

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**MODELAGEM MATEMÁTICA: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM E APLICAÇÕES**

GABRIELLY SEVILHA FERNANDES

**GOIÂNIA - GOIÁS
2025**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Gabrielly Sevilha Fernandes

Matrícula: 20201010940162

Título do Trabalho: Modelagem Matemática: Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem e Aplicações

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 15/03/2025.

Local Data

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Gabrielly Sevilha Fernandes

**MODELAGEM MATEMÁTICA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM E SUAS APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Goiás - IFG - Câmpus
Goiânia, como requisito parcial para obten-
ção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Professora Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

**GOIÂNIA - GOIÁS
2025**

F363m Fernandes, Gabrielly Sevilha.
 Modelagem matemática: equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e aplicações /
 Gabrielly Sevilha Fernandes. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de
 Goiás, Câmpus Goiânia, 2025.
 57 f.: il.

 Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca.

 TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de
 Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

 1. Modelagem matemática. 2. Equações diferenciais ordinárias. I. Fonseca, Regina Célia
 Bueno da (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás,
 Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 515.352

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

MODELAGEM MATEMÁTICA: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM E APLICAÇÕES

por

GABRIELLY SERVILHA FERNANDES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 10 de março 2025, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz (IRG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Esp. José Maria de Urzedá (IRG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Jose Maria de Urzedá, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 10/03/2025 17:14:58.
- Duelci Aparecido de Freitas Vaz, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 10/03/2025 17:14:00.
- Regina Celia Bueno da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 10/03/2025 17:12:51.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 14/02/2025. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 618479

Código de Autenticação: 70073ca2c4



Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os professores do corpo docente de Matemática do Instituto Federal de Goiás, Campus Goiânia. Suas habilidades pedagógicas, comprometimento com o ensino e dedicação aos alunos foram fontes constantes de inspiração ao longo desta jornada acadêmica.

Cada um de vocês desempenhou um papel fundamental em meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, compartilhando não apenas conhecimento, mas também valores como a curiosidade intelectual, a persistência diante dos desafios e a importância do pensamento crítico. Suas palavras de incentivo e o apoio incondicional foram essenciais para minha formação, transformando dificuldades em oportunidades de aprendizado.

Expresso minha mais profunda gratidão por cada aula ministrada com paixão, cada dúvida esclarecida com paciência e cada conselho dado com sabedoria. Esta conquista não é apenas minha, mas também de vocês, que, com dedicação e amor à docência, fizeram toda a diferença em minha trajetória.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que me concedeu força, sabedoria e orientação ao longo desta jornada. Sua presença constante foi uma fonte de inspiração e conforto em todos os momentos.

Agradeço à minha família pelo apoio incondicional, amor e incentivo ao longo dos anos. Seu apoio emocional e encorajamento foram fundamentais para meu sucesso acadêmico.

Ao meu amado companheiro, por todo o apoio incondicional, pela paciência nos momentos difíceis e pela dedicação incansável ao meu lado. Suas palavras de incentivo foram faróis de esperança, guiando-me nos dias desafiadores e me dando forças para seguir em frente. Sua presença foi essencial nessa caminhada, oferecendo não apenas apoio, mas também amor, compreensão e motivação. Agradeço por cada gesto de carinho, por cada incentivo nos momentos de incerteza e por acreditar em mim mesmo quando eu duvidava. Sem você, esta jornada teria sido muito mais árdua. Esta conquista também é sua, pois cada passo dado foi impulsionado pelo seu amor e companheirismo.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) (EDITAL Nº 019 - PROPPG/IFG, de 23 de maio de 2023), possibilitou o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, o qual deu continuidade a este trabalho de conclusão de curso, que foi uma evolução desse projeto tão importante. A oportunidade de participar deste programa foi fundamental para o aprofundamento dos meus conhecimentos acadêmicos e para o desenvolvimento da minha trajetória como pesquisadora.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os funcionários e profissionais envolvidos na minha formação educacional, desde administradores até bibliotecários e técnicos de laboratório. Seu trabalho muitas vezes passa despercebido, mas é fundamental para o funcionamento eficaz da instituição de ensino.

A todos vocês, meu mais sincero obrigado. Sou profundamente grato por cada contribuição que fizeram para minha jornada educacional.

Resumo

A modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. O modelo matemático é o conjunto de símbolos e relações que procuram traduzir, de alguma forma, um problema de situação real. As equações diferenciais são equações matemáticas que descrevem a relação entre uma função desconhecida e suas derivadas. Essas equações buscam expressar a modelagem matemática que descrevem as diferentes formas algébricas de figuras planas, sólidos e de superfícies. O objetivo da pesquisa foi apresentar a importância da modelagem matemática das equações diferenciais ordinárias aplicadas em problemas das áreas da matemática aplicada, física, engenharia e outras ciências para resolver problemas de fenômenos naturais e processos dinâmicos. A metodologia foi de estratégias investigativas e pesquisa aplicada, gerando conhecimentos para aplicação prática, dirigida ao entendimento da modelagem matemática das equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem, com procedimentos técnicos da pesquisa bibliográfica. A pesquisa resultou na resolução de alguns problemas modelados pelas EDO em algumas áreas do conhecimento, sendo eles: os problemas na química como o decaimento radioativo e problemas de mistura. Os problemas na física como a Lei de Resfriamento de Newton. Os problemas na biologia como o Modelo de Malthus para o estudo do crescimento das populações de organismos, Modelo de Gompertz que estuda o crescimento de tumores sólidos. Os problemas na economia envolvendo juros composto. As soluções gerais de cada problema mostraram a importância do entendimento da teoria das EDO, para modelar, analisar e interpretar seus comportamentos e fazer previsões na sua evolução temporal, mostrando a possibilidade de alterações nas variáveis do sistema e nas condições iniciais propostas.

Palavras-chave: Modelagem matemática; equações diferenciais ordinárias; ferramenta matemática; aplicações.

Abstract

Mathematical modeling is the process that involves obtaining a model. The mathematical model is the set of symbols and relations that seek to translate, in some way, a real-world problem. Differential equations are mathematical equations that describe the relationship between an unknown function and its derivatives. These equations seek to express the mathematical modeling that describes the different algebraic forms of flat figures, solids and surfaces. The objective of the research was to present the importance of mathematical modeling of ordinary differential equations applied to problems in the areas of applied mathematics, physics, engineering and other sciences to solve problems of natural phenomena and dynamic processes. The methodology was investigative strategies and applied research, generating knowledge for practical application, aimed at understanding the mathematical modeling of first-order ordinary differential equations (ODE), with technical procedures of bibliographic research. The research resulted in the resolution of some problems modeled by ODEs in some areas of knowledge, such as: problems in chemistry such as radioactive decay and mixing problems; problems in physics such as Newton's Law of Cooling; problems in biology such as the Malthus Model for studying the growth of populations of organisms, the Gompertz Model that studies the growth of solid tumors; problems in economics involving compound interest. The general solutions to each problem showed the importance of understanding the theory of ODEs to model, analyze and interpret their behavior and make predictions about their temporal evolution, showing the possibility of changes in the system variables and in the proposed initial conditions.

Keywords: Mathematical modeling; ordinary differential equations; mathematical tool; applications.

Lista de ilustrações

Figura 1	–	Processo de Modelagem Matemática	13
Figura 2	–	Etapas na resolução de um PVI pela transformada de Laplace.	32
Figura 3	–	Circuito em Série L-R.	35
Figura 4	–	Circuito em Série R-C	36
Figura 5	–	Estrutura de um átomo.	37
Figura 6	–	Radiação	38
Figura 7	–	Radiação Beta.	38
Figura 8	–	Radiação Gama.	39
Figura 9	–	Tempo meia-vida de um átomo radioativo.	40
Figura 10	–	Ciclo completo do carbono.	40
Figura 11	–	Comportamento do processo de decaimento radioativo do carbono-14. . .	41
Figura 12	–	Comportamento do movimento da velocidade em relação ao tempo. . .	45
Figura 13	–	Comportamento do decaimento exponencial da temperatura do ambiente. .	47
Figura 14	–	Reservatório de mistura.	48
Figura 15	–	Comportamento da função $N(t)$ para vários Valores n_0	50

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela com algumas Propriedades de Laplace.	33
--	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	TEORIA FUNDAMENTAL: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM	16
2.1	Introdução às Equações Diferenciais	16
2.1.1	Tipo e Classificação	16
2.1.2	Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias	17
2.1.3	Problema de Valor Inicial de Ordem n	19
2.2	Equação Diferencial de Primeira Ordem	19
2.2.1	Problema de Valor Inicial da EDO de 1ª ordem	20
2.2.2	Tipos de EDOs de Primeira Ordem	22
2.3	Transformada de Laplace	27
2.3.1	Casos para Funções Parciais	28
2.3.1.1	Denominador com fatores lineares simples	28
2.3.1.2	Denominador com fatores lineares repetidos	29
2.3.1.3	Denominador com fatores quadráticos distintos	30
2.3.1.4	Denominador com fatores quadráticos repetidos	30
2.3.2	Propriedades da Transformada de Laplace	31
3	TEORIA FUNDAMENTAL: ÁREAS ESPECÍFICAS	34
3.1	Física	34
3.1.1	Corpo em queda livre com influência do atrito	34
3.1.2	Lei de Resfriamento de Newton	35
3.1.3	Circuitos em Série	35
3.2	Química	36
3.2.1	Reações Químicas	36
3.2.2	Problema de Mistura	37
3.2.3	Decaimento Radioativo	37
3.3	Biologia	41
3.3.1	Modelo de Malthus	41
3.3.2	Modelo de Gompertz	42
3.4	Economia	42
3.4.1	Juros Composto	42
4	APLICAÇÕES: ALGUNS PROBLEMAS	45
5	RESULTADOS OBTIDOS E CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	53

Anexo A - Tabela de Transformada de Laplace e Propriedades . . .	55
--	----

1 Introdução

A modelagem matemática é o processo de transformar problemas do mundo real em questões matemáticas e resolvê-las, interpretando suas soluções no contexto da realidade. Os benefícios da aplicação da modelagem em pesquisa podem ser observados nos avanços alcançados em diversos domínios, como Física, Química, Biologia e Astrofísica, entre outros. A modelagem envolve uma abordagem multidisciplinar e, nesse sentido, se alinha às novas tendências que promovem a eliminação das fronteiras entre as diferentes áreas de estudo (Bassanezi, 2002).

O significado da palavra "aplicação" da matemática é, descrever o problema extraíndo o aspecto essencial de uma situação, e transformá-lo em um contexto abstrato, onde o raciocínio possa ser absorvido com uma notável economia de linguagem. Assim, a matemática pode ser entendida como uma ferramenta intelectual capaz de condensar ideias originadas em situações empíricas, que frequentemente estão disfarçadas em um conjunto de variáveis de menor relevância (Bertone et al., 2019).

Assim, a ideia de "transformá-lo em um contexto abstrato" destaca o poder da abstração matemática, que permite modelar fenômenos reais de maneira que o raciocínio possa ser mais facilmente manipulado e analisado. Essa abstração permite "absorver" o pensamento com "notável economia de linguagem", ou seja, usando um vocabulário simplificado, mas extremamente preciso e eficaz para expressar conceitos complexos (Figura 1).

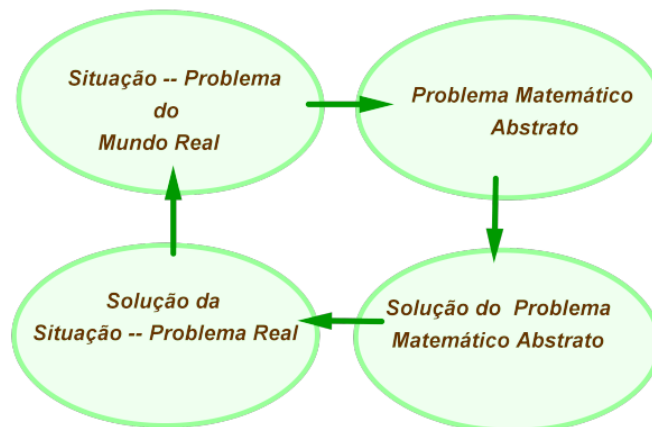


Figura 1 – Processo de Modelagem Matemática
Fonte: (Boyce; DiPrima, 2001).

A relevância de um modelo matemático reside na capacidade de representar, por meio de símbolos, relações matemáticas e propriedades. Por outro lado, o problema é retratado através do modelo, o qual é examinado com as teorias e métodos da Matemática. Isso resulta em informações e conclusões sobre o objeto, que, posteriormente, são apresentadas utilizando-se a linguagem original do problema (Javaroni, 2007).

Segundo Javaroni (2007) ao estudar um problema, busca-se construir um modelo com base em teorias matemáticas. Em outras situações, embora o modelo possa ser baseado em teorias consolidadas, as técnicas disponíveis podem ser insuficientes para resolver o problema, exigindo o desenvolvimento de novos métodos, como por exemplo, métodos computacionais.

Uma modelagem eficaz possibilita fazer previsões, tomar decisões, explicar fenômenos e compreender a realidade; em suma, permite uma participação ativa no mundo, com a capacidade de influenciar suas transformações. Ou seja, a utilidade de um modelo depende consideravelmente do contexto em que ele é criado – um modelo que seja "adequado" para um biólogo pode não ser para um matemático, e vice-versa. Um modelo parcial pode satisfazer as necessidades imediatas de um pesquisador, mesmo que não incorpore todas as variáveis que influenciam a dinâmica do fenômeno estudado Bassanezi (2002).

A observação de que a eficácia de um modelo depende do contexto específico em que é desenvolvido reflete a ideia de que um modelo nunca é universalmente "bom", mas sim adequado a diferentes necessidades e perspectivas. Isso reforça a natureza interdisciplinar da modelagem, onde diferentes campos podem precisar de abordagens distintas, mesmo que o modelo aborde o mesmo fenômeno (Bassanezi, 2002).

No campo educacional, o aprendizado por meio da modelagem promove a integração dos elementos lúdicos da matemática com suas possíveis aplicações práticas. Além disso, com esse recurso, o aluno consegue perceber diferentes possibilidades para direcionar suas habilidades ou seu desenvolvimento acadêmico (Bertone et al., 2019). Ao introduzir esse tipo de abordagem, o ensino da matemática se torna mais dinâmico e conectado ao mundo prático, permitindo que o aluno visualize a utilidade do que aprende. Além disso, a modelagem também desempenha um papel importante na orientação vocacional dos estudantes, ajudando-os a identificar áreas em que podem desenvolver suas habilidades e tomar decisões mais informadas sobre seu futuro acadêmico e profissional. Em suma, a modelagem não só enriquece a experiência de aprendizado, mas também amplia as perspectivas do aluno quanto às suas próprias capacidades e interesses (Bertone et al., 2019).

O objetivo da pesquisa foi apresentar a importância da modelagem matemática das equações diferenciais ordinárias aplicadas em problemas das áreas da matemática aplicada, física, engenharia e outras ciências para resolver problemas de fenômenos naturais e processos dinâmicos. Os objetivos específicos foram:

- Apresentar os fundamentos teóricos das equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem, incluindo sua definição, classificação e métodos de solução;
- Discutir o conceito de modelagem matemática e sua relação com as EDOs, evidenciando sua utilidade na representação de fenômenos reais;
- Explorar exemplos práticos de aplicação das EDOs em diferentes áreas do conhecimento, como física, biologia e química;
- Demonstrar a resolução de problemas utilizando as EDOs, com explicações detalhadas sobre as etapas do processo de modelagem e solução;

- Explorar aplicações práticas em diferentes áreas do conhecimento;
- Promover uma reflexão sobre a importância da matemática no entendimento e na solução de problemas do mundo real, destacando o papel das EDOs nesse contexto.

A metodológica foi de estratégias investigativas e pesquisa aplicada, gerando conhecimentos para aplicação prática, dirigida ao entendimento da modelagem matemática das equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem, com procedimentos técnicos da pesquisa bibliográfica.

O trabalho está estruturado em cinco capítulos, sendo o Capítulo 2 breve descrição da teoria fundamental das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Capítulo 3 a teoria fundamental de algumas áreas do conhecimento, necessárias para o entendimento na resolução do problema abordado. No Capítulo 4 aplicações da EDO de primeira ordem para resolver problemas em algumas áreas do conhecimento, e no Capítulo 5 os resultados obtidos e a conclusão.

2 Teoria Fundamental: Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Neste capítulo são apresentados algumas teorias fundamentais das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Elas são necessárias para melhor entendimento quando aplicadas nas resoluções dos problemas apresentados no Capítulo 4. A referência utilizada é de Yartey e Ribeiro (2017).

2.1 Introdução às Equações Diferenciais

Definição 2.1 (Equação diferencial). Uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente x , a função incógnita $y = f(x)$ e suas derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ se chama equação diferencial. Pode ser escrita na forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.1)$$

Exemplo 2.1.

1. $y' = \operatorname{sen} x$,
2. $y'' + 3x = 0$,
3. $x^2 y'' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^2$.

2.1.1 Tipo e Classificação

A seguir, as definições do tipo e de classificação da uma equação diferencial.

Definição 2.2 (Tipo de uma equação diferencial). Dependendo da quantidade de variáveis independentes envolvidas, as equações diferenciais podem ser classificadas como ordinárias ou parciais. É chamada de **equação ordinária (EDO)** quando a função desconhecida depende de uma única variável, de modo que as derivadas presentes na equação são exclusivamente derivadas ordinárias. Por outro lado, se a função incógnita depender de mais de uma variável, as derivadas serão parciais, caracterizando uma equação **diferencial parcial (EDP)**.

Exemplo 2.2.

1. $R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t) \implies$ modelo de circuito RC: é uma equação diferencial ordinária. Função incógnita $Q = Q(t)$.
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \implies$ denominada por Equação de Laplace: é uma equação diferencial parcial. Função incógnita $u = u(x, y)$.
3. $u_t + uu_x = 0 \implies$ é uma equação diferencial parcial. Função incógnita $u = u(x, t)$.

Definição 2.3 (Ordem de uma equação diferencial). A **ordem** de uma equação diferencial corresponde ao nível da derivada de maior ordem presente na equação.

Exemplo 2.3.

1. $y' = \sin x \implies$ equação diferencial de primeira ordem.
2. $y'' + 3x = 0 \implies$ equação diferencial de segunda ordem.
3. $x^2 y''' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^2 \implies$ equação diferencial de terceira ordem.

Definição 2.4 (Linearidade de uma equação diferencial). Quanto à estrutura de uma equação diferencial, ela pode ser classificada em **linear** ou **não linear**. Ela é linear quando a incógnita e suas derivadas aparecem de forma linear na equação. Por exemplo, uma equação diferencial linear de ordem n pode ser escrita na forma:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' \dots + a_n(x)y^{(n)} = f(x) \quad (2.2)$$

Caso contrário, ela é dita não linear. Por exemplo, a equação de Burgers:

$$u_t + uu_x = 0,$$

onde o termo uu_x é um termo não linear.

2.1.2 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

Considere a EDO de ordem n , dada por:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.3)$$

Definição 2.5. Seja $y = \phi(x)$ uma função real definida no intervalo I , derivável até ordem n para todo $x \in I$. Diz-se que $y = \phi(x)$ é uma **solução explícita** ou simplesmente uma solução da equação diferencial dada na Eq. (2.3) no intervalo I , se

1. $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x))$ é definida para todo $x \in I$, e
2. $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 2.4. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Solução 2.1. Separando as variáveis:

$$y \, dy = x \, dx \quad \Longrightarrow \quad \int y \, dy = \int x \, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \quad \Longrightarrow \quad y^2 = x^2 + C.$$

Agora, isolamos y para obter a solução **explícita**:

$$y = \pm \sqrt{x^2 + C}.$$

Essa é a solução explícita da EDO, pois expressamos y diretamente como uma função de x .

Uma solução de Eq. (2.3) também pode ser expressa de forma implícita, ou seja, como uma equação na forma $\phi(x, y) = 0$.

Definição 2.6. A equação na forma $\phi(x, y) = 0$ é denominada uma **solução implícita** da EDO dada na Eq. (2.3) se essa relação gerar ao menos uma função de valores reais $y = \phi(x)$, definida no intervalo I , de modo que, $y = \phi(x)$ seja uma solução explícita da EDO dada na Eq. (2.3) em $x \in I$.

Exemplo 2.5. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Solução 2.2. Separando as variáveis:

$$y \, dy = x \, dx \quad \Longrightarrow \quad \int y \, dy = \int x \, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \quad \Longrightarrow \quad y^2 = x^2 + C.$$

Essa é a solução implícita da EDO, pois a solução $y(x)$ não está expressa explicitamente em termos de x , mas sim como uma relação entre x e y .

2.1.3 Problema de Valor Inicial de Ordem n

Definição 2.7. Um **problema de valor inicial (PVI)** de uma equação diferencial de ordem n é dado por

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.4)$$

com as condições iniciais:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $x_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ são valores conhecidos. A solução geral do equação diferencial (Eq. (2.4)) é um conjunto de funções que dependem de n parâmetros. As condições iniciais dadas na Eq. (2.5) são utilizadas para determinar os valores das constantes da solução geral e, dessa forma, obter uma solução específica.

A seguir, apresentamos a fundamentação teórica para EDO de primeira ordem que é a equação diferencial para este estudo.

2.2 Equação Diferencial de Primeira Ordem

Definição 2.8 (Equação de Primeira Ordem). Uma equação diferencial de primeira ordem contém somente a primeira derivada $y' = \frac{dy}{dx}$, possivelmente y e alguma função de $x \in I$, isto é, uma equação do tipo

$$F(x, y, y') = 0 \text{ ou } y' = f(x, y). \quad (2.6)$$

Exemplo 2.6.

1. $y' = \cos x$
2. $xy' + 4xy = 0$

2.2.1 Problema de Valor Inicial da EDO de 1ª ordem

Definição 2.9. Um **problema de valor inicial (PVI)** de uma equação diferencial de primeira ordem é definido como:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

onde x_0, y_0 são valores conhecidos. A função $y = \phi(x)$ que resolve esse problema é uma solução da equação diferencial $y' = f(x, y)$ e também satisfaz a condição inicial $\phi(x_0) = y_0$. A condição inicial geralmente é utilizada para determinar o valor da constante C de integração na solução geral.

Observação 2.1. A Def. 2.9 define um PVI de uma equação diferencial de primeira ordem. Próximo passo é verificar se existe uma solução, de modo a responder as seguintes questões:

- Sob que condições podemos garantir que existe uma solução do PVI dado na Eq. (2.7)?
- Sob que condições podemos garantir que a solução do PVI dado na Eq. (2.7) é única?

Os Teoremas 2.1 e 2.2 garantem a existência e unicidade da solução do PVI.

Teorema 2.1 (Existência). Suponha que $f(x, y)$ (Eq. (2.7)) é contínua num retângulo $R = \{(x, y) : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$ centrado em (x_0, y_0) . Então, existe um número h_1 (possivelmente menor que h) tal que uma solução $y = \phi(x)$ do PVI dado na Eq. (2.7) é definida no intervalo $(x_0 - h_1, x_0 + h_1)$.

Demonstração 2.1. Dado o Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2.8)$$

onde $f(x, y)$ é contínua em uma região R em torno de (x_0, y_0) . Queremos mostrar que existe uma solução $y = \phi(x)$ definida em um intervalo $(x_0 - h_1, x_0 + h_1)$. Reescrevendo a Eq. (2.8) como uma equação integral:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2.9)$$

Para encontrar uma função $\phi(x)$ que satisfaça a Eq. (2.9), definimos uma sequência de funções $\phi_n(x)$ por aproximações sucessivas de Picard¹:

$$\phi_0(x) = y_0,$$

¹ Para melhor entendimento a respeito de Aproximações sucessivas de Picard, ver (Hönig, 1961).

$$\phi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi_n(t)) dt.$$

Usamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach² para garantir que a sequência $\phi_n(x)$ converge uniformemente para uma função $\phi(x)$. Para isso, é necessário que $f(x, y)$ satisfaça uma condição de Lipschitz³ em y , ou seja, exista uma constante L tal que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Logo, mostramos que $\phi(x)$ obtida no limite satisfaz a equação integral original (Eq. (2.9)). Como $\phi_n(x)$ converge uniformemente, podemos trocar o limite com a integral, garantindo que:

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt. \quad (2.10)$$

Derivando ambos os lados da Eq. (2.10), obtemos:

$$\frac{d\phi}{dx} = f(x, \phi(x)),$$

o que prova que $\phi(x)$ satisfaz a equação diferencial original. Como $f(x, y)$ é contínua, a solução $\phi(x)$ pode ser estendida para um intervalo $(x_0 - h_1, x_0 + h_1)$, garantindo a existência local da solução. Portanto, provamos que existe uma solução $y = \phi(x)$ definida em um intervalo ao redor de x_0 .

Teorema 2.2 (Unicidade). Suponha que $f(x, y)$ (Eq. (2.7)) e sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ sejam contínuas num retângulo R , como descrito no Teorema 2.1. Então, existe um número h_2 possivelmente menor que h_1 , tal que seja uma solução $y = \phi(x)$ da Eq. (2.7), cuja existência é garantida pelo Teorema 2.1, e é a única solução, no intervalo $(x_0 - h_2, x_0 + h_2)$.

Demonstração 2.2. Dado o Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

onde $f(x, y)$ e sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em uma região R , queremos mostrar que a solução $y = \phi(x)$ garantida pelo Teorema de Existência é única.

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções do PVI no mesmo intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$. Isso significa que ambas satisfazem:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt.$$

Definimos a função $d(x)$ como a diferença entre as duas soluções:

$$d(x) = |y_1(x) - y_2(x)|.$$

² Para melhor entendimento a respeito do Teorema do Ponto Fixo de Banach, ver (Santos, 2024).

³ Para melhor entendimento a respeito de condição de Lipschitz, ver (Jeffreys; Jeffreys, 1972).

Subtraindo as equações integrais das soluções, obtemos:

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] dt \right|.$$

Usando a condição de Lipschitz, existe uma constante L tal que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Portanto,

$$d(x) \leq \int_{x_0}^x L d(t) dt.$$

Pela desigualdade de Gronwall⁴, segue que:

$$d(x) \leq d(x_0)e^{L(x-x_0)}.$$

Mas, como $d(x_0) = |y_1(x_0) - y_2(x_0)| = 0$, concluímos que:

$$d(x) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ no intervalo considerado,}$$

ou seja, $y_1(x) = y_2(x)$, provando a unicidade da solução. Portanto, a solução $y = \phi(x)$ dada no Teorema 2.1 é única.

2.2.2 Tipos de EDOs de Primeira Ordem

A seguir, as definições dos tipos das EDOs de primeira ordem.

Definição 2.10 (EDO Separável). Diversas equações diferenciais de primeira ordem podem ser expressas na forma

$$g(y)y' = f(x). \quad (2.11)$$

Por meio de manipulações algébricas, e usando $y' = \frac{dy}{dx}$, reescrevemos a Eq. (2.11) na forma

$$g(y)dy = f(x)dx, \quad (2.12)$$

denominada por **equação separável**, pois a função $g(y)$ depende apenas da variável y , e tem o diferencial dy do lado esquerdo da igualdade, enquanto do lado direito da igualdade tem-se a função $f(x)$ que depende apenas da variável x , e tem o diferencial dx .

De fato, se $y = f(x)$, temos:

$$h(f(x))f'(x) = g(x) \quad \implies \quad \int h(f(x))f'(x) = \int g(x), \quad (2.13)$$

⁴ Para melhor entendimento a respeito da desigualdade de Gronwall, ver (Lonardoni, 2023, pág. 23).

mas $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, assim Eq. (2.13) é o mesmo que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c, \quad (2.14)$$

onde c é uma constante de integração.

Portanto, para resolver a EDO de primeira ordem separáveis, há a necessidade de organizar a função que possui dependência em y e a função que depende de x , de modo que ambas estejam do mesmo lado da equação, junto com seus respectivos diferenciais dy e dx . Posteriormente, ambas os lados da igualdade da Eq. (2.14) são integradas, o que leva à obtenção da solução geral da EDO dada.

Definição 2.11 (Diferencial Exata). Uma expressão diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é uma diferencial exata em uma região R do plano xy , se ela corresponde à diferencial de alguma função $\psi(x, y)$. Uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (2.15)$$

é chamada de **equação exata** se a expressão do lado esquerdo da Eq. (2.15) é uma diferencial exata, onde as funções coeficientes $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções contínuas no intervalo I , e que dependem das variáveis x e y .

O Teorema 2.3 fornece um método sistemático de determinar se uma EDO é exata e obter a sua solução geral.

Teorema 2.3 (Teorema do Critério). Suponha que as funções $M(x, y)$, $N(x, y)$, e suas derivadas parciais $M_y(x, y)$ e $N_x(x, y)$ são contínuas na região retangular R : $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Então, a Eq. (2.15) é uma EDO exata em R se, e somente se,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad (2.16)$$

em cada ponto de R , isto é, existe uma função $\psi(x, y)$ satisfazendo as condições

$$\psi_x = M(x, y) \quad \text{e} \quad \psi_y = N(x, y), \quad (2.17)$$

se, e somente se, $M(x, y)$ e $N(x, y)$ satisfazem a Eq. (2.16).

Demonstração 2.3. Considere a equação diferencial ordinária:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Queremos determinar a condição necessária e suficiente para que esta equação seja exata, ou seja, para que exista uma função $\psi(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y).$$

Se a equação é exata, então existe $\psi(x, y)$ tal que:

$$M = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Diferenciando a primeira equação em relação a y e a segunda em relação a x , obtemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

Como as derivadas parciais mistas de ψ são contínuas, temos a igualdade:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Portanto, essa é uma condição necessária para que a equação seja exata.

Agora, suponha que a condição

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

seja satisfeita em uma região simplesmente conexa. Vamos mostrar que existe uma função $\psi(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N.$$

Integrando a primeira equação em relação a x , obtemos:

$$\psi(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y),$$

onde $g(y)$ é uma função que depende apenas de y .

Para determinar $g(y)$, diferenciamos $\psi(x, y)$ em relação a y :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + g'(y).$$

Mas sabemos que $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y)$, então:

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + g'(y).$$

Comparando com a condição dada, concluímos que:

$$g'(y) = \text{termos independentes de } x \text{ em } N(x, y).$$

Integrando $g'(y)$, encontramos $g(y)$, o que completa a determinação de $\psi(x, y)$.

Assim, provamos que a equação diferencial é exata se, e somente se, a condição

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

for satisfeita. Isso demonstra o teorema.

Observação 2.2. No Teorema 2.3 a função $\psi(x, y)$ a ser obtida é a solução geral da EDO exata dada.

Exemplo 2.7. Resolva a equação diferencial de 1º ordem

$$(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0. \quad (2.18)$$

Solução 2.3. Sabemos que da Eq. (2.17) do Teo. 2.3 que:

$$M(x, y) = 2x + y \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad (2.19)$$

$$N(x, y) = x + 2y \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 1. \quad (2.20)$$

Como Eq. (2.20) e Eq. (3.22) satisfazem a Eq. (2.16) do Teorema 2.3, logo a Eq. (2.18) é uma EDO exata. Resolvendo as condições da Eq. (2.17):

$$\psi_x = 2x + y \implies \psi(x, y) = x^2 + xy + g(y). \quad (2.21)$$

Derivando $\psi(x, y)$ da Eq. (2.21) em relação a y, e substituindo na condição

$$\begin{aligned} \psi_y = N(x, y) &\implies x + g'(y) = x + 2y \\ g(y) = y^2 + C &\implies \psi(x, y) = x^2 + xy + y^2 + C, \end{aligned} \quad (2.22)$$

é a solução geral da EDO exata dada na Eq. (2.18), sendo C uma constante de integração.

Definição 2.12 (EDO Linear). A equação diferencial

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad (2.23)$$

onde $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são funções coeficientes que dependem da variável independente e são contínuas no intervalo I, y representa a função desconhecida, e y' denota sua derivada de primeira ordem em relação a x. A Eq. (2.23) é linear se satisfaz as condições de linearidade.

Definição 2.13 (Fator integrante). Seja

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (2.24)$$

uma EDO linear. E seja $\mu(x)$ uma função que multiplicamos na Eq. (2.24), ou seja,

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x). \quad (2.25)$$

Escrevendo o lado esquerdo da Eq. (2.25) como a derivada de um produto, isto é,

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)P(x)y.$$

Isso significa que $\mu(x)$ deve satisfazer:

$$\frac{d\mu}{dx} = P(x)\mu \implies \mu(x) = e^{\int P(x)dx}, \quad (2.26)$$

denominada por **fator integrante**.

Para obter a solução geral, multiplicamos os dois lados da Eq. (2.24) por $\mu(x)$ (Eq. (2.26)), e se verificar que

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x), \quad (2.27)$$

então, podemos integrar ambos lados da Eq. (2.27), obtendo

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + C \implies y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)Q(x)dx + C \right), \quad (2.28)$$

é a solução geral da EDO linear, e onde C é uma constante de integração.

Observação 2.3. O fator integrante é uma função especial que facilita a resolução de EDOs lineares de primeira ordem, transformando-as em uma equação que pode ser resolvida por integração direta.

Exemplo 2.8. Resolva a EDO linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^x. \quad (2.29)$$

Solução 2.4. Pela Eq. (2.24) que $P(x) = 2$, e substituindo na Eq. (2.26), obtemos

$$\mu(x) = e^{2x}. \quad (2.30)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (2.29) pela Eq. (2.30), obtemos

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = e^{2x}e^x. \quad (2.31)$$

Observe que o lado esquerdo da Eq. (2.31) se torna a derivada do produto de $\mu(x)$ e y em relação a x , obtendo

$$\frac{d}{dx}[e^{2x}y] = e^{3x}. \quad (2.32)$$

Multiplicando por dx ambos os lados da Eq. (2.32), e integrando em relação aos respectivos diferenciais, ou seja,

$$\int d(e^{2x}y) = \int e^{3x}dx \implies e^{2x}y = \frac{e^{3x}}{3} + C \implies y = \frac{e^x}{3} + Ce^{-2x},$$

é a solução geral da EDO dada, sendo C uma constante de integração.

Definição 2.14 (EDO Homogênea). Uma EDO de primeira ordem dada na forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.33)$$

é denominada por homogênea, sendo o lado direito da Eq. (2.33) depende das variáveis x e y .

Observação 2.4. Usando a Def. 2.14, e seja

$$v = y/x \quad \implies \quad y = vx, \quad (2.34)$$

e derivando ambos lados da igualdade na Eq. (2.34), obtemos

$$dy = x dv + v dx. \quad (2.35)$$

Substituindo a Eq. (2.34) e Eq. (2.35) na Eq. (2.33), e efetuando a álgebra em ambos os lados da igualdade, irá resultar em uma EDO separável com diferenciais em dv e dx , que podem se integrados. E após resolve-lá e substituindo $v = y/x$ na solução, obtem-se a solução geral da EDO homogênea dada.

Exemplo 2.9. Resolva a equação diferencial homogênea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}. \quad (2.36)$$

Solução 2.5. Reescrevendo a Eq. (2.36) na forma:

$$(xy)dy = (x^2 + y^2)dx. \quad (2.37)$$

Fazendo:

$$y = vx \quad \Rightarrow \quad dy = vdx + xdv. \quad (2.38)$$

Substituindo Eq. (2.38) na Eq. (2.36), obtemos:

$$(x^2v)[vdx + xdv] = x^2[1 + v^2]dx \quad \Rightarrow \quad v^2dx + [xv]dv = [1 + v^2]dx.$$

Agrupando de acordo com os diferenciais, ajustando a algebra e integrando, obtemos

$$\frac{v^2}{2} = \ln|x| + C, \quad (2.39)$$

é a solução geral para equação diferencial homogênea dada, onde $v = y/x$. Logo, a solução geral da EDO homogênea dada é

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y = (2x^2 \ln|x| + C)^{1/2}, \quad (2.40)$$

onde C é uma constante de integração.

2.3 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um método para resolver EDO de qualquer ordem.

Definição 2.15 (Transformada de Laplace). Seja uma função $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$. A transformada de Laplace de f , denotada usualmente por $\mathcal{L}[f(x)]$ ou $\mathcal{L}(f)$ é uma função $F(s)$ definida por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (2.41)$$

A notação usual da transformada de Laplace de f é:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s). \quad (2.42)$$

Observação 2.5 (Transformada Inversa de Laplace). Da Eq. (2.42) temos o $F(s)$, então podemos obter $y = f(x)$ que será a solução geral da EDO em estudo. Para isso, basta aplicar a **Transformada Inversa de Laplace** na expressão algébrica $F(s)$, denotada por

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \quad (2.43)$$

Para obter $f(x)$, reescrevemos $F(s)$ como função parcial, de acordo com a forma do denominador, conforme será apresentado a seguir.

2.3.1 Casos para Funções Parciais

Um polinômio em x pode ser expresso na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde os coeficientes a_i , com $i = 0, 1, 2, \dots, n$, são constantes, $a_n \neq 0$, n representa o grau do polinômio e é um número inteiro não negativo.

Qualquer polinômio pode ser escrito como um produto de fatores lineares reais da forma $ax + b$ e fatores quadráticos reais irredutíveis da forma $ax^2 + bx + c$, onde o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é negativo ($\Delta < 0$).

Dizemos que uma função é racional se puder ser expressa como:

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (2.44)$$

$P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios.

Apresentaremos diretrizes para o cálculo de integrais de funções racionais (Eq. (2.44)), começando pela fatoração do denominador e decompondo a função em uma soma de frações mais simples. Examinaremos essa abordagem por meio de diferentes casos.

2.3.1.1 Denominador com fatores lineares simples

Se o grau do polinômio no numerador for inferior ao do polinômio no denominador e se este último puder ser decomposto inteiramente em fatores lineares, então a cada fator linear $ax + b$ corresponde uma única fração simples da forma $\frac{A}{ax + b}$, onde A é uma constante a ser determinada. Caso o grau do numerador seja igual ou superior ao do denominador, primeiro realizamos a divisão dos polinômios e aplicamos o método apenas ao restante obtido, que permanece sobre o denominador (Yamashiro; Souza, 2015).

Exemplo 2.10. Expresse como a soma de frações parciais $\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$ (Thomas et al., 2002):

Solução 2.6. Primeiramente, efetuamos a fatoração do denominador:

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3).$$

Em seguida, determinamos os coeficientes A e B de forma que:

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}. \quad (2.45)$$

Realizando a álgebra na Eq. (2.45), obtemos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A+B=5, \\ -3A+B=-3. \end{cases} \quad (2.46)$$

Resolvendo esse sistema (Eq. (2.46)), obtemos $A=2$ e $B=3$. Assim, podemos reescrever a fração dada como uma soma de frações parciais:

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}.$$

2.3.1.2 Denominador com fatores lineares repetidos

Se o grau do polinômio no numerador for inferior ao do denominador e caso o denominador seja decomposto em produtos de fatores lineares elevados a potências, então, para cada fator linear da forma $(ax+b)^n$, correspondem n termos de frações parciais na seguinte estrutura:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}, \quad (2.47)$$

onde $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ são coeficientes constantes a serem determinados. Caso o grau do polinômio no numerador seja maior ou igual ao do denominador, primeiramente realizamos a divisão polinomial e, em seguida, aplicamos o método ao restante que permanece sobre o denominador (Yamashiro; Souza, 2015).

Exemplo 2.11. Expresse em soma de frações parciais (Thomas et al., 2002):

$$\frac{6x^2+7}{(x+2)^2} \quad (2.48)$$

Solução 2.7. Reescrevendo dada na forma da Eq. (2.47), para uma soma de frações parciais com coeficientes desconhecidos:

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}. \quad (2.49)$$

Realizando a álgebra na Eq. (2.45), obtemos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A=6 \\ 2A+B=7. \end{cases} \quad (2.50)$$

Resolvendo esse sistema (Eq. (2.50)), obtemos $A=6$ e $B=-5$. Assim, podemos reescrever a fração dada (Eq. (2.49)) como uma soma de frações parciais:

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}.$$

2.3.1.3 Denominador com fatores quadráticos distintos

Se o grau do polinômio no numerador for inferior ao do denominador e caso o denominador seja decomposto em fatores quadráticos distintos que não podem ser fatorados em números reais, então, para cada termo quadrático irredutível da forma $ax^2 + bx + c$, corresponde uma única fração parcial expressa como:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

onde A e B são coeficientes constantes a serem encontrados. Caso o grau do numerador seja maior ou igual ao do denominador, primeiramente realizamos a divisão polinomial e, em seguida, aplicamos o método ao resíduo que permanece sobre o denominador (Yamashiro; Souza, 2015).

Exemplo 2.12. Expresse em frações parciais:

$$\frac{3x + 4}{2x^2 + 4x + 2} \quad (2.51)$$

Solução 2.8. Primeiramente, fatoramos o denominador:

$$2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)^2. \quad (2.52)$$

Reescrevendo a Eq. (2.51), usando Eq. (2.52) e obter uma soma de frações parciais com coeficientes desconhecidos:

$$\frac{3x + 4}{2(x + 1)^2} = \frac{A}{2(x + 1)} + \frac{B}{(x + 1)^2} = \frac{Ax + (A + 2B)}{2(x + 1)^2}. \quad (2.53)$$

Realizando a álgebra na Eq. (2.53), obtemos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A = 3 \\ A + B = 4. \end{cases} \quad (2.54)$$

Resolvendo esse sistema (Eq. (2.54)), obtemos $A = 3$ e $B = 1/2$. Assim, podemos reescrever a fração dada (Eq. (2.52)) como uma soma de frações parciais:

$$\frac{3x + 4}{2(x + 1)^2} = \frac{3}{2(x + 1)} + \frac{1}{2(x + 1)^2}.$$

2.3.1.4 Denominador com fatores quadráticos repetidos

Se o grau do polinômio no numerador for inferior ao do denominador e caso o denominador contenha fatores quadráticos irredutíveis repetidos, então, para cada fator quadrático irredutível da forma $ax^2 + bx + c$ que aparece n vezes, corresponde uma soma de frações parciais na seguinte estrutura:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (2.55)$$

onde A_i e B_i , com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, são coeficientes constantes que precisam ser determinados. Caso o grau do polinômio no numerador seja maior ou igual ao do denominador, primeiramente realizamos a divisão algébrica e, em seguida, aplicamos o método ao restante que permanece sobre o denominador (Yamashiro; Souza, 2015).

2.3.2 Propriedades da Transformada de Laplace

Teorema 2.4 (Linearidade). Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$, para $s > a$, e a transformada de Laplace de $g(t)$ é $G(s)$, para $s > a$, então para quaisquer constantes α e β :

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s) = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad (2.56)$$

para $s > \max\{a_1, a_2\}$.

Demonstração 2.4. Sabemos pela Def. 2.15, que a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Seja $g(t)$ outra função cuja transformada de Laplace seja:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt.$$

Agora, considerando uma combinação linear das funções $f(t)$ e $g(t)$, ou seja, $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$, onde α e β são constantes, aplicamos a definição da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}.$$

Utilizando a propriedade da integral de que a transformada de uma soma é a soma das transformadas, temos:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt.$$

Pela linearidade da integral, podemos separar os termos:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt.$$

Pela Def. 2.15, as funções $f(t)$ e $g(t)$ são reescritas como

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Portanto, demonstramos que:

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s),$$

que prova a propriedade de linearidade da transformada de Laplace.

Teorema 2.5 (Transformada de Laplace das Derivadas). Suponha que $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua e que f' seja seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha, além disso, que existam constantes K , a e M tais que $|f'(t)| \leq K e^{at}$ para $t \geq M$. Então, $\mathcal{L}[f'(t)]$ existe para $s > a$ e, é dada por

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0), \quad (2.57)$$

onde $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

Demonstração 2.5. Seja $f(t)$ uma função contínua para $t \geq 0$ e cuja derivada $f'(t)$ seja seccionalmente contínua. Pela definição da transformada de Laplace (Def. 2.15), temos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt.$$

Aplicamos a integração por partes, escolhendo: $-u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st} dt$ - $dv = f'(t) dt \Rightarrow v = f(t)$. Usando a fórmula da integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

obtemos

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-se^{-st}) f(t) dt.$$

Como assumimos que $f(t)$ cresce no máximo como Ke^{at} para $t \geq M$, e considerando $s > a$, temos que $e^{-st} f(t)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, então o primeiro termo no limite superior desaparece. Avaliando no limite inferior:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -e^{-s(0)} f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ é a transformada de Laplace de $f(t)$. Assim, demonstramos que:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

o que prova o teorema.

A Figura 2 mostra o diagrama que descreve as etapas na resolução de uma EDO com PVI usando o método da transformada de Laplace, para uma função algébrica, denotada por $F(s)$, conforme mostra a coluna à direita na Tabela 1.

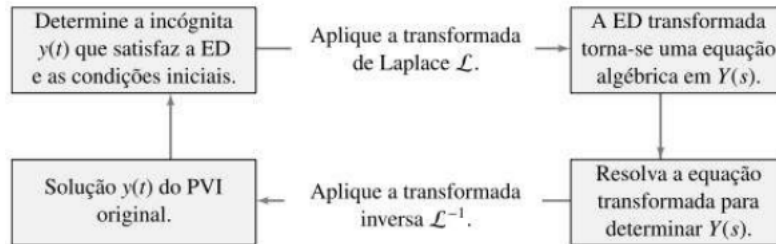


Figura 2 – Etapas na resolução de um PVI pela transformada de Laplace.

Fonte: (Boyce; DiPrima, 2001).

Na Tabela 1 estão listadas as principais propriedades da transformada de Laplace que utilizaremos ao longo do trabalho.

Tabela 1 – Tabela com algumas Propriedades de Laplace.

Linha	Função $f(t)$	Transformada de Laplace
1	$f(t)$	$F(s)$
2	1	$1/s$
3	t	$1/s^2$
4	e^{at} (a é uma constante real)	$1/[s - a]$
5	$\sin(at)$	$a/[s^2 + a^2]$
6	$\cos(at)$	$s/[s^2 + a^2]$
7	$e^{at} \sin(bt)$	$b/[(s - a)^2 + b^2]$
8	$e^{at} \cos(bt)$	$[s - a]/[(s - a)^2 + b^2]$
9	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$

Fonte: Adaptado de (Boyce; DiPrima, 2001).

Observação 2.6. No Anexo A encontra-se uma tabela mais completa com as propriedades da Transformada de Laplace e a Transformada Inversa de Laplace.

3 Teoria Fundamental: Áreas Específicas

Neste capítulo são apresentados algumas teorias fundamentais de algumas áreas do conhecimento, pois são necessárias para melhor entendimento quando aplicadas nas resoluções dos problemas apresentados no Capítulo 4.

3.1 Física

A seguir, três teorias da área da física.

3.1.1 Corpo em queda livre com influência do atrito

A equação que descreve um corpo em queda livre num meio com atrito é dada por

$$m \frac{dv}{dt} = mg - cv^2 \quad (3.1)$$

em que m é a massa do corpo em kg , g é a aceleração devido à gravidade que é aproximadamente $9,81m/s^2$, c é conhecida como coeficiente de arrasto cuja unidade é kg/s (Silva, 2014). Observe o seguinte fato na Eq. (3.1):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}. \quad (3.2)$$

Substituindo o último termo da Eq. (3.2) na Eq. (3.1), temos

$$mv \frac{dv}{dx} = mg - cv^2 \Rightarrow mv \frac{dv}{dx} - mg = -cv^2. \quad (3.3)$$

Dividindo a Eq. (3.3) por mv e ajustando-a, obtemos

$$\frac{dv}{dx} + \frac{c}{m}v = gv^{-1}. \quad (3.4)$$

Usando a Def. 2.12, obtemos a solução geral da Eq. (3.3), dada por:

$$v(x) = \sqrt{\frac{mg}{c} + K \exp\left(-\frac{2c}{m}x\right)}, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Logo, a Eq. (3.5) é a função que representa a velocidade do corpo em queda livre, considerando $v(x) > 0$ (Silva, 2014).

3.1.2 Lei de Resfriamento de Newton

A Lei de Resfriamento de Newton foi desenvolvida por Isaac Newton no final do século XVII e publicada em 1701 em sua obra *Scala Graduum Caloris* (Escala dos Graus de Calor). Essa lei descreve como a taxa de variação da temperatura de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente ao seu redor.

Newton chegou a essa formulação enquanto estudava fenômenos térmicos e como o calor é transferido entre corpos. Ele percebeu que, para pequenos intervalos de tempo, a perda de calor de um objeto depende diretamente da diferença entre sua temperatura interna e a temperatura ambiente, supondo que o meio circundante permaneça em temperatura constante. A Lei de Resfriamento de Newton é expressa pela equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{amb}), \quad (3.6)$$

onde T é a temperatura do corpo no instante t ; T_{amb} é a temperatura do ambiente; k é uma constante de proporcionalidade que depende das propriedades do corpo e do meio e $\frac{dT}{dt}$ é a taxa de variação da temperatura ao longo do tempo t .

3.1.3 Circuitos em Série

Em um circuito em série composto apenas por um resistor e um indutor, a segunda lei de Kirchhoff estabelece que a soma da variação de potencial no indutor ($L(di/dt)$) e da variação de potencial no resistor (iR) é equivalente à tensão elétrica ($E(t)$) aplicada ao circuito, dada pela equação diferencial linear para corrente $i(t)$:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t), \quad (3.7)$$

em que L e R são constantes conhecidas como indutância e a resistência, respectivamente (Zill; Cullen, 2012). A Figura 3 mostra o circuito em série L-R.

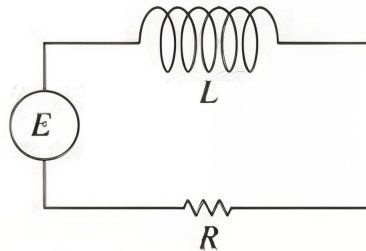


Figura 3 – Circuito em Série L-R.
Fonte: Adaptada de (Zill; Cullen, 2012).

A queda de potencial em um capacitor com capacitância C é dada por $q(t)/C$, em que q é a carga no capacitor, e descrita pela Segunda lei de Kirchhoff:

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \quad (3.8)$$

A Figura 4 mostra o circuito em série R-C.

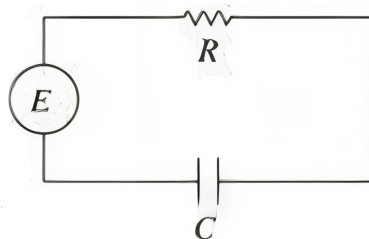


Figura 4 – Circuito em Série R-C
Fonte: Adaptada de (Zill; Cullen, 2012).

Mas a corrente i e a carga q estão relacionadas por $i = dq/dt$, logo, a Eq. (3.8) torna-se a equação diferencial linear (Zill; Cullen, 2012) dada por:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (3.9)$$

3.2 Química

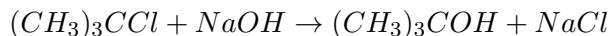
A seguir, três teorias da área da química.

3.2.1 Reações Químicas

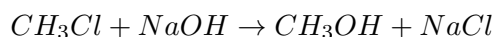
A decomposição de um material radioativo, regida pela Eq. (3.14), é denominada reação de primeira ordem.

Na química, certas transformações obedecem a essa mesma regra empírica: caso as moléculas da substância A se desfaçam em componentes menores, é razoável supor que a velocidade com que essa fragmentação ocorre seja proporcional à quantidade da substância original ainda não transformada. Ou seja, se $X(t)$ representar a porção remanescente da substância A em um dado momento, então $dX/dt = kX$, onde k é uma constante negativa, pois X diminui ao longo do tempo (Zill, 2016).

Um exemplo de reação química de primeira ordem é conversão de t-cloreto butílico, $(CH_3)_3CCl$, em t-álcool butílico, $(CH_3)_3COH$:



Somente a concentração do t-cloreto butílico controla a taxa de reação. Mas na reação



uma molécula de hidróxido de sódio, $NaOH$, é consumida para cada molécula de cloreto metílico, CH_3Cl , formando, assim, uma molécula de álcool metílico, CH_3OH , e uma molécula de cloreto de sódio, $NaCl$. Neste caso, a taxa segundo a qual a reação se processa é proporcional ao produto das concentrações remanescentes de CH_3Cl e $NaOH$ (Zill, 2016).

Para representar essa segunda reação de modo geral, suponhamos que *uma* molécula de uma substância A combine-se com *uma* molécula de uma substância B para formar *uma* molécula de uma substância C. Se representarmos por X a quantidade de substância C formada no intervalo de tempo t e se α e β representarem, por sua vez, a quantidade das substâncias A e B em $t = 0$ (a quantidade inicial), as quantidades instantâneas de A e B que não foram convertidas em C serão $\alpha - X$ e $\beta - X$, respectivamente. Assim, a taxa de formação de C é dada por

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \quad (3.10)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Uma reação cujo modelo é descrito na Eq. (3.10) é chamada de **reação de segunda ordem** (Zill, 2016).

3.2.2 Problema de Mistura

A taxa de variação da concentração refere-se à rapidez com que a quantidade de uma substância, dissolvida em um fluido, muda ao longo do tempo em um sistema. Essa taxa é fundamental em problemas que envolvem misturas, reações químicas, difusão e processos industriais, sendo descrita matematicamente por uma equação diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = R_e - R_s, \quad (3.11)$$

onde $A(t)$ é a quantidade de substância no sistema no tempo t , R_e é a taxa de entrada e R_s é a taxa de saída.

3.2.3 Decaimento Radioativo

Segundo Silva (2018) o químico Jonh Dalton (1766-1844) caracterizou o átomo como uma minúscula esfera maciça, homogênea, indivisível e indestrutível.

Após longos anos de estudos atualmente compreendemos que o átomo é composto por três tipos de partículas subatômicas: os **prótons** que são partículas carregadas positivamente, localizadas no núcleo do átomo (Figura 5), sendo que o número de prótons que define o elemento químico denominado por número atômico; os **nêutrons** são partículas neutras, também localizadas no núcleo, eles ajudam a estabilizar o núcleo, especialmente em átomos mais pesados; e os **elétrons** que são partículas carregadas negativamente, que orbitam ao redor do núcleo em regiões chamadas níveis ou camadas de energia, eles são responsáveis pelas interações químicas entre os átomos (Cardoso, 2000).

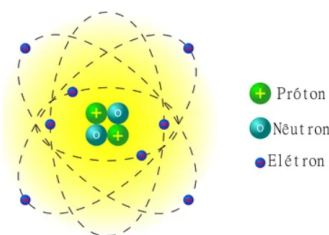


Figura 5 – Estrutura de um átomo.
Fonte: Adaptada de Cardoso (2000).

Quando há um desequilíbrio entre o número de prótons e nêutrons no núcleo de um átomo, ocorre o fenômeno conhecido como radioatividade, que busca corrigir esse desequilíbrio por meio da emissão de partículas ou ondas eletromagnéticas. Esse processo pode se manifestar de três formas principais:

- **Radiação Alfa ou Partícula Alfa**

Um dos mecanismos para estabilizar um núcleo com excesso de energia é a liberação de um conjunto de partículas carregadas positivamente, formado por dois prótons e dois nêutrons, juntamente com a energia associada a elas, essas emissões chamamos de radiação alfa ou partículas alfa (Figura 6) (Cardoso, 2000).

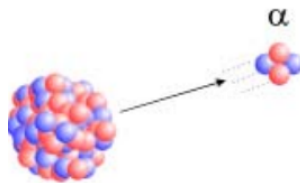


Figura 6 – Radiação
Fonte: Adaptada de Cardoso (2000).

- **Radiação Beta ou Partícula Beta**

É a partícula beta negativa ou, de forma simplificada, partícula beta (Figura 7). Quando há um excesso de cargas positivas (prótons), é liberada uma partícula beta positiva, denominada pósitron, originada da transformação de um próton em um nêutron. (Cardoso (2000))



Figura 7 – Radiação Beta.
Fonte: (Cardoso, 2000)

- **Radiação Gama**

Normalmente, após a emissão de uma partícula alfa (α) ou beta (β), o núcleo originado desse processo, ainda com energia em excesso, busca se estabilizar, liberando essa energia na forma de ondas eletromagnéticas, chamadas de radiação gama (Figura 8).

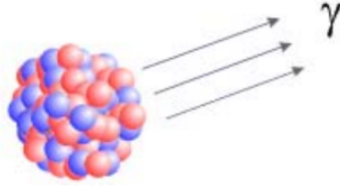


Figura 8 – Radiação Gama.
Fonte: Adaptado de (Cardoso, 2000).

Para Scaff (1997) o processo de desintegração só é possível ser discutido no campo probabilístico. Supondo que em um instante $t_0 = 0$, tenha N_0 átomos radioativos. Seja γ a probabilidade para que um destes átomos se desintegre no tempo t , característica de cada elemento, denominada de constante de desintegração do elemento, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{-dN}{dt} = \gamma N &\implies \frac{dN}{N} = -\gamma dt \implies \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\gamma t \Big|_{t_0}^t \\ \ln N \Big|_{N_0}^N = -\gamma t &\implies \ln N - \ln N_0 = -\gamma t \implies \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\gamma t \\ e^{-\gamma t} = \frac{N}{N_0} &\implies N_0 = N e^{-\gamma t}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde N_0 é o número de átomos no instante inicial, N é o número de átomos no instante t , γ é a constante de desintegração radioativa, t é o tempo decorrido e e é a base neperiana.

Cada substância radioativa, seja de origem natural ou produzida artificialmente, se transforma (se desintegra ou decai) a uma taxa que lhe é própria. Para monitorar o tempo de duração (ou a "existência") de uma substância radioativa, foi necessário definir um método de comparação. Por exemplo, quanto tempo leva para a atividade de uma substância radioativa ser reduzida à metade da sua atividade inicial? Esse período foi denominado **tempo de meia-vida** da substância (Alves, 2010).

O **tempo de meia-vida** (Figura 9) de um átomo radioativo é o intervalo de tempo necessário para que metade dos átomos de uma amostra de material radioativo se desintegre ou decaia, liberando radiação. Esse processo ocorre de forma aleatória, mas a meia-vida é uma característica única de cada elemento ou isótopo radioativo. Ou seja, após um número de tempo de meia-vidas, a quantidade de átomos radioativos restantes será reduzida à metade a cada ciclo, sem depender do tempo exato em que cada átomo se desintegra. A tempo de meia-vida é um parâmetro importante para medir a estabilidade de substâncias radioativas e calcular o tempo de exposição ou a datação de materiais.

A desintegração não está associada à eliminação do átomo, ou seja, o átomo continua existindo. Na realidade, o que acontece é o processo de decaimento natural pelo qual o átomo passa.

O carbono-14 (C^{14}) é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera superior por meio da interação dos raios cósmicos com o nitrogênio. Esse isótopo possui 6 prótons e 8 nêutrons em seu núcleo, o que o torna instável e sujeito à desintegração radioativa ao longo do tempo.

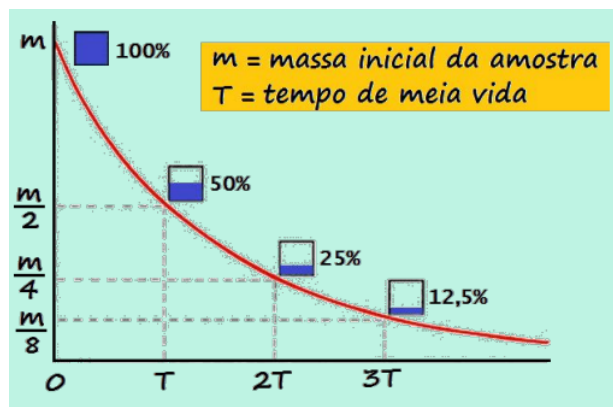


Figura 9 – Tempo meia-vida de um átomo radioativo.
Fonte: Adaptada de (Alves, 2010).

O carbono-14 (Figura 10) é absorvido por seres vivos durante sua vida, principalmente por meio da respiração e da alimentação. Após a morte, a absorção de carbono-14 cessa, e o isótopo começa a decair de forma previsível. Ao comparar a relação entre carbono-14 e carbono-12 presente em uma amostra com a proporção observada em organismos vivos, é possível calcular, de maneira bastante precisa, a idade de materiais orgânicos que pertenciam a seres vivos do passado (Alves, 2010).

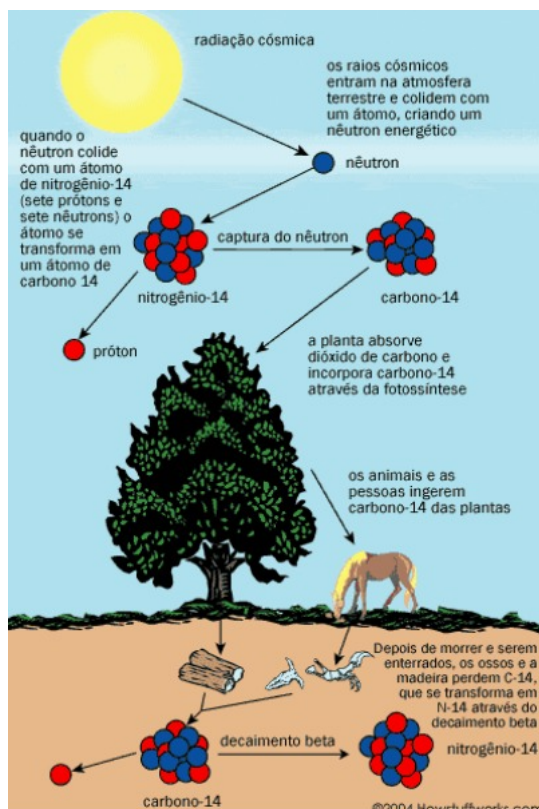


Figura 10 – Ciclo completo do carbono.
Fonte: Adaptada de (Santos, 2018).

Observação 3.1. A meia vida do Carbono-14 é de 5.730 anos, usando a equação do decaimento se chega no valor da sua constante de desintegração radioativa. Sabendo que $N(t) = N_0 e^{-\gamma t}$ e $t = 5.730$ anos, logo teremos $N(5730) = (1/2)N_0$. Pela Eq. (3.12), temos

$$\begin{aligned} (1/2)N_0 &= N_0 e^{-5730\gamma} &\implies e^{-5730\gamma} &= 1/2 \\ \ln e^{-5730\gamma} &= \ln(1/2) &\implies -5730\gamma &= \ln(1/2) \\ &&\implies \gamma &\approx 1,20968094 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Logo, a função que descreve a quantidade de material radioativo de carbono-14 em função do tempo:

$$N(t) = N_0 e^{-0,00012097t}. \quad (3.13)$$

A Figura 11 mostra o comportamento do processo de decaimento radioativo do carbono-14, descrito pela Eq. (3.13).

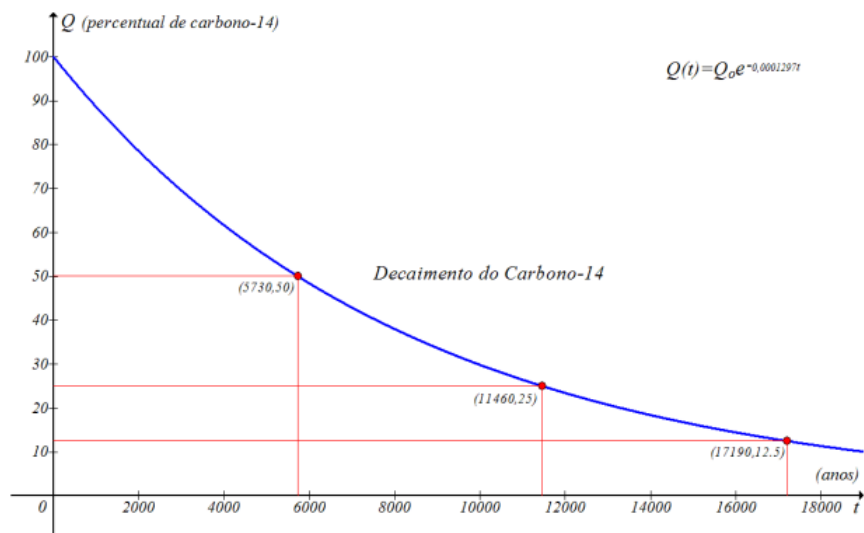


Figura 11 – Comportamento do processo de decaimento radioativo do carbono-14.
Fonte: Adaptada de (Alves, 2010).

3.3 Biologia

A seguir, duas teorias da área da biologia.

3.3.1 Modelo de Malthus

Uma das primeiras abordagens para representar matematicamente o crescimento da população humana foi realizada pelo economista Thomas Malthus, em 1798.

Em essência, o conceito por trás do modelo malthusiano baseia-se na suposição de que a velocidade com que a população de um país se expande em um dado momento é diretamente proporcional ao total de habitantes naquele instante. Em outras palavras,

quanto maior for a população em um instante t , maior será o número de indivíduos no futuro. Em termos matemáticos, se $P(t)$ for a população total no instante t , então essa hipótese pode ser expressa por (Zill, 2016)

$$\frac{dP}{dt} \propto P \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dt} = kP, \quad (3.14)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Esse modelo básico, apesar de não considerar diversos fatores que podem afetar a população humana, como redução populacional devido à imigração ou emigração, demonstrou-se relativamente preciso na estimativa da população dos Estados Unidos entre os anos de 1790 e 1860.

Populações que se expandem conforme a taxa descrita na Equação (3.14) são incomuns; contudo, a equação ainda é empregada para representar o crescimento de pequenas populações em períodos curtos.

O modelo de crescimento populacional de Malthus é amplamente utilizado na biologia para descrever o crescimento de populações de organismos, especialmente quando os recursos são abundantes e as limitações ambientais são mínimas (Zill, 2016).

3.3.2 Modelo de Gompertz

Com o objetivo de modelar o crescimento de tumores sólidos, o matemático Benjamin Gompertz desenvolveu, em 1938, uma equação amplamente conhecida, chamada de Equação de Gompertz. Na literatura científica consultada, encontramos diversas maneiras de expressar essa equação. Neste estudo, adotaremos a forma apresentada na referência Boyce e DiPrima (2001), com algumas adaptações na notação dos parâmetros, ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = ry \ln(K/y), \quad (3.15)$$

cujas solução geral é

$$N(t) = Ke^{-e^{rt} \ln(\frac{n_0}{K})}, \quad (3.16)$$

onde $N = N(t)$ é a população de células tumorais no instante t ; r é a constante de crescimento das células; e K é o tamanho máximo que o tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis.

3.4 Economia

A seguir, uma teoria da área da economia

3.4.1 Juros Composto

Imagine que uma certa quantia em dinheiro seja aplicada em um banco ou fundo de investimento que oferece juros a uma taxa anual r . O montante $V(t)$ do investimento em qualquer momento t depende da periodicidade com que os juros são capitalizados, assim como da taxa de juros. Diferentes instituições financeiras adotam políticas distintas para a

capitalização dos juros: algumas realizam o cálculo mensalmente, outras semanalmente e algumas até diariamente. Caso consideremos que os juros são calculados de forma contínua, podemos formular um problema de valor inicial que descreva a evolução do investimento ao longo do tempo.

A variação de mudança do montante investido é representada por $\frac{dS}{dt}$, que corresponde à taxa na qual o investimento cresce. Esse crescimento é proporcional à taxa de juros r multiplicada pelo valor atual do investimento S , dada pela equação diferencial que governa o processo, com valor do investimento em um instante específico, dado pelo PVI:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Então, a solução do PVI do sistema (Eq. (3.17)) determina a variação $S(t)$ na conta em qualquer instante de tempo t . Para resolver o PVI, em que a Eq. (3.17) é separável, usamos a Definição 2.10, obtendo

$$S(t) = S_0 e^{rt}, \quad (3.18)$$

que descreve o comportamento exponencial de uma conta bancária, com juros compostos em tempo contínuo.

Comparando os resultados desse modelo contínuo com a situação em que os juros são compostos em intervalos de tempo determinados. Se os juros forem calculados uma vez ao ano, por exemplo, após t anos, o investimento é dado por

$$S(t) = S_0(1 + R)^t. \quad (3.19)$$

Se os juros são calculados duas vezes por ano, então ao final de 6 meses, o valor do investimento é $S_0[1 + (r/2)]$. Logo, ao final de 1 ano (12 meses), o valor do investimento será de $S_0[1 + (r/2)]^2$. Assim, ao final de t anos, teremos

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}. \quad (3.20)$$

Em geral, se os juros são calculados m vezes ao ano, então

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}. \quad (3.21)$$

Retornando ao cenário de capitalização contínua, consideremos a possibilidade de haver depósitos e retiradas, além do acúmulo de juros, dividendos ou ganhos de capital. Se assumirmos que os depósitos ou retiradas ocorrem a uma taxa constante k , então o PVI dado na Equação (3.17) é dado por:

$$\frac{dS}{dt} = rS + k \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} - rS = k, \quad (3.22)$$

onde a constante $k > 0$ para depósitos e $k < 0$ para saques.

Pela Definição 2.12, Eq.(3.22) é uma equação diferencial linear. Logo, sua solução geral é dada por

$$S(t) = ce^{rt} - (k/r),$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (Eq. (3.21)), precisamos escolher $c = S_0 e^{rt} + (k/r)$. Assim, a solução geral do PVI descrito pelas Eq. (3.22) e Eq. (3.21) é

$$S(t) = S_0 e^{rt} + (k/r)(e^{rt}-1). \quad (3.23)$$

O primeiro termo na Eq. (3.23) representa a fração de $S(t)$ correspondente aos rendimentos gerados pelo capital inicial S_0 , enquanto o segundo termo corresponde à contribuição da taxa k de depósitos ou retiradas (Boyce; DiPrima, 2001).

Observação 3.2. Na literatura podemos encontrar vários exemplos de problemas de variadas áreas do conhecimento, que utilizam equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para obter suas soluções, por exemplo, em farmacologia e veterinária (ver (Vilhena, 2014)).

4 Aplicações: Alguns Problemas

A seguir, são apresentados alguns problemas e suas soluções usando as EDOs de primeira ordem.

Problema 4.1 (Física). Considere um paraquedista em queda livre em que sua massa é $m = 70kg$ e o coeficiente de arrasto é $c = 12,5kg/s$. Sendo a aceleração da gravidade $g = 9,81m/s^2$, vamos determinar a função velocidade do paraquedista em queda livre sendo $x(0) = 0m$ (Silva, 2014).

Solução 4.1. Com essas informações, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} + 0,1786v = 9,81v^{-1} \\ v(0) = 0 \text{ m/s} \end{cases} \quad (4.1)$$

Da Eq. 3.5, sabemos que:

$$v(x) = \sqrt{54,94 + Ke^{-0,3571x}},$$

e sendo $v(0) = 0 \text{ m/s}$, então a solução do PVI é dada por:

$$v(x) = \sqrt{54,94 - 54,94e^{-0,3571x}},$$

que tem como representação gráfica, como mostrado na Figura 12:

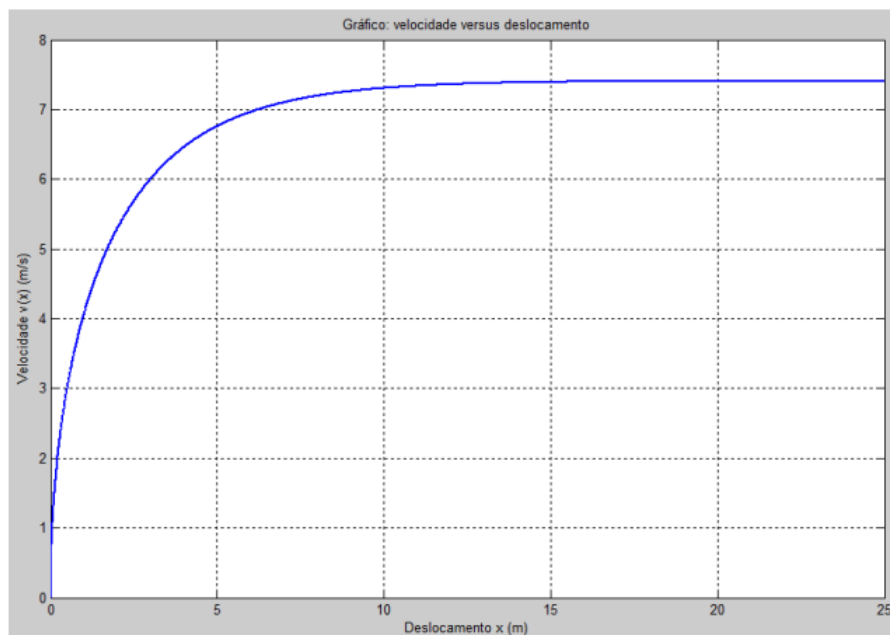


Figura 12 – Comportamento do movimento da velocidade em relação ao tempo.

Fonte:(Silva, 2014).

Problema 4.2 (Física). Suponha que, no inverno, a temperatura de um certo prédio de escritórios seja mantida a 70°F ¹ e que o aquecimento seja desligado às 22 h da noite e religado às 6 h da manhã. Num certo dia, às 2 h da madrugada, a temperatura no interior do prédio era de 65°F . A temperatura exterior era de 50°F às 22 h da noite e caiu para 40°F às 6 h da manhã do dia seguinte. Qual era a temperatura dentro do prédio quando o aquecimento foi ligado às 6 h da manhã?

Solução 4.2. Observe que, não temos o valor da temperatura do ambiente (TA), apenas a informação da sua variação entre 50°F e 40°F .

Seja a constante $T_{amb} = 45^{\circ}\text{F}$ (ou para qualquer outro valor constante), pela Eq. (3.6) pode-se fazer a separação das variáveis, ou seja,

$$\frac{dT}{T - 45} = k dt \quad \Rightarrow \quad \ln|T - 45| = kt + c \quad \Rightarrow \quad T(t) = 45 + ce^{kt} \quad (4.2)$$

Escolhendo 22h da noite para corresponder a $t = 0$. Então, a condição inicial dada é $T(0) = 70^{\circ}\text{F}$, e substituindo na Eq. (4.2), obtemos

$$T(0) = 45 + ce^0 = 70 \quad \Rightarrow \quad c = 70 - 45 = 25 \quad \Rightarrow \quad T_p(t) = 45 + 25e^{kt}. \quad (4.3)$$

Utilizamos $T(4) = 65^{\circ}\text{F}$, onde $t = 4$ corresponde às 2 h da madrugada. Resolvendo algebricamente o valor de k e substituindo na Eq. (4.3):

$$T_p(4) = 45 + 25e^{4k} = 65 \quad \Rightarrow \quad e^{4k} = 0,8 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}\ln|0,8| = -0,056$$

$$T_p(t) = 45 + 25e^{-0,056t}. \quad (4.4)$$

Às 6 h da manhã corresponde a $t = 8$ (ou seja, 8 horas após as 10 h da manhã) e substituindo na Eq. (4.4), obtemos:

$$T_p(8) = 45 + 25e^{-0,056(8)} = 61^{\circ}\text{F}. \quad (4.5)$$

Sabendo que a temperatura é $T(0) = 70^{\circ}\text{F}$ e subtraindo da temperatura dada na Eq. (4.5), a temperatura no interior do prédio caiu 9°F (Kreysig, 2008). A Figura 13 mostra o comportamento do decaimento exponencial da temperatura do ambiente.

Problema 4.3 (Física). Uma bateria de 12 volts é conectada a um circuito em série no qual a indutância é de $1/2$ henry e a resistência, 10 ohms. Determine a corrente i se a corrente inicial é zero (Zill; Cullen, 2012).

Solução 4.3. De Eq. (3.7), vemos que devemos resolver

$$\frac{1}{2} \frac{di}{dt} + 10i = 12 \quad (4.6)$$

¹ A escala Fahrenheit é uma unidade de medida de temperatura, onde 32°F corresponde ao ponto de congelamento da água e 212°F ao ponto de ebulição, a 1 atm de pressão. Para converter uma temperatura de Fahrenheit (F) para Celsius (C), utiliza-se a fórmula $C = \frac{5(F-32)}{9}$ (Albuquerque; Santiago, 2017).

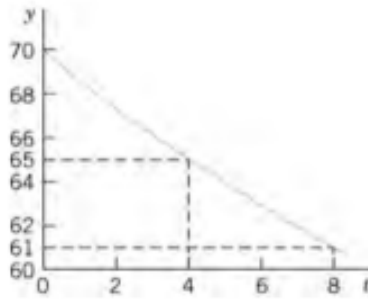


Figura 13 – Comportamento do decaimento exponencial da temperatura do ambiente.

Fonte: (Kreysig, 2008).

sujeito a $i(0) = 0$. Primeiro, multiplicamos a equação diferencial 4.6 por 2 e calculamos o fator de integração dado por e^{20t} . Então

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t} \Rightarrow e^{20t}i = \frac{24}{20}e^{20t} + c \Rightarrow i = \frac{6}{5} + ce^{-20t}.$$

Como $i(0) = 0$, então $0 = 6/5 + c$, ou $c = -6/5$. Logo,

$$i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}. \quad (4.7)$$

Pela Eq. (3.8), podemos escrever uma solução geral para dada na Eq. (3.6), ou seja

$$i(t) = \frac{e^{-(R/L)t}}{L} \int e^{(R/L)t} E(t) dt + ce^{-(R/L)t}. \quad (4.8)$$

Em particular, quando $E(t) = E_0$ é uma constante, a Eq. (4.8) torna-se

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-(R/L)t}. \quad (4.9)$$

Note que, na Eq. (4.9) fazendo $t \rightarrow \infty$, o segundo termo aproxima de zero. Este termo é usualmente chamado de **termo transitório**; qualquer termo remanescente faz parte do **estado estacionário** da solução. Neste caso, E_0/R também é chamado de **corrente estacionário**. Após um longo período de tempo, a corrente no circuito é praticamente governada apenas pela lei de Ohm ($E=iR$) (Zill; Cullen, 2012).

Problema 4.4 (Química). É estimado que um vasto reservatório de mistura detenha 300 galões de solução salina, na qual 50 libras de sal foram completamente dissolvidas. Uma segunda solução salina é injetada no reservatório a um ritmo de três galões por minuto, e a concentração de sal nesta segunda solução é de 2 libras por galão (Figura 14). Quando a solução no reservatório estiver completamente homogeneizada, ela será retirada à mesma taxa. Com isso, R_e é produto da concentração de sal no fluxo de entrada de fluido, onde, a cada minuto que passa três galões de salina são depositados no tanque, e essa salina possui uma concentração de 2 libras de sal por galão. Logo, tem-se que R_e é medido em libras por minuto, descrito pela Eq. (4.10):

$$R_e = (3\text{gal}/\text{min}).(2\text{lb}/\text{gal}) = 6\text{lb}/\text{min}. \quad (4.10)$$

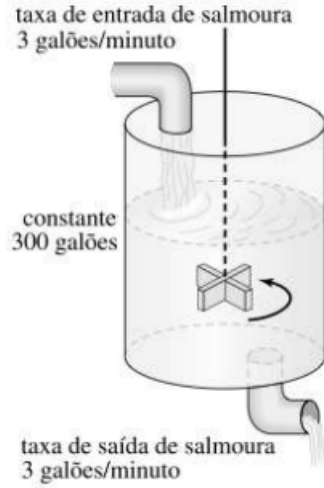


Figura 14 – Reservatório de mistura.
Fonte: Adaptada de (Boyer; Merzbach, 2012).

Solução 4.4. Com a solução está sendo bombeada para dentro e para fora do tanque à mesma taxa, a quantidade de galões de salmoura no tanque no instante t se mantém constante a 300 galões. Com isso, a concentração de sal no tanque, que é a mesma ao fluxo de saída, é de $A(t)/300 \text{ lb/gal}$ e a taxa de saída de sal é,

$$R_s = (3 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{A(t)}{300} \text{ lb/gal} \right) = \frac{A(t)}{100} \text{ lb/min}. \quad (4.11)$$

Tem-se então a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = 6 - 0,01A \quad \implies \quad A' - 6 + 0,01A = 0. \quad (4.12)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos

$$\mathcal{L}[A'] - 6\mathcal{L}[1] + 0,01\mathcal{L}[A] = 0.$$

Usando o Teorema 2.5 e a Tabela 1, obtemos uma expressão algébrica, dada por

$$SA(S) - A(0) + 0,01A(S) = 0 \quad \implies \quad A(S) \cdot (S + 0,01) = A(0) + \frac{6}{S}$$

$$A(S) = \frac{A(0)}{(S + 0,01)} + \frac{6}{(S + 0,01)} = \frac{A(0)S + 6}{S(S + 0,01)}.$$

Aplicando as frações parciais, temos

$$A(S) = \frac{B}{s} + \frac{C}{(s + 0,01)} \quad \implies \quad \frac{B(s + 0,01) + Cs}{S(S + 0,01)} = \frac{BS + 0,01B + CS}{S(S + 0,01)}$$

e colocando o S em evidência e pegando apenas o numerador das frações chegamos na seguinte igualdade,

$$A(0)S + 6 = S(B + C) + 0,01B, \quad (4.13)$$

onde temos $A(0) = B + C$ e $0,01 \cdot B = 6$, logo, $B = 600$ e $C = A(0) - 600$. Substituindo na Eq. 4.13:

$$A(S) = \frac{600}{S} + \frac{A(0) - 600}{(S + 0,01)}. \quad (4.14)$$

Sabemos que foi dado $A(0) = 50$, e aplicando a Transformada Inversa (Anexo A), obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}[A(S)] = 600\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S}\right] - 550\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S + 0,01)}\right]$$

$$A(t) = 600 - 550e^{-0,01t} \quad (4.15)$$

com essa solução geral podemos obter a quantidade de solução salina em qualquer instante t , já que é uma função que depende do tempo.

Problema 4.5 (Química). O exame com Carbono-14 no Sudário de Turim revelou que o linho empregado na fabricação do manto datava de um período entre os anos 1260 e 1390. Assim, não poderia ser o sudário que envolveu o corpo de Jesus. Essa conclusão gera controvérsia até os dias atuais (Alves, 2010).

O teste inicial foi conduzido em 1988, quando o Vaticano concedeu permissão ao Museu Britânico para determinar a idade da relíquia de tecido conhecida como Sudário de Turim, possivelmente associado a Jesus de Nazaré. Este tecido, descoberto em 1956, apresenta o negativo da imagem de um corpo humano que muitos acreditavam ser o de Jesus. O relatório do Museu Britânico indicou que as fibras do tecido mantinham entre 92% e 93% do carbono-14 original. Utilizaremos esses dados para calcular a idade do sudário.

Solução 4.5. Utilizando a Eq. (3.13) que é a função que descreve a quantidade de material radioativo de carbono-14 em função do tempo, e rearranjando para resolver em t , obtemos:

$$t = \frac{\ln(n(t)/n_0)}{-(-0,00012097)}.$$

Para $N(t) = 92\%$, obtemos

$$t = \frac{\ln(0,92)}{-(-0,00012097)} \Rightarrow t = \frac{\ln(0,92)}{-(-0,00012097)} \approx 600 \text{ anos},$$

que indica o tempo desde que o material deixou de absorver carbono-14, situando a confecção do tecido em torno do século XIII ou XIV, o que está de acordo com as datas entre 1260 e 1390 fornecidas pelos testes originais.

Problema 4.6 (Biologia). Em uma cultura, há inicialmente N_0 bactérias. Uma hora depois, $t = 1$, o número de bactérias passa a ser $(3/2)N_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique (Zill; Cullen, 2012).

Solução 4.6. Primeiro resolvemos a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -kN \Rightarrow \frac{dN}{dt} - kN = 0. \quad (4.16)$$

Sujeita a $N(0) = N_0$. Então usamos a condição empírica $N(1) = (3/2)N_0$ para determinar a constante de proporcionalidade k . Assim, a Eq. (4.16) é separável e linear. Calculando

o fator integrante, obtemos e^{-kt} . Multiplicando ambos os lados da Eq. (4.16) pelo fator integrante, obtemos

$$\frac{d}{dt}[e^{-kt}N] = 0. \quad (4.17)$$

Integrando ambos os lados da Eq. (4.17), obtemos

$$e^{-kt}N = c \quad \text{ou} \quad N(t) = ce^{kt}. \quad (4.18)$$

Em $t = 0$, concluímos que $N_0 = ce^0 = c$, que implica que $N(t) = N_0e^{kt}$. Em $t = 1$, obtemos

$$\frac{3}{2}N_0 = N_0e^k \quad \Rightarrow \quad e^k = \frac{3}{2}, \quad (4.19)$$

onde $k = \ln(3/2) = 0,4055$ com quatro casas decimais. Portanto, da Eq. (4.19) escrevemos $N(t)$ dada por

$$N(t) = N_0e^{0,4055t} \quad \Rightarrow \quad 0,4055t = \ln 3.$$

Portanto,

$$t = \frac{\ln 3}{0,4055} = 2,71 \text{ horas},$$

é o tempo necessário para que o número de bactérias triplique (Zill; Cullen, 2012).

Problema 4.7 (Biologia). A principal aplicação da equação diferencial de Gompertz (Eq. (3.16)) é a análise do crescimento de tumores sólidos. Com base nos critérios estabelecidos por Domingues (2011), é possível elaborar o gráfico que descreve a solução, adotando $r = 6.10^{-3}$, $K = 10^{13}$ células e distintos valores para a população inicial (n_0). A Figura 15 mostra o comportamento da Função $N(t)$ para vários Valores n_0 .

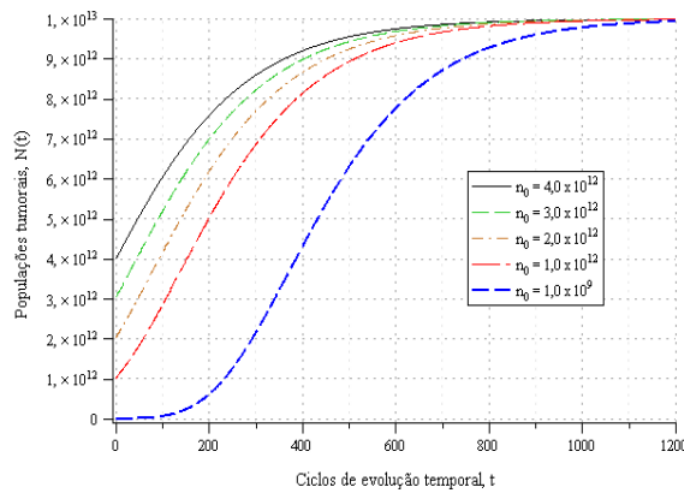


Figura 15 – Comportamento da função $N(t)$ para vários Valores n_0 .
Fonte:(Domingues, 2011).

Solução 4.7. Os diagramas dessas soluções representam um aumento inicial exponencial no volume de células tumorais, que gradualmente perde velocidade ao longo do tempo. Essa redução na taxa de crescimento pode ser explicada pela escassez de nutrientes, pelo

aumento da pressão interna ou pela reação do sistema imunológico do organismo a essa alteração.

Observe-se também que seja qual for o valor tomado para n_0 , tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K. \quad (4.20)$$

É importante perceber que essa progressão do tecido tumoral é sem levar em conta os efeitos da aplicação de tratamentos contra o tumor. Dessa forma, é esperado que, ao incluir estratégias terapêuticas, como quimioterapia ou medicamentos específicos, o equilíbrio da população de células tumorais seja atingido muito antes de o tumor alcançar sua capacidade máxima de suporte, K . Além disso, a taxa de crescimento dessa população pode ser significativamente reduzida devido à atuação dessas abordagens (Domingues, 2011).

Problema 4.8 (Economia). Suponha que uma pessoa abre uma conta (PREV) para complementar sua aposentadoria com 25 anos e faz investimentos anuais de R\$2000,00 da frente de um modo contínuo. Supondo uma taxa de rendimento de 8% ao ano, qual será o saldo na conta PREV quando a pessoa tiver 65 anos (Boyce; DiPrima, 2001)?

Solução 4.8. Sabemos que, $S(t)$ é o saldo no tempo t ; $k = 2000$ é o investimento anual contínuo; $r = 0,08$ é a taxa de rendimento anual; $t = 40$ anos, pois queremos o saldo aos 65 anos, tendo começado aos 25; e $S_0 = 0$ indica que o saldo inicial era zero. Assim, substituindo esses valores na Eq. (3.23), obtemos

$$S(40) = (2000/0,08)(e^{0,08 \cdot 40} - 1) \Rightarrow S(40) \approx 588.313.$$

Portanto, o saldo da conta após 40 anos será de aproximadamente R\$ 588.313,00.

5 Resultados obtidos e Conclusão

As equações diferenciais representam um ramo significativo da Matemática, com ampla aplicação em diversas áreas do conhecimento, como Física, Engenharia, Biologia, Demografia, Bacteriologia e Medicina. A compreensão de suas técnicas de solução, sejam elas analíticas ou gráficas, é essencial para interpretar os fenômenos estudados, uma vez que permitem a modelagem de situações do mundo real (Silva, 2025).

Sua aplicação vai além da resolução de problemas isolados, sendo essencial para o desenvolvimento de tecnologias e para a previsão de comportamentos em sistemas complexos. O fato de poderem ser abordadas tanto de forma analítica quanto geométrica, também torna as equações diferenciais acessíveis a diferentes perfis de profissionais e pesquisadores, ampliando ainda mais sua utilidade em diversos campos do conhecimento.

Ao longo deste trabalho, foram exploradas as equações diferenciais ordinárias (EDOs) e suas diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento.

Diferente de uma abordagem puramente teórica, este trabalho mostrou como evidenciar a versatilidade e a importância das EDO na resolução de problemas reais. Essas aplicações demonstram que as equações diferenciais não são apenas ferramentas matemáticas abstratas, mas sim instrumentos essenciais para compreender e prever o comportamento de sistemas dinâmicos em diferentes contextos.

Conforme apresentado, as EDO se mostram indispensáveis para diversas áreas do conhecimento, permitindo não apenas a análise de fenômenos naturais e científicos, mas também a busca por soluções para problemas do mundo real. Lembrando da importância da compreensão adequada de teoria de determinada área do conhecimento e da teoria da EDO para resolver um problema e obter a interpretação da solução geral. Sendo assim, uma forma eficaz para solucionar desafios complexos e impulsionar avanços em múltiplas disciplinas.

Dado o vasto campo de aplicações das equações diferenciais, futuras pesquisas podem aprofundar-se em estudos usando programação numérica (por exemplo, linguagem R e Python), para resolver um PVI de EDO de problemas complexos, com resultados mais robustos.

Referências

- ALBUQUERQUE, M. L. de S.; SANTIAGO, T. da S. **Introdução à Física do Calor**. 1. ed. Bragança: Clube de Autores Publicações S/A, 2017. ISBN 978-85-922768-1-2.
- ALVES, W. B. Sobre a datação por decaimento radioativo. **CONNECTION LINE-REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG**, n. 5, 2010.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. [S.l.]: Editora Contexto, 2002.
- BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, B. C.; JAFELICE, R. S. da M. Modelagem matemática. UFU, 2019.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary differential equations and boundary value problems**. 7th. ed. New York: Wiley, 2001. ISBN 0471319996, 9780471319993, 0471402567, 9780471402565.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2012. v. 2.
- CARDOSO, E. d. M. e. a. Radioatividade. **Comissão Nacional de Energia Nuclear-CNEN**, 2000.
- DOMINGUES, J. S. Análise do modelo de gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento. **Biomatemática**, v. 21, p. 103–12, 2011.
- HÖNIG, C. S. **Aplicações da topologia à análise**. Instituto de Física e Matemática, 1961. v. 230. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=y5ITAAAAIAAJ>>.
- JAVARONI, S. L. Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2007.
- JEFFREYS, H.; JEFFREYS, B. S. **Methods of Mathematical Physics**. 3. ed. [S.l.]: Cambridge Mathematical Library, 1972.
- KREYSIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**. São Paulo: LTC, 2008. v. 1.
- LONARDONI, B. S. **Desigualdades de Gronwall Clássicas e Singularidades com Aplicações em Equações Diferenciais**. 2023. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, 2023.
- SANTOS, F. J. S. **Um estudo introdutório sobre o Teorema do Ponto Fixo de Banach e aplicações**. 2024. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, SP, 2024.
- SANTOS, W. A. dos. **Introdução às técnicas de datação por decaimento radioativo**. [S.l.]: Disponível, 2018.
- SCAFF, L. A. Física da radioterapia. Sarvier Suresnes, France, 1997.

SILVA, E. V. da. Contribuições da modelagem matemática e das tecnologias para o ensino de equações diferenciais ordinárias. **Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática**, 2025.

SILVA, M. A. da. Modelagem matemática: Equações diferenciais ordinárias em cursos de graduação. 2014.

SILVA, R. S. **Química Orgânica**. [S.l.]: Rio de Janeiro LTC, 2018.

THOMAS, G. B. et al. Cálculo, vol. 1. 10^o Editora: **Prentice-Hall**, 2002.

VILHENA, M. L. M. **Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais: Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias**. 2014. Dissertação (Mestrado) — Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciado Pleno em Matemática) - Universidade Federal do Pará, 2014.

YAMASHIRO, S.; SOUZA, S. de O. **Matemática com aplicações tecnológicas - Volume 2: Cálculo I**. Editora Blucher, 2015. (Matemática com aplicações tecnológicas). ISBN 9788521209096. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hIewDwAAQBAJ>>.

YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. Equações diferenciais. UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a . . . , 2017.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem**. [S.l.]: Cengage Learning, 2016.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. [S.l.]: Pearson, 2012.

ANEXO A

TRANSFORMADA DE LAPLACE E PROPRIEDADES

Transformada de Laplace de $f(t)$: $L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$

Transformada inversa de Laplace de $F(s)$: $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ se $L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$

	Transformada	Transformada inversa
1	$L[\delta(t-a)] = e^{-as}$	$L^{-1}[e^{-as}] = \delta(t-a)$
2	$L[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$	$L^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s}\right] = u(t-a)$
3	$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$	$L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$
4	$L[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2}$	$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + a^2}\right] = \cos(at)$
5	$L[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$	$L^{-1}\left[\frac{a}{s^2 + a^2}\right] = \sin(at)$
6	$L[\cosh(at)] = \frac{s}{s^2 - a^2}$	$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 - a^2}\right] = \cosh(at)$
7	$L[\sinh(at)] = \frac{a}{s^2 - a^2}$	$L^{-1}\left[\frac{a}{s^2 - a^2}\right] = \sinh(at)$
8	$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$	$L^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{1}{n!} t^n, n = 1, 2, 3, \dots$
9	$L[t^n \cdot e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$	$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right] = \frac{1}{n!} t^n \cdot e^{at},$
10	$L[e^{at} \cos(bt)] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$L^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}\right] = e^{at} \cos(bt)$
11	$L[e^{at} \sin(bt)] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$L^{-1}\left[\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}\right] = e^{at} \sin(bt)$
12	$L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$	$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} L^{-1}[F(s)]$
13	$L[f'(t)] = s L[f(t)] - f(0)$	
14	$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	
15	$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} L[f(t)]$	$L^{-1}\left[\frac{1}{s} F(s)\right] = \int_0^t L^{-1}[F(s)](\tau) d\tau$
16	$L[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[f(t)]$	$L^{-1}\left[\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right] = (-1)^n t^n \cdot L^{-1}[F(s)]$
17	$L[u(t-a) \cdot f(t-a)] = e^{-as} L[f(t)]$	$L^{-1}[e^{-as} F(s)] = u(t-a) \cdot f(t-a)$
18	$L[u(t-a) \cdot f(t)] = e^{-as} L[f(t+a)]$	
19	$L\left[\int_0^t f(t-v) g(v) dv\right] = F(s) \cdot G(s)$	$L^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t f(t-v) g(v) dv$
20	$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} L[f(t)](v) dv, \text{ se } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ finito}$	$L^{-1}\left[\int_s^{+\infty} F(v) dv\right] = \frac{1}{t} L^{-1}[F(s)]$