

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Curso de Especialização em Matemática

Introdução a teoria das Matroides e aplicações

por

Josielly Pereira Alves Rocha

Goiânia
2024



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Josielly Pereira Alves Rocha

Matrícula: 20192011160249

Título do Trabalho: Introdução à teoria das Matroides.

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia
Local

06 /12 /2024.
Data

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Josielly Pereira Alves Rocha

Introdução a teoria das Matroides e Aplicações

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação lato sensu em Matemática - Departamento de Áreas Acadêmicas II - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador(a): Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos

Goiânia
2024

R672i Rocha, Josielly Pereira Alves.
Introdução a teoria das matroides e aplicações / Josielly Pereira Alves Rocha. – Goiânia:
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2024.
38 f.

Orientador: Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos.

TCC (Monografia) – Especialização em Matemática, Departamento de Áreas Acadêmicas II,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Matroides. 2. Teoria dos garfos. 3. Matemática. I. Vasconcelos, Eder Salvador de
(orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.
III. Título.

CDD 512.6

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

Uma introdução à teoria das matroides e aplicações

por

Josielly Pereira Alves Rocha

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos

Monografia defendida e aprovada, em 06 de novembro de 2024, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos (Presidente da Banca/ IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Jolivê Mendes de Santana Filho (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Jolive Mendes de Santana Filho, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 06/11/2024 10:30:49.
- Karoline Victor Fernandes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 06/11/2024 10:29:13.
- Jose Eder Salvador de Vasconcelos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 06/11/2024 10:28:32.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 21/10/2024. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 578437
Código de Autenticação: cadb2abf6c



Dedicatória

"Porque dEle, e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém." (Romanos 11:36). Dedico esse trabalho a meu Deus, pois sem Ele, eu não estaria aqui para concluir mais uma etapa acadêmica. Toda honra e toda glória a Ele, que me sustentou em cada momento.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que me concedeu a oportunidade de concluir essa especialização em meio a tantas situações difíceis em que enfrentei ao longo desse ano.

Agradeço à meu esposo por me incentivar e apoiar no meu crescimento acadêmico e profissional. Agradeço aos meus filhos, por despertarem em meu coração o desejo de ser uma pessoa melhor e por fazerem do amor de vocês um bálsamo em meio às lutas. Sou grata também aos meus pais, que foram minha rede de apoio.

Aos professores do corpo docente de Matemática do Instituto Federal de Goiás, Campus Goiânia, expresso meu agradecimento, em especial, ao professor Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos, por sua imensa dedicação.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre a teoria das matroides, abordando as definições básicas e propriedades fundamentais. São desenvolvidos conceitos de independentes e dependentes juntamente com as noções de bases e circuitos, que são elementos essenciais para a compreensão da estrutura de matroides. A representação geométrica das matroides é estudada com base no conceito de posto, que permite uma análise estrutural e visual. Para finalizar o trabalho, são apresentadas aplicações práticas das matroides em áreas como teoria dos grafos, evidenciando sua utilidade em resolver problemas.

Palavras-chave: Matroide; Circuito; Base; Grafo, Dependência.

Abstract

This work presents a study on the theory of matroids, addressing the basic definitions and fundamental properties. Concepts of independent and dependent sets are developed alongside the notions of bases and circuits, which are essential elements for understanding the structure of matroids. The geometric representation of matroids is explored based on the concept of rank, allowing for structural and visual analysis. To conclude the paper, practical applications of matroids are presented in areas such as graph theory, highlighting their usefulness in solving problems.

Keywords: Matroid; Circuit; Basis; Graph; Dependency.

Lista de Figuras

3.1	A Matroide $M(K_4)$ e sua dual $[M(K_4)]^*$	24
3.2	Uma Matroide afim de posto 3.	29
3.3	Representação geométrica de uma Matroide de posto 2.	29

Sumário

1	Introdução	13
2	Revisão da Literatura	15
3	Teoria das Matroides e Aplicações.	17
3.1	Bases, Circuitos, Restrição e Posto	19
3.2	Fecho, Geradores, Duais, Menores e Simplicidade	22
3.3	Representação geométrica de Matroides de posto pequeno	28
3.4	Exemplos importantes	30
4	Aplicações	33
4.1	Maximização de Cobertura de Conjunto	33
4.2	Caminho de Menor Custo em um Grafo	34
4.2.1	Solução via teoria das Matroides	35
	Referências	37

1 Introdução

As primeiras noções sobre Matroides foram introduzidas em 1935 por Hasler Whitney no artigo intitulado "On the abstract properties of linear dependence" (Whitney, 1935), onde ele propôs uma abordagem abstrata para definir dependência e independência em conjuntos. Sua intenção era generalizar a noção de dependência linear, um conceito fundamental em álgebra linear, para um contexto mais amplo, permitindo sua aplicação em áreas diversas, como teoria dos grafos e geometria.

Outros trabalhos pioneiros em teoria dos Matroides incluem o de Garrett Birkhoff (Birkhoff, 1935), intitulado "Abstract linear dependence and lattices", onde são exploradas as conexões entre dependência linear abstrata e a teoria dos reticulados (lattices). Birkhoff investigou como certas estruturas algébricas, como os reticulados, poderiam fornecer uma base para entender melhor as noções de dependência e independência abstratas.

Em 1936, Saunders Mac Lane publicou o artigo "Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry" (MacLane, 1936), no qual ele explora como a dependência linear abstrata pode ser interpretada e compreendida à luz da geometria projetiva. Seu objetivo principal era conectar a dependência linear abstrata, frequentemente estudada em um contexto algébrico, com a intuição geométrica que a geometria projetiva oferece.

Mais tarde, em 1938, Mac Lane publicou outro trabalho significativo, "A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases" (Lane, 1938), no qual ele propõe uma nova abordagem para compreender os graus de transcendência e as p-bases em campos algébricos por meio da teoria dos reticulados. A intenção era fornecer uma estrutura unificadora que pudesse generalizar e aprofundar a compreensão desses conceitos fundamentais em álgebra.

Avançando para os tempos modernos, James Oxley publicou em 2006 o livro "Matroid Theory" (Oxley, 2006), que é uma das referências mais abrangentes na área. Nesse trabalho, ele apresenta definições rigorosas de Matroides, diferentes classificações, e desenvolve conceitos de matroides finitos, Matroides de grafos e Matroides vetoriais, além de abordar teoremas essenciais na construção desses conceitos e suas aplicações. O termo "Matroide", que significa "falsa matriz", reflete a tentativa da teoria de generalizar a noção de dependência linear para um contexto mais

abstrato, envolvendo conjuntos finitos e suas propriedades de interdependência. O foco principal da teoria é estender a dependência linear, tradicionalmente aplicada a vetores em espaços vetoriais, para situações mais amplas.

De fato, num espaço vetorial de dimensão n , a família $\mathcal{I}$ dos conjuntos linearmente independentes satisfaz os axiomas da Definição 3.1, estabelecendo, assim, a teoria das Matroides como uma generalização natural do conceito de dependência linear.

Neste trabalho, apresentaremos a definição de uma Matroide, seus teoremas fundamentais, classificações, exemplos, representação geométrica de alguns casos e suas aplicações em diversas áreas da matemática e ciência da computação.

2 Revisão da Literatura

A partir da disseminação do conceito de Matroides com (Oxley, 2006), a teoria de Matroides continuou a se expandir, com avanços significativos em diversas áreas da matemática, ciência da computação e combinatória.

A teoria de Matroides desempenha um papel fundamental em algoritmos de otimização, especialmente na maximização de funções submodulares. Esses algoritmos têm sido amplamente aplicados em áreas como aprendizado de máquina, ciência de dados e sistemas de recomendação (Fujishige, 2005). O uso de algoritmos ávidos (greedy) em funções submodulares sobre Matroides proporciona garantias de aproximação eficientes, como explorado por (Krause; Singh; Guestrin, 2008).

As conexões entre Matroides e a teoria de grafos foram ampliadas com a aplicação de Matroides em problemas de conectividade, algoritmos de roteamento e análise de redes. Em particular, o estudo de Matroides gráficas e co-grafos permitiu um entendimento mais profundo de problemas em redes e telecomunicações (Oxley, 2006). Além disso, a combinação de conceitos de grafos e matroides tem sido útil em otimização combinatória e design de redes (Tramel; Heath, 2011).

A teoria das representações de Matroides teve avanços notáveis, com trabalhos que investigam a representação de Matroides como subespaços vetoriais e grafos sobre corpos finitos. Essas representações têm implicações diretas em teoria da informação e códigos corretores de erros, como discutido por (Kung, 2009). Novos resultados também foram desenvolvidos na representação de Matroides sobre corpos de característica positiva (Bonin, 2009).

A teoria de Matroides também pode ser aplicada na teoria de jogos cooperativos, onde a estrutura de independência pode ser descrita por uma Matroide. Isso possibilita análises de alocações justas de recursos e otimização em jogos cooperativos (Chalkiadakis; Elkind; Wooldridge, 2011). A estrutura de interdependência entre os jogadores, modelada por Matroides, facilita a análise e a implementação de soluções em problemas de repartição de benefícios em coalizões.

A teoria de Matroides foi aplicada em um campo emergente, a geometria tropical, que é uma área da geometria algébrica combinatória que simplifica problemas geométricos complexos. Matroides tropicais são usados para generalizar conceitos de interseções e convexidade dentro dessa geometria (MacLagan; Sturmfels, 2009). Esses conceitos são fundamentais para o entendimento de variedades tropicais e têm

aplicações em otimização combinatória e teoria de números.

No campo da ciência da computação, as Matroides tem sido usadas em algoritmos de aproximação para resolver problemas de otimização NP-difíceis. Problemas como cobertura de conjunto, roteamento e agendamento de tarefas foram abordados com eficiência por meio do uso de algoritmos baseados em matroides ([Vondrák, 2008](#)). A estrutura da Matroide ajuda a formular esses problemas de maneira que permitam soluções mais eficientes com garantias de aproximação.

Pesquisas recentes focaram em extensões da teoria das Matroides, como Matroides orientados e Matroides coxeterianos. Essas novas variantes incorporam mais estrutura e simetria, oferecendo uma visão mais rica das interações entre dependência e independência em vários contextos ([Fink, 2011](#)). Elas têm sido particularmente úteis em teorias de grupos e representações, além de topologia algébrica.

A teoria de Matroides foi aplicada em redes de sensores sem fio, onde sua estrutura de independência é utilizada para modelar a cobertura e conectividade dessas redes ([Wang et al., 2008](#)). Na teoria da informação, Matroides são empregados para modelar problemas de compressão de dados e transmissão eficiente em redes distribuídas ([Jaimes; Caceres; Garcia, 2015](#)). Esses avanços têm melhorado a eficiência de algoritmos e técnicas para redes de sensores e sistemas de comunicação.

O estudo de classes especiais, como Matroides regulares, Matroides binárias e Matroides gráficas, avançou significativamente. Essas classes têm sido fundamentais no desenvolvimento de novos algoritmos para problemas específicos de combinatória, como discutido por ([Aigner; Ziegler, 2009](#)). Eles também desempenham um papel importante na análise de problemas de otimização combinatória e programação linear.

A relação entre Matroides e programação linear foi explorada em maior profundidade, com resultados mostrando que muitos problemas de programação linear podem ser modelados ou resolvidos mais eficientemente usando propriedades de matroides ([Schrijver, 2012](#)). Essa conexão tem permitido que Matroides sejam aplicados em novas áreas da otimização e da pesquisa operacional.

3 Teoria das Matroides e Aplicações.

Neste capítulo apresentaremos as noções básicas referentes a teoria das Matroides, além dos conceitos necessários para o bom entendimento do capítulo seguinte.

As notações utilizadas aqui são, basicamente, as mesmas utilizadas em [Oxley \(2006\)](#). Se E é um conjunto finito, denotaremos por 2^E sua coleção de subconjuntos e por $|E|$ sua cardinalidade. O conjunto dos números inteiros, números inteiros positivos, números racionais, números reais e números complexos serão denotados por $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, respectivamente. Se X e Y são conjuntos, então $X - Y$ denotará o conjunto $\{x \in X : x \notin Y\}$.

Definição 3.1. Uma *Matroide* $\mathbf{M}$ é um par ordenado $(E, \mathcal{I})$ consistindo de um conjunto finito E e uma coleção $\mathcal{I}$ de subconjuntos de E satisfazendo os seguintes axiomas:

- I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$;
- I2) Se $I \in \mathcal{I}$ e $\tilde{I} \subseteq I$, então $\tilde{I} \in \mathcal{I}$;
- I3) Se X e Y estão em $\mathcal{I}$ com $|X| < |Y|$, então existe um elemento a de $Y - X$ tal que $X \cup a \in \mathcal{I}$.

Exemplo 3.2. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e o conjunto de vetores:

$$S = \{v_1, v_2, v_3\}$$

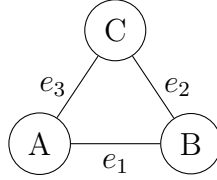
onde:

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 0)$$

Se M é uma Matroide $(E, \mathcal{I})$, então M é chamada de Matroide em E . Os membros de $\mathcal{I}$, também denotado por $\mathcal{I}(M)$, são os **independentes** de M , os subconjuntos de E que não estão em $\mathcal{I}(M)$ são ditos os **dependentes** de M . Em especial, os **independentes maximais** e **dependentes minimais** de M (em relação a inclusão de conjuntos) serão chamados **bases** e **circuitos**, respectivamente. O conjunto E como na definição acima é chamado o **conjunto básico** de M . Em geral, dada uma Matroide M denotaremos seu conjunto básico por $E(M)$. Denotaremos a família dos circuitos de M por $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}(M)$, a família dos dependentes de M por $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}(M)$ e a família das bases de M por $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}(M)$.

Além da axiomatização de Matroides, dada na Definição 3.1, podemos definir uma Matroide através da sua coleção de circuitos ou através da sua coleção de bases.

Exemplo 3.3. Considere o grafo abaixo:



Aqui:

- $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ (conjunto de arestas).
- $\mathcal{I}$ é o conjunto de subconjuntos de E que não contêm ciclos:

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}\}.$$

Esse é um exemplo de Matroide gráfico, onde os conjuntos independentes correspondem a conjuntos de arestas sem ciclos (*florestas* do grafo).

Observação 3.4. (i) Um circuito constituído por um único elemento é dito um laço .

(ii) Um circuito contendo três elementos é dito um triângulo .

Observe que a é um laço se, e somente se, a não está contido em nenhum conjunto independente.

A família dos subconjuntos linearmente independentes do espaço vetorial K^n , onde K é um corpo finito, satisfaz os axiomas da definição de Matroide.

Proposição 3.5. *Seja K um corpo finito. A família $\mathcal{I}$ dos subconjuntos linearmente independentes (L.I.) em K^n satisfaz os axiomas da Definição 3.1. Isto é, o par $(K^n, \mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I}$ é a família dos subconjuntos L.I. em K^n é uma Matroide.*

Demonstração. Inicialmente note que $\emptyset \in \mathcal{I}$, desde que $\emptyset$ é uma base do subespaço nulo de K^n .

Agora, seja X um subconjunto L.I. de K^n . Se $Y \subseteq X$, então Y é também L.I. em K^n . Com efeito, se não existiria $v \in Y$ gerado pelos demais elementos de Y . E, como $Y \subseteq X$ isso valeria também em X . Ou seja, se $X \in \mathcal{I}$ e $Y \subseteq X$, então $Y \in \mathcal{I}$.

Finalmente, observe que se X e Y são L.I. em K^n com $|X| < |Y|$, então deve haver $u \in Y$ tal que $u \notin \langle X \rangle$. Do contrário, $\langle Y \rangle \subseteq \langle X \rangle$, um absurdo visto que uma base de $\langle Y \rangle$ deve ter, pelo menos, $|Y|$ elementos. Logo $u \cup X$ é L.I. em K^n . Isto é, se $X, Y \in \mathcal{I}$ e $|X| < |Y|$, então existe $u \in Y - X$ tal que $X \cup u \in \mathcal{I}$. $\square$

Sejam M e N Matroides, uma bijeção $\varphi : E(M) \rightarrow E(N)$ é um isomorfismo entre os Matroides M e N quando $X \subseteq E(M)$ é independente em M se, e somente se, $\varphi(X) \subseteq E(N)$ é independente em N . Quando existe um isomorfismo entre M e N , dizemos que M e N são isomorfas e escrevemos $M \cong N$.

3.1 BASES, CIRCUITOS, RESTRIÇÃO E POSTO

Nesta seção consideraremos formas alternativas para definir Matroides através das suas famílias de bases, circuitos ou através do seu posto. A partir de agora, quando não especificarmos G representará um grafo e M uma Matroide.

O próximo resultado fornece uma axiomatização de Matroides através da sua família de circuitos. A partir dele poderíamos definir uma Matroide como sendo o par $(E, \mathcal{C})$ onde E é um conjunto e $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de E satisfazendo o Teorema 3.6. Uma demonstração para esse resultado (Teorema 3.6) pode ser vista em [Oxley \(2006\)](#).

Teorema 3.6. *A coleção $\mathcal{C}$ dos circuitos de uma Matroide M tem as seguintes propriedades:*

$$C_1) \quad \emptyset \notin \mathcal{C};$$

$$C_2) \quad \text{Se } C_1, C_2 \in \mathcal{C} \text{ e } C_1 \subseteq C_2, \text{ então } C_1 = C_2;$$

$$C_3) \quad \text{Se } C_1, C_2 \in \mathcal{C}, \text{ com } C_1 \neq C_2 \text{ e } a \in C_1 \cap C_2, \text{ então existe } C_3 \in \mathcal{C} \text{ tal que } C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - a.$$

Reciprocamente, se existe um conjunto E e uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de E satisfazendo os axiomas acima, então existe uma única Matroide M com conjunto básico E e família de circuitos $\mathcal{C}$. Esse Matroide terá a seguinte família de independentes:

$$\{I \subseteq E : \text{não existe } C \in \mathcal{C} \text{ com } C \subseteq I\}.$$

O próximo resultado caracteriza Matroides em termos da sua coleção de bases. A prova pode ser vista em [Oxley \(2006\)](#)

Teorema 3.7. *Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos de um conjunto finito E . Então $\mathcal{B}$ é a coleção de bases de uma Matroide em E se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

B_1) $\mathcal{B}$ é não-vazio;

B_2) Se B_1 e B_2 são membros de $\mathcal{B}$ e $x \in B_1 - B_2$, então existe um elemento $y \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

□

Corolário 3.8. *Seja B uma base de uma Matroide M . Se $f \in E(M) - B$, então $B \cup f$ contém um único circuito, $C(B, f)$. Além disso, $f \in C(B, f)$.*

Chamaremos $C(B, f)$ o *circuito fundamental* de f com respeito a B .

Segue imediatamente do item I3) da Definição 3.1 que, assim como em espaços vetoriais, todas as bases de uma Matroide M tem a mesma cardinalidade, isto é **são equicardinais**.

Definição 3.9. A cardinalidade de uma base de M é chamada o **posto** de M e será denotado por $r(M)$.

Definição 3.10. Dado um subconjunto $X \subseteq E$ podemos definir uma estrutura de Matroide com conjunto básico X e cuja família de independentes é constituída pelos independentes de M que estão contidos em X ($\mathcal{I} \cap 2^X$). Essa Matroide é chamada a **restrição** de M a X e denotada por $M|X$.

As Definições 3.9 e 3.10 permitem definir a seguinte função, chamada **função posto** de M :

$$r_M : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_+$$

$$X \mapsto r_M(X) := r(M|X)$$

Esta função está bem definida, visto que o posto existe e é único, e quando não houver risco de confusão será denotada simplesmente por r .

Segue da equicardinalidade das bases em $M|X$ que o conjunto dos independentes maximais contidos em X , que coincide com $\mathcal{B}(M|X)$, tem elementos equicardinais e a cardinalidade desses elementos coincidem com $r(X)$. Algumas vezes dizemos que um independente maximal contido em X é uma base de X .

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser vista em [Oxley \(2006\)](#), fornece uma axiomatização de Matroides através da função posto definida acima.

Teorema 3.11. *Uma função $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ é a função posto de uma Matroide M com conjunto básico E se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:*

$$P1) \ 0 \leq r(X) \leq |X|$$

$$P2) \ \text{Se } X \subseteq Y \subseteq E, \text{ então } r(X) \leq r(Y)$$

$$P3) \ \text{Para todos } X, Y \subseteq E, \ r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$$

□

Observe que os independentes dessa Matroide serão aqueles conjuntos $I \subset E$ tais que $r(I) = |I|$.

Exemplo 3.12. Considere o conjunto base $E = \{a, b, c, d\}$.

BASES

As **bases** são os conjuntos independentes máximos:

$$\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}.$$

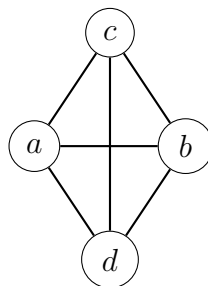
CIRCUITOS

Os **circuitos** são os conjuntos dependentes mínimos:

$$\mathcal{C} = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}.$$

VISUALIZAÇÃO

Abaixo, mostramos os elementos do matroide e suas relações:



3.2 FECHO, GERADORES, DUAIS, MENORES E SIMPLICIDADE

Se M é uma Matroide e $X \subseteq E(M)$, chamamos o conjunto

$$cl(X) = \{x \in E(M) : r(x \cup X) = r(X)\}$$

de **fecho** ou **gerado** de X em M . Se $cl(X) = X$ dizemos que X é um subconjunto fechado de M . A família dos conjuntos fechados de M será denotada por $\mathcal{F}$. Se $Y \subseteq cl(X)$ dizemos que Y é gerado por X e que X é um gerador de Y . Quando um conjunto X gera $E(M)$ dizemos que X gera M , neste caso $cl(X) = E(M)$. O conjunto dos geradores de M será denotado por $\mathcal{S}$.

Observação 3.13. Um subconjunto fechado de posto 2 é dito uma linha.

Os resultados a seguir listam propriedades importantes do fecho de um conjunto X numa Matroide M .

Teorema 3.14. *Se M é uma Matroide, para todos os subconjuntos $X, Y \subseteq E(M)$:*

- F1) $X \subseteq cl(X)$;*
- F2) Se $X \subseteq Y$, então $cl(X) \subseteq cl(Y)$;*
- F3) $cl(cl(X)) = cl(X)$; em particular, $cl(X) \in \mathcal{F}$.*

□

Teorema 3.15. *Para todos os subconjuntos $X, Y \subseteq E$:*

- i) Se $X, Y \in \mathcal{F}$, então $X \cap Y \in \mathcal{F}$;*
- ii) $cl(X) = \bigcap_{X \subseteq F \in \mathcal{F}} F$; em particular, $cl(X) \in \mathcal{F}$;*
- iii) $r(cl(X)) = r(X)$;*
- iv) Se $e \in cl(X)$ e $f \in cl(X \cup e)$ então $f \in cl(X)$;*
- v) $e \in cl(X)$ se, e somente se, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $e \in C \subseteq X \cup e$.*

□

Uma das principais estruturas na teoria de Matroides é a **dual**. Diferentemente do que ocorre com os grafos, em que nem todo grafo possui um dual, toda Matroide possui um dual.

Teorema 3.16. *Seja $\mathcal{B}$ a família de bases de uma Matroide M sobre E , então*

$$B^* = \{E - B : B \in \mathcal{B}\}$$

é a família de bases de uma Matroide M^ sobre E , chamada Matroide **dual** de M .*

A figura 3.1 representa uma Matroide e sua dual. Elas estão representadas geometricamente. Na Seção 3.3 mais a frente, mostraremos como uma Matroide pode ser representada geometricamente.

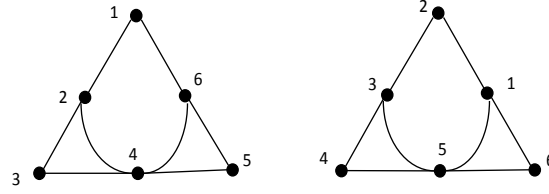


Figura 3.1: A Matroide $M(K_4)$ e sua dual $[M(K_4)]^*$

Por definição, uma Matroide M e sua dual M^* estão relacionadas por

$$(M^*)^* = M.$$

Ao se referir a algum elemento de uma Matroide dual, utilizamos o prefixo “co”. Assim, os independentes, bases, circuitos, laços, fechados, a função posto, etc, da Matroide M^* são denominados coindependentes, cobases, cocircuitos, colaços, cofechados, função coposto, etc, de M . Finalmente, diremos que uma Matroide é auto-dual se $M^* = M$.

O resultado a seguir estabelece uma relação entre os circuitos e os cocircuitos de uma Matroide.

Teorema 3.17 (ortogonalidade). *Se M é uma Matroide, C é um circuito e C^* um cocircuito de M . Então $|C \cap C^*| \neq 1$.*

□

O próximo resultado estende o Teorema 3.17 e dá uma caracterização para o conjunto de circuitos de uma Matroide. A demonstração de ambos pode ser vista em [Oxley \(2006\)](#).

Proposição 3.18. *Um subconjunto $D \subseteq E$ é um circuito de M se, e somente se, D é minimal não-vazio com a seguinte propriedade: $|D \cap C^*| \neq 1$ para todo cocircuito C^* de M .*

□

Agora definiremos algumas das principais estruturas para o nosso estudo, as quais nos remeteremos inúmeras vezes, as deleções e contrações.

Definição 3.19. Seja $T \subseteq E$. Definimos a deleção de T em M por $M|(E - T)$, e denotamos $M \setminus T$. Definimos também a contração de T em M por $(M^* \setminus T)^*$ e denotamos por M/T . Também denotamos $M/(E - T)$ por $M \cdot T$.

O Teorema a seguir traz algumas propriedades das deleções e contrações em uma Matroide.

Proposição 3.20. *Sejam M uma Matroide e $E(M)$ o conjunto básico de M . Se X e Y são subconjuntos disjuntos de $E(M)$, então:*

- i) $(M \setminus X) \setminus Y = M \setminus (X \cup Y) = (M \setminus Y) \setminus X;$
- ii) $(M/X)/Y = M/(X \cup Y) = (M/Y)/X;$
- iii) $M \setminus X/Y = M/Y \setminus X;$ □

A próxima definição merece atenção especial, pois faz referência a uma das principais estruturas em uma Matroide e fundamental também no nosso estudo, os menores.

Definição 3.21. Sejam M uma Matroide e $X, Y \subseteq E(M)$, com $X \cap Y = \emptyset$. Uma Matroide do tipo $M \setminus X/Y$ é dita um **menor** de M .

Os menores são estruturas fundamentais em uma Matroide. Tais estruturas foram introduzidas por Tutte no artigo “A homotopy theorem for matroids I” [Tutte \(1958\)](#), e alguns dos mais celebres resultados para Matroides fazem referência aos menores.

O próximo resultado caracteriza as famílias de independentes, dependentes, bases, circuitos, fecho e da função posto das contrações de uma Matroide.

Teorema 3.22. *Os independentes, dependentes e circuitos de $M \setminus T$ são respectivamente os independentes, dependentes e os circuitos de M que evitam T ,*

$$r_{M \setminus T} = r_M|_{2(E-T)},$$

$$cl_{M \setminus T} : X \longrightarrow cl(X) - T,$$

e os geradores de $M \setminus T$ são os subconjuntos de $E - T$ que geram $E - T$ em M . □

A seguir mostraremos como obter as famílias de independentes, bases, circuitos e a função posto das contrações de uma Matroide a partir das famílias de independentes, bases, circuitos e da função posto da própria Matroide.

Teorema 3.23. *Sejam M uma Matroide, $T \subseteq E(M)$ e B_T uma base de $M|T$, então:*

i) *Se $X \subseteq E(M)$, $r_{(M/T)}(X) = r(X \cup T) - r(T)$;*

ii) *Seja $\mathcal{I}_{M/T}$ a família de independentes de M/T . Então,*

$$\mathcal{I}_{(M/T)} = \{I \subseteq E-T; I \cup B_T \in \mathcal{I}\} = \{I \subseteq E-T; \text{ existe } B \in \mathcal{B}_{(M|T)} \text{ com } B \cup I \in \mathcal{I}\}.$$

iii) *Seja $\mathcal{B}_{(M/T)}$ a família de bases de M/T . Então,*

$$\mathcal{B}_{(M/T)} = \{B \subseteq E-T; B \cup B_T \in \mathcal{B}\} = \{B \subseteq E-T; \text{ existe } B' \in \mathcal{B}_{(M|T)} \text{ com } B \cup B' \in \mathcal{B}\}$$

iv) *A família de circuitos de M/T , $\mathcal{C}_{(M/T)}$, é a coleção dos membros minimais e não vazios de $\{C - T : C \in \mathcal{C}(M)\}$;*

v) *Se $C \in \mathcal{C}(M)$, então $C - T$ é a união dos circuitos de M/T .* □

Corolário 3.24. *Se M é uma Matroide e $f \in E(M)$ então $r(M/f) = r(M) - 1$, a menos que f seja um laço. E, se f não é um colaço, $r(M \setminus f) = r(M)$.*

□

Definição 3.25. Quando $H \subseteq E(M)$ é fechado e $r(H) = r(M) - 1$ dizemos que H é um **hiperplano** de M . O conjunto dos hiperplanos de M será denotado por $\mathcal{H}$.

O teorema seguinte caracteriza as famílias de cocircuitos e a função coposto de uma Matroide.

Teorema 3.26. *Valem as seguintes propriedades para as famílias de cocircuitos e a função coposto:*

(i) $\mathcal{I}^* = \{E - S : S \in \mathcal{S}\};$

(ii) $\mathcal{C}^* = \{E - H : H \in \mathcal{H}\};$

(iii) $r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X).$ □

O próximo resultado é importante para o nosso estudo, visto que estamos tentando determinar o número de cocircuitos disjuntos em uma Matroide. Como corolário dele, obtemos que uma Matroide de posto k pode ter, no máximo, k cocircuitos disjuntos.

Lema 3.27. *Seja M uma Matroide com conjunto básico E e C^* um cocircuito de M . Então $r(M \setminus C) = r(M) - 1$.*

Demonstração. Seja M uma Matroide e C^* um cocircuito de M , temos

$$M \setminus C^* = M|(E - C) \Rightarrow r(M \setminus C^*) = r_M(E - C^*).$$

como C^* é um cocircuito, $E - C^*$ é um hiperplano de M . Assim,

$$r_M(E - C^*) = r(M) - 1.$$

e, portanto

$$r(M \setminus C^*) = r(M) - 1.$$

□

Teorema 3.28. *As seguintes afirmações são verdadeiras a respeito de uma Matroide M :*

- 1) $C^*(M \setminus T)$ é o conjunto dos membros minimais não vazios de $\{C^* - T \subseteq E - T : C^* \in \mathcal{C}^*(M)\}$;
- 2) $C^*(M/T) = \{C^* \subseteq E - T : C^* \in \mathcal{C}^*(M)\}$;
- 3) $\mathcal{H}(M \setminus T)$ é o conjunto dos subconjuntos próprios maximais de $E - T$ da forma $H - T$, onde $H \in \mathcal{H}$;
- 4) $\mathcal{H}(M/T) = \{X \subseteq E - T : X \cup T \in \mathcal{H}(M)\}$.

□

Definição 3.29. Seja M uma Matroide, dizemos que dois elementos $x, y \in E(M)$ estão em **paralelo** (são paralelos) quando $\{x, y\}$ é um circuito em M . Dizemos que $\emptyset \neq X \subseteq E(M)$ é uma **classe em paralelo** de M , se X é maximal com a propriedade que cada dois elementos distintos de X estão em paralelo em M . Definimos, ainda, uma **classe em série** de M como sendo uma classe em paralelo de M^* . Uma classe em série ou em paralelo que possui um só elemento é dita trivial. Quando dois elementos de $E(M)$ pertencem a mesma classe em série, dizemos que estes elementos estão em série.

Definição 3.30. Uma Matroide é dita **simples** se não possui laços ou elementos em paralelo e dita **cosimples** se M^* é simples. Isto é, se não possui colaços ou elementos em série.

Dada uma Matroide M podemos associar a ela uma outra Matroide, denotada por $si(M)$, obtida da própria M através da deleção de seus laços e da deleção de todos, exceto um, elementos de cada classe em paralelo. A Matroide assim obtida é chamada a **simplificação** de M . Analogamente, definimos a **cosimplificação** de M por, $coM := (si(M^*))^*$. Isto é, coM é obtida de M através da deleção de seus colaços e pela contração de todos, exceto um, elementos de cada classe em série.

Teorema 3.31. *Seja M uma Matroide, $x, y \in E(M)$ estão em série se, e somente se, x e y são tais que $C \cap \{x, y\} = \emptyset$ ou $\{x, y\} \subseteq C$ para todo circuito C de M .*

3.3 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE MATROIDES DE POSTO PEQUENO

Nesta seção mostraremos que toda Matroide de posto pequeno tem uma representação geométrica. As Matroides mostradas neste trabalho são representadas geometricamente.

Um multiconjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, cujos membros estão em $V(m, F)$, é *afim-dependente* se $k \geq 1$ e existem elementos $a_1, a_2, \dots, a_k$ de F , nem todos nulos, tais que,

$$\sum_{i=1}^k a_i v_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k a_i = 0. \quad (3.1)$$

Equivalentemente, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é afim-dependente se o multiconjunto

$$\{(1, v_1), (1, v_2), \dots, (1, v_k)\} \quad (3.2)$$

é linearmente dependente em $V(m+1, F)$, de modo que $(1, v_i)$ é a $(m+1)$ -upla de elementos de F cuja primeira entrada é 1 e cujas entradas restantes são as entradas de v_i . Um multiconjunto de elementos de $V(m, F)$ é *afim-independente* se não é afim-dependente.

Proposição 3.32. *Suponhamos que E é um conjunto que rotula um multiconjunto de elementos de $V(m, F)$. Seja $\mathcal{I}$ a coleção de subconjuntos X de E tais que X rotula um subconjunto afim-independente de $V(m, F)$. Então $(E, \mathcal{I})$ é uma Matroide. $\square$*

A Matroide $(E, \mathcal{I})$ da proposição anterior é chamada a **Matroide afim** em E , e se M é isomorfa a uma tal Matroide dizemos que M é afim sobre F .

Exemplo 3.33. Seja E o subconjunto $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ de $V(2, \mathbb{R})$ e considere a Matroide afim M em E . Os seis elementos de E podem ser representados como pontos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ como na Figura 3.2. Notemos que os conjuntos dependentes de M são aqueles subconjuntos, com três elementos, de E tais que os três pontos que o representam são colineares.

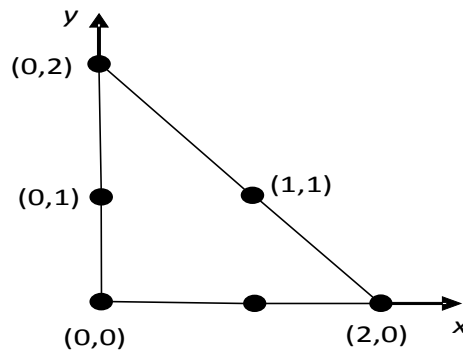


Figura 3.2: Uma Matroide afim de posto 3.

Em geral, se M é uma Matroide afim, de posto $m + 1$ ($m \leq 3$), sobre $\mathbb{R}$, então um subconjunto X de $E(M)$ é independente em M se, na representação de X por pontos em $\mathbb{R}^m$, eles são dois pontos idênticos, ou três pontos colineares, ou quatro pontos coplanares, ou cinco pontos no espaço. Então os fechados de M , de posto um, dois e três são representados geometricamente por pontos, retas e planos, respectivamente.

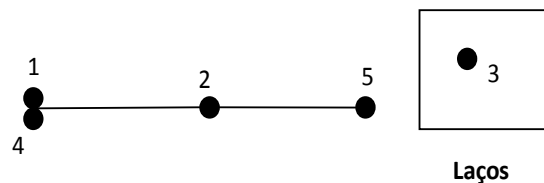


Figura 3.3: Representação geométrica de uma Matroide de posto 2.

Exemplo 3.34. O diagrama na figura 3.3 representa uma Matroide em 5 elementos de posto 2. Em tal diagrama, representamos um circuito com dois elementos por dois pontos se tocando, e um triângulo por uma linha atravessando os correspondentes

pontos. Laços, que não podem ocorrer em uma Matroide afim, são representados em uma caixa como mostrado.

Em geral valem as seguintes regras para esses diagramas. Todos os laços são representados em uma única caixa. Elementos paralelos são representados por pontos se tocando (lado-a-lado), ou algumas vezes por um único ponto rotulado por todos os elementos da classe em paralelo. Correspondendo a cada elemento que não é um laço e não é uma classe em paralelo não trivial, existe um ponto que não toca outros pontos. Se três elementos formam um circuito, os correspondentes pontos são colineares. Da mesma forma, se quatro elementos formam um circuito, os correspondentes pontos são coplanares. Nesses diagramas, as linhas não precisam ser retas e os planos podem ser curvos. Chamamos um diagrama tal qual a figura 3.3 de uma representação geométrica para uma Matroide.

3.4 EXEMPLOS IMPORTANTES

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de Matroides com o intuito de ilustrar as definições e a fim de possibilitar ao leitor uma melhor compreensão do texto escrito neste trabalho.

Exemplo 3.35. Sejam m e n inteiros não negativos tais que $m \leq n$. Sejam E um conjunto com n elementos e $\mathcal{B}$ a coleção de subconjuntos de E com no máximo m elementos. Então, $\mathcal{B}$ satisfaz o Teorema 3.7 e assim $(E, \mathcal{B})$ é uma Matroide, chamada a **Matroide uniforme** e denotada por $U_{m,n}$.

Exemplo 3.36. Considere uma matriz A , $m \times n$, com entradas em um corpo K , e considere os rótulos $1, 2, \dots, n$ para as respectivas colunas da matriz. Então $(E, \mathcal{I})$ é uma Matroide, onde $E := \{1, \dots, n\}$ e um subconjunto X de E está em $\mathcal{I}$ se, e somente se, o conjunto dos vetores-coluna rotulados por elementos de X é linearmente independente em K^m e quaisquer dois elementos de X rotulam colunas distintas.

Definição 3.37. Uma Matroide obtida de uma matriz A , como no exemplo 3.36, é dita uma Matroide **vetorial** e representada por $M[A]$. Se M é isomorfa a Matroide vetorial de uma matriz D sobre um corpo K , então M é dita **representável** sobre o corpo K ou K -representável. Em especial, quando uma Matroide M é representável sobre $GF(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $GF(3) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) é dita Matroide binária (resp. Matroide ternária).

Observação 3.38. O posto de uma Matroide vetorial $M[A]$ é igual ao posto da matriz A .

Dizemos que uma Matroide é regular se ela é representável sobre qualquer corpo. Em Oxley (2003), oxley levanta a seguinte questão: "toda Matroide é regular?". Pode-se verificar que uma Matroide é regular se, e somente se, ela é binária e ternária. A Matroide $U_{2,4}$, (conforme o exemplo 3.35), é ternária mas não é binária. Logo não é regular. Faremos a seguir a verificação de que $U_{2,4}$ não é regular.

Afirmção 3.39. $U_{2,4}$ não é binária, mas é ternária.

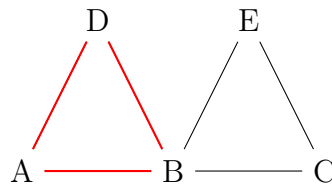
Demonstração. Suponhamos que $U_{2,4}$ é representável sobre algum corpo K por uma matriz A . Então, desde que $U_{2,4}$ tem posto 2, o espaço vetorial gerado pelos vetores colunas de A tem dimensão 2. O espaço vetorial sobre $GF(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$, de dimensão 2, tem exatamente 4 elementos $(\bar{0}, \bar{0})$, $(\bar{0}, \bar{1})$, $(\bar{1}, \bar{0})$ e $(\bar{1}, \bar{1})$. Três dos quais são não nulos. Assim, se $K = GF(2)$, então A não tem quatro colunas não nulas distintas. Então A tem duas colunas que são linearmente dependentes e portanto A não é representável sobre $GF(2)$. Assim, $U_{2,4}$ não é binária.

Agora, observe que a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

representa $U_{2,4}$ sobre $GF(3)$, uma vez que quaisquer duas colunas dessa matriz são linearmente independentes. Então $U_{2,4}$ é ternária. $\square$

Exemplo 3.40. Abaixo temos o exemplo de uma matroide não binária com cinco pontos:



Neste diagrama, os pontos A , B , C , D , e E representam os elementos do conjunto. As arestas indicam dependências. O ciclo destacado em vermelho, por exemplo, representa uma relação de dependência entre A , B e D , mostrando que não formam uma base independente.

Exemplo 3.41. Dado um corpo K considere o espaço projetivo n -dimensional $\mathbb{P}^n(K)$ formado pelo conjunto dos subespaços vetoriais 1-dimensionais de K^{n+1} . Dado um subconjunto finito $E \subseteq \mathbb{P}^n(K)$, temos uma Matroide de conjunto básico E , na qual um conjunto $I \subseteq E$ é independente quando um conjunto formado por um vetor não nulo de cada elemento de I é linearmente independente em K^{n+1} . Observe que essa Matroide é isomorfa a Matroide vetorial associada a uma matriz que tem como conjunto de colunas um conjunto formado por um vetor não nulo de cada elemento de E .

Exemplo 3.42. Considere um grafo finito G com conjunto de arestas $E = E(G)$ e $\mathcal{C}$ o conjunto de ciclos de G . Então, $\mathcal{C}$ é o conjunto de circuitos de uma Matroide sobre E . A Matroide derivada do grafo G como acima é chamada de **Matroide ciclo** ou **Matroide poligonal** e é denotada por $M(G)$. Uma Matroide que é isomorfa a Matroide ciclo de um grafo é chamada de **Matroide gráfica**. Em [Oxley \(2003\)](#) Oxley mostra que toda Matroide gráfica é binária.

Se G é um grafo e uma aresta $a \in G$ é um laço de G , então $\{a\}$ é um circuito de $M(G)$.

4 Aplicações

4.1 MAXIMIZAÇÃO DE COBERTURA DE CONJUNTO

Considere um conjunto E de elementos e uma família $\mathcal{S}$ de subconjuntos de E . O objetivo é encontrar uma subfamília $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ que cubra E (ou a maior parte de E) e que seja independente em um matroide associado.

- **Conjunto de Elementos:** $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
- **Família de Subconjuntos:** $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, onde:

$$S_1 = \{e_1, e_2\}$$

$$S_2 = \{e_2, e_3\}$$

$$S_3 = \{e_3, e_4\}$$

$$S_4 = \{e_4, e_5\}$$

Vamos definir $\mathcal{I}$ como todos os subconjuntos de $\mathcal{S}$ que são independentes, ou seja, que não têm elementos em comum (exclusivamente para simplificação deste exemplo).

Determinação dos Conjuntos Independentes $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} = \{\{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_4\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_4\}\}$$

Algoritmo Guloso

- (i) Inicializar $\mathcal{S}' = \emptyset$ e Cobertura = $\emptyset$.
- (ii) Iterar sobre os conjuntos de $\mathcal{S}$ de forma a adicionar o conjunto S que cobre mais elementos de E não cobertos, respeitando a independência.

Execução

- **Passo 1:** Adicionar S_1 à $\mathcal{S}'$:

$$\mathcal{S}' = \{S_1\}$$

$$\text{Cobertura} = \{e_1, e_2\}$$

- **Passo 2:** O próximo conjunto que cobre mais elementos não cobertos é S_3 (já que cobre e_3 e e_4):

$$\mathcal{S}' = \{S_1, S_3\}$$

$$\text{Cobertura} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

- **Passo 3:** S_4 não pode ser adicionado, pois $\{S_1, S_3, S_4\}$ não é independente.
- **Passo 4:** Considerar S_2 e S_4 . S_2 adiciona apenas e_3 , já coberto por S_3 , então adicionar S_4 se independente.

Conclusão

A subfamília $\mathcal{S}'$ que maximiza a cobertura é $\{S_1, S_3\}$, cobrindo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Não é possível cobrir todos os elementos $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ com uma subfamília independente.

Este exemplo ilustra como a teoria das matroides pode ser aplicada para resolver problemas de otimização envolvendo a cobertura de conjuntos, respeitando restrições de independência.

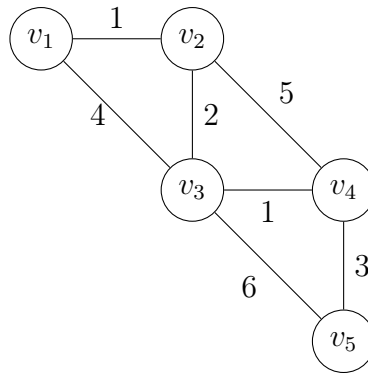
4.2 CAMINHO DE MENOR CUSTO EM UM GRAFO

Dado um grafo ponderado $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas com pesos associados, encontrar o caminho de menor custo entre dois vértices específicos s e t .

- **Conjunto de Vértices:** $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
- **Conjunto de Arestas com Pesos:**

$$E = \{(v_1, v_2, 1), (v_1, v_3, 4), (v_2, v_3, 2),$$

$$(v_2, v_4, 5), (v_3, v_4, 1), (v_4, v_5, 3), (v_3, v_5, 6)\}$$



Queremos encontrar o caminho de menor custo entre os vértices v_1 (origem) e v_5 (destino).

4.2.1 SOLUÇÃO VIA TEORIA DAS MATROIDES

Para resolver este problema usando a teoria das matroides, precisamos definir um matroide sobre o conjunto de arestas de forma que possamos usar uma estratégia para encontrar o caminho de menor custo. Nessa estratégia, em cada etapa, escolhemos a opção localmente ótima (ou seja, a opção de menor custo imediato) com a esperança de que essa escolha leve a uma solução global ótima. para encontrar o caminho de menor custo.

Um matroide de ciclo (ou grafo de ciclo) pode ser definido onde:

- **Conjunto de Elementos:** As arestas do grafo.
- **Família de Conjuntos Independentes:** Conjuntos de arestas que não formam ciclos.

Solução

Representação das Arestas e Pesos

$$E = \{(v_1, v_2, 1), (v_1, v_3, 4), (v_2, v_3, 2), (v_2, v_4, 5), (v_3, v_4, 1), (v_4, v_5, 3), (v_3, v_5, 6)\}$$

Algoritmo de Caminho Mínimo

- Inicialize o conjunto de arestas do caminho mínimo $\mathcal{P} = \emptyset$.
- Ordene as arestas em ordem crescente de peso.

- (iii) Adicione arestas ao caminho mínimo $\mathcal{P}$ se não formarem um ciclo, até conectar os vértices s e t .

Execução

- **Ordenação das Arestas por Peso:**

$$E_{\text{sorted}} = \{(v_1, v_2, 1), (v_3, v_4, 1), (v_2, v_3, 2), (v_4, v_5, 3), (v_1, v_3, 4), (v_2, v_4, 5), (v_3, v_5, 6)\}$$

- **Construção do Caminho Mínimo:**

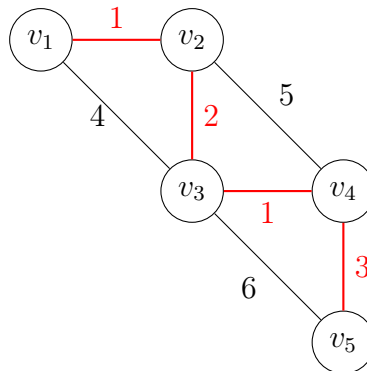
- Adicionar $(v_1, v_2, 1)$: $\mathcal{P} = \{(v_1, v_2, 1)\}$
- Adicionar $(v_3, v_4, 1)$: $\mathcal{P} = \{(v_1, v_2, 1), (v_3, v_4, 1)\}$
- Adicionar $(v_2, v_3, 2)$: $\mathcal{P} = \{(v_1, v_2, 1), (v_3, v_4, 1), (v_2, v_3, 2)\}$
- Adicionar $(v_4, v_5, 3)$: $\mathcal{P} = \{(v_1, v_2, 1), (v_3, v_4, 1), (v_2, v_3, 2), (v_4, v_5, 3)\}$

Verificação da Conexão v_1 a v_5

O conjunto $\mathcal{P}$ conecta v_1 a v_5 com um caminho de peso total $1 + 2 + 1 + 3 = 7$.

Conclusão

O caminho de menor custo de v_1 a v_5 é encontrado utilizando a teoria das matroides para garantir que as arestas adicionadas não formem ciclos, mantendo assim a independência e minimizando o custo total do caminho.



Referências

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. **Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency**. [S.l.]: Springer, 2009. v. 5. (Algorithms and Combinatorics, v. 5).

BIRKHOFF, G. Abstract linear dependence and lattices. **American Journal of Mathematics**, The Johns Hopkins University Press, v. 57, n. 4, p. 800–804, 1935.

BONIN, J. E. The representability of matroids over fields. **Mathematika**, Cambridge University Press, v. 55, n. 1-2, p. 1–29, 2009.

CHALKIADAKIS, G.; ELKIND, E.; WOOLDRIDGE, M. **Computational aspects of cooperative game theory**. [S.l.]: Morgan & Claypool Publishers, 2011.

FINK, R. Matroids and their applications. In: IEEE. **Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering**. [S.l.], 2011. v. 1, p. 165–169.

FUJISHIGE, S. **Submodular functions and optimization**. [S.l.]: Elsevier, 2005.

JAIMES, C.; CACERES, L.; GARCIA, D. Distributed algorithms for covering and packing problems in networks. In: IEEE. **2015 IEEE 30th International Conference on Advanced Information Networking and Applications**. [S.l.], 2015. p. 196–203.

KRAUSE, A.; SINGH, A.; GUESTIN, C. Near-optimal sensor placements in gaussian processes: Theory, efficient algorithms and empirical studies. **Journal of Machine Learning Research**, v. 9, n. 2, 2008.

KUNG, J. P. S. A yale view on the role of submodular functions in information theory. In: **Combinatorial Geometries**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009, (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 29). p. 1–36.

LANE, S. M. A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases. **Duke Math. J**, v. 4, n. 3, p. 455–468, 1938.

MACLAGAN, D.; STURMFELS, B. **Introduction to Tropical Geometry**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2009. v. 161. (Graduate Studies in Mathematics, v. 161).

MACLANE, S. Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry. **American Journal of Mathematics**, The Johns Hopkins University Press, v. 58, n. 1, p. 236–240, 1936.

OXLEY, J. What is a matroid. **Cubo**, v. 5, p. 179–218, 2003.

OXLEY, J. G. **Matroid theory**. 3rd. ed. Oxford, UK: Oxford University Press, 2006.

SCHRIJVER, A. **Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency**. [S.l.]: Springer, 2012. v. 24. (Algorithms and Combinatorics, v. 24).

TRAMEL, E. W.; HEATH, R. W. Coding for distributed compressive sensing: a comparison of sparse random measurements and designed ensembles. In: **IEEE. 45th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS)**. [S.l.], 2011. p. 1–6.

TUTTE, W. A homotopy theorem for matroids, I. **Transactions of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, p. 144–160, 1958.

VONDRÁK, J. Optimal approximation for the submodular welfare problem in the value oracle model. In: **ACM. Proceedings of the 40th annual ACM symposium on Theory of computing**. [S.l.], 2008. p. 67–74.

WANG, X.; ZHANG, Y.; LI, X.; GUO, H. Coverage problem in wireless sensor networks with mobile sensors. **IEEE Transactions on Mobile Computing**, IEEE, v. 7, n. 8, p. 1030–1045, 2008.

WHITNEY, H. On the abstract properties of linear dependence. **American Journal of Mathematics**, Johns Hopkins Press, p. 509–533, 1935.