, onde $r' = |k|r$.

De fato, seja $A \in \mathbf{C}(C, r)$. Então $AC = r$ e $H_{V,k}(\overline{AC}) = \overline{A'C'}$ tal que $A'C' =$

$$|k|AC = |k|r.$$

Portanto $A' \in \mathbf{C}(C', r')$.

Por outro lado, tomemos uma ponto $Q \in \mathbf{C}(C', r')$. Logo $C'Q = r' = |k|r$. Seja S o homotético de Q na homotetia $H_{V, \frac{1}{k}}$, ou seja, a inversa da homotetia $H_{V, k}$. Teremos que $CS = |\frac{1}{k}| \cdot |k| \cdot r = r$ e, portanto, $S \in \mathbf{C}(C, r)$. $\square$

Outra forma de demonstrar a propriedade acima seria utilizando os mesmos passos utilizados no Teorema 3.2 item e), que afirma que uma isometria leva circunferências em circunferências.

5. A homotetia preserva paralelismo entre retas, isto é, se r e s são retas paralelas, então $H_{V, k}(r)$ e $H_{V, k}(s)$ são paralelas.

Demonstração. Considere as retas paralelas r e s e suas imagens $r' = H_{V, k}(r)$ e $s' = H_{V, k}(s)$.

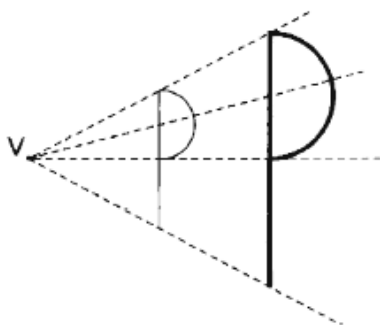
Suponhamos por absurdo que, as retas r' e s' sejam coincidentes no ponto O com $O = H_{V, k}(A) = H_{V, k}(B)$, sendo A ponto de r e B ponto de s . Isso contraria a definição de homotetia ser bijetiva, visto que A e B são pontos distintos do plano.

Logo r e s são paralelas. $\square$

Observação 4.7. Já vimos que, quando $k > 0$, temos a homotetia direta de razão k , e quando $k < 0$, temos a homotetia inversa de razão k . Em ambos os casos, quando $|k| > 1$, a figura homotética é uma **ampliação da figura inicial**, quando $|k| = 1$, temos, pela homotetia de razão k , uma **figura congruente** à figura inicial; e quando $0 < |k| < 1$ a figura homotética é uma **figura reduzida** semelhante à figura inicial.

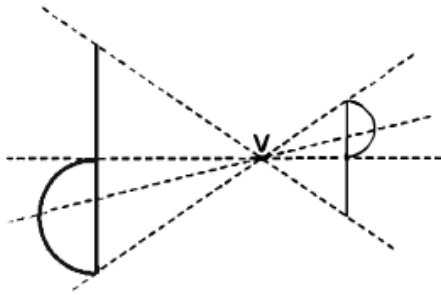
A seguir, alguns exemplos dessas situações.

1. $|k| > 1, k > 0$



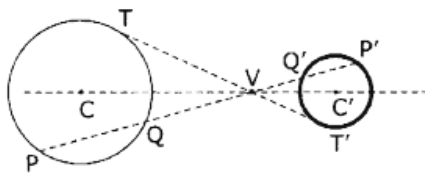
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

2. $|k| > 1, k < 0$



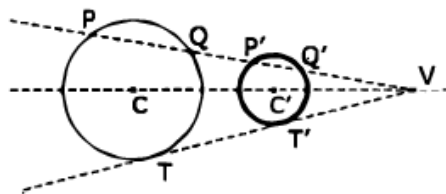
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

3. $0 < |k| < 1, k < 0$



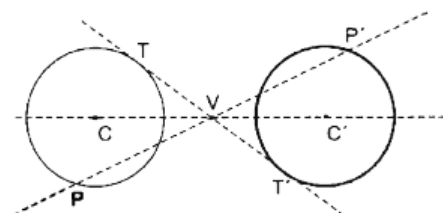
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

4. $0 < |k| < 1, k > 0$

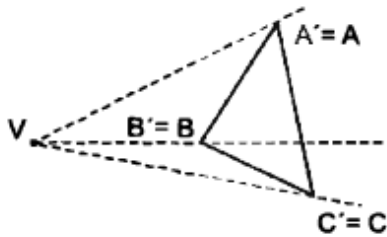


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

5. $k = -1$



6. $k = 1$



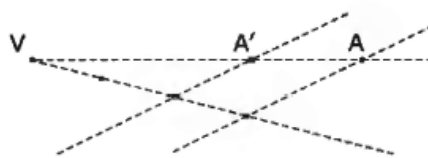
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Exemplos.

1. Dado o centro de homotetia V , obtenha o ponto homotético do ponto A dado, para $k = \frac{2}{3}$.

Solução. Basta dividirmos o segmento VA em três partes e tomarmos duas delas. Assim $VA' = \frac{2}{3}VA$.

Figura 4.6: $H_{V, \frac{2}{3}}(A)$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

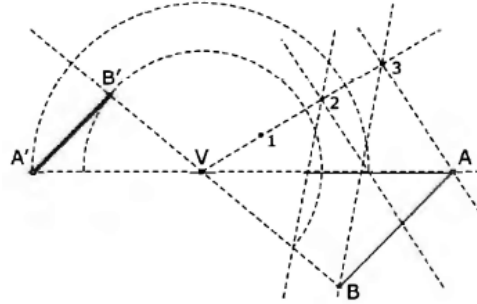
Isso também pode ser facilmente verificado pelo Teorema (2.86)

□

2. Dado o centro de homotetia V , obtenha graficamente a figura homotética de um segmento AB para $k = -\frac{2}{3}$.

Solução. O procedimento é semelhante ao realizado no exemplo anterior, com a diferença do sinal de k , o que implica que a figura homotética será uma **homotetia inversa**.

□

Figura 4.7: $H_{B, -\frac{2}{3}}(AB)$ 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

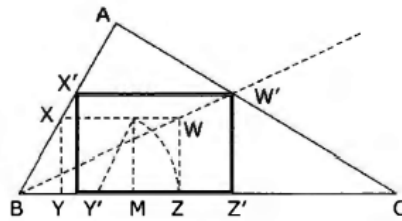
Nos exemplos seguintes será utilizado um método de resolução de problemas que consistirá em resolver um problema mais simples inicialmente, com menos condições e, em seguida utilizar a homotetia para levar a figura obtida para a posição desejada.

Observação 4.8. Um retângulo áureo, também chamado de retângulo de ouro, é um retângulo cujos lados estão em proporção áurea, ou seja, a razão entre o lado maior e o lado menor é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ aproximadamente 1,618 e é representada pela letra ϕ .

3. Dado o triângulo ABC , faça nele a inscrição de um retângulo áureo tendo o seu lado maior contido no lado do segmento BC .

Solução. Considere o triângulo ABC .

Construiremos inicialmente um retângulo áureo $XYZW$, tendo como menor lado um segmento $\overline{XY}$ qualquer, perpendicular ao segmento $\overline{BC}$, onde X é um ponto de AB e Y do segmento $\overline{BC}$.

Figura 4.8: Inscrição do retângulo áureo no triângulo ABC 

Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Através da homotetia de centro B , determinamos o vértice W' do retângulo que procuramos, na intersecção da semi-reta $\overrightarrow{BW}$ com o segmento $\overline{AC}$, onde $k = \frac{BW'}{BW}$ e $W' = H_{B,k}(W)$.

A partir da homotetia $H_{B,k}$ poderemos encontrar os demais vértices, onde os pontos

X' , Y' , Z' e W' são homotéticos dos pontos X , Y , Z e W por essa homotetia devido às propriedades que dizem que homotetias levam retas paralelas em retas paralelas e preservam ângulos. Em consequência da propriedade 4.5 temos que $\frac{X'W'}{Z'W'} = \frac{kXW}{kZW} = \frac{XW}{ZW} = \phi$, que é o número áureo.

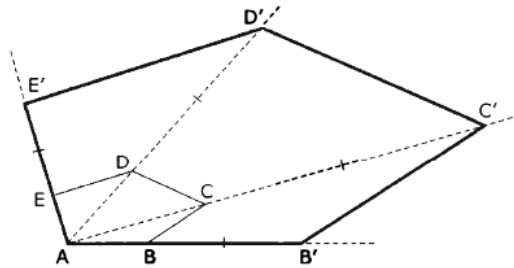
O retângulo $X'Y'Z'W'$ é a solução desejada. $\square$

4. Amplie o polígono $ABCDE$ na razão $k = 3$

Solução. Tomemos o centro da homotetia o vértice A e $k = 3$ como razão.

Tome os segmentos AB AC AD AE , ao aplicarmos $H_{A,3}$ em cada segmento teremos que $B' = H_{A,3}(B)$, $C' = H_{A,3}(C)$, $D' = H_{A,3}(D)$ e $E' = H_{A,3}(E)$.

Figura 4.9: $H_{A,3}(ABDCE)$



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

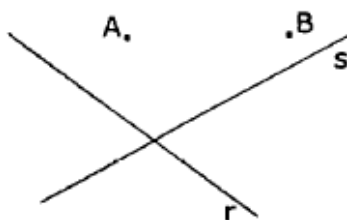
Como resultado teremos a figura homotética $A'B'C'D'E'$ que é uma ampliação da figura $ABCDE$ $\square$

5 Resolução de exercícios envolvendo isometrias e homotetia

5.1 Exercícios

- 5.1.1 Sejam duas retas concorrentes r e s e dois pontos A e B , ambos do mesmo lado de r e no mesmo lado de s , como na figura abaixo. Determine os pontos X em r e Y em s tal que o caminho $AXYB$ tenha o menor comprimento possível.

Figura 5.1: Problema proposto em Geometria plana e construções



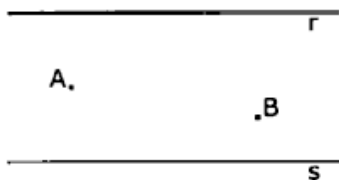
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Solução. Este é um problema clássico de mínimo caminho com reflexão, primeiramente devemos encontrar o ponto $B' = R_s(B)$ em seguida devemos encontrar o ponto $B'' = R_r(B')$. Tome agora o segmento AB'' , podemos observar que $\overline{AB''}$ intercepta as retas r e s , nos pontos X e Y respectivamente. Assim o caminho $A \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow B$ terá o menor comprimento possível.

□

- 5.1.2 Considere o mesmo problema do exercício anterior, porém agora sendo r e s retas paralelas e os pontos A e B como na figura a seguir.

Figura 5.2: Problema proposto em Geometria plana e construções



Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

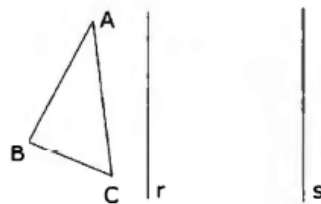
Solução. Para resolvermos este problema de caminho mínimo utilizando reflexão devemos encontrar os pontos $B' = R_s(B)$. Tome o segmento AB' , o ponto Y que é a intersecção de $\overline{AB'}$ com s e o ponto X a intersecção de $\overline{AB'}$ com r

Tome o segmento AB'' para obtermos o ponto X que é a intersecção de $\overline{AB''}$ com a reta r .

□

5.1.3 Dado o triângulo ABC , e as retas paralelas r e s , obtenha $R_s(\Delta ABC)$. Qual a relação entre as figuras $R_s(R_r(\Delta ABC))$ e ΔABC ?

Figura 5.3: Problema proposto em Geometria plana e construções

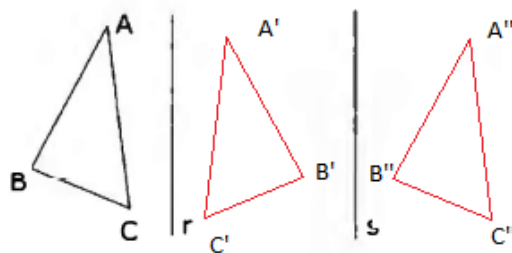


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Solução. Basta aplicarmos R_r nos pontos ABC do triângulo, com isso teremos os pontos A' , B' e C' , como a reflexão é uma isometria ela preserva distâncias, ou seja, $\Delta A'B'C'$ é uma cópia espelhada do ΔABC . Ao aplicarmos R_s nos pontos A' , B' e C' teremos os pontos A'' , B'' e C'' que, novamente, pelas propriedades das isometrias, tem sua distâncias preservadas, podendo ser formado o $\Delta A''B''C''$.

Ao compararmos ΔABC e $\Delta A''B''C''$, poderemos perceber que $\Delta A''B''C'' = T_{XY}(\Delta ABC)$, onde T_{XY} é perpendicular as retas r e s e $\overline{XY}$ é duas vezes a distância entre elas

Figura 5.4: Representação gráfica da solução

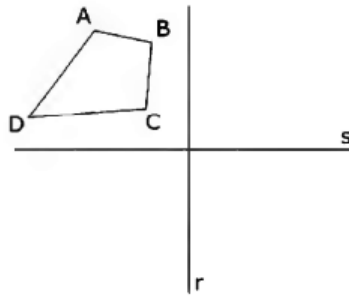


Fonte: Elaborada pelo autor

□

- 5.1.4 Dadas r e s , retas perpendiculares, e o quadrilátero $ABCD$, obtenha graficamente $R_r(ABCD)$ e $R_s(R_r(ABCD)) = F$. Qual é a relação entre as figuras F e $ABCD$? E entre $R_r(F)$ e $ABCD$?

Figura 5.5: Problema proposto em Geometria plana e construções

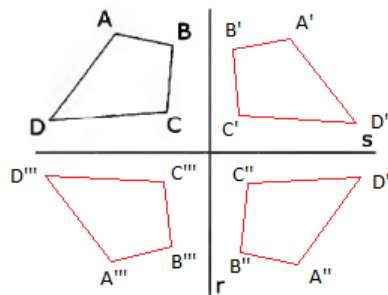


Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Solução. Como resultado de $R_r(ABCD)$ teremos o quadrilátero $A'B'C'D'$.

Como resultado de $R_s(R_r(ABCD))$ teremos F que é o quadrilátero formado pelos pontos $A''B''C''D''$.

Figura 5.6: Representação gráfica da solução



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao compararmos $ABCD$ e F podemos perceber que F é a rotação $\Delta_{O,180}$ onde O é o ponto de intersecção entre as retas r e s .

Comparando $R_r(F)$ e $ABCD$ temos que $R_r(F) = R_s(ABCD)$ é a imagem espelhada de $ABCD$ em relação a reta r com orientação invertida.

□

- 5.1.5 Construa um quadrilátero circunscritível $ABCD$, sendo conhecido os lados AB, BC e os ângulos A e C .

Solução. Para que um quadrilátero seja circunscritível é necessário que a soma de seus ângulos opostos seja igual a 180. Com essa informação iniciemos a construção do quadrilátero. São conhecidos os lados AB e BC e também os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$. Para cumprir com as exigências é necessário que $m\hat{A} + m\hat{C} = 180$.

Podemos realizar a isometria $T_{BA}(BC)$ para obtermos o segmento BC' e $T_{BC}(BA)$ para obtermos o segmento BA' . O encontro das translações define o ponto $D = C' = A'$. Pelo Teorema 2.73 item c) temos que $m\hat{B} + m\hat{D} = 180$.

Logo o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível

□

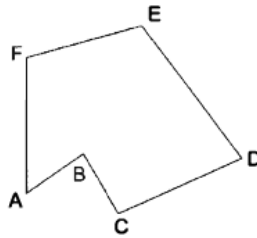
- 5.1.6 Dado um setor circular de raio OA , correspondente a um ângulo $\widehat{AOB}$ com $m\widehat{AOB} < 90$, inscreva nele um quadrado tendo um de seus lados contido em OA .

Solução. Considere um quadrado $EFGH$ qualquer, dentro do setor circular, tal que, seu lado EH está contido no segmento OA e F é um ponto do segmento OB . Podemos aplicar a homotetia $H_{O,k}$ no ponto G para obtermos G' tal que, $G' = |k|G$ e G' pertença a $\widehat{BA}$, ao aplicarmos a homotetia nos demais pontos obteremos o quadrado $E'F'G'H'$ desejado.

□

- 5.1.7 Reduza o polígono $ABCDEF$ na razão de 1 para 2.

Figura 5.7: Problema proposto em Geometria plana e construções



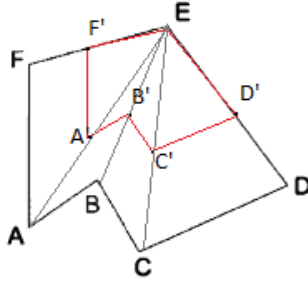
Fonte: Geometria Euclidiana plana e construções (Rezende, 2008)

Solução. Tome dos segmentos EF , ED , EA , EB e EC , para reduzirmos a figura em uma razão de 2 para 1 deve utilizar a $H_{E, \frac{1}{2}}$. Ao aplicarmos a homotetia nos segmentos selecionados teremos os pontos F' , D' , A' , B' e C' .

Basta tomar o polígono $A'B'C'D'E$ e teremos a solução desejada.

□

Figura 5.8: Representação gráfica da solução



Fonte: Elaborada pelo autor

- 5.1.8 Considere um triângulo ABC com $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ agudos. Inscreva nele um quadrado tendo um de seus lados contido no lado BC .

Solução. Tome um quadrado $DEFG$ qualquer tal que, DG está contido no segmento BC e E é um ponto de segmento BA , podemos aplicar $H_{B,k}$ no segmento BF para encontrarmos F' pertencente a AC , tal que $F' = |k|F$. Ao aplicarmos $H_{B,k}$, nos demais pontos teremos o quadrado $DE'F'G'$ desejado.

□

- 5.1.9 Inscreva um retângulo áureo em uma semicircunferência, tendo o seu maior lado contido no diâmetro dessa circunferência.

Solução. Tome a semicircunferência de centro C e diâmetro AB .

Tome um retângulo áureo $CDEF$ qualquer, onde D é um ponto do $\widehat{AB}$ e CF está contido no diâmetro AB . Podemos aplicar $H_{A,k}$ no segmento AE para obtermos o ponto E' tal que, E' seja ponto do $\widehat{AB}$, ao aplicarmos $H_{A,k}$ nos demais pontos teremos D' , C' e F' , pela definições de homotetia teremos que $D'C' = |k|DC$, $D'E' = |k|DE$, $E'F' = |k|EF$ e $C'F' = |k|CF$ e, como $CDEF$ é um retângulo áureo temos que:

$$\frac{k(DE+DC)}{kDC} = \frac{DE}{DC} = \phi$$

ou seja, $C'D'E'F'$ também é um retângulo áureo

□

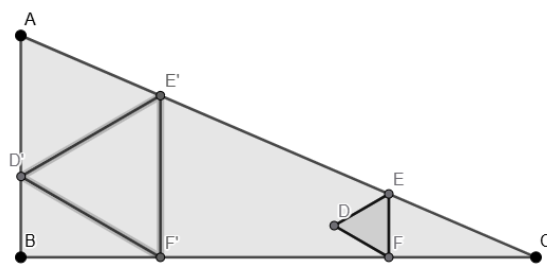
- 5.1.10 Inscreva um triângulo equilátero em um triângulo retângulo em B , com um lado paralelo ao lado AB .

Solução. Seja o triângulo retângulo ABC onde $m\widehat{B} = 90$. Tome um ponto E pertencente ao segmento AC e um ponto F pertencente a BC , onde o segmento $EF \perp BC$, ou seja, $EF \parallel AB$.

Agora tome um ponto D a esquerda do segmento EF , tal que $DE = DF = EF$ de modo que $\triangle DEF$ seja equilátero.

Em seguida tome o ponto C como centro da homotetia $H_{C,k}$, a qual será aplicada no ponto D de forma que, $CD' = |k|CD$ e D' é um ponto do segmento AB , ao aplicarmos nos demais pontos teremos E' pertencente ao segmento AC e F' pertencente ao segmento BC . Como a homotetia preserva proporções, temos que $\triangle D'E'F'$ também é um triângulo equilátero

Figura 5.9: Representação gráfica da solução



Fonte: Elaborada pelo autor

□

6 Conclusão

Ao longo desse trabalho, ficou evidente que as transformações geométricas são um pilar fundamental da geometria plana, oferecendo uma abordagem tanto visual quanto analítica para manipular figuras no plano cartesiano. As isometrias, como a translação, que permite mover figuras; a reflexão, que cria imagens espelhadas; e a rotação, que gira figuras em torno de um ponto fixo, são essenciais para preservar as propriedades das figuras, como forma e tamanho. Em contraste, a homotetia mostrou-se fundamental para a ampliação e redução, mantendo as proporções originais da figura. É importante ressaltar que as transformações geométricas transcendem o campo da matemática, encontrando vastas aplicações práticas em diversas outras áreas. Para aprofundar o estudo, sugere-se a investigação do comportamento dessas transformações no conjunto dos números complexos e a comparação com sua aplicação no conjunto dos números reais, o que poderia abrir novas perspectivas de análise e compreensão.

REFERÊNCIAS

REZENDE, E. Q. F. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2008.

WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P. Q. **Construções geométricas**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.