

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (TCC)

**ANÁLISE NUMÉRICA E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL:
MOVIMENTO OSCILATÓRIO DO PÊNDULO SIMPLES
UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO PYTHON**

THIAGO ALEXSANDER RIBEIRO PERES

**GOIÂNIA - GO
2025**

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Thiago Alexsander Ribeiro Peres

Matrícula: 20211010940208

Título do Trabalho: Análise Numérica e simulação computacional: Movimento oscilatório do pêndulo simples utilizando programação Python

Autorização - Marque uma das opções

1. (X) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 14/ 03/ 2025.



Documento assinado digitalmente
THIAGO ALEXSANDER RIBEIRO PERES
Data: 17/03/2025 22:46:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

THIAGO ALEXSANDER RIBEIRO PERES

**MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO
COMPUTACIONAL: MOVIMENTO OSCILATÓRIO DO
PÊNDULO SIMPLES UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO
PYTHON**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás – IFG – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Prof(a). Dr(a). Regina Célia Bueno da Fonseca

Goiânia - GO
2025

P437a Peres, Thiago Alexsander Ribeiro.

Análise numérica e simulação computacional: movimento oscilatório do pêndulo simples utilizando programação Python / Thiago Alexsander Ribeiro. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2025.
51f.

Orientação: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Análise numérica. 2. Simulação computacional. 3. Programação Python. I. Fonseca, Regina Célia Bueno da (orientação). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III. Título.

CDD 518



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

ANÁLISE NÚMERICA E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL: MOVIMENTO OSCILATÓRIO DO PÊNDULO SIMPLES UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO PYTHON

por

THIAGO ALEXSANDER RIBEIRO PERES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 14 de março de 2025, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Esp. José Maria de Urzeda (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Jose Maria de Urzeda, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 14/03/2025 15:10:38.
- Duelci Aparecido de Freitas Vaz, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 14/03/2025 15:09:35.
- Regina Celia Bueno da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 14/03/2025 15:08:34.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 14/02/2025. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 618489
Código de Autenticação: 746cc600c3



Agradecimentos

Agradeço a minha família, principalmente aos meus pais, Anderson Vicente Peres e Lucilene Ribeiro Martins Peres, e meus avós por me darem forças para continuar no curso, pois sem o apoio deles essa jornada teria sido bem mais difícil.

Em seguida, agradeço aos meus amigos e meus irmãos que me proporcionaram momentos de alegrias durante essa graduação juntamente com meus colegas que encontrei durante o curso.

Em especial, gostaria de agradecer meus dois maiores benfeitores dessa graduação, a minha orientadora Prof(a). Dra. Regina Célia Bueno, que sem a ajuda dela nada disso seria possível, afinal, ela foi a pessoa que mais me incentivou a finalizar esse trabalho.

E por último e mais importante, gostaria de agradecer a Deus por tudo de bom que ele fez em minha vida, afinal, sem ele nada disso seria possível, como me ingressar na graduação como finaliza-lá.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal a análise numérica e a simulação computacional do movimento do pêndulo simples, utilizando métodos numéricos para resolver uma equação diferencial ordinária (EDO), que desempenham um papel fundamental na modelagem de problemas envolvendo o movimento oscilatório de um corpo, em particular, o movimento de um pêndulo simples. A metodologia consistiu em aplicar métodos numéricos como, método de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem implementados em Python para simular o movimento em diferentes condições iniciais. Os resultados obtidos dos métodos numéricos foram comparados com o período encontrado no PhET para validar sua aproximação. A partir disso, discutimos sobre a importância da integração entre a teoria, experimentação e análise computacional.

Palavras chaves: Laboratório do Pêndulo; Pêndulo simples; Métodos Numéricos; Movimento Oscilatório.

Abstract

This work primarily aims at the numerical analysis and computational simulation of the motion of a simple pendulum, using numerical methods to solve an ordinary differential equation (ODE), which play a fundamental role in modeling problems involving the oscillatory motion of a body, in particular, the motion of a simple pendulum. The methodology involved applying numerical methods such as the Euler method and the 4th-order Runge-Kutta method, implemented in Python, to simulate the motion under different initial conditions. The results obtained from the numerical methods were compared with the period found in PhET to validate their approximation. Based on this, we discussed the importance of integrating theory, experimentation, and computational analysis.

Keywords: Pendulum Lab; Simple Pendulum; Numerical Methods; Oscillatory Motion.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquemático do movimento de um pêndulo simples.	15
Figura 2 – Pêndulo de torção.	16
Figura 3 – Pêndulo-Físico.	16
Figura 4 – figuras/Pêndulo-Foucault	17
Figura 5 – Pêndulo-Newton.	17
Figura 6 – Gráfico de $\sin x$ com os polinômios de Taylor.	20
Figura 7 – Etapas do processo para resolver um problema físico com métodos numéricos.	24
Figura 8 – Solução numérica da EDO dada na Eq.(3.1).	25
Figura 9 – Solução numérica pelo Método de Euler para a EDO dada na Eq.(3.1).	29
Figura 10 – Solução numérica pelo Método de Euler Aperfeiçoado da EDO dada na Eq.(3.1).	31
Figura 11 – Interface do site PhET.	33
Figura 12 – Laboratório do Pêndulo.	34
Figura 13 – Pêndulo-Simples	36
Figura 14 – Decomposição das forças sobre os eixos radial e tangencial no pêndulo simples.	37
Figura 15 – Comportamentos dos movimentos do pêndulo simples com ângulo $\theta = 5^\circ$	44
Figura 16 – Comportamentos dos movimentos do pêndulo simples com ângulo $\theta = 10^\circ$	44
Figura 17 – Comportamentos dos movimentos do pêndulo simples com ângulo $\theta = 15^\circ$	45
Figura 18 – Comportamentos do pêndulo simples usando a plataforma PhET e os métodos numéricos (Euler e Runge-Kutta) com ângulo $\theta = 5^\circ$	47
Figura 19 – Comportamentos do pêndulo simples usando a plataforma PhET e os métodos numéricos (Euler e Runge-Kutta) com ângulo $\theta = 10^\circ$	47
Figura 20 – Comportamentos do pêndulo simples usando a plataforma PhET e os métodos numéricos (Euler e Runge-Kutta) com ângulo $\theta = 15^\circ$	48

Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Aproximações de valores de pontos de $y(t)$	25
Tabela 3.2 – Aproximações de valores de pontos de y_{n+1} (Eq. (3.17)) pelo método de Euler.	30
Tabela 3.3 – Aproximações de valores de pontos de y_{n+1} (Eq. (3.19)) pelo método de Euler aperfeiçoado.	31
Tabela 3.4 – Aproximações de valores de pontos de $y(t)$ (Eq. (3.20)) pelo método de Euler modificado.	32
Tabela 6.1 – Períodos Encontrados na plataforma PhET e para os métodos numéricos (Euler e Rungue-Kutta).	48
Tabela 6.2 – Comparação dos Erros obtidos: Plataforma PhET, Método de Euler e Método de Rungue-Kutta.	49

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	Conceitos Fundamentais: Física	14
2.1.1	Movimento Periódico ou Oscilatórios	14
2.1.2	Pêndulos	15
2.1.2.1	Tipos de Pêndulos	15
2.1.3	Lei Fundamental da Física: Segunda Lei de Newton	17
2.2	Conceitos Fundamentais: Matemática	18
2.2.1	Série de Taylor	18
2.2.2	Classificações das Equações Diferenciais (ED)	20
2.2.2.1	Tipo de uma ED:	20
2.2.2.2	Ordem de uma EDO	21
2.2.2.3	Linearidade de uma EDO	21
2.2.3	Problema de Valor Inicial (PVI)	21
2.2.4	Solução de uma EDO	22
2.2.4.1	Explícita:	22
2.2.4.2	Implícita:	22
3	MÉTODOS DO CÁLCULO NÚMERICO	24
3.1	EDO de Primeira Ordem com Condições Iniciais	25
3.2	Método Geral de Runge-Kutta	26
3.3	Runge-Kutta de Segunda Ordem (RK2)	26
3.4	Método Runge-Kutta de 3ª Ordem (RK3)	28
3.5	Método Runge-Kutta de 4ª Ordem	28
3.6	Método de Euler	28
3.7	Método Euler Aperfeiçoado	30
3.8	Método de Euler Modificado	31
4	LABORATÓRIO DO PÊNDULO E A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON	33
4.1	Laboratório do Pêndulo	34
4.2	Linguagem de Programação Python	34
4.2.1	Algumas Bibliotecas do Python	35
5	ESTUDO DO MOVIMENTO DO PÊNDULO SIMPLES	36

5.1	Pêndulo Simples	36
5.2	Correção para Grandes Amplitudes	38
6	APLICAÇÕES: EXPERIMENTO E VALIDAÇÃO	40
6.1	Associação com os Métodos Numéricos	40
6.1.1	Método de Euler	40
6.1.2	Método Runge-Kutta 4ª Ordem	40
6.2	Análise dos Métodos Numéricos	43
6.3	Análise dos Resultados	49
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	51

1 Introdução

O estudo do movimento oscilatório é um dos temas fundamentais da física e da matemática, pois sua aplicação se estende a diversas áreas, como engenharia e até mesmo biologia. Dentre os sistemas oscilatórios, o pêndulo simples é visto como um modelo clássico que com sua simplicidade permite explorar conceitos como movimento harmônico, conservação de energia e não linearidade ([Barros et al., 2023](#)).

A modelagem matemática acerca do pêndulo simples é tradicionalmente baseada na Segunda Lei de Newton, que relaciona as forças atuantes no sistema de aceleração angular. Para ângulos pequenos, a equação diferencial que pode ser linearizada com a aproximação do $\text{sen}\theta \approx \theta$, resultando um sistema conhecido como movimento harmônico simples (MHS). Entretanto, para grandes amplitudes, essa aproximação não se torna válida fazendo sua solução analítica se tornar inviável ([Lopes; Suave; Nogueira, 2018](#)), exigindo uso de métodos numéricos para a resolução de sua equação não linear.

Nesse contexto, os métodos numéricos desempenham um papel fundamental para a obtenção de soluções aproximadas para problemas sem solução analítica. Dentre eles, destacam-se o método de Euler, Euler Aperfeiçoado, Euler Modificado, Runge-Kutta de 2ª, de 3ª e de 4ª ordem, onde cada um pode demonstrar suas vantagens e limitações ([Burden; Faires; Burden, 2017](#)).

A implementação computacional surge como uma ferramenta aliada indispensável para a implementação dos métodos numéricos, permitindo simular o comportamento do pêndulo em diferentes condições. A linguagem de programação Python, por intermédio de suas bibliotecas como NumPy, SciPy e Matplotlib, oferece um ambiente acessível para realizar os cálculos numéricos e a visualização gráfica ([Lutz; Ascher, 2007](#)).

Além disso, a plataforma PhET proporciona um ambiente virtual interativo para simular o movimento do pêndulo, permitindo analisar os resultados através de parâmetros pré-estabelecidos, como comprimento do fio, amplitude inicial entre outros. Podendo também, ter uma maior confiabilidade para comparar seus resultados com os métodos numéricos.

A escolha do pêndulo simples como fonte de estudo, justifica-se por ser um sistema físico de fácil compreensão, o pêndulo permite explorar conceitos matemáticos importante, como ED e métodos numéricos, que são fundamentais para modelar sistemas mais complexos.

O objetivo geral do TCC foi apresentar a importância da análise numérica da equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem aplicada na descrição do movimento

oscilatório do pêndulo simples. A metodologia utilizada é de estratégias investigativas e pesquisa aplicada, gerando conhecimentos para aplicação prática, dirigida ao entendimento da modelagem matemática da EDO, em particular, a que descreve o movimento do pêndulo simples, com procedimentos técnicos da pesquisa bibliográfica e técnica computacional com linguagem de programação Python.

O TCC está dividido em Capítulos, sendo que, no Capítulo 2 uma breve descrição da fundamentação teórica dos conceitos da Física da definição do movimento periódico ou oscilatório, tipos de pêndulos, e Lei fundamental da Física, no caso, a Segunda Lei de Newton; e conceitos da matemática como as séries de Taylor e Maclaurin, teoria das equações deiferenciais.

No Capítulo 3 apresentamos uma breve introdução das definições de como descrevem os métodos numéricos utilizados, no caso, os métodos de Runge-Kutta e Euler.

No Capítulo 4 descrição da plataforma online interativa do projeto Simulações Interativas PhET da Universidade do Colorado em Boulder, denominada por **Laboratório do pêndulo simples**, e algumas descrições da linguagem de programação Python.

No Capítulo 5 apresentamos o estudo do movimento do pêndulo simples, a descrição da equação diferencial de segunda ordem, obtidas a partir da Segunda Lei de Newton, e as características necessárias para as análises, como o período oscilatório e a amplitude.

No Capítulo 6 apresentamos as aplicações dos experimentos e validações associados ao métodos numéricos utilizados aplicados na plataforma *online* PhET, os *scripts* em linguagem de programação Python utilizados para obter os movimentos oscilatórios do pêndulo simples, para fazer as análises numéricas dos comportamentos com ângulos diferentes e o cálculo dos valores dos erros aproximados, e finalizando com o Capítulo 7 com as considerações finais e conclusão.

2 Fundamentação Teórica

A modelagem do pêndulo simples requer fundamentações precisas nos princípios físicos e matemáticos, sendo essencial para compreensão de sistemas oscilatórios. O movimento do pêndulo está diretamente interligada à Segunda Lei de Newton, que estabelece uma relação entre a força resultante que atua sobre um corpo e sua aceleração.

No entanto, por se tratar de uma equação não linear devido à presença da função seno, sua solução analítica é inviável para grandes amplitudes. Para solucionar esse problema, a Série de Taylor é utilizada para obter uma aproximação linear do sistema, essa equação pode ser encontrada em referências, como [Guidorizzi \(2013\)](#), [Stewart \(2022\)](#), e entre outras.

Contudo, quando a aproximação torna-se insuficiente, adota-se uma solução numérica. São vários os métodos numéricos, por exemplo, o método de Euler, do Ponto Médio, de Runge-Kutta, entre outros ([Burden; Faires; Burden, 2017](#)). Estes métodos podem ser utilizados para resolver equações diferenciais, sendo possível comparar suas eficiências.

2.1 Conceitos Fundamentais: Física

2.1.1 Movimento Periódico ou Oscilatórios

O movimento periódico são fenômenos que se repetem em períodos de intervalos iguais e sucessivamente. Esse termo periódico implica em dizer que o movimento começará a se repetir em intervalos regulares de tempo, formando ciclos previsíveis, conforme [Young e Freedman \(2016\)](#):

Um corpo que executa movimento periódico encontra-se sempre em uma posição de equilíbrio estável. Quando ele é deslocado dessa posição e liberado, surge uma força ou um torque que o faz retornar à sua posição de equilíbrio. Quando ele atinge esse ponto, entretanto, pelo fato de haver acumulado energia cinética, ele o ultrapassa, parando em algum ponto do outro lado e sendo novamente puxado para sua posição de equilíbrio ([Young; Freedman, 2016](#), p. 41).

O movimento periódico (ou oscilação) pode ser encontrado frequentemente na natureza, o movimento de rotação da Lua em torno da Terra e o movimento de translação da Terra em torno do Sol. [Mello \(2012\)](#) afirma que o movimento periódico pode ser chamado de movimento harmônico.

Um exemplo de movimento oscilatório é quando o corpo executa um movimento, indo e voltando sobre uma trajetória, a qual ele oscila entre dois pontos.

Serway e Jewett (2014) afirmam que se um corpo vai de uma posição extrema à outra e retorna à posição inicial, diz-se que esse movimento efetuou uma vibração ou um ciclo, e é denominado por pêndulo.

2.1.2 Pêndulos

Definição 2.1 (Pêndulo) Um pêndulo é um sistema físico oscilador composto por um corpo suspenso em uma haste com fio flexível. Seu movimento é caracterizado por períodos de oscilações em torno de um ponto de equilíbrio (Young; Freedman, 2016).

Os tipos de pêndulos são: pêndulo simples, pêndulo torção, pêndulo físico e pêndulo de Foucault e pêndulo de Newton. O tipo de pêndulo aqui estudado é o pêndulo simples e seus movimentos. Para as análises dos comportamentos do movimento do pêndulo simples, utiliza-se um *script* na linguagem de programação Python, a qual geram figuras.

2.1.2.1 Tipos de Pêndulos

1. **Pêndulo simples** é formado por uma partícula de massa m suspensa por um fio leve e inextensível com comprimento variável, ligado a um ponto fixo (Figura 1). Quando a partícula é levada de uma posição de mínima energia (ponto A) para um ponto de energia mais alto (ponto B, considerando velocidade inicial nula), e depois é solta. Então, a partícula descreverá um movimento oscilatório, no plano em torno da posição A.

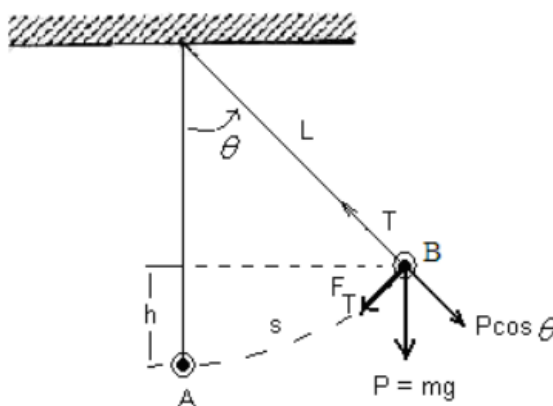


Figura 1 – Esquemático do movimento de um pêndulo simples.
Fonte: (Borin, 2024).

Observação 2.1 Por ser o objeto de pesquisa, no Capítulo 5 será apresentado mais detalhes do pêndulo simples.

2. **Pêndulo de torção** consiste em um disco suspenso por um fio inextensível, de massa desprezível e preso ao centro de massa do disco. Caso o disco for girado, o

ângulo θ formado a partir de sua posição de equilíbrio, o fio é torcido, dando origem a um torque que tende a restarurar o fio, fazendo-o voltar à sua forma original [Mello \(2012\)](#) (Figura 2).

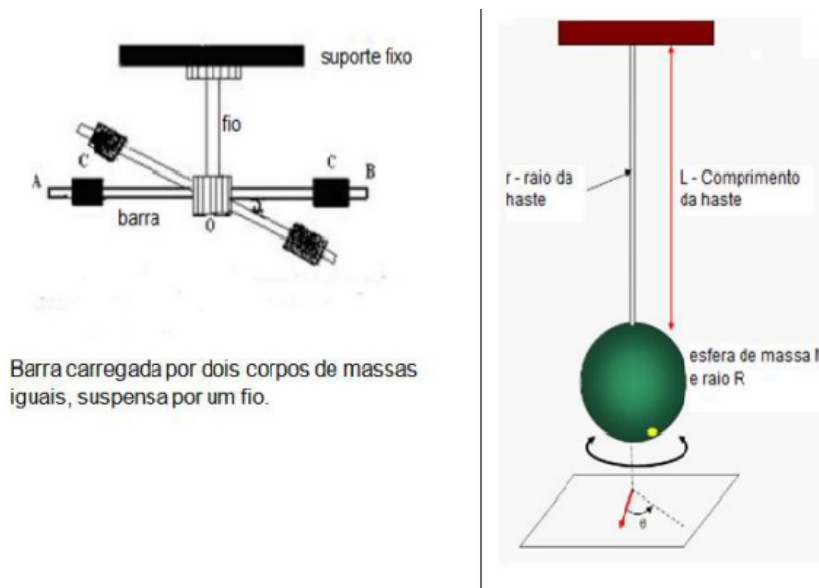


Figura 2 – Pêndulo de torção.

Fonte: ([Mello, 2012](#), p. 37)

3. **Pêndulo Físico** (também chamado de pêndulo composto) consiste em um corpo de massa m rígido que realiza movimento oscilatório pela ação gravitacional em um plano vertical, "centrado em um ponto 0 a uma distância do centro de massa" (CM), ([Serway; Jewett, 2014](#), p. 16) na qual realiza oscilações em torno do eixo de equilíbrio formando uma amplitude θ . Esse pêndulo consiste em um corpo posto para oscilar preso por seus pontos, o qual chamamos de pivô que se move no plano vertical (Figura 3).

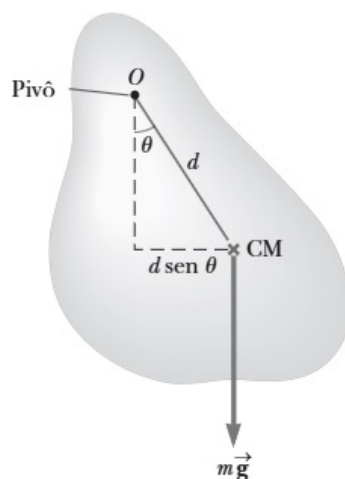


Figura 3 – Pêndulo-Físico.

Fonte: ([Serway; Jewett, 2014](#), p. 16).

4. **Pêndulo de Foucault** é composto por uma massa m suspensa por um fio, onde seu ponto de apoio é livre para girar. Foi-se desenvolvido para que o pêndulo oscilasse de forma retilínea, porém, a oscilação do pêndulo gira com o tempo, mudando sua direção em relação ao plano considerado. O objetivo do pêndulo de Foucault é demonstrar a rotação da Terra (Figura 4).

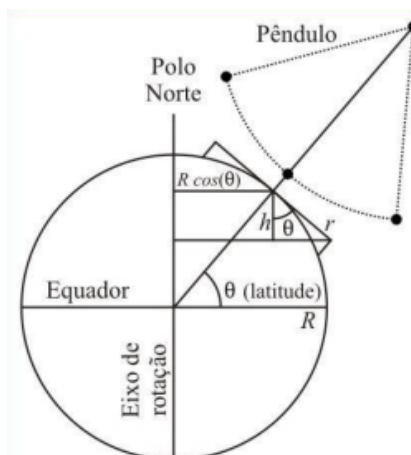


Figura 4 – figuras/Pêndulo-Foucault

Fonte: (Aureliano; Santis; Faustino, 2015, p. 3)

5. **Pêndulo de Newton** é constituído com ao menos 5 pêndulos, com esferas que tenham massas iguais, e com o mesmo comprimento do fio, dispostas lado a lado de forma que se mantenham em contato (Figura 5).

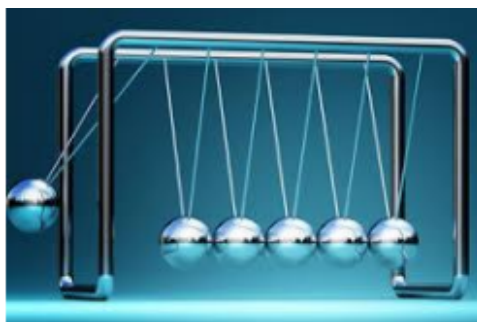


Figura 5 – Pêndulo-Newton.

Fonte: (Google).

2.1.3 Lei Fundamental da Física: Segunda Lei de Newton

A Segunda Lei de Newton, criada por Isaac Newton, pode ser encontrada em diversos livros de física tais como, *Física Mecânica* do Young e Freedman (2016) e *Curso de Física Básica* do Nussenzveig (2013).

De acordo com Young e Freedman (2016), a Segunda Lei de Newton é fundamental para a natureza, pois ela estabelece uma relação básica entre força e movimento, eles afirmam:

Quando uma força resultante externa atua sobre um corpo, ele se acelera. A aceleração possui a mesma direção e o mesmo sentido da força resultante. O vetor força resultante é igual ao produto da massa do corpo pelo vetor aceleração do corpo (Young; Freedman, 2016, p. 122).

A Segunda Lei de Newton é expressa como:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \quad (2.1)$$

onde:

- $\vec{F}$ é a força resultante sobre um corpo, e é expressa em Newtons(N)
- m é denominado massa inercial do corpo, ou simplesmente massa.
- $\vec{a}$ é a aceleração do corpo em m/s^2 .

Entretanto, o termo $m\vec{a}$ não significa uma força. Segundo Young e Freedman (2016) destacam que a aceleração é o resultado de uma força resultante diferente de zero, mas não uma força propriamente dita.

2.2 Conceitos Fundamentais: Matemática

2.2.1 Série de Taylor

A Série de Taylor é um método matemático que permite aproximar funções diferenciáveis em torno de um ponto fixo a representadas por uma série de potências Stewart (2022).

Teorema 2.1 (Série de Taylor) Considere a série de Taylor geral de uma função $f(x)$ em torno de $x = a$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \dots \\ f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

A série na Eq. (2.2) é denominada *Série de Taylor da função f centrada em a* .

Demonstração 2.1 Suponha que f seja uma função representada por uma série de potências.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + |x-a| < R \quad (2.3)$$

Se $x = a$ então a Eq 2.3, então os termos após o primeiro são 0 e teremos

$$f(a) = c_0$$

Derivando a série na Eq 2.3 termo a termo:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots \quad |x-a| < R \quad (2.4)$$

Com a substituição de $x = a$ na Eq 2.4 fornecerá

$$f'(a) = c_1$$

Derivando ambos os lados da Eq 2.4 teremos

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \dots \quad |x-a| < R \quad (2.5)$$

Colocando $x = a$ novamente, obteremos

$$f''(a) = 2c_2$$

Aplicando o procedimento novamente

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \dots \quad |x-a| < R \quad (2.6)$$

Substituindo $x = a$ na Eq 2.6 fornecerá

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Se continuarmos à fazer esse processo, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots nc_n = n!c_n \quad (2.7)$$

Com isso, isolamos o n -ésimo coeficiente c_n da equação

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (2.8)$$

Substituindo essa fórmula para c_n de volta para na série, provamos a Eq 2.2.

Um caso especial na Eq. (2.2) é quando $a = 0$, a série de Taylor recebe o nome especial de Série de Maclaurin, expressa por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \quad (2.9)$$

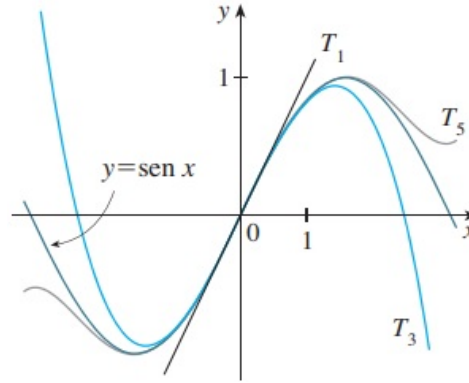
Exemplo 2.1 Usando a Eq. (2.9) para obter a expansão da função do $\sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução 2.1 Considerando:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.10)$$

A Figura 6 mostra o comportamento de $\sin x$ com os polinômios de Taylor, conforme Eq. (2.10), sendo a curva na cor azul claro é o gráfico da função $\sin x$, e as curvas na cor preta (T_1 , T_3 e T_5) os comportamentos dos polinômios de Taylor.

Figura 6 – Gráfico de $\sin x$ com os polinômios de Taylor.



Fonte: (Stewart, 2022).

Observação 2.2 No caso, fazendo $x = \theta$, temos a função $\sin \theta$, e fazendo a expansão em torno de $\theta = 0$ usando a série de Maclaurin (Eq. (2.9)), obtemos:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin(0) + \frac{\sin'(0)}{1!}\theta - \frac{\sin''(0)}{2!}\theta^2 + \dots \\ \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\end{aligned}\quad (2.11)$$

Assim, a série de Taylor (Eq. (2.2)) e a série de Maclaurin (Eq. (2.9)) mostram como excelentes ferramentas para simplificar equações não lineares (Stewart, 2022).

2.2.2 Classificações das Equações Diferenciais (ED)

Uma equação diferencial (ED) é classificada quanto ao tipo, a ordem e a linearidade (Boyce; DiPrima, 2010).

2.2.2.1 Tipo de uma ED:

Uma ED é dita **Equação Diferencial Ordinária** (EDO) se a função incógnita depende de uma única variável independente, neste caso aparecem na equação diferencial apenas derivadas ordinárias, e podem ser escritas na forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.12)$$

em que y é função apenas da variável independente $x \in \mathbb{R}$. Caso contrário, uma **Equação diferencial Parcial** (EDP) se a função incógnita depende de várias variáveis independentes, neste caso aparecem derivadas parciais.

Observação 2.3 No desenvolvimento do trabalho, será utilizado a EDO.

2.2.2.2 Ordem de uma EDO

Uma EDO pode ser de 1^a , de 2^a , $\dots$, de n -ésima ordem dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. A maior ordem de uma derivada que aparece na ED é chamada de ordem da equação diferencial. A Eq. (2.12) descreve uma EDO de n -ésima ordem.

2.2.2.3 Linearidade de uma EDO

Uma EDO pode ser linear ou não linear. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. Por exemplo uma EDO linear de ordem n é uma equação que pode ser escrita como

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad (2.13)$$

onde $a_i(x)$ são denominadas funções coeficientes e $i = 0, 1, \dots, n$.

Observação 2.4 As EDOs que não podem ser colocadas na forma dada na Eq. (2.13) são denominadas não lineares (Boyce; DiPrima, 2010).

2.2.3 Problema de Valor Inicial (PVI)

Na EDO, muitos problemas requerem a determinação de uma solução $y(x)$ que necessitam de condições específicas em um ponto já dado. Essas condições necessárias são denominados como **condições iniciais**, onde são impostos às funções desconhecidas $y(x)$ e suas derivadas em um ponto específico x_0

Podemos determinar, de maneira geral, um Problema de Valor Inicial (PVI) de ordem n da seguinte forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.14)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \quad (2.15)$$

Para resolver esse PVI é empregado o uso de uma família de soluções da equação dada. Dada as condições x_0 aplicadas à determinar n constantes, resulta em uma solução em um intervalo I contendo x_0 Zill (2016).

2.2.4 Solução de uma EDO

A Eq. (2.12) descreve uma EDO de ordem n . Uma solução dessa equação é uma função $\phi(x)$ definida em um intervalo I , tal que, ao substituir $\phi(x)$ e suas derivadas na ED, a identidade seja satisfeita para todo $x \in I$.

As soluções de uma EDO podem ser classificadas em duas formas, sendo explícita e implícita:

2.2.4.1 Explícita:

Uma solução explícita de uma EDO é aquela em que a variável dependente y é expressa juntamente com a variável independente x no formato $y = \phi(x)$, ficando:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

é definida para todo $x \in I$

2.2.4.2 Implícita:

Uma solução de uma EDO é dita implícita quando uma relação $G(x, y) = 0$ em um intervalo I , existe pelo menos uma função ϕ que satisfaça a relação G , bem como a equação diferencial.

Teorema 2.2 (Existência e Unicidade da Solução) Caso as funções $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\dots$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ dadas do lado esquerdo da igualdade (Eq. (2.13)) sejam contínuas e deriváveis no intervalo aberto I , e $a_n(x) \neq 0$, então existe uma única função $y(x)$ que satisfaça a Eq. (2.13) no intervalo I com as condições de valor inicial.

Demonstração 2.2 Consideremos a equação diferencial ordinária linear de ordem n :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x),$$

com as condições iniciais

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Assumimos que as funções $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\dots$, $a_0(x)$ e $f(x)$ são contínuas e que $a_n(x) \neq 0$ para todo x no intervalo I .

Podemos procurar a solução $y(x)$ como uma série de potências centrada em x_0 :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$

Derivando essa série, obtemos:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k (x - x_0)^{k-2},$$

e assim por diante, até a derivada de ordem n :

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) c_k (x - x_0)^{k-n}.$$

Substituímos essas expressões na equação diferencial e organizamos os termos em potências de $(x - x_0)$. Como a igualdade deve valer para todo x , os coeficientes de cada potência de $(x - x_0)$ devem ser zero, gerando um sistema de equações para os coeficientes c_k .

Os coeficientes $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ são determinados diretamente pelas condições iniciais. Os coeficientes restantes c_k ($k \geq n$) podem ser determinados repetidos infinitamente.

Isso garante a existência de uma solução expressa como uma série de potências, pelo menos em um intervalo pequeno ao redor de x_0 . Agora, assuma que existam duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da EDO que satisfaçam as mesmas condições iniciais. Definimos a diferença:

$$z(x) = y_1(x) - y_2(x).$$

Então, $z(x)$ satisfaz a equação homogênea associada:

$$a_n(x) z^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) z^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) z'(x) + a_0(x) z(x) = 0,$$

com as condições iniciais homogêneas:

$$z(x_0) = 0, \quad z'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Pelo Princípio da Extensão de Unicidade, uma solução da EDO homogênea com todas as condições iniciais nulas deve ser a solução trivial, ou seja,

$$z(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Isso implica que $y_1(x) = y_2(x)$, provando a unicidade da solução.

Observação 2.5 A solução de uma ED pode ser obtida por três abordagens diferentes: a analítica, a qualitativa e a numérica. Na abordagem analítica, a solução da EDO é obtido pelo processo de integração. E assim, nem sempre é possível encontrar a solução de todas as ED, devido ao fato que existem muitas equações que não possuem soluções expressas em termos de funções elementares ou cuja integração é extremamente complexa.

3 Métodos do Cálculo Numérico

O Cálculo Numérico é a obtenção da solução de um problema pela aplicação de método numérico; a solução do problema será caracterizada, então, por um conjunto de números, exatos ou aproximados.

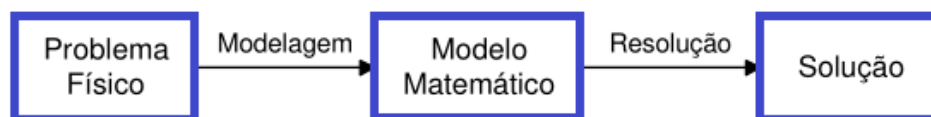
O Método Numérico é um algoritmo composto por um número finito de operações envolvendo apenas números (operações aritméticas elementares, cálculo de funções, consulta a uma tabela de valores, consulta a um gráfico, arbitramento de um valor, etc.).

Para as equações diferenciais sem solução na forma analítica por meio de funções elementares, nestes casos são necessários métodos numéricos para obter suas resoluções. Tais métodos fornecem soluções em forma de tabelas de números ([Watari, 2004](#)).

Para as EDO pode-se encontrar vários métodos numéricos para obter a solução numérica, entre eles citamos, Runge-Kutta, Euler, Euler modificado, Heum, e método de Ralston.

Estes Métodos Numéricos procuram desenvolver processos de cálculo (algoritmos), utilizando uma sequência finita de operações aritméticas básicas, de forma a que certos problemas matemáticos podem ser resolvidos, na aplicação de uma modelagem. Este processo é descrito da Figura 7.

Figura 7 – Etapas do processo para resolver um problema físico com métodos numéricos.



Fonte: Autores.

Observação 3.1 Modelagem é a fase de obtenção do modelo matemático que descreve o comportamento do sistema físico. E a Resolução é a fase de obtenção da solução através da aplicação de métodos numéricos (este é o objetivo de estudo do Cálculo Numérico) ([Sanches; Furlan; Lobão, 2017](#)).

Os métodos são utilizados para obter solução de problemas em várias áreas do conhecimento, como na Engenharias, Economia, Medicina, Física, Química, entre outras, por complementar o estudo teórico de determinada área, e pela sua simplicidade na resolução dos problemas.

Neste trabalho são usados apenas dois métodos numéricos, Runge-Kutta e Euler, e utilizada as referências [Sanches, Furlan e Lobão \(2017\)](#), [Burden, Faires e Burden \(2017\)](#) e

Watari (2004).

3.1 EDO de Primeira Ordem com Condições Iniciais

Para os métodos numéricos a serem apresentados neste capítulo, vamos considerar o problema de valor inicial (PVI), dado

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), & t_a \leq t \leq t_n, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

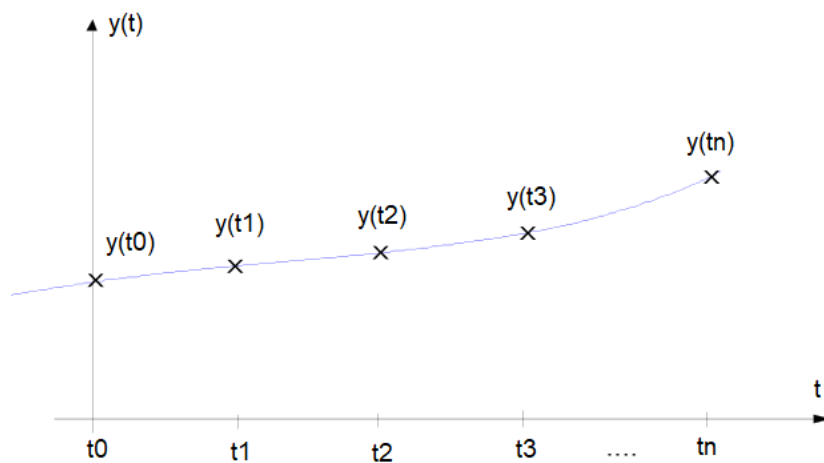
A solução numérica de uma EDO dada na Eq. (3.1) é obtida por uma aproximação para valores de uma função do tipo $y(t)$ por um método numérico, que consiste em obter aproximações de valores para pontos $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$, apresentados na Tabela 3.1, e plotados no plano cartesiano, como mostrado na Figura 8. Assim, o procedimento numérico substitui o problema envolvendo variáveis contínuas (Eq. (3.1)) por outro envolvendo variáveis discretas.

Tabela 3.1 – Aproximações de valores de pontos de $y(t)$.

t	t_0	t_1	t_2	$\dots$	t_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Fonte: Autores.

Figura 8 – Solução numérica da EDO dada na Eq.(3.1).



Fonte: Adaptada de (Sanches; Furlan; Lobão, 2017).

A seguir, apresentamos os métodos numéricos a serem utilizados no trabalho.

3.2 Método Geral de Runge-Kutta

Devido a sua precisão e simplicidade o método de Runge-Kutta tem sido o mais utilizado, devido ser determinado a partir da Série de Taylor.

O método geral de Runge-Kutta de R-estágios é definido por

$$y_{n+1} = y_n + hf_R(t_n, y_n; h) \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} f_R(t_n, y_n; h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots + c_R k_R \\ c_1 + c_2 + \cdots + c_R &= 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo $f(t_n, y_n, h)$ é chamada de função incremento e pode ser interpretada coma uma inclinação média sobre o intervalo. E as funções k_j da Eq. (3.3) são dadas por

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + ha_2, y_n + h(b_{21}k_1)), \quad a_2 = b_{21}, \\ k_3 &= f(t_n + ha_3, y_n + h(b_{31}k_1 + b_{32}k_2)), \quad a_3 = b_{31} + b_{32}, \\ k_4 &= f(t_n + ha_4, y_n + h(b_{41}k_1 + b_{42}k_2 + b_{43}k_3)), \quad a_4 = b_{41} + b_{42} + b_{43}, \\ &\vdots \\ k_R &= f(t_n + ha_R, y_n + h(b_{R1}k_1 + \cdots + b_{R,R-1}k_{R-1})), \quad a_R = b_{R1} + \cdots + b_{R,R-1} \end{aligned}$$

onde k_R são as inclinações dos R-intervalos.

Observação 3.2 Observe que a aproximação y_{n+1} (Eq. (3.2)) é calculada a partir de y_n e uma média de valores de $f(t, y)$ em vários pontos.

Os valores de k_R , a_R e b_R são escolhidos de modo que o método de Runge-Kutta tenha a mesma ordem do erro de um método de Taylor. Isso é o que define a ordem do método de Runge-Kutta.

3.3 Runge-Kutta de Segunda Ordem (RK2)

Da Eq. (3.2) o método de Runge-Kutta de 2-estágios é definido fazendo $f(x_n, y_n; h) = c_1 k_1 + c_2 k_2$, ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + (c_1 k_1 + c_2 k_2)h \quad (3.4)$$

com

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf(t_n + ha_2, y_n + a_2 k_1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde as constantes c_1 , c_2 e a_2 devem ser avaliadas para que o método resultante tenha um termo de $O(h^3)$. Para isso, vamos escrever a expansão da série de Taylor na vizinhança de t_n , de modo que

$$y_{n+1} = y(t_n) + h \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_n} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t_n} + O(h^3). \quad (3.6)$$

Sabemos do PVI (Eq. (3.1)) que $dy/dt = f(t, y)$, de modo que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{df(t, y)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (3.7)$$

onde usamos a regra da cadeia para função de duas variáveis.

Substituindo Eq. (3.7) na Eq. (3.6), obtemos

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right] (t_n, y_n) + O(h^3). \quad (3.8)$$

Logo, k_2 da Eq. (3.5) pode ser expandido em série de Taylor para ordem $O(h^3)$, obtendo

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_n + ha_2, y_n + a_2k_1) \\ &= f(t_n, y_n) + a_2h \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + a_2k_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo k_2 (Eq. (3.9)) na Eq. (3.6), obtemos

$$y_{n+1} = y_n + (c_1 + c_2)hf(t_n, y_n) + c_2h^2 \left(a_2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_2f \frac{\partial f}{\partial y} \right) (t_n, y_n) + O(h^3). \quad (3.10)$$

Observação 3.3 A estratégia do Método de Runge-Kutta é através de manipulações algébricas, tornando a Eq. (3.4) equivalente a Eq. (3.10).

Colocando a_2 em evidência no terceiro termo na Eq. (3.10), e depois comparando os termos com coeficientes idênticos nas Eq. (3.8) e Eq. (3.9), obtemos o seguinte sistema de equações para determinar as constantes:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2a_2 = 1/2 \end{cases} \quad (3.11)$$

O sistema descrito na Eq. (3.11) possui duas equações e três incógnitas. Portanto, existem infinitas soluções. Assim, pode-se afirmar que existem infinitos Métodos de Runge-Kutta de dois estágios e Segunda Ordem. Assim, podemos escolher valores para as constantes c_1 , a_2 e c_2 que satisfazem o sistema dado na Eq. (3.3). Sejam $c_1 = c_2 = 1/2$, e com esses valores teremos o **clássico método de Runge-Kutta de segunda ordem (RK2)** que é descrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h, & n = 0, 1, \dots, n-1 \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = hf(t_n + h, y_n + k_1). \end{cases}$$

onde k_1 é a inclinação no início do intervalo, e o k_2 é a inclinação no final do intervalo.

Observação 3.4 O Método de Euler Modificado podem ser classificados como Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem.

3.4 Método Runge-Kutta de 3ª Ordem (RK3)

De forma análoga ao que se fez para o Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem, pode-se determinar para ordens mais elevadas, e as formulações não são únicas. Apresenta-se a seguir uma das formulação mais utilizadas para o método de Runge-Kutta de 3ª ordem :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \\ k_1 = hf(t_n, y_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = hf(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{cases} \quad (3.12)$$

que calcula a solução aproximada usando coeficiente intermediários, denotados por k_1 , k_2 e k_3 .

3.5 Método Runge-Kutta de 4ª Ordem

O Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK4) é um dos métodos numéricos mais utilizados para resolver EDO, e obter suas soluções aproximadas de um problema de valor inicial, devido ao fato de oferecer um bom equilíbrio entre precisão. Assim, uma das formulação mais utilizadas para o método de Runge-Kutta de 4ª ordem:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \\ y_0 = a_2 \\ k_1 = hf(t_n, y_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(t_{n+1}, y_n + k_3), \end{cases} \quad (3.13)$$

que calcula a solução aproximada usando coeficiente intermediários, denotados por k_1 , k_2 , k_3 , k_4 ,

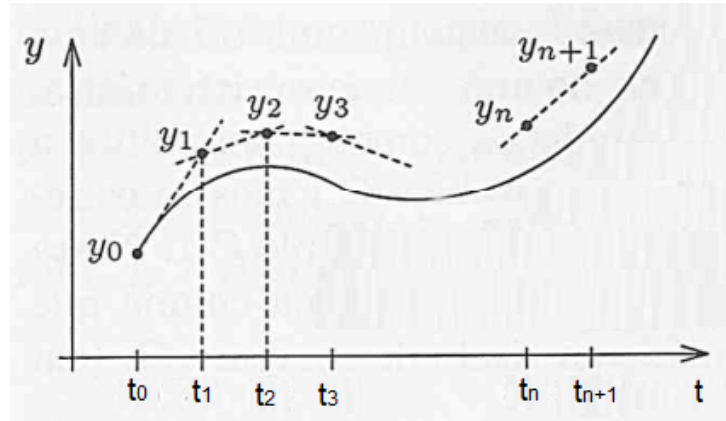
3.6 Método de Euler

O Método de Euler é um sistema simples para resolver EDO conforme [Burden, Faires e Burden \(2017\)](#) ressalta:

Apesar de o método de Euler ser raramente usado na prática, a simplicidade de sua dedução pode ser utilizada para ilustrar as técnicas envolvidas na construção de algumas das técnicas mais avançadas, sem a algébra incômoda que acompanha essas construções (Burden; Faires; Burden, 2017, p. 290).

Considere o problema de valor inicial como descrito na Eq. (3.1). Um vez que t_0 e y_0 são conhecidos, o coeficiente angular da reta tangente à solução y no ponto t_0 pode ser determinado a partir da EDO dado (Eq. (3.1)). Seguindo sobre a reta tangente até encontrar a reta $t = t_1$, determina-se o valor aproximado Y_1 , de y , em t_1 , como mostra a Figura 9.

Figura 9 – Solução numérica pelo Método de Euler para a EDO dada na Eq.(3.1).



Fonte: Adaptada de (Watari, 2004).

Seja

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 y'(y_0)(t - t_0) \\ &= y_0 f(t_0, y_0)(t - t_0). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da Eq. (3.17), calcula-se $y' = f(t_0, y_0)$ que é o valor aproximado do coeficiente angular da reta tangente a y no ponto t_1 . Assim obtemos

$$y_2 = y_1 + y'(t_1)(t_2 - t_1) = y_0 f(t_0, y_0)(t - t_0). \quad (3.15)$$

Procedendo de modo análogo e sucessivamente, obtemos

$$y_{n+1} = y_0 + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n) = y_n + y'_n(t_{n+1} - t_n). \quad (3.16)$$

Na Eq. (3.16), escolhendo um espaçamento constante, denotado por $h = t_{n+1} - t_n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, obtemos o **método de Euler**, dado por

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + h y'_n \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde y_{n+1} é a aproximação da solução no instante t_{n+1} ; y_0 é a condição inicial; h é a distância entre seus pontos é chamado de **tamanho do passo**, t_n denota o instante de tempo associado à iteração n .

Observação 3.5 Método de Euler Modificado pode ser classificado como Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem.

Para o **método de Euler**, a Tabela 3.2 mostra os registros dos resultados intermediários necessários, de uma maneira sistemática, para minimizar o perigo de cometer erros nos cálculos.

Tabela 3.2 – Aproximações de valores de pontos de y_{n+1} (Eq. (3.17)) pelo método de Euler.

					Euler	Exata	Erro
n	t_n	y_n	$f(t_n, y_n)$	$hf(t_n, y_n)$	y_{n+1}	$y(t_n)$	$y_{n+1} - y(t_n)$
0	t_0	y_0	$f(t_0, y_0)$	$hf(t_0, y_0)$	y_1	$y(t_0)$	$y_1 - y(t_0)$
1	t_1	y_1	$f(t_1, y_1)$	$hf(t_1, y_1)$	y_2	$y(t_1)$	$y_2 - y(t_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	t_n	y_n	$f(t_n, y_n)$	$h f(t_n, y_n)$	y_{n+1}	$y(t_n)$	$y_{n+1} - y(t_n)$

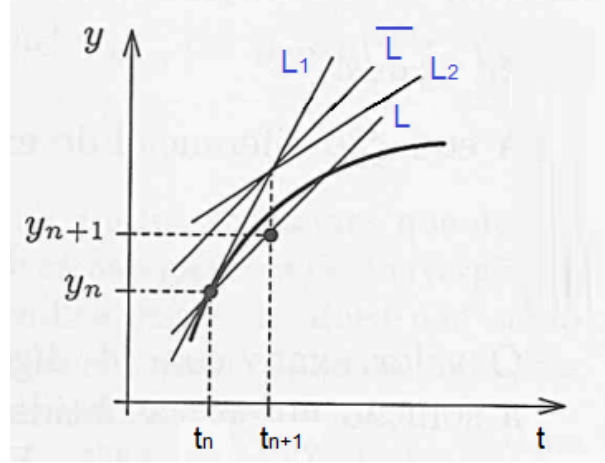
Fonte: Autores.

Observação 3.6 Na Tabela 3.2 foi incluída a coluna com a solução exata ($y(t_n)$) é a solução geral analítica da EDO (Eq. (3.1)), e uma coluna com a diferença entre as soluções numérica (y_{n+1}) e exata, para obter o erro.

3.7 Método Euler Aperfeiçoado

Considere o problema de valor inicial como descrito na Eq. (3.1). Para o método de Euler aperfeiçoado usamos a média das inclinações de duas retas tangentes, sendo uma no ponto (t_n, y_n) e outra no ponto $(t_n + h, y_n + hy'_n)$.

Pelo lado geométrico, aproveitamos o método de Euler (Seção 3.6) para determinar o ponto $(t_n + h, y_n + hy'_n)$ que está situado na reta tangente L_1 , como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Solução numérica pelo Método de Euler Aperfeiçoado da EDO dada na Eq.(3.1).

Fonte: Adaptada de (Watari, 2004).

No ponto $(t_n + h, y_n + hy'_n)$ calcula-se a inclinação da reta tangente L_2 utilizando a EDO dada na Eq. (3.1). A média das duas inclinações permite obter a reta $\bar{L}$, que passa pelo ponto $(t_n + h, y_n + hy'_n)$. Finalmente, traça-se a reta L , passando pelos pontos (t_n, y_n) e (t_{n+1}, y_{n+1}) , e é paralela a reta $\bar{L}$. A inclinação da reta L é dada por

$$y'_n = \frac{1}{2} [k + f(t_n + h, y_n + hk)], \quad (3.18)$$

onde $k = f(t_n, y_n)$. Portanto, substituindo a Eq. (3.18) na Eq. (3.1), obtemos o **método de Euler aperfeiçoado** é dado por

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{1}{2} [k + f(t_n + h, y_n + hk)]. \quad (3.19)$$

Para o **método de Euler aperfeiçoado**, a Tabela 3.3 mostra os termos a serem calculados.

Tabela 3.3 – Aproximações de valores de pontos de y_{n+1} (Eq. (3.19)) pelo método de Euler aperfeiçoado.

					Euler Aperf.	Exato	Erro
n	t_n	y_n	$k = f(t_n, y_n)$	$f(t_n + h, y_n + hk)$	y_{n+1}	$y(t_n)$	$y_{n+1} - y(t_n)$
0	t_0	y_0	$k = f(t_0, y_0)$	$f(t_0 + h, y_0 + hk)$	y_1	$y(t_0)$	$y_1 - y(t_0)$
1	t_1	y_1	$k = f(t_1, y_1)$	$f(t_1 + h, y_1 + hk)$	y_2	$y(t_1)$	$y_2 - y(t_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	t_n	y_n	$k = f(t_n, y_n)$	$hf(t_n, y_n)$	y_{n+1}	$y(t_n)$	$y_{n+1} - y(t_n)$

Fonte: Autores.

3.8 Método de Euler Modificado

É equivalente ao método de Euler aperfeiçoado (Eq. (3.19)), considerando o ponto $(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k)$, é o método de Euler modificado é dado por

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k\right). \quad (3.20)$$

Para o **método de Euler modificado**, a Tabela 3.4 mostra os termos a serem calculados.

Tabela 3.4 – Aproximações de valores de pontos de $y(t)$ (Eq. (3.20)) pelo método de Euler modificado.

					Euler Mod.	Exata	Erro
n	t_n	y_n	$k = f(t_n, y_n)$	$hf(t_n + h/2, y_n + h/2)$	y_{n+1}	$y(t_n)$	$y_{n+1} - y(t_n)$
0	t_0	y_0	$k = f(t_0, y_0)$	$hf(t_0 + h/2, y_0 + h/2)$	y_1	$y(t_0)$	$y_1 - y(t_0)$
1	t_1	y_1	$k = f(t_1, y_1)$	$hf(t_1 + h/2, y_1 + h/2)$	y_2	$y(t_1)$	$y_2 - y(t_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	t_n	y_n	$k = f(t_n, y_n)$	$hf(t_n + h/2, y_n + h/2)$	y_{n+1}	$y(t_n)$	$y_{n+1} - y(t_n)$

Fonte: Autores.

Estes métodos numéricos serão utilizados para escrever o script em Python (Capítulo 6) para verificarmos os comportamentos dos movimentos do pêndulo simples, bem como, usaremos a plataforma PhET *online* (Capítulo 4).

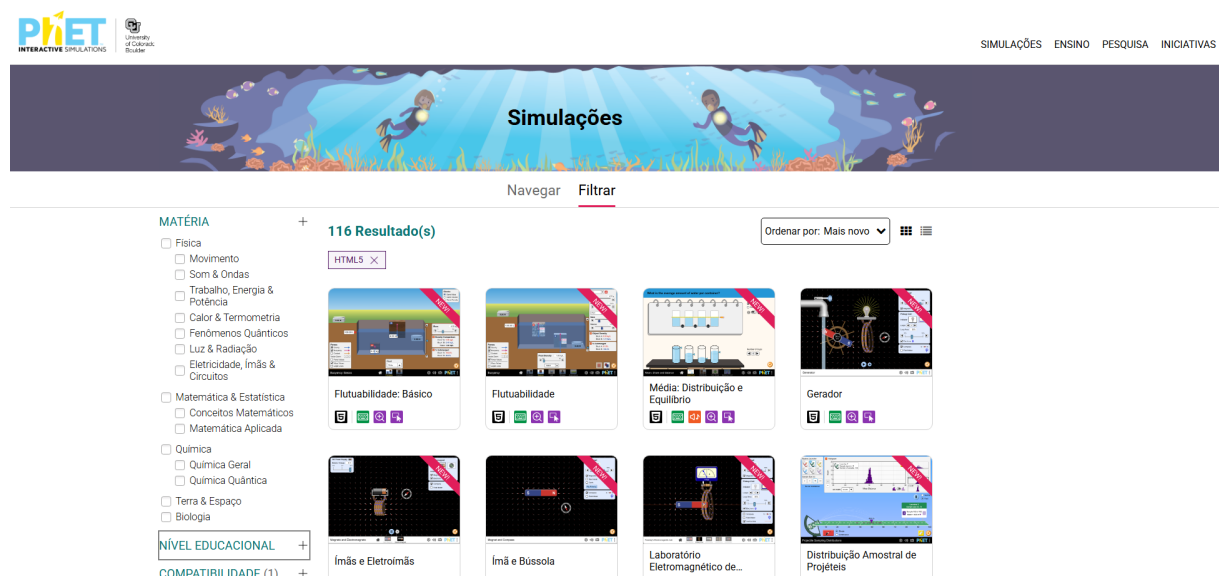
4 Laboratório do Pêndulo e a Linguagem de Programação Python

Pode-se encontrar na internet uma variedade de *sites* que disponibilizam plataformas virtuais de Laboratório. Um deles é o *site*¹ oferta simulações para problemas para algumas áreas do conhecimento, como a matemática, física, química e ciências, de forma divertidas, gratuitas, interativas e baseadas em pesquisa. Cada simulação é testado e avaliada para garantir a eficácia educacional.

A plataforma disponível para simulações *online* interativas gratuitas, é da Universidade do Colorado em Boulder, e veio do resultado do projeto Simulações Interativas PhET, que em 2002 recebeu Prêmio Nobel Carl Wieman.

As simulações do site PhET são escritas em HTML5 (com algumas simulações legadas em Java ou Flash), e podem ser executadas *online* ou baixadas para o computador. Todas as simulações são de código-fonte aberto. A Figura 11 mostra a interface do site PhET.

Figura 11 – Interface do site PhET.



Fonte: Adaptada do Site PhET.

Este trabalho utiliza a plataforma disponibilizada pelo site PhET, Laboratório do Pêndulo.

¹ Link do site do PhET: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/filter?type=html

4.1 Laboratório do Pêndulo

O *Laboratório do Pendulo* é uma plataforma virtual que simula o movimento do pêndulo simples com um ambiente facilmente controlado e preciso. O *Laboratório de Pêndulo* permite realizar de parâmetros como o comprimento do fio L e a amplitude inicial do (θ_0) e a aceleração gravitacional, realizando também medições precisas do período de oscilação como mostra a Figura 12.

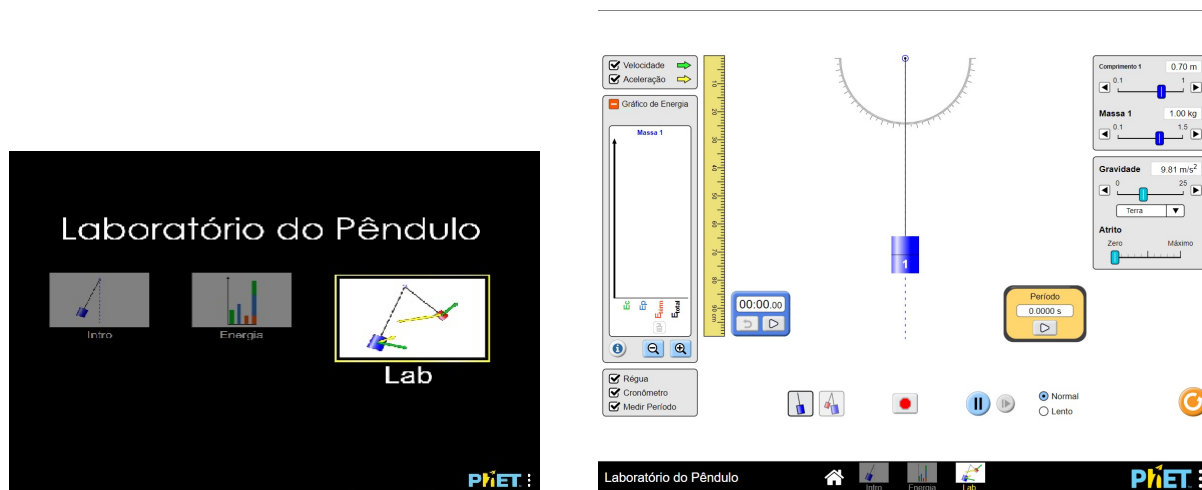


Figura 12 – Laboratório do Pêndulo.

Fonte: Site PhET.

As vantagens do uso da plataforma, se destacam mais pela facilidade de coleta de dados, controle dos parâmetros e eliminações de erros como resistência do ar e atrito.

4.2 Linguagem de Programação Python

Python é uma linguagem de programação de alto nível criado em 1989 pelo programador Guido van Rossum, cuja primeira versão pública foi lançada em 1991. Segundo Lutz e Ascher (2007), essa linguagem de programação tem se destacado não apenas pela sua facilidade de uso e acessibilidade, mas pela quantidade de bibliotecas disponíveis para muitas áreas de estudos é um grande diferencial dessa linguagem de programação. Além disso, ela funciona para uma grande variedade de aplicações, e tem sintaxe simples, fácil de aprender.

O Python é utilizado para desenvolvimento de software, análise de dados, inteligência artificial, automação de tarefas, criação de aplicativos web e entre outras. Pode-se usar ambientes, denominados por IDEs, para desenvolver códigos em Python, como por exemplo, Visual Studio Code e Pycharm, e podem ser instalados em computadores com sistemas operacionais como Windows, Linux e Mac, ou pode-se usar ambientes virtuais online, como por exemplo, o Colab do Google.

A extensão de programação numérica NumPy do Python, mencionada anteriormente, inclui ferramentas avançadas, como um objeto *array*, interfaces para bibliotecas matemáticas padrão e muito mais. Integrando o Python com rotinas numéricas escritas em uma linguagem compilada, para obter velocidade, a extensão NumPy transforma o Python em uma ferramenta de programação numérica sofisticada, porém fácil de usar, que frequentemente pode substituir código já existente escrito em linguagens compiladas tradicionais, como FORTRAN ou C++. Ferramentas numéricas adicionais para Python suportam animação, visualização em 3D etc. (Lutz; Ascher, 2007, 33)

4.2.1 Algumas Bibliotecas do Python

As bibliotecas utilizados para realizar esse trabalho são:

- **Numpy**: Para realizar cálculos numéricos e manipulações de arrays (que são os otimizadores para operações numéricas e podem ter uma ou mais dimensões).
- **SciPy**: Utilizado para resolver equações diferenciais
- **Matplotlib**: Utilizado para visualizações de representações gráficos.

Com o avanço tecnológico, problemas complexos têm surgido nas ciências e engenharias, exigindo métodos sofisticados para a sua modelagem e análise. A utilização de equações diferenciais é crucial para resolver determinados problemas, mas suas soluções analíticas nem sempre são viáveis devido sua complexidade, por isso é necessário um auxílio computacional (Alves, 2021).

Todos os estudos do movimento do pêndulo simples apresentados no Capítulo 6 foram realizados na plataforma PhET, e assim como, por um *script* em programação Python.

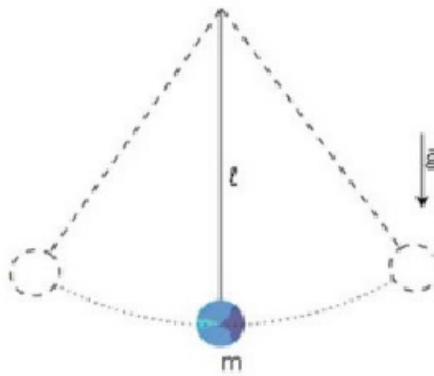
5 Estudo do Movimento do Pêndulo Simples

Neste capítulo apresentamos um breve estudo do movimento do pêndulo simples e suas características físicas.

5.1 Pêndulo Simples

Considera-se um pêndulo simples com as seguintes características segundo (Kodama, 2004), constituído por uma massa puntiforme m presa por um fio inextensível, flexível e de massa desprezível com comprimento L do fio flexível. Esse pêndulo oscila em torno de um ponto fixo formando um ângulo θ em relação a sua vertical (Figura 13).

Figura 13 – Pêndulo-Simples



Fonte: (Mello, 2012).

Quando em posição de equilíbrio, as duas forças que atuam sobre o pêndulo, o peso mg (ou força peso) e a tensão aplicada pelo fio se equilibram. O pêndulo, nesse caso, se encontra em repouso, com o ângulo $\theta = 0$, onde o pêndulo está fixo na posição vertical.

Entretanto, se o pêndulo for afastado de sua posição de equilíbrio, de modo que o ângulo $\theta \neq 0$, a força peso perpendicular ao fio, no sentido de restaurar o equilíbrio criará uma oscilação no pêndulo, criando um movimento periódico (Lopes; Suave; Nogueira, 2018). Quando deslocado de sua posição de equilíbrio, o peso mg pode ser descomposta em duas vertentes, sendo elas: a componente normal (ou radial) e a componente tangencial.

A direção radial, que é balanceada pela tensão no fio, não contribui diretamente para o movimento oscilatório, já que seu papel é manter a massa puntiforme na trajetória circular ao redor do ponto fixo. Porém a componente tangencial da força peso $\vec{P}$, é responsável por gerar o torque que induz o movimento oscilatório. Essa componente é dada por $F_{tangencial} = mg \sin \theta$.

Aplicando a Segunda lei de Newton das forças atenuantes do pêndulo a partir da Figura 14, temos:

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0, \quad (5.1)$$

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (5.2)$$

Dividindo a Eq. (5.2) por mL , obtemos a equação diferencial do movimento, dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad (5.3)$$

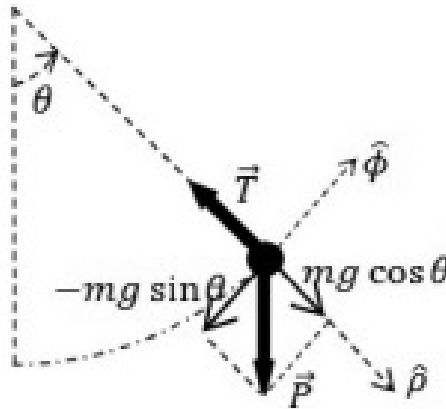
que é uma equação diferencial de **segunda ordem** não linear devido ao termo $\sin \theta$.

Para os casos em que a amplitude de oscilação do ângulo θ seja pequena, ou seja, ângulo $\theta \approx 0$, pode-se dizer que o $\sin \theta \approx \theta$. Portanto, reescrevendo a Eq. (5.3), obtemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (5.4)$$

que descreve o movimento de um oscilador harmônico simples, também denominada por movimento harmônico simples (MHS).

Figura 14 – Decomposição das forças sobre os eixos radial e tangencial no pêndulo simples.



Fonte: (Lopes; Suave; Nogueira, 2018).

Para transformar a Eq. (5.4) de segunda ordem para um sistema de primeira ordem, utilizamos uma mudança de variável. Assim, definimos

- θ como a posição angular
- $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

A derivada segunda $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ pode ser expressa como uma derivada de ω em relação ao tempo, ou seja,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (5.5)$$

Substituindo a Eq. (5.4) na Eq. (5.5), obtemos

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L}\theta. \quad (5.6)$$

As Eq. (5.5) e a Eq. (5.6) formam um sistema de duas ED de primeira ordem, cuja solução geral, e a solução geral da Eq. (5.4), dada por

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad (5.7)$$

onde

- $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ é a frequência angular
- θ_0 é o ângulo inicial
- ω_0 é a velocidade angular inicial.

E como $\omega_0 = 0$, a solução dada na Eq. (5.7) pode ser reescrita, como:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).$$

Dessa forma, a aproximação da massa do pêndulo simples nos descreve um Movimento Harmônico Simples (MHS) (Young; Freedman, 2016), e com o período da oscilação T seguindo dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (5.8)$$

5.2 Correção para Grandes Amplitudes

Embora o pêndulo simples seja um modelo idealizado, ele oferece uma base sólida para o estudo de sistemas oscilatórios mais complexos. Porém, a aproximação $\sin \theta \approx \theta$ só pode ser válida para ângulos menores que 15° .

Para ângulos maiores que 15° , o movimento pêndular deixa de ser um MHS e começa a depender da amplitude de oscilação. Nesse caso, a amplitude pode ser aproximado por uma série infinita, conforme dito por Amrani, Paradis e Beaudin (2008):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \dots\right) \quad (5.9)$$

Além disso, em situações reais, a resistência do ar e o atrito no ponto de fixação podem amortecer o movimento do pêndulo, reduzindo a amplitude das oscilações ao longo do tempo.

Caso a haste do pêndulo não for desprezível, o sistema se comportará como um pêndulo físico, onde o período de oscilação depende do momento de inércia e da distribuição de massa. Mesmo com essas limitações, o pêndulo simples foi um material muito utilizado para o desenvolvimento de relógios de pêndulos. Bem como para medir a aceleração gravitacional em um local específico.

6 Aplicações: Experimento e Validação

Neste capítulo, descreveremos um experimento virtual realizado no *Laboratório de Pêndulo* e uma simulação computacional em Python, ambos com o objetivo de validar as equações do pêndulo simples abordado nos capítulos anteriores.

A análise prática nos permitirá verificar a precisão das soluções teóricas, como a aproximação de pequenas amplitudes 5.8 e para as grandes amplitudes. Além disso, exploraremos e compararemos os métodos numéricos de Euler e de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) na resolução de ED não linear do pêndulo simples.

Observação 6.1 O método de Euler Modificado e Aperfeiçoado não serão trabalhados por serem comparáveis com o método RK2. Já o RK1, RK2 e RK3 não serão trabalhados por serem métodos teóricamente inferior ao RK4.

6.1 Associação com os Métodos Numéricos

Considerando a equação diferencial do pêndulo simples descrita pelo sistema de primeira ordem, dado por

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L} \sin \theta. \end{cases} \quad (6.1)$$

6.1.1 Método de Euler

Escrevendo as equações dadas no sistema discreta na Eq. (6.1), na forma do método de Euler, ou seja, as atualizações das variáveis angulares θ e ω em cada passo h são dadas por:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + h\omega_n, \quad (6.2)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + h\left(-\frac{g}{L} \sin(\theta)\right) \quad (6.3)$$

6.1.2 Método Runge-Kutta 4ª Ordem

Escrevendo as equações dadas no sistema discreta na Eq. (6.1), na forma do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, ou seja, as atualizações das variáveis angulares θ e ω em

cada passo h são dadas por:

$$\begin{cases} k_{1\theta} = h \cdot \omega_n, \\ k_{1\omega} = h \cdot \left(-\frac{g}{l} \sin \theta_n\right), \\ k_{2\theta} = h \cdot \left(\omega_n + \frac{k_{1\omega}}{2}\right), \\ k_{2\omega} = h \cdot \left(-\frac{g}{l} \sin \left(\theta_n + \frac{k_{1\theta}}{2}\right)\right), \\ k_{3\theta} = h \cdot \left(\omega_n + \frac{k_{2\omega}}{2}\right), \\ k_{3\omega} = h \cdot \left(-\frac{g}{l} \sin \left(\theta_n + \frac{k_{2\theta}}{2}\right)\right), \\ k_{4\theta} = h \cdot (\omega_n + k_{3\omega}), \\ k_{4\omega} = h \cdot \left(-\frac{g}{l} \sin (\theta_n + k_{3\theta})\right), \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{6} (k_{1\theta} + 2k_{2\theta} + 2k_{3\theta} + k_{4\theta}), \quad (6.5)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{1}{6} (k_{1\omega} + 2k_{2\omega} + 2k_{3\omega} + k_{4\omega}). \quad (6.6)$$

Foram necessárias algumas mudanças no *scrip* para realizar a comparação numérica. A Listing 6.1 mostra o *script* em Python do cálculo do período do pêndulo simples para os métodos numéricos Euler e Rungue-Kutta, descritas nas Eq. (6.2) e Eq. (6.4), respectivamente.

```

1
2 #pacotes
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 #parametros
7 g = 9.81
8 L = 1.0
9 dt = 0.01
10 t_max = 5
11
12 # Parametros Estabelecidos
13 theta0_graus = 5
14 theta0 = np.radians(theta0_graus)
15 omega0 = 0.0
16 euler_pratico = # Aqui eu coloco o valor encontrado atraves do PhET
17
18 # Funcao para aceleracao angular
19 def aceleracao_angular(theta):
20     return -g / L * np.sin(theta)
21
22 # Metodo de Euler
23 def euler_step(theta, omega, dt):
24     omega_novo = omega + aceleracao_angular(theta) * dt
25     theta_novo = theta + omega * dt

```

```
26     return theta_novo, omega_novo
27
28 # Metodo de Runge-Kutta 4 (RK4)
29 def rk4_step(theta, omega, dt):
30     k1_theta = omega
31     k1_omega = aceleracao_angular(theta)
32
33     k2_theta = omega + 0.5 * dt * k1_omega
34     k2_omega = aceleracao_angular(theta + 0.5 * dt * k1_theta)
35
36     k3_theta = omega + 0.5 * dt * k2_omega
37     k3_omega = aceleracao_angular(theta + 0.5 * dt * k2_theta)
38
39     k4_theta = omega + dt * k3_omega
40     k4_omega = aceleracao_angular(theta + dt * k3_theta)
41
42     theta_novo = theta + (dt / 6.0) * (k1_theta + 2 * k2_theta + 2 * k3_theta + k4_theta)
43     omega_novo = omega + (dt / 6.0) * (k1_omega + 2 * k2_omega + 2 * k3_omega + k4_omega)
44
45     return theta_novo, omega_novo
46
47 #definicao
48 def simular_pendulo(metodo, theta0, omega0, dt, t_max):
49     tempo = [0.0]
50     theta = [theta0]
51     omega = [omega0]
52     n_steps = int(t_max / dt)
53
54     for i in range(n_steps):
55         t_atual = tempo[-1]
56         theta_atual = theta[-1]
57         omega_atual = omega[-1]
58
59         theta_novo, omega_novo = metodo(theta_atual, omega_atual, dt)
60
61         tempo.append(t_atual + dt)
62         theta.append(theta_novo)
63         omega.append(omega_novo)
64
65     return np.array(tempo), np.array(theta)
66
67 def calcular_periodo(tempo, theta):
68     zeros = []
69     for i in range(1, len(theta)):
70         if theta[i-1] > 0 and theta[i] <= 0:
71             t1, t2 = tempo[i-1], tempo[i]
72             th1, th2 = theta[i-1], theta[i]
```

```

73         t_zero = t1 + (0 - th1) * (t2 - t1) / (th2 - th1)
74         zeros.append(t_zero)
75
76     if len(zeros) > 1:
77         periodos = np.diff(zeros)
78         return np.mean(periodos)
79     return None
80
81 tempo_euler, theta_euler = simular_pendulo(euler_step, theta0, omega0, dt, t_max)
82 tempo_rk4, theta_rk4 = simular_pendulo(rk4_step, theta0, omega0, dt, t_max)
83
84 periodo_euler = calcular_periodo(tempo_euler, theta_euler)
85 periodo_rk4 = calcular_periodo(tempo_rk4, theta_rk4)
86
87 if periodo_euler is not None and periodo_rk4 is not None:
88     erro_euler = abs(euler_pratico - periodo_euler)
89     erro_rk4 = abs(euler_pratico - periodo_rk4)
90
91     print(f "Per odo Euler: {periodo_euler:.4f} s")
92     print(f " Per odo RK4: {periodo_rk4:.4f} s ")
93 else:
94     print("N o foi poss vel calcular os per odos com os dados dispon veis.")
95
96 plt.plot(tempo_euler, theta_euler, label="Euler", color="green")
97 plt.plot(tempo_rk4, theta_rk4, label="RK4", linestyle="--", color="red")
98 plt.xlabel("Tempo (s)")
99 plt.ylabel(" ngulo (rad)")
100 plt.title(f"Euler e RK4 ( = {theta0_graus} )")
101 plt.grid(True)
102 plt.legend()
103 plt.show()

```

Listing 6.1 – Script em Python do Cálculo do Período do Pêndulo Simples através dos Métodos Numéricos

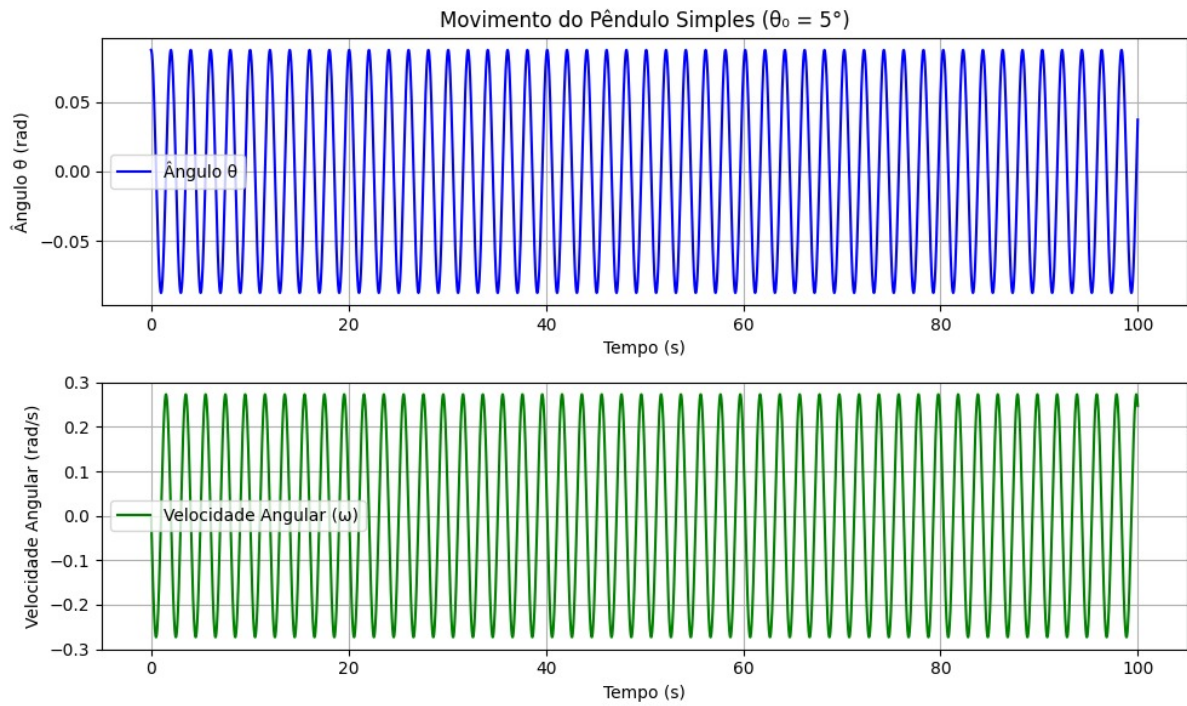
6.2 Análise dos Métodos Numéricos

Para realizar as análises dos métodos numéricos, foram estabelecidos alguns parâmetros da física para obtermos os comportamentos dos movimentos do pêndulo simples, considerando ângulos diferentes, $\theta = 5^\circ$, $\theta = 10^\circ$ e $\theta = 15^\circ$.

A Listing 6.2 mostra o *script* em Python para obter os comportamentos dos movimentos do pêndulo simples e da velocidade angular, para os ângulos determinados anteriormente. As Figuras 15 - 17 mostram os comportamentos dos movimentos do pêndulo simples para os respectivos ângulos, onde foram considerados os seguintes parâmetros:

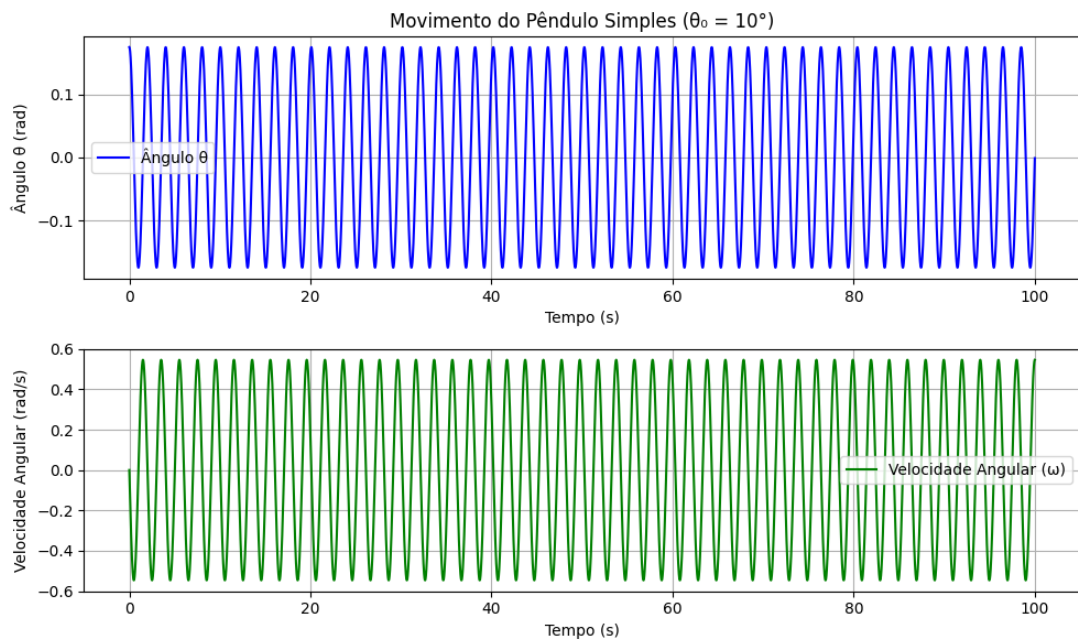
- Gravidade: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- Comprimento do fio: $L = 1.0 \text{ m}$
- Ângulos testados: $\theta_1 = 5^\circ$, $\theta_2 = 10^\circ$ e $\theta = 15^\circ$

Figura 15 – Comportamentos dos movimentos do pêndulo simples com ângulo $\theta = 5^\circ$.

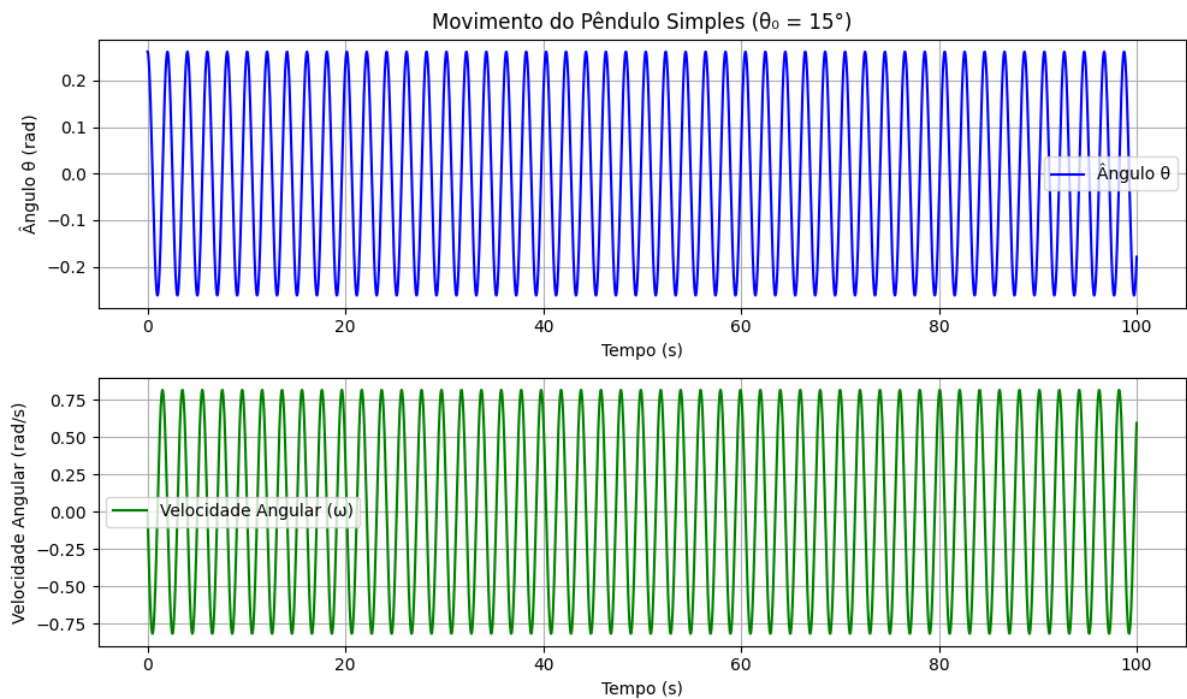


Fonte: Autores.

Figura 16 – Comportamentos dos movimentos do pêndulo simples com ângulo $\theta = 10^\circ$.



Fonte: Autores.

Figura 17 – Comportamentos dos movimentos do pêndulo simples com ângulo $\theta = 15^\circ$.

Fonte: Autores.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 g = 9.81
6 L = 1.0
7 theta0_graus = 10
8 theta0 = np.radians(theta0_graus)
9 omega0 = 0.0
10 t_max = 100
11 dt = 0.01
12 t = np.arange(0, t_max, dt)
13
14 def equacoes_pendulo(estados, t, g, L):
15     theta, omega = estados
16     dtheta_dt = omega
17     domega_dt = -(g / L) * np.sin(theta)
18     return [dtheta_dt, domega_dt]
19
20 condicoes_iniciais = [theta0, omega0]
21
22 solucao = odeint(equacoes_pendulo, condicoes_iniciais, t, args=(g, L))
23
24 theta = solucao[:, 0]
25 omega = solucao[:, 1]
26

```

```

27 plt.figure(figsize=(10, 6))
28
29 plt.subplot(2, 1, 1)
30 plt.plot(t, theta, label=' ngulo      ', color='blue')
31 plt.xlabel('Tempo (s)')
32 plt.ylabel(' ngulo      (rad)')
33 plt.title(f'Movimento do P ndulo Simples (      = {theta0_graus} )')
34 plt.legend()
35 plt.grid(True)
36
37 plt.subplot(2, 1, 2)
38 plt.plot(t, omega, label='Velocidade Angular (      )', color='green')
39 plt.xlabel('Tempo (s)')
40 plt.ylabel('Velocidade Angular (rad/s)')
41 plt.legend()
42 plt.grid(True)
43
44 plt.tight_layout()
45
46 plt.show()
47
48 T_teorico = 2 * np.pi * np.sqrt(L / g)
49 print(f"Per odo te rico (aproxima o para pequenos ngulos ): {T_teorico:.5f} s")
50
51 cruzamentos_zero = np.where(np.diff(np.sign(theta)))[0]
52 if len(cruzamentos_zero) > 1:
53     periodo_numerico = 2 * (t[cruzamentos_zero[1]] - t[cruzamentos_zero[0]])
54     print(f"Per odo estimado (solu o num rica): {periodo_numerico:.5f} s")
55 else:
56     print("N o foram encontrados cruzamentos suficientes para estimar o per odo.")

```

Listing 6.2 – Script em Python do Movimento do Pêndulo Simples e da Velocidade Angular.

Para pêndulos simples com ângulo $\theta < 15^\circ$, seu período equivale é definido e dado aproximadamente por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,81}} \approx 2,006. \quad (6.7)$$

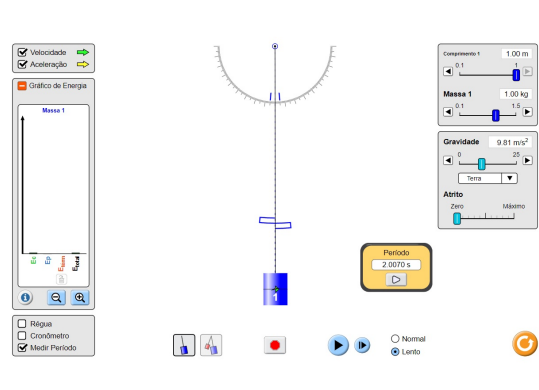
Observação 6.2 A massa não interfere no cálculo do período porque a equação do movimento é derivada da Segunda Lei de Newton (Seção 2.1.3). Isso ocorre porque a força gravitacional é proporcional à massa $F = mg$, e como a Segunda Lei relaciona a força à aceleração, faz com que a massa se cancele no cálculo dinâmico do pêndulo.

Para validar a precisão dos métodos numéricos escolhidos (Euler e Rungue-Kutta) para a resolução da equação diferencial do pêndulo simples, implementamos simulação computacional em Python. A seguir, apresentamos alguns exemplos.

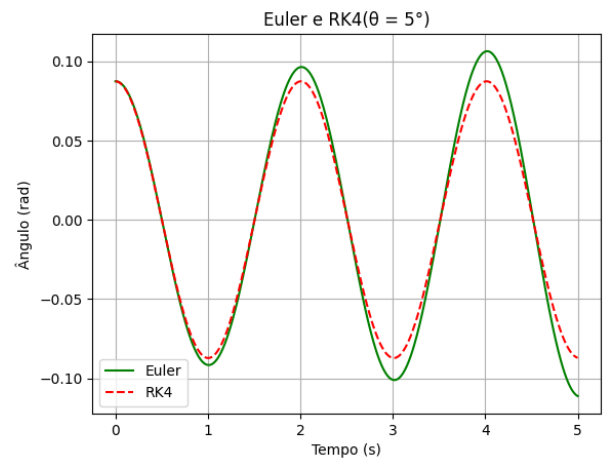
Exemplo 6.1 Considere o pêndulo simples com ângulo $\theta_1 = 5^\circ$. Compare os comportamentos da plataforma PhET e com os métodos numéricos.

Solução 6.1 O período encontrado no plataforma *online Laboratório do pêndulo* para o ângulo $\theta = 5^\circ$ foi de $T = 2,0070s$, cuja velocidade pode ser encontrada observada na Figura 18.

Figura 18 – Comportamentos do pêndulo simples usando a plataforma PhET e os métodos numéricos (Euler e Rungue-Kutta) com ângulo $\theta = 5^\circ$.



Fonte: Adaptada do Site PhET.

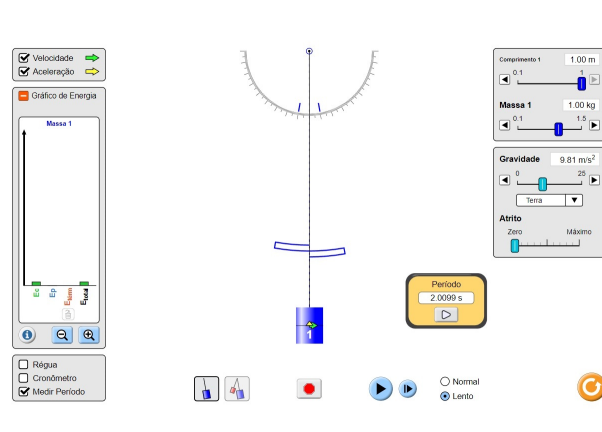


Fonte: Autores.

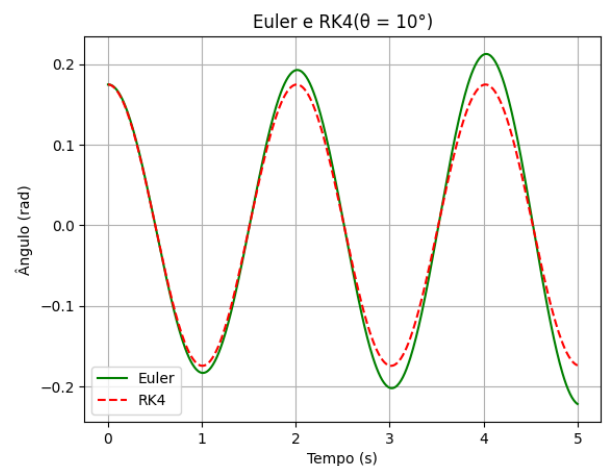
Exemplo 6.2 Considere o pêndulo simples com ângulo $\theta_2 = 10^\circ$. Compare os comportamentos da plataforma PhET e com os métodos numéricos.

Solução 6.2 Na plataforma *online Laboratório do pêndulo* para o ângulo $\theta = 10^\circ$ foi de $T = 2,0099s$, cuja veracidade pode ser encontrada na seguinte imagem (Figura 19).

Figura 19 – Comportamentos do pêndulo simples usando a plataforma PhET e os métodos numéricos (Euler e Rungue-Kutta) com ângulo $\theta = 10^\circ$.



Fonte: Adaptada do Site PhET.

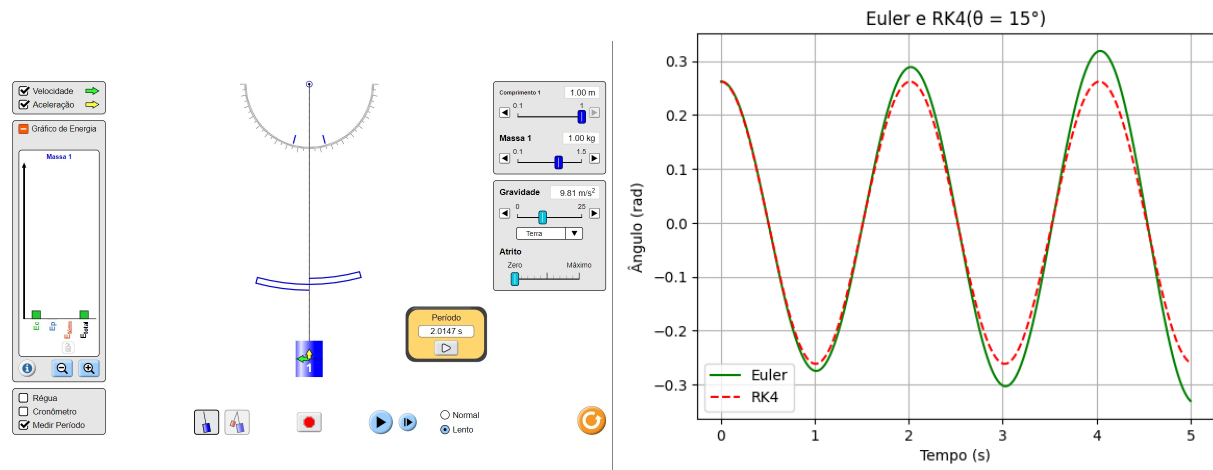


Fonte: Autores.

Exemplo 6.3 Considere o pêndulo simples com ângulo $\theta_3 = 15^\circ$. Compare os comportamentos da plataforma PhET e com os métodos numéricos.

Solução 6.3 *Laboratório do pêndulo* para o ângulo $\theta = 15^\circ$ foi de $T = 2,0147s$, cuja veracidade pode ser encontrada na seguinte imagem (Figura 20).

Figura 20 – Comportamentos do pêndulo simples usando a plataforma PhET e os métodos numéricos (Euler e Rungue-Kutta) com ângulo $\theta = 15^\circ$.



Fonte: Adaptada do Site PhET.

Fonte: Autores.

Para medirmos o erro dos períodos, podemos fazer de duas maneiras. Podemos calcular o erro com base no período teórico, já que a margem de erro dele é baixa, ou podemos comparar com o valor obtido através do *PhET* que já mostra o período com mais precisão independente do ângulo estabelecido.

Nesse experimento, iremos optar pelo segundo método, já que o período do *PhET* tem uma precisão maior. Os valores dos períodos encontrados para os dois métodos numéricos (Euler e Rungue-Kutta) são descritos na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Períodos Encontrados na plataforma PhET e para os métodos numéricos (Euler e Rungue-Kutta).

Ângulo	PhET	Teórico	Euler	RK4
5°	2,0070	2,0061	2,0080	2,0070
10°	2,0099	2,0061	2,0116	2,0099
15°	2,0147	2,0061	2,0178	2,0147

Fonte: Autores.

O erro foi calculado conforme descrito por Burden, Faires e Burden (2017, p. 16), e definido por:

$$\text{Erro}(\%) = \left| \frac{\text{Valor Aproximado} - \text{Valor Real}}{\text{Valor Real}} \right| * 100 \quad (6.8)$$

A Tabela 6.2 mostra os valores dos erros obtidos, na plataforma PhET, PhET teórico, comparados com os erros dos métodos numéricos Euler e Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).

Tabela 6.2 – Comparação dos Erros obtidos: Plataforma PhET, Método de Euler e Método de Runge-Kutta.

Ângulo	PhET	PhET-Teórico	PhET-Euler	PhET-RK4
5°	2,0070	0,0448%	0,0493%	0%
10°	2,0099	0,1891%	0,0846%	0%
15°	2,0147	0,4269%	0,1539%	0%

Fonte: Autores.

6.3 Análise dos Resultados

Os resultados mostraram que, para ângulos pequenos $\theta < 15^\circ$, o período teórico 5.8 é uma boa aproximação com erros baixos. Porém, para ângulos maiores, a aproximação linear do $\sin \theta \approx \theta$ deixa de ser válida, e a solução numérica se torna essencial para capturar o comportamento do sistema não linear.

Embora o método de Euler seja uma boa solução para calcular o período do pêndulo simples, com fácil implementação computacional, ele acumula erros ao longo do tempo, especialmente em sistemas oscilatórios. Isso ocorre pois, o método de Euler é de primeira ordem, e não leva em consideração as curvaturas e variações de ordem superior na solução.

No entanto, o RK4 sendo um método numérico, conseguiu capturar melhor as variações não lineares revelando ser um sistema mais preciso e estável.

7 Considerações Finais e Conclusão

O trabalho realizado teve como objetivo principal a modelagem numérica e computacional do comportamento do movimento oscilatório do pêndulo simples, utilizando métodos numéricos, caso, Euler e RK4.

A análise dos resultados mostrou que o método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) apresentou comportamento mais robusto ao comparado com o método de Euler em meio de precisão. Enquanto o RK4 reproduziu os períodos com erro nulo, o método de Euler apresentou erros crescente sempre que o ângulo aumentava.

A simulação no *Laboratório do Pêndulo* (PhET) mostrou ser essencial para capturar o período de forma precisa. Afinal, se o trabalho fosse realizado em um laboratório físico, deveríamos considerar influências externas, como por exemplo a resistência do ar.

A utilização da linguagem Python, mostrou-se fundamental para a automatização dos cálculos e a visualização dos comportamentos dos movimentos do pêndulo simples para diferentes ângulos. As bibliotecas como **NumPy**, **SciPy** e **Matplotlib** do Python auxiliaram para implementar os métodos e a gerar gráficos permitindo uma análise detalhada do pêndulo.

O trabalho realizado, nos possibilita estender o estudo para sistemas mais complexos, como pêndulos de Newton, pêndulos com amortecimento ou sistemas sujeitos a forças externas. Além disso, pode-se implementar outros métodos como método de Verlet para explorar a precisão deles.

Referências

- ALVES, D. B. Solução de equações diferenciais em python aplicada a problemas de engenharia. Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2021.
- AMRANI, D.; PARADIS, P.; BEAUDIN, M. Approximation expressions for the large-angle period of a simple pendulum revisited. *Revista mexicana de física E*, Sociedad Mexicana de Física, v. 54, n. 1, p. 59–64, 2008.
- AURELIANO, B.; SANTIS, G.; FAUSTINO, V. Pêndulo de foucault. *Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"*, 2015.
- BARROS, L. d. S. et al. Oscilador harmônico simples, série e transformada de fourier e operador de sturm-liouville—uma breve discussão. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 45, p. e20230046, 2023.
- BORIN, D. *Equações diferenciais e modelagem de alguns fenômenos físicos*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2024.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. *Análise Numérica*. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo-vol. 1*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- KODAMA, T. *Mecânica Clássica I*. [S.l.]: Instituto de Física - UFRJ, 2004.
- LOPES, F. S.; SUAVE, R. N.; NOGUEIRA, J. A. Uma revisão das aproximações lineares para grandes amplitudes de oscilações do período de um pêndulo simples. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, p. e3313, 2018.
- LUTZ, M.; ASCHER, D. *Aprendendo Python*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- MELLO, V. L. M. d. Pêndulo simples, de torção e físico. *Instrumentação para o ensino de Física IV - Universidade Federal do Sergipe, São Cristovão - SE*, 2012.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica, 1: mecânica*. 5. ed. São Paulo: E. Blucher, 2013.
- SANCHES, I. J.; FURLAN, D. L.; LOBÃO, D. C. Introdução aos métodos numéricos. Departamento de Informática. 2017.
- SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. J. *Princípios de Física: Movimento Ondulatório e Termodinâmica*. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- STEWART, J. *Cálculo Volume 2*. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2022.
- WATARI, K. *Mecânica Clássica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004. v. 2.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física I: mecânica*. 14. ed. São Paulo: Pearson Education, 2016.

ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.