

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TEOREMA DE GREEN: CONCEITOS E APLICAÇÕES

ALTEMON RIBEIRO JÚNIOR

GOIÂNIA - GOIÁS
2025



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Altemon Ribeiro Júnior

Matrícula: 20211010940020

Título do Trabalho: TEOREMA DE GREEN: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Autorização - Marque uma das opções

1. (x) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia
Local

_____, 07/03/2025.
Data

Altemon Ribeiro Júnior

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

ALTEMON RIBEIRO JÚNIOR

TEOREMA DE GREEN: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Professora Dra. Karoline Victor Fernandes

GOIÂNIA - GOIÁS
2025

R484t Ribeiro Júnior, Altemon.
 Teorema de Green: conceitos e aplicações / Altemon Ribeiro Júnior. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2025.
 48 f.

 Orientadora: Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes.

 TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

 1. Matemática. 2. Teorema de Green. 3. Integrais duplas. 4. Integrais de linha. I. Fernandes, Karoline Victor (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 515.35

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

TEOREMA DE GREEN: CONCEITOS E APLICAÇÕES

por

ALTEMON RIBEIRO JÚNIOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 06 de março de 2025, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Jolivê Mendes de Santana Filho (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Jolive Mendes de Santana Filho, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 06/03/2025 15:11:53.
- Jose Eder Salvador de Vasconcelos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 06/03/2025 15:10:47.
- Karoline Victor Fernandes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 06/03/2025 15:09:27.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 19/02/2025. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 619965
Código de Autenticação: 0a2d292cd5



Dedicatória

Dedico este trabalho a todas as versões de mim que enfrentaram as madrugadas insones e os dias de incerteza. Entre a ansiedade e a esperança, descobri que existir com autenticidade é também um ato de coragem. A quem esteve ao meu lado nesses momentos, meu mais sincero obrigado

Agradecimentos

Este trabalho é o reflexo de muitas pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a minha jornada acadêmica e pessoal. No decorrer desses anos, fui guiado por diferentes mãos e corações, e a elas devo muito do que sou e do que conquistei. Por isso, dedico a todos os que, de alguma forma, marcaram minha trajetória, com carinho e respeito.

Em primeiro lugar, agradeço profundamente à minha avó Antônia de Siqueira e ao meu avô Orivo da Silva, que sempre me ensinaram o verdadeiro valor da família, do amor e da perseverança. Sei que, sem o apoio incondicional deles, minhas raízes estariam perdidas. À minha mãe, Marcilena Pereira, meu maior exemplo de força e dedicação, que me mostrou todos os dias que a luta é incessante e que a coragem é o melhor caminho. Às minhas irmãs, Geicy e Joyce, que compartilham comigo os momentos de alegria e desafios, e me ensinam o valor da união familiar.

Quero expressar minha imensa gratidão à minha orientadora, Karoline Victor, que me guiou com paciência, sabedoria e comprometimento. Sua dedicação foi fundamental para que eu chegasse até aqui, e suas palavras sempre foram um farol quando eu mais precisei de direção.

Aos meus amigos que fizeram parte dessa jornada acadêmica de maneira única e insubstituível: Rebeca, Matheus, Andreza, Pedro, Kaique, Marianna, Bibiane, Thiago, Lais, Eduardo e Raynara. Cada um de vocês, à sua maneira, deixou uma marca no meu caminho, seja nas madrugadas de estudo, nos desafios compartilhados ou nas pequenas vitórias que celebramos juntos. Sem vocês, essa trajetória teria sido muito mais árida e difícil. Obrigado por tornarem o peso mais leve, as conquistas mais especiais e os dias mais significativos. A caminhada foi árdua, mas ter vocês ao meu lado fez toda a diferença.

E aos amigos que, mesmo distantes da minha vida acadêmica, foram meu porto seguro nos momentos mais difíceis: Marianna, Vitória, Hiago, Leonardo, Gustavo, Victor, João, Wanderson, Rafaela, Jhonatan e Gabriel. Vocês foram os que me lembraram, nos dias mais turbulentos, que eu não era apenas um estudante tentando superar desafios, mas também uma pessoa que precisava de descanso, risadas e apoio. Nos momentos de incerteza, foram vocês que me trouxeram palavras de força, abraços silenciosos e conversas que renovaram minha energia. A amizade de vocês foi meu refúgio e minha fonte de ânimo para seguir em frente. Sou imensamente grato por cada gesto, cada palavra e cada demonstração de carinho. Ao longo dessa jornada, tive a sorte de compartilhar não apenas desafios, mas também momentos de alegria e cumplicidade no ambiente de trabalho ao lado de pessoas incríveis: Jamille, Larissa, Matheus e Rafael. Entre reuniões e responsabilidades diárias, foram vocês que transformaram a rotina em algo mais leve e significativo.

Foram tantas risadas espontâneas no meio de dias cansativos, tantas conversas que começaram com trabalho e terminaram em histórias inesquecíveis. Em cada café compartilhado, em cada troca de olhares que dispensava palavras e até nos momentos em que tudo parecia um caos, lá estávamos nós, juntos, fazendo com que tudo valesse a pena.

Mais do que colegas, vocês se tornaram parte da minha história. Obrigado por cada instante de apoio, por cada incentivo e, principalmente, por provarem que, mesmo no ambiente profissional, amizade e felicidade podem caminhar lado a lado.

Aos professores Arianny Baião e Danillo Flugge, que com suas perspectivas e ensinamentos ampliaram minha visão sobre a educação e a importância de ser um bom educador. Através de vocês, aprendi que a educação vai muito além das paredes de uma sala de aula; ela é uma troca constante de saberes, um gesto de amor e cuidado pelo próximo. Dizem que a gente se constrói nos detalhes, nos encontros inesperados, nas palavras que ficam ecoando depois da conversa, nas risadas que surgem do nada e nos silêncios cheios de significado. A vida é esse emaranhado de trocas, de chegadas e partidas, de versões de nós mesmos que vamos descobrindo aos poucos. E, no meio disso tudo, o que realmente fica são as marcas que as pessoas deixam na gente e aquelas que deixamos nelas.

Olho para trás e vejo que sou feito dessas histórias compartilhadas, dos aprendizados que vieram sem aviso e das pessoas que, de alguma forma, me ensinaram a ser mais eu. Então, a cada um que cruzou meu caminho, que me mostrou um novo jeito de ver o mundo ou simplesmente esteve ali, meu muito obrigado. A vida segue mudando, e eu sigo mudando com ela, mas carrego comigo cada pedaço que fez parte dessa construção.

Resumo

Objetiva-se com esse trabalho investigar o Teorema de Green e suas aplicações em problemas matemáticos e físicos. O teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha ao longo de uma curva fechada e integrais duplas sobre a região delimitada pela curva. Inicialmente, revisamos e introduzimos conceitos fundamentais para o entendimento do presente trabalho, como integrais duplas e curvilíneas, além de técnicas de mudança de variável. Depois, apresentamos duas demonstrações para o Teorema de Green, uma para regiões simples e outra para regiões especiais, destacando sempre sua utilidade na simplificação de cálculos de diversas áreas, como na engenharia, matemática e física. A pesquisa evidencia a relevância do Teorema de Green na aplicação nessas diversas áreas, principalmente no cálculo de fluxos e integrais.

Palavras-chave: Teorema de Green; Integral Curvilínea; Integral Dupla; Aplicações.

Abstract

The objective of this work is to investigate Green's Theorem and its applications in mathematical and physical problems. Green's Theorem establishes a relationship between line integrals along a closed curve and double integrals over the region enclosed by the curve. Initially, we review and introduce fundamental concepts necessary for understanding this work, such as double and curvilinear integrals, as well as variable change techniques. Then, we present two proofs of Green's Theorem: one for simple regions and another for special regions, always highlighting its usefulness in simplifying calculations in various fields, such as engineering, mathematics, and physics. The research highlights the relevance of Green's Theorem in applications across these fields, particularly in the calculation of fluxes and integrals.

Keywords: Green's Theorem; Line Integral; Double Integral; Applications.

Sumário

Introdução	1
1 Aspectos Históricos	2
2 Integral Dupla	4
2.1 Interpretação Geométrica da Integral Dupla	4
2.2 Integrais duplas sobre regiões não retangulares limitadas	8
2.3 Mudança de Variáveis na Integral Dupla	15
3 Integrais Curvilíneas	20
3.1 Integral de Linha de Campos Vetoriais sobre uma curva	20
3.2 Outra Notação para Integral de Linha de Campos Vetoriais	22
3.2.1 Propriedades das Integrais de Linha para Campos Vetoriais	23
4 Teorema de Green	25
4.1 Prova do Teorema para regiões especiais	27
4.2 Demonstração Geral	29
4.3 Aplicações	32
4.3.1 Trabalho realizado pela força $\vec{F}$	32
4.3.2 Cálculo de Área	33
4.3.3 Momento de Inércia	34
5 Conclusão	36
Referências Bibliográficas	37

Lista de Figuras

1.1	George Green	3
2.1	Soma de Riemann	4
2.2	Representação do conjunto B e sua localização em R	5
2.3	Representação do volume do paralelepípedo de altura $f(X_{ij})$ e base R_{ij}	5
2.4	Representação gráfica da função $f(x, y) = x+y$ sobre a região R	8
2.5	Interpretação geométrica para $\alpha(y)$	9
2.6	$f(x, y)$	11
2.7	Região de Integração B delimitada por $0 \leq y \leq x^2$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$	11
2.8	Interpretação Geométrica da Integral $\iint_B xy \, dx \, dy$ no Plano xyz	12
2.9	Região de Integração B na Troca da Ordem de Integração.	13
2.10	Região de Integração B delimitada por $c(x)$ e $d(x)$	14
2.11	Região de Integração B com limites variáveis $a(y)$ e $b(y)$	15
2.12	Retângulo R' do plano uv	17
2.13	Retângulo R do plano uv	18
3.1	Representação do Trabalho de um Campo de Forças Constante ao Longo de um Segmento	20
3.2	Representação de $\vec{F}$ ao longo de γ	21
4.1	Região R	25
4.2	Orientação Positiva da Curva C	26
4.3	Orientação Negativa da Curva C	26
4.4	A curva C composta por C_1 e C_2	27
4.5	A curva C composta por C'_1 e C'_2 , com gráficos $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$	28
4.6	Retângulo dividido em 4 curvas.	29
4.7	Arco Orientado	30
4.8	Retângulo dividido em 4 curvas.	31
4.9	Região anular R	31
4.10	Gráfico da Curva orientada	32
4.11	Gráfico da Curva orientada	34

Introdução

O Teorema de Green é um dos resultados fundamentais do cálculo vetorial, estabelecendo uma conexão essencial entre integrais de linha ao longo de uma curva fechada e integrais duplas sobre a região por ela delimitada. Esse teorema, introduzido pelo matemático britânico George Green em 1828, desempenha um papel crucial em diversas aplicações da matemática, física e engenharia, especialmente na análise de fluxos e propriedades geométricas de superfícies.

Este trabalho tem como objetivo investigar o Teorema de Green e explorar suas aplicações na resolução de problemas práticos, destacando sua importância na conversão de integrais de contorno em integrais duplas. Essa propriedade é particularmente útil para simplificar cálculos complexos, sendo amplamente empregada na modelagem de fenômenos físicos, como a determinação de fluxos em campos vetoriais.

Para alcançar esse objetivo, iniciaremos com uma análise dos conceitos fundamentais necessários para a compreensão do teorema, incluindo integrais duplas, mudança de variável e integrais curvilíneas em campos vetoriais. Em seguida, apresentaremos a demonstração rigorosa do Teorema de Green, abordando tanto a prova geral quanto casos específicos que ilustram sua aplicabilidade em problemas de superfície. Por fim, discutiremos suas principais aplicações, evidenciando sua relevância para a matemática aplicada e as ciências exatas.

Com essa investigação, buscamos fornecer uma compreensão aprofundada do Teorema de Green, enfatizando não apenas sua utilidade prática, mas também seu papel na simplificação de cálculos matemáticos e na ampliação do entendimento das integrais em diferentes contextos.

1

Aspectos Históricos

De acordo com (MELCHIOR, 2013) No final do século XVII e início do século XVIII, o cálculo diferencial e integral, nas mãos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, começou a consolidar-se como uma poderosa ferramenta matemática. Nesse contexto, os estudos proporcionaram avanços imensuráveis no entendimento das mudanças de variáveis e áreas sobre curvas, o que permitiu resolver problemas complexos de física, engenharia e astronomia.

Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, quase simultaneamente, mas de forma independente, desenvolveram os fundamentos do cálculo. Newton, trabalhando na Inglaterra, dedicou-se à aplicação do cálculo para compreender e descrever as leis do movimento e da gravitação. No entanto, as abordagens de Newton e Leibniz sobre o cálculo eram diferentes em estilo e aplicação.

Leibniz destacou-se por desenvolver uma notação metódica e simbólica, com ênfase em processos infinitesimais. Sua abordagem não apenas facilitava a compreensão e aplicação prática, mas também estabelecia uma base sólida para a formalização do cálculo. A notação introduzida por Leibniz, como $\int$ para integrais e $\frac{dy}{dx}$ para derivadas, foi amplamente aceita devido à sua clareza e simplicidade, tornando-se fundamental para o desenvolvimento posterior do cálculo.

Após as contribuições fundamentais de Newton e Leibniz ao cálculo, o século XIX trouxe novos avanços na matemática aplicada, particularmente com a obra de George Green.

No seguimento às contribuições de Newton e Leibniz, o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral continuou trazendo avanços significativos em áreas como engenharia, física, astronomia e matemática. Segundo o Artigo "George Green, mathematician and physicist 1793-1841" (CANNELL; LORD, 1993). Nasce em 14 de julho de 1793 George William Athelston Green em Nottingham, filho único de um moeiro (padeiro). George Green teve seus estudos formais iniciados aos 8 anos de idade na Robert Goodacre's Academy, onde teve seu primeiro contato com a ciência e desenvolveu gosto por ela.

Aos 9 anos de idade, Green já teria recebido toda a educação que era considerada a essencial para a época. Após o término desse ensino, os estudos de Green vieram da sua força de vontade e afeição pela ciência. Em Nottingham, não havia biblioteca onde ele pudesse acessar livremente, mas ainda assim, ele fazia a aquisição de livros (enciclopédias) em livrarias. Não se sabe muito sobre como ele teria adquirido tanto conhecimento matemático ao longo do tempo, mas especula-se que ele possa ter recebido conselhos de alguns matemáticos da época.

Em 1828, com 35 anos, publicou seu famoso ensaio *An Essay on the Application of*

Figura 1.1: George Green



Fonte: <http://goo.gl/qevLI1>. Acesso em nov. 2024.

Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism (Um Ensaio sobre a Aplicação da Análise Matemática às Teorias de Eletricidade e Magnetismo). Este trabalho foi descrito como um dos eventos intelectuais mais importantes da história de Nottingham, e marcou o início de sua contribuição significativa para a ciência.

O trabalho de Green proporcionou conceitos inovadores, entre eles a função potencial e o Teorema de Green. Green foi um pioneiro em aplicar matemática às teorias de eletricidade e magnetismo. Einstein não hesitou em comentar prosseguindo sobre o ensaio greenianos de 1930, dizendo-se 20 anos à frente de seu tempo ao revisar o ensaio. Além disso, George Green, um matemático autodidata, fez contribuições significativas para a física, incluindo sua análise detalhada do fenômeno de reflexão total, que é essencial para o funcionamento das fibras ópticas. Sua teoria sobre a reflexão total, ou reflexão interna total, tornou-se a base para o desenvolvimento das fibras ópticas, fundamentais nas comunicações modernas, como a telefonia. Vale ressaltar que, ao longo da maior parte de sua vida, Green desenvolveu suas pesquisas de forma independente, sem o suporte de uma comunidade científica formal, o que fez com que seu trabalho fosse, por muito tempo, subestimado.

Durante a vida de Green, ele permaneceu bastante desconhecido. Só após sua morte, em 1841, seu trabalho foi reconhecido em grande medida, graças a William Thomson, mais tarde Lord Kelvin, que redescobriu o ensaio de Green em 1845. Kelvin acreditava que Green era um gênio matemático e seu método avançou suas próprias pesquisas em eletricidade e magnetismo; na verdade, no século XX, ele foi redescoberto por físicos e matemáticos que o usaram em mecânica quântica e física. De fato, atualmente, Green é considerado por muitos como um dos fundadores da matemática da física moderna.

2

Integral Dupla

Nesse capítulo, vamos desenvolver o conceito de integrais duplas. A partir da leitura de (GUIDORIZZI, 2019) exploraremos sua interpretação geométrica e a técnica de aplicação de mudanças de variáveis. As integrais têm um impacto imensurável na compreensão desse trabalho, com importância significativa na física e na engenharia. As integrais duplas desempenham um papel importantíssimo ao longo da história da matemática.

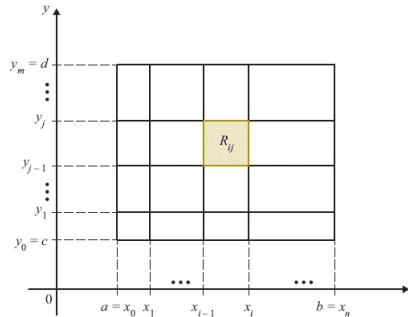
2.1 Interpretação Geométrica da Integral Dupla

Seja o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, em que $a < b$ e $c < d$ são números reais dados. Seja $P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ e $P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$ partições de $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente. O conjunto

$$P = \{(x_i, y_j) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

denomina-se *partição* do retângulo R . Uma partição P de R determina mn retângulos $R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$.

Figura 2.1: Soma de Riemann



Fonte: (GUIDORIZZI, 2019)

Seja $B \subset \mathbb{R}^2$; dizemos que B é *limitado* se existir um retângulo R , com $B \subseteq R$. Seja

$f : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com B limitado. Assim, existe um retângulo

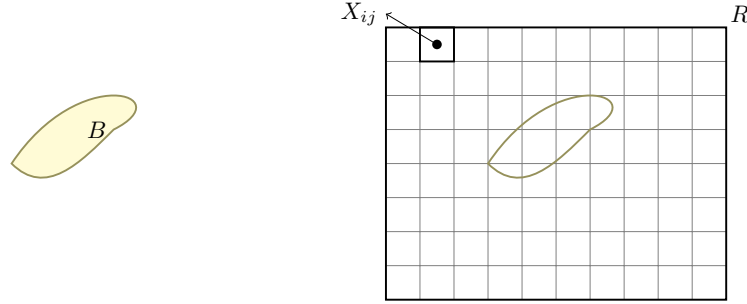
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

que contém B . Seja $P = \{(x_i, y_j) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, m\}$ uma partição de R . Para cada par de índices (i, j) , seja $X_{ij} = (r_{ij}, s_{ij})$ um ponto escolhido arbitrariamente no retângulo R_{ij} . Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, o número.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

em que $f(X_{ij})$ deve ser substituído por zero se $X_{ij} \notin B$, denomina-se *soma de Riemann* de f , relativa à partição P e aos pontos X_{ij} , sendo chamada de soma de Riemann.

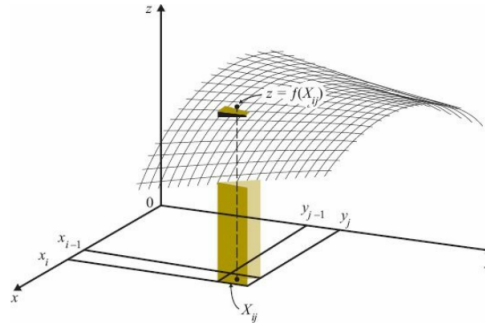
Figura 2.2: Representação do conjunto B e sua localização em R



Fonte: Produzida pelo autor

Observe que se $f(X_{ij}) \geq 0$, $f(X_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$ será o volume do paralelepípedo de altura $f(X_{ij})$ e cuja base é o retângulo R_{ij} .

Figura 2.3: Representação do volume do paralelepípedo de altura $f(X_{ij})$ e base R_{ij} .



Fonte: (GUIDORIZZI, 2019)

Seja $P = \{(x_i, y_j) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, m\}$ uma partição do retângulo R .

No que segue, indicaremos por Δ o maior dos números $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n, \Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_m$. Observe que todos Δx_i e todos Δy_j tendem a zero, quando Δ tende a zero.

Definição 2.1. : Seja $f(x, y)$ uma função definida no conjunto limitado B e L um número real. Dizemos que a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

tende a L , quando Δ tende a zero, e escrevemos

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$, que só dependa de ε mas não da escolha de X_{ij} , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - L \right| < \varepsilon$$

para toda partição P , com $\Delta < \delta$.

Tal número L , que quando existe é único, denomina-se *integral dupla* (segundo Riemann) de f sobre B e indica-se por

$$\iint_B f(x, y) dx dy.$$

Assim

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

Se $\iint_B f(x, y) dx dy$ existe, então diremos que f é integrável (segundo Riemann) em B .

Definimos a *área de B* por

$$\text{área de } B = \iint_B dx dy, \text{ desde que a integral exista.}$$

Seja $f(x, y)$ integrável em B , com $f(x, y) \geq 0$ em B . Seja o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Definimos o *volume de A* por

$$\text{volume de } A = \iint_B f(x, y) dx dy, \text{ desde que a integral exista.}$$

Exemplo 2.2. Considere a seguinte integral dupla $\iint_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_0^1 (x + y) dy dx$ para a função $f(x, y) = x + y$ sobre o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$. Encontre o volume abaixo de $f(x, y)$ e acima de R .

Demonstração. Resolvendo primeiro a integral interna em relação y :

$$\int_0^1 (x + y) dy = \int_0^1 x dy + \int_0^1 y dy.$$

Calculando separadamente os termos:

$$\int_0^1 x dy = x \int_0^1 1 dy = x[y]_0^1 = x(1 - 0) = x,$$

$$\int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Assim a integral interna resulta em:

$$\int_0^1 (x + y) dy = x + \frac{1}{2}.$$

Substituímos o resultado na integral externa e resolvemos:

$$\int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^2 x dx + \int_0^2 \frac{1}{2} dx.$$

Calculando os termos separadamente:

$$\int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 1 dx = \frac{1}{2} [x]_0^2 = \frac{1}{2} (2 - 0) = 1.$$

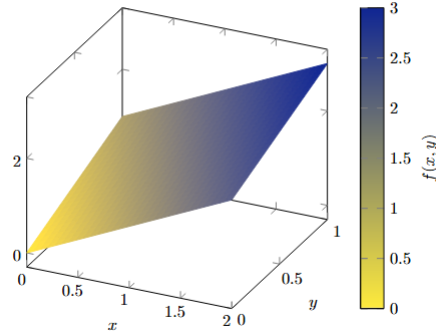
Portanto:

$$\int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 2 + 1 = 3.$$

Concluimos que:

$$\iint_R f(x, y) dA = 3.$$

Figura 2.4: Representação gráfica da função $f(x, y) = x+y$ sobre a região R .



Fonte: Produzida pelo autor

A integral dupla sobre a região R resulta no volume abaixo dessa superfície e acima do retângulo R no plano xy .

$$\iint_R f(x, y) dA = 3$$

□

2.2 Integrais duplas sobre regiões não retangulares limitadas

Nem sempre a região de integração de uma função $f(x, y)$ é um retângulo. No entanto, quando isso ocorre, podemos utilizar o **Teorema de Fubini** para simplificar o cálculo da integral dupla. Esse teorema permite que a integral seja decomposta em duas integrais iteradas, facilitando a resolução do problema.

Seja o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ e seja $f(x, y)$ integrável em R . Para cada y fixo em $[c, d]$, podemos considerar a função na variável x , definida em $[a, b]$ e dada por

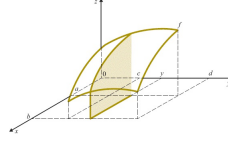
$$x \mapsto f(x, y). \quad (2.1)$$

Se, para cada $y \in [c, d]$, (2.1) for integrável em $[a, b]$, podemos, então, considerar a função dada por

$$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

Vejam os uma interpretação geométrica para $\alpha(y)$ no caso $f(x, y) \geq 0$ em R .

Figura 2.5: Interpretação geométrica para $\alpha(y)$



Fonte: (GUIDORIZZI, 2019)

$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, é a área da região sombreada.

O teorema que enunciamos a seguir e cuja demonstração pode ser encontrada em (GUIDORIZZI, 2019), conta-nos que se $f(x, y)$ for integrável em R e se, para todo $y \in [c, d]$, $\int_a^b f(x, y) dx$ existir, então $\alpha(y)$ será integrável em $[c, d]$ e

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

ou

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \alpha(y) dy$$

Segue da igualdade acima que se $f(x, y) \geq 0$ em R , então $\int_c^d \alpha(y) dy$ será o volume do conjunto limitado pelo gráfico de f e pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ e $z = 0$.

Teorema (de Fubini). Seja $f(x, y)$ integrável no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Suponhamos que $\int_a^b f(x, y) dx$ exista, para todo $y \in [c, d]$, e que $\int_c^d f(x, y) dy$ exista, para todo $x \in [a, b]$. Então

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Demonstração. Sejam

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < \cdots < x_n = b$$

uma partição de $[a, b]$ e

$$P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{j-1} < y_j < \cdots < y_m = d$$

uma partição de $[c, d]$. Sejam

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

e

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}.$$

Para todo (x, y) no retângulo R_{ij} , dado por $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ e $y_{j-1} \leq y \leq y_j$, temos:

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}.$$

Daí, para todo $y \in [y_{j-1}, y_j]$,

$$m_{ij}\Delta x_i \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \leq M_{ij}\Delta x_i.$$

Segue que

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}\Delta x_i \leq \int_a^b f(x, y) dx \leq \sum_{i=1}^n M_{ij}\Delta x_i,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}\Delta x_i \leq \alpha(y) \leq \sum_{i=1}^n M_{ij}\Delta x_i,$$

para todo $y \in [y_{j-1}, y_j]$, em que $\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Tomando-se $\bar{y}_j$ em $[y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, vem

$$\left(\sum_{i=1}^n m_{ij}\Delta x_i \right) \Delta y_j \leq \alpha(\bar{y}_j)\Delta y_j \leq \left(\sum_{i=1}^n M_{ij}\Delta x_i \right) \Delta y_j.$$

Daí,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{j=1}^m \alpha(\bar{y}_j)\Delta y_j \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j.$$

Para $\Delta \rightarrow 0$, as somas superior e inferior tendem para

$$\iint_A f(x, y) dx dy,$$

logo, $\alpha(y)$ é integrável em $[c, d]$ e

$$\int_c^d \alpha(y) dy = \iint_A f(x, y) dx dy,$$

ou seja,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

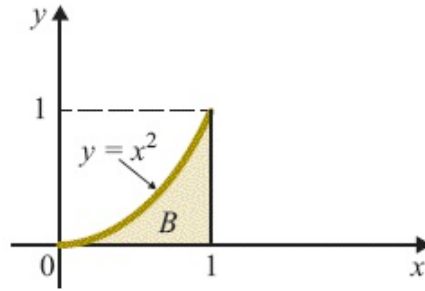
□

Exemplo 2.3. Calcule $\iint_B xy dx dy$, em que B é o conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2$.

Demonstração. Seja R o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Seja $F(x, y)$ definida em R e dada por

$$F(x, y) = \begin{cases} xy & \text{se } (x, y) \in B \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Figura 2.6: $f(x, y)$



Fonte: ([GUIDORIZZI, 2019](#))

,

$$\iint_B xy \, dx \, dy = \iint_R F(x, y) \, dx \, dy.$$

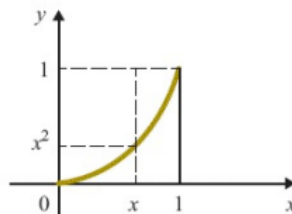
Pelo teorema de Fubini,

$$\iint_R F(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, y) \, dy \right] dx.$$

Para cada x fixo em $[0, 1]$,

$$\beta(x) = \int_0^1 F(x, y) \, dy = \int_0^{x^2} F(x, y) \, dy + \int_{x^2}^1 F(x, y) \, dy.$$

Figura 2.7: Região de Integração B delimitada por $0 \leq y \leq x^2$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$



Fonte: ([GUIDORIZZI, 2019](#))

Como $F(x, y) = 0$ para $x^2 \leq y \leq 1$, resulta

$$\beta(x) = \int_0^{x^2} F(x, y) dy = \int_0^{x^2} xy dy.$$

Segue que

$$\iint_B xy dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} xy dy \right] dx.$$

$$\int_0^{x^2} xy dy = \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{x^2} = \frac{x^5}{2}$$

resulta

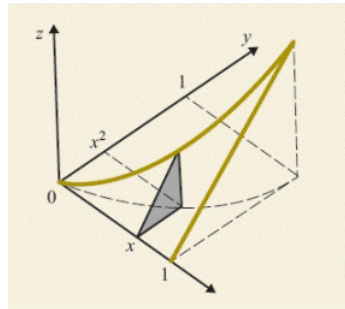
$$\iint_B xy dx dy = \int_0^1 \frac{x^5}{2} dx = \frac{1}{12}.$$

Observação 2.4. $\beta(x) = \int_0^{x^2} xy dy$ é a área da região sombreada. Por outro lado,

$$\iint_B xy dx dy = \int_0^1 \beta(x) dx = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} xy dy \right] dx$$

é o volume do conjunto de todos (x, y, z) tais que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2$ e $0 \leq z \leq xy$.

Figura 2.8: Interpretação Geométrica da Integral $\iint_B xy dx dy$ no Plano xyz .



Fonte: (GUIDORIZZI, 2019)

Vamos, agora, calcular $\iint_B xy dx dy$, invertendo a ordem de integração.

Temos:

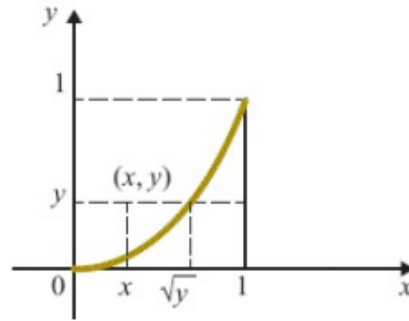
$$\iint_R F(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, y) dx \right] dy.$$

Para cada y fixo em $[0, 1]$,

$$\alpha(y) = \int_0^1 F(x, y) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{y}} F(x, y) dx + \int_{\sqrt{y}}^1 F(x, y) dx.$$

Figura 2.9: Região de Integração B na Troca da Ordem de Integração.



Fonte: (GUIDORIZZI, 2019)

Como $F(x, y) = 0$ para $0 \leq x \leq \sqrt{y}$, resulta

$$\alpha(y) = \int_{\sqrt{y}}^1 F(x, y) dx = \int_{\sqrt{y}}^1 xy dx.$$

Segue que

$$\iint_B F(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^1 xy dx \right] dy,$$

ou seja,

$$\iint_B xy dx dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^1 xy dx \right] dy.$$

Tendo em vista que

$$\int_{\sqrt{y}}^1 xy dx = \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{\sqrt{y}}^1 = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2},$$

resulta

$$\iint_B xy dx dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{1}{12}.$$

□

Com raciocínio análogo ao do exemplo anterior, provam-se as seguintes consequências do teorema de Fubini.

Corolário 1. Sejam $c(x)$ e $d(x)$ duas funções contínuas em $[a, b]$ e tais que, para todo x em $[a, b]$, $c(x) \leq d(x)$. Seja B o conjunto de todos (x, y) tais que $a \leq x \leq b$ e $c(x) \leq y \leq d(x)$. Nestas condições, se $f(x, y)$ for contínua em B , então

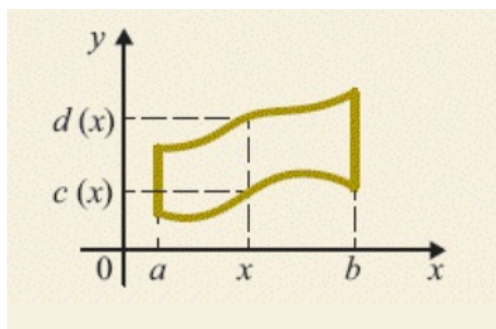
$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

$$\iint_B f(x, y) dx dy = ?$$

Primeiro calcula-se, para cada x fixo em $[a, b]$, a integral de $f(x, y)$ no intervalo $[c(x), d(x)]$:

$$\beta(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy.$$

Figura 2.10: Região de Integração B delimitada por $c(x)$ e $d(x)$.



Fonte: (GUIDORIZZI, 2019)

Tem-se, então:

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \beta(x) dx = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

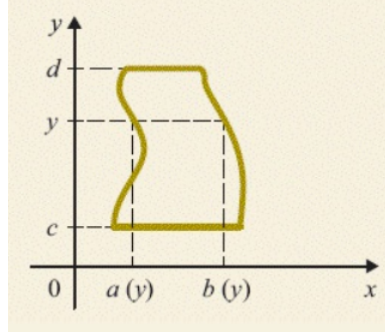
Corolário 2. Sejam $a(y)$ e $b(y)$ duas funções contínuas em $[c, d]$ e tais que, para todo $y \in [c, d]$, $a(y) \leq b(y)$. Seja B o conjunto de todos (x, y) tais que $c \leq y \leq d$, $a(y) \leq x \leq b(y)$. Nestas condições, se $f(x, y)$ for contínua em B , então

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

Primeiro calcula-se, para cada y fixo em $[c, d]$, a integral de $f(x, y)$ no intervalo $[a(y), b(y)]$:

$$\alpha(x) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx.$$

Figura 2.11: Região de Integração B com limites variáveis $a(y)$ e $b(y)$.



Fonte: (GUIDORIZZI, 2019)

Em seguida, calcula-se a integral de $\alpha(y)$, para y variando em $[c, d]$:

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \alpha(y) dy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

2.3 Mudança de Variáveis na Integral Dupla

Nesta etapa, abordaremos o cálculo de integrais duplas utilizando o método de mudanças de variáveis. Este capítulo apresenta um estudo de técnicas amplamente conhecidas, explicadas e demonstradas em diversos livros de cálculo, como as transformações para coordenadas polares e outras parametrizações no plano. Como referência principal, utilizaremos o livro de Leithold, (LEITHOLD, 1994)

Trataremos do seguinte problema: dada uma integral dupla

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

encontrar uma transformação do plano no plano do tipo $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ que nos permita, trocando as variáveis iniciais pelas novas, calcular efetivamente as integrais dadas.

Faremos a seguir uma descrição pormenorizada dos procedimentos usados, justificando, principalmente, de forma geométrica, as fórmulas obtidas.

Observamos que ao mudarmos as variáveis, ou seja, por exemplo, ao passarmos do plano descrito por coordenadas x, y ao plano descrito por coordenadas u, v , estaremos eventualmente modificando a forma da região R . Por exemplo, as coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ transformam um retângulo R no plano das coordenadas r, θ , no círculo de raio 1 centrado na origem no plano xy .

$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Logo, numa mudança de variáveis, a região de integração deverá também ser trocada de forma conveniente. Será necessário que a transformação leve de forma bijetiva uma região na outra.

Definição 2.5. Dada a transformação $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ onde u e v bem como suas derivadas parciais são funções contínuas de x e y , a expressão

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J \left(\frac{u, v}{x, y} \right)$$

chamaremos de Jacobiano de u e v em relação a x e y .

Exemplo 2.6. Sendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, calcule $J \left(\frac{x, y}{r, \theta} \right)$.

$$J \left(\frac{x, y}{r, \theta} \right) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

Pode-se definir de forma análoga o Jacobiano das transformações no espaço.

O Jacobiano tem uma aplicação muito importante no problema de mudança de variáveis em integrais duplas, sabemos que o elemento de área em coordenadas polares é

$$dA = r \, dr \, d\theta$$

Por outro lado, vimos que no Exemplo 2.6

$$J \left(\frac{x, y}{r, \theta} \right) = r,$$

Temos então que

$$dA = \left| J \left(\frac{x, y}{r, \theta} \right) \right| dr \, d\theta$$

Em geral, vale o seguinte teorema.

Teorema 2.7. Dada a transformação $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ no plano, tal que

$$J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \neq 0,$$

então

$$dA = \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right| du dv.$$

Demonstração. O teorema generaliza o procedimento de substituição de variável na integração para os casos de integrais duplas, se tivermos a integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

uma substituição da variável do tipo $x = g(t)$ nos leva a

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt$$

pois $dx = g'(t) dt$. O objetivo dessa substituição é tornar a integral facilmente calculável por antiderivação.

Vamos desenvolver um raciocínio geométrico a fim de justificar, intuitivamente, que o Jacobiano é um bom "índice corretor do elemento de área", ou seja, que valem as fórmulas.

$$dx dy = \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right| du dv$$

ou

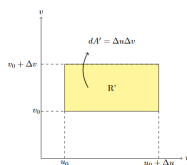
$$DA = \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right| DA'.$$

Consideremos o caso em que está dada a transformação

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

que leva o retângulo R' do plano uv na figura R do plano xy . Veja as Figuras 2.12 e 2.13

Figura 2.12: Retângulo R' do plano uv .



Fonte: Produzida pelo autor

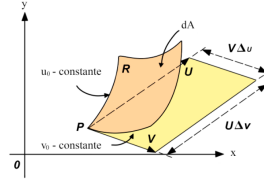
As retas $u = u_0$ e $v = v_0$ do plano uv são levadas respectivamente nas curvas u_0 -constante e v_0 -constante do plano xy . Em outras palavras, essas curvas são os conjuntos de pontos $(x(u_0, v), y(u_0, v))$, $v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v$ e $(x(u, v_0), y(u, v_0))$, $u_0 \leq u \leq u_0 + \Delta u$, com respectivamente u_0 -constante e v_0 -constante.

No ponto P de coordenadas $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ consideremos os vetores U e V tangentes às curvas u_0 -constante e v_0 -constante. Vamos supor U e V unitários, isto é,

$$|U| = |V| = 1$$

A área dA de R será aproximada pelo paralelogramo cujos lados têm as direções de U e de V com comprimentos $|V \Delta u|$ e $|U \Delta v|$. Se pensarmos U e V como velocidades e Δu e Δv

Figura 2.13: Retângulo R do plano uv .



Fonte: Produzida pelo autor

como intervalos de tempo, então $|U \Delta u|$ e $|V \Delta v|$ correspondem às distâncias percorridas em Δu e Δv . No limite, quando Δu e Δv tendem a zero, o elemento de área dA tende a coincidir com o referido paralelogramo. Mas, a área do paralelogramo pode ser calculada pelo produto vetorial. Assim,

$$dA = |V \Delta u \times U \Delta v| = |V \times U| \Delta u \Delta v$$

Mas

$$V = \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j}, \quad U = \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j}$$

ou pensados como vetores no espaço

$$V = \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + 0\hat{k}, \quad U = \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j} + 0\hat{k}$$

e, portanto,

$$V \times U = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \hat{k} = J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \hat{k}.$$

E, como $|\hat{k}| = 1$,

$$dA = \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right| \Delta u \Delta v$$

ou no limite

$$dA = \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right| du dv.$$

Consideremos agora

$$\iint_R f(x, y) dA$$

onde $dA = dx dy$ e seja dada a transformação $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$. Temos então que

$$dA = \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right| du dv$$

e assim

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R'} f[x(u, v), y(u, v)] \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right| du dv.$$

□

Exemplo 2.8. Calcule a área da região E interna à elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demonstração. Consideremos uma transformação: $x = au$ e $y = bu$. Se substituirmos na equação da elipse, teremos $u^2 + v^2 = 1$, que é a equação do círculo C com centro na origem e raio 1 no plano uv , cuja área é π . Como

$$J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

Logo,

$$\iint_E dx dy = \iint_C ab du dv = ab \iint_C du dv = ab \cdot \pi = \pi ab.$$

□

3

Integrais Curvilíneas

As **integrais curvilíneas** generalizam o conceito de integração para funções definidas ao longo de curvas, seja no plano ou no espaço tridimensional. Essas integrais possuem diversas aplicações, como no cálculo de trabalho realizado por forças, fluxo de fluidos, comprimentos de curvas e massas de fios com densidade variável.

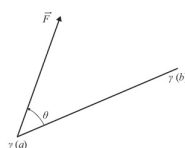
Neste capítulo, apresentamos os conceitos fundamentais das integrais curvilíneas em campos vetoriais e suas aplicações. Para o desenvolvimento dos tópicos, utilizaremos as ideias e abordagem presentes em (GUIDORIZZI, 2019), que fornecem uma fundamentação rigorosa e exemplos ilustrativos essenciais para a compreensão do tema.

3.1 Integral de Linha de Campos Vetoriais sobre uma curva

Suponhamos que $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja um campo de forças definido no aberto Ω e que uma partícula descreva um movimento em Ω com função de posição $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ($\gamma(t)$ é a posição da partícula no instante t). Se $\vec{F}$ for *constante* e a imagem de γ um segmento, o *trabalho* realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ é, por definição, o produto escalar de $\vec{F}$ pelo deslocamento $\gamma(b) - \gamma(a)$:

$$\tau = \vec{F} \cdot [\gamma(b) - \gamma(a)].$$

Figura 3.1: Representação do Trabalho de um Campo de Forças Constante ao Longo de um Segmento



Fonte: (GUIDORIZZI, 2019)

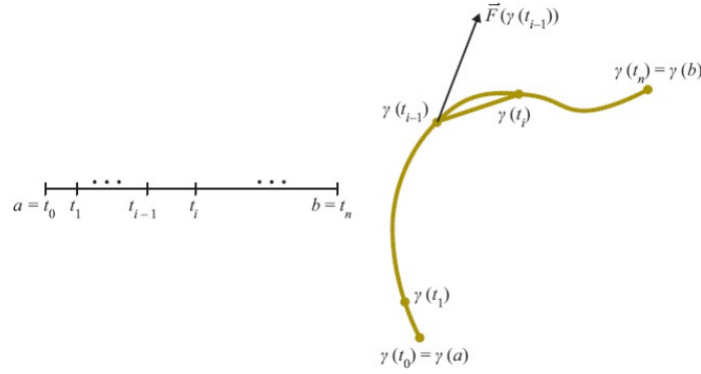
$$\tau = \vec{F} \cdot [\gamma(b) - \gamma(a)] = \|\vec{F}\| \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \cos \theta$$

Suponhamos, agora, que $\vec{F}$ e γ sejam quaisquer, com $\vec{F}$ contínuo e γ de classe C^1 . Queremos definir o trabalho realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$. Seja

$$P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$$

uma partição de $[a, b]$, com $\max \Delta t_i$ suficientemente pequena. (Lembramos que $\max \Delta t_i$ é o maior dos números $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.)

Figura 3.2: Representação de $\vec{F}$ ao longo de γ



Fonte: (GUIDORIZZI, 2019)

Tendo em vista as hipóteses anteriores, é razoável esperar que a soma

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] \quad (3.1)$$

seja uma boa aproximação para o trabalho τ realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ e que esta aproximação seja tanto melhor quanto menor for $\max \Delta t_i$. Por outro lado,

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \approx \gamma'(t_{i-1}) \Delta t_i$$

e daí

$$\tau \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(t_{i-1}) \Delta t_i.$$

Como a função $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é integrável em $[a, b]$, pois é contínua neste intervalo, segue que

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(t_{i-1}) \Delta t_i = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Nada mais natural, então, do que definir o *trabalho* τ realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ por

$$\tau = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

em que $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma$ é uma notação para indicar a integral $\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$. (Pode ser provado que a equação 3.1 tende a esta integral quando $\max \Delta t_i$ tende a zero.)

Consideremos, agora, um campo vetorial contínuo qualquer $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aberto, e uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, de classe C^1 . Definimos a *integral de linha* de $\vec{F}$ sobre γ por

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

É usual a notação $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para a integral de linha de $\vec{F}$ sobre γ , em que $\vec{r}(t) = \gamma(t)$.

Exemplo 3.1. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}.$$

Demonstração.

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \hat{i} + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \hat{j} \right] \cdot (-\sin t, \cos t) dt.$$

Portanto,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

□

3.2 Outra Notação para Integral de Linha de Campos Vetoriais

Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ um campo vetorial contínuo no aberto Ω de $\mathbb{R}^2$ e seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva de classe C^1 dada por $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Temos

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[P(x(t), y(t))\hat{i} + Q(x(t), y(t))\hat{j} \right] \cdot \left[\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \right] dt$$

$$= \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt.$$

A última expressão acima nos sugere a notação

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

para a integral de linha de $\vec{F}$ sobre γ :

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt.$$

Da mesma forma

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

indicará a integral de linha de

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$$

sobre a curva γ dada por

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{e} \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Exemplo 3.2. Calcule

$$\int_{\gamma} x dx + (x^2 + y + z) dy + xyz dz,$$

em que $\gamma(t) = (t, 2t, 1)$, $0 \leq t \leq 1$.

Demonstração. De $x = t$, $y = 2t$ e $z = 1$, segue

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x dx + (x^2 + y + z) dy + xyz dz &= \int_0^1 \left[t \frac{dx}{dt} + (t^2 + 2t + 1) \frac{dy}{dt} + 2t^2 \frac{dz}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^1 [t + (t^2 + 2t + 1)2 + 0] dt = \frac{31}{6}. \end{aligned}$$

□

3.2.1 Propriedades das Integrais de Linha para Campos Vetoriais

As propriedades das integrais de linha para campos vetoriais são análogas às propriedades das integrais definidas. Nas propriedades que seguem, estamos supondo que C é uma curva

suave ou suave por partes e que $\vec{F}$ e $\vec{G}$ são campos vetoriais contínuos.

Temos:

a)

$$\int_C k\vec{F} \cdot d\vec{r} = k \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{onde } k \text{ é uma constante.}$$

b)

$$\int_C (\vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}.$$

c)

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

d)

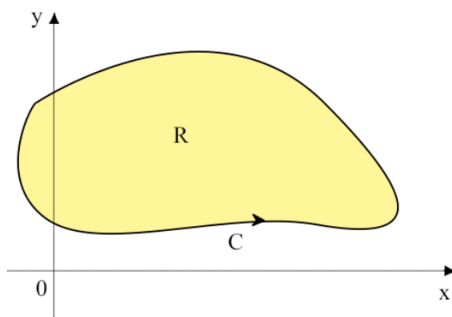
$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ onde } -C \text{ representa a curva } C \text{ orientada no sentido oposto.}$$

4

Teorema de Green

Neste capítulo introduziremos o Teorema de Green e duas demonstrações com base na leitura de (STEWART, 2009). O Teorema de Green estabelece uma relação entre a integral de linha ao longo de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região R delimitada por C . Suponha que R inclua todos os pontos internos da curva C , exceto os próprios pontos que compõem C a Figura 4.1. Para enunciar este teorema, utilizamos a ideia de que a orientação positiva de uma curva fechada simples C corresponde a percorrê-la no sentido anti-horário uma única vez. Dessa forma, se C for descrita por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, com $a \leq t \leq b$, então a região R está localizada à esquerda quando o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ percorre C (ver Figura 4.2).

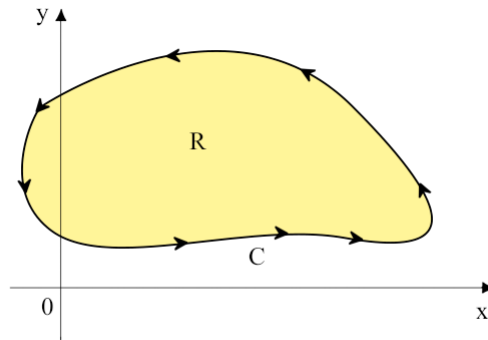
Figura 4.1: Região R .



Fonte: Produzida pelo autor

A **Figura 4.2** representa a orientação positiva de uma curva fechada C , delimitando a região R . Essa orientação segue o sentido anti-horário, mantendo a região R à esquerda do percurso ao longo da curva C .

Figura 4.2: Orientação Positiva da Curva C .

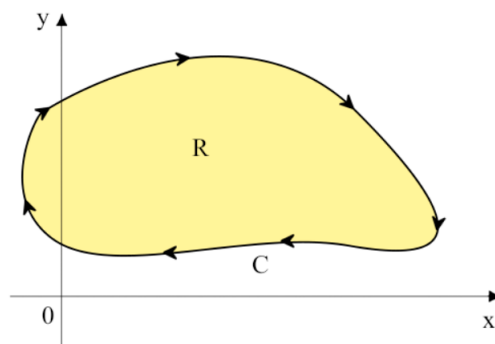


(a) Orientação positiva

Fonte: Produzida pelo autor

A figura 4.3 representa a orientação negativa de uma curva fechada C' , delimitando a região R . Nesta orientação, a curva C é percorrida no sentido horário, fazendo com que a região R fique à direita do percurso. Esse tipo de orientação é oposto ao exigido pelo **Teorema de Green** para a aplicação direta.

Figura 4.3: Orientação Negativa da Curva C .



(b) Orientação negativa

Fonte: Produzida pelo autor

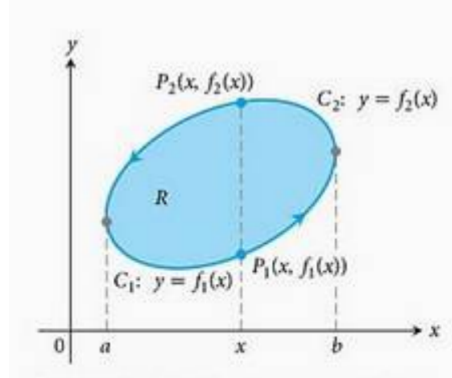
Teorema 4.1. *Seja C uma curva plana simples, fechada, suave por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Seja $F = (M, N)$ um campo vetorial contínuo; se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então*

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA. \quad (4.1)$$

4.1 Prova do Teorema para regiões especiais

Para facilitar a compreensão, a explicação desta e da próxima seção será baseada na abordagem de (THOMAS et al., 2005). Seja C uma curva fechada simples e suave no plano xy com a propriedade de que retas paralelas aos eixos não a cortam em mais que dois pontos. Seja R a região limitada por C e suponha que M, N e suas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas em todos os pontos de alguma região aberta que contenha C e R . Queremos provar o teorema de Green,

Figura 4.4: A curva C composta por C_1 e C_2 .



Fonte: (THOMAS et al., 2005)

Conforme ilustrado na Figura 4.4, a curva C é composta por duas partes orientadas, C_1 e C_2 , definidas pelos gráficos $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, respectivamente. Usando x como parâmetro, obtemos uma parametrização de C_1 , dada por

$$C_1 : \vec{r}_1(x) = (x, f_1(x)), \quad x \in [a, b].$$

Para a curva C_2 não podemos proceder da mesma forma, pois o sentido positivo determinado pelos valores crescentes de x em $[a, b]$ nos dá a orientação sobre a curva C_2 , no sentido oposto ao desejado. Podemos, porém, parametrizar $-C_2$.

$$-C_2 : \vec{r}_2(x) = (x, f_2(x)), \quad x \in [a, b].$$

Para qualquer x entre a e b , podemos calcular a integral de $\frac{\partial M}{\partial y}$ em relação a y como:

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)).$$

Podemos então integrar essa última em relação a x de a a b :

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx = \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx \quad (4.2)$$

$$= - \int_b^a M(x, f_2(x)) dx - \int_a^b M(x, f_1(x)) dx \quad (4.3)$$

$$= - \int_{C_2} M dx - \int_{C_1} M dx \quad (4.4)$$

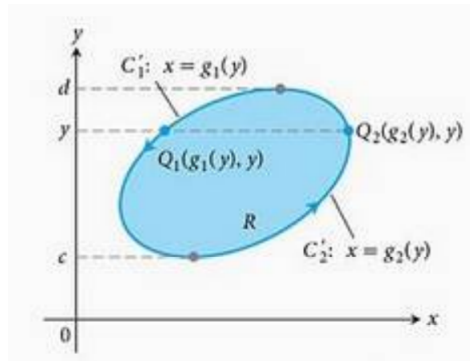
$$= - \oint_C M dx. \quad (4.5)$$

Portanto,

$$\oint_C M dx = \iint_R \left(- \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.6)$$

A Equação (4.6) é metade do resultado de que precisamos para a Equação (4.1). Deduzimos a outra metade integrando $\frac{\partial N}{\partial x}$ primeiro em relação a x e depois em relação a y , como sugerido pela Figura 4.5.

Figura 4.5: A curva C composta por C'_1 e C'_2 , com gráficos $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$.



Fonte: (THOMAS et al., 2005)

$$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \int_c^d [N(g_2(y), y) - N(g_1(y), y)] dy. \quad (4.7)$$

$$= \int_c^d N(g_2(y), y) dy + \int_d^c N(g_1(y), y) dy$$

$$= \int_{C'_2} N dy + \int_{C'_1} N dy.$$

Isso mostra a curva C decomposta em duas partes orientadas $C'_1 : x = g_1(y), d \geq y \geq c$ e $C'_2 : x = g_2(y), c \leq y \leq d$. O resultado dessa integração dupla é

$$\oint_C N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy. \quad (4.8)$$

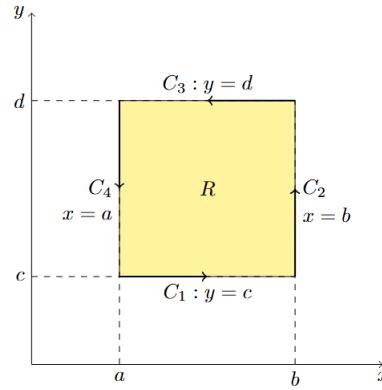
Combinando as equações (4.6) e (4.8) temos a Equação (4.1). Isso conclui a prova.

4.2 Demonstração Geral

Nesta seção, apresentaremos inicialmente a demonstração do Teorema de Green para Regiões Gerais. O argumento que acabamos de apresentar não se aplica diretamente à região retangular na Figura 4.6 porque as retas $x = a, x = b, y = c$ e $y = d$ encontram-se com a fronteira dela em mais de dois pontos. Se dividirmos a fronteira C em quatro segmentos de reta orientados, contudo,

$$\begin{aligned} C_1 : y = c, \quad a \leq x \leq b, \quad C_2 : x = b, \quad c \leq y \leq d \\ C_3 : y = d, \quad a \leq x \leq b, \quad C_4 : x = a, \quad c \leq y \leq d \end{aligned}$$

Figura 4.6: Retângulo dividido em 4 curvas.



Fonte: Produzida pelo autor

podemos modificar o argumento da maneira a seguir.

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \int_c^d (N(b, y) - N(a, y)) dy \quad (4.9)$$

$$= \int_c^d N(b, y) dy + \int_c^d N(a, y) dy \quad (4.10)$$

$$= \int_{C_2} N dy + \int_{C_4} N dy. \quad (4.11)$$

Como y é constante ao longo de C_1 e C_3 , $\int_{C_1} N dy = \int_{C_3} N dy = 0$, assim podemos adicionar $\int_{C_1} N dy = \int_{C_3} N dy$ no lado direito da Equação (4.9) sem alterar a igualdade. Fazendo isso, temos

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \oint_C N dy. \quad (4.12)$$

De maneira similar, podemos mostrar que

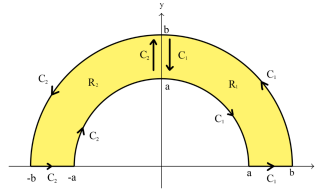
$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial M}{\partial y} dy dx = - \oint_C M dx. \quad (4.13)$$

Subtraindo a Equação (4.12) da Equação (4.13), novamente chegamos a

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.14)$$

Também se aplica à região R em forma de ferradura mostrada na Figura 4.7, como vemos ao juntar as regiões R_1 e R_2 e suas fronteiras. O teorema de Green se aplica a C_1, R_1, C_2, R_2 , resultando em

Figura 4.7: Arco Orientado



Fonte: Produzida pelo autor

$$\oint_{C_1} M dx + N dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4.15)$$

$$\oint_{C_2} M dx + N dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4.16)$$

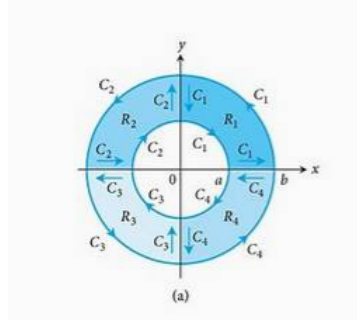
Quando somamos ambos os lados dessas equações, a integral de linha ao longo do eixo y de b a a para C_1 cancela a integral sobre o mesmo segmento, mas em sentido oposto sobre C_2 . Assim,

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.17)$$

O artifício de somar integrais de linha sobre fronteiras separadas para construir uma integral sobre uma fronteira única pode ser empregado para qualquer número finito de sub-

regiões. Na Figura 4.8, seja C_i a fronteira, orientada no sentido anti-horário, da região R_i no primeiro quadrante. De maneira similar, para os três outros quadrantes, C_i é a fronteira da região R_i , $i = 2, 3, 4$. Pelo Teorema de Green,

Figura 4.8: Retângulo dividido em 4 curvas.



Fonte: (THOMAS et al., 2005)

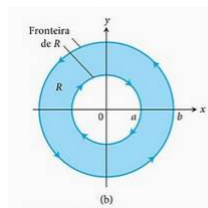
$$\oint_{C_i} Mdx + Ndy = \iint_{R_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4.18)$$

Somamos a Equação (4.18) para $i = 1, 2, 3, 4$ e obtemos

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_{U_R} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.19)$$

A Equação (4.19) diz que a integral dupla de $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ sobre a região anular R é igual à integral de linha de $Mdx + Ndy$ sobre a fronteira completa de R no sentido que mantém R à esquerda à medida que percorremos a curva (Figura 4.9).

Figura 4.9: Região anular R .



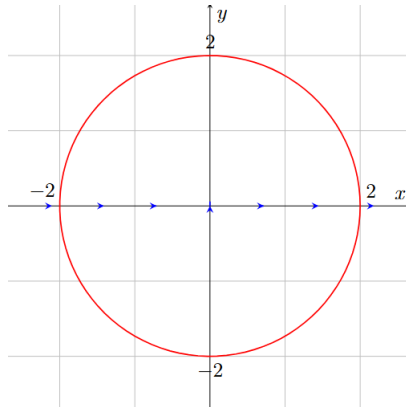
Fonte: (THOMAS et al., 2005)

4.3 Aplicações

4.3.1 Trabalho realizado pela força $\vec{F}$

Determine o trabalho realizado pelo campo de força dado pela função vetorial $\vec{F}$ em relação a uma partícula, que percorre uma vez o círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$ no sentido anti-horário, sendo $\vec{F}(x, y) = (\sin(x^2))\hat{i} + (\ln(1 + y^2))\hat{j}$.

Figura 4.10: Gráfico da Curva orientada



Fonte: Produzida pelo autor

Demonstração. Sendo assim, temos que encontrar W :

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

Como $\vec{F}(x, y) = (\sin x^2)\hat{i} + [\ln(1 + y^2)]\hat{j}$, temos:

$$F_1(x, y) = \sin(x^2), \quad F_2(x, y) = \ln(1 + y^2).$$

Fazendo as derivadas parciais:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0.$$

Portanto:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0.$$

Logo, o trabalho realizado pelo campo de força é:

$$W = 0.$$

□

4.3.2 Cálculo de Área

Segundo (MAGALHÃES, 2018) Não existe uma relação clara entre a área e o perímetro de uma figura plana. Existem figuras com perímetros grandes e áreas pequenas. Já as figuras de áreas grandes não podem ter perímetros muito pequenos.

A esse respeito, é bem famoso o problema de Dido: determinar a figura de maior área que pode ser obtida a partir de um perímetro de comprimento constante. Intuitivamente, a solução deve ser um círculo. Mas resolver matematicamente o problema é bem mais delicado.

O Teorema de Green estabelece uma relação clara entre a área e uma integral de linha sobre o bordo da figura.

Isso porque o teorema vale para qualquer campo de classe C^1 , e existem campos $F = (L, M)$ para os quais $M_x - L_y = 1$. Por exemplo, escolhendo o campo $L(x, y) = -y$ e $M(x, y) = 0$, segue-se que, se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio simples, então

$$\oint_{\partial D} -y \, dx = \oint_{\partial D} y \, dx + 0 \, dy = \iint_D [(0)_x - (-y)_y] \, dx \, dy = \iint_D dx \, dy \quad (4.20)$$

em que o lado direito é a área de D . Analogamente, escolhendo $L(x, y) = 0$ e $M(x, y) = x$, segue-se que, se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio simples, então

$$\oint_{\partial D} x \, dy = \iint_D [(x)_x - (0)_y] \, dx \, dy = \iint_D dx \, dy \quad (4.21)$$

em que o lado direito é novamente a área de D . Pode-se ainda somar as duas últimas igualdades e dividir por dois para obter que

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial D} -y \, dx + x \, dy = \frac{1}{2} \iint_D [(x)_x - (-y)_y] \, dx \, dy = \iint_D dx \, dy \quad (4.22)$$

Isso mostra que a área pode ser calculada de três maneiras diferentes e, dependendo do caso, uma maneira pode ser mais fácil do que a outra.

Com base na aplicação de (LIMA, 2016):

Exemplo 4.2. Aplique o Teorema de Green para calcular a área da região limitada pelo círculo positivamente orientado e parametrizado pelo caminho $\gamma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por:

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Demonstração. Usando a Fórmula do Teorema de Green:

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt, \quad (4.23)$$

para o cálculo de áreas, temos:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(r \cos t)(r \cos t) + (r \sin t)(r \sin t)] dt.$$

Como

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

segue que:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 dt = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi = \pi r^2. \quad (4.24)$$

Portanto, a área da região limitada pelo círculo é πr^2 .

□

4.3.3 Momento de Inércia

Apresentaremos uma das aplicações de (BANDEIRA, 2016).

Seja Ω uma lâmina com densidade de massa constante λ na forma de uma região de Jordan figura 4.11 com fronteira C suave por partes. Mostraremos que os momentos de inércia da lâmina em torno dos eixos coordenados x e y são dados por:

$$I_x = -\frac{\lambda}{3} \oint_C y^3 dx, \quad I_y = \frac{\lambda}{3} \oint_C x^3 dy.$$

Temos da definição de I_x :

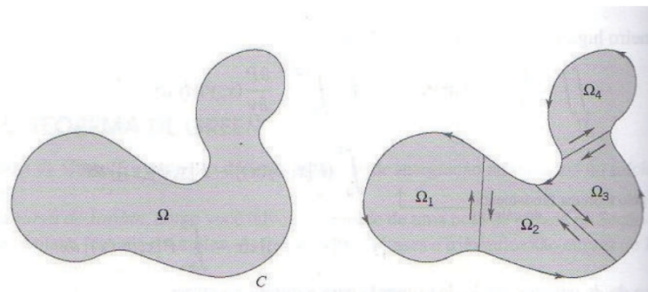
$$I_x = \int_D y^2 \rho(x, y) dA = \int_D \lambda y^2 dA = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde:

$$P(x, y) = -\frac{\lambda y^3}{3} \quad \text{e} \quad Q(x, y) = 0.$$

De acordo com (SALAS, 2005) em uma Região de Jordan. A soma das integrais duplas sobre os Ω_i é a integral dupla sobre Ω e, como as integrais de linha ao longo dos cortes se cancelam, a soma das integrais ao longo das fronteiras de Ω_i é a integral de linha ao longo de C . Ilustrando a figura 4.11.

Figura 4.11: Gráfico da Curva orientada



Fonte: (SALAS, 2005)

Pelo Teorema de Green:

$$I_x = \int_C \frac{\lambda y^3}{3} dx + 0 dy = -\frac{\lambda}{3} \int_C y^3 dx.$$

Por outro lado, temos:

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA = \int_D \lambda x^2 dA = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde:

$$Q(x, y) = \frac{\lambda x^3}{3} \quad \text{e} \quad P(x, y) = 0.$$

E, pelo Teorema de Green:

$$I_y = \int_C \frac{\lambda x^3}{3} dy + 0 dx = \frac{\lambda}{3} \int_C x^3 dy.$$

Conclusão

O Teorema de Green é uma ferramenta essencial no cálculo vetorial, estabelecendo uma relação fundamental entre integrais de linha e integrais duplas. Ao longo deste trabalho, foram exploradas suas demonstrações e aplicações, evidenciando sua importância na simplificação de cálculos complexos, especialmente na análise de fluxos e propriedades geométricas de superfícies.

A relevância desse teorema se estende a diversas áreas da ciência e engenharia. No campo do **eletromagnetismo**, por exemplo, o Teorema de Green é essencial para a formulação das **equações de Maxwell**, facilitando a conversão entre representações diferenciais e integrais dos campos elétrico e magnético. Como discutido por (SILVA, 2003), a evolução dos conceitos físicos, especialmente no contexto da mecânica e do eletromagnetismo, se beneficiou diretamente das formulações matemáticas baseadas nesse teorema. Além disso, na **hidrodinâmica**, o Teorema de Green é amplamente utilizado na modelagem de escoamentos, contribuindo para a previsão do comportamento de fluidos em sistemas fechados.

Outro campo de aplicação relevante é a **engenharia estrutural**, onde o Teorema de Green auxilia na análise de tensões e deformações em materiais, fornecendo suporte teórico para métodos como o **Método dos Elementos Finitos (MEF)**. A **Universidade Federal do Cariri (UFCA)**, em seus programas de ensino e pesquisa em **Engenharia de Materiais**, destaca a importância do cálculo diferencial e integral na formulação e solução de problemas aplicados à resistência de materiais e à modelagem computacional de estruturas complexas (CARIRI, 2024).

Além disso, o Teorema de Green também encontra aplicações inovadoras na **computação gráfica**, sendo utilizado em algoritmos de renderização e modelagem de superfícies. Métodos baseados em integrais de linha e fluxos vetoriais são empregados para calcular iluminação realista e interações físicas em ambientes tridimensionais. Essa aplicabilidade reforça a versatilidade do teorema em diferentes contextos tecnológicos.

Dessa forma, além de seu impacto direto no cálculo matemático, o Teorema de Green continua sendo uma ferramenta poderosa e indispensável para diversas áreas do conhecimento. Seu estudo não apenas aprimora a compreensão teórica, mas também permite a resolução de problemas práticos complexos, contribuindo para o avanço de áreas como a engenharia, a física aplicada e a computação.

Referências Bibliográficas

- BANDEIRA, R. d. S. *Teorema de Green e aplicações*. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Monteiro, 2016. Disponível em: <<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/13904>>.
- CANNELL, D. M.; LORD, N. J. George green, mathematician and physicist 1793–1841. *The Mathematical Gazette*, Cambridge University Press, v. 77, n. 478, p. 26–51, 1993.
- CARIRI, U. F. D. *Engenharia de Materiais*. 2024. Acesso em: 15 fev. 2025. Disponível em: <<https://www.ufca.edu.br/cursos/graduacao/engenharia-de-materiais/>>.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo: Volume 3*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019. ISBN 978-85-216-3545-1.
- LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 2*. 3. ed. São Paulo, Brasil: Editora Harbra Ltda, 1994. Tradução de *The Calculus with Analytic Geometry*, 6th edition, HarperCollins Publishers.
- LIMA, R. K. Teorema de green e aplicações. Universidade Federal de Campina Grande, 2016.
- MAGALHÃES, C. A. *Navegue por belas paisagens do Cálculo: Volume III*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2018. Disponível em: <<https://livros.unb.br/index.php/portal/catalog/book/41>>. ISBN 978-85-230-1012-6. Disponível em: <<https://livros.unb.br/index.php/portal/catalog/book/41>>.
- MELCHIORS, A. História do cálculo diferencial e integral. *Maiêutica. Ensino de Física e Matemática*, v. 1, n. 1, 2013.
- SALAS, S. L. *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 2005.
- SILVA, C. C. *Da Força ao Tensor: Evolução do Conceito Físico*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2003. Disponível em: <<https://www.ghc.usp.br/server/Teses/Cibelle-Celestino-Silva-DR.pdf>>.
- STEWART, J. *Cálculo, Volume II*. 5. ed. São Paulo, Brasil: Cengage Learning, 2009.
- THOMAS, G. B. et al. *Cálculo, Volume 2*. 11. ed. Boston: Addison Wesley, 2005. ISBN 978-0-321-22651-8.