



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia De Goiás
Câmpus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

Generalização, particularização e analogia na metodologia de resolução de problemas de George Pólya.

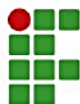
Lívia da Silva Gonçalves

Trabalho de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvio Sandro Alves de Macedo

VALPARAÍSO DE GOIÁS - GO

2024



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Lívia da Silva Gonçalves.

Matrícula: 20201150040164.

Título do Trabalho: Generalização, particularização e analogia na metodologia de resolução de problemas de George Pólya.

Autorização - Marque uma das opções

1. (x) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais incluídos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.



Documento assinado digitalmente
LÍVIA DA SILVA GONÇALVES
Data: 23/10/2024 14:16:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Valparaíso de Goiás, 23/10/2024.

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia De Goiás
Câmpus Valparaíso
Licenciatura em Matemática

Generalização, particularização e analogia na metodologia de resolução de problemas de George Pólya.

Lívia da Silva Gonçalves

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Câmpus Valparaíso de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Sandro Alves de Macedo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

G635g Gonçalves, Livia da Silva

Generalização, particularização e analogia na metodologia de resolução de problemas de George Pólya [recurso eletrônico] / Livia da Silva Gonçalves. -- 2024.

Dados eletrônicos (1 arquivo).

51 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Sandro Alves de Macedo.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, câmpus Valparaíso, 2024.

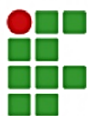
Modo de acesso: World Wide Web.

Arquivo de texto em formato PDF.

Disponível em: <https://repositorio.ifg.edu.br>.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Solução de problemas. 3. Ensino - Metodologia. 4. Analogia. I. Título. II. Macedo, Silvio Sandro Alves de, orient.

CDD 510.7



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS VALPARAÍSO

Termo de Aprovação

LÍVIA DA SILVA GONÇALVES

GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO E ANALOGIA NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEORGE PÓLYA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Valparaíso de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Monografia defendida e aprovada em 30 de setembro de 2024 pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvio Sandro Alves de Macedo
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Hércules de Carvalho Bezerra
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Leal
Documento assinado digitalmente



MARCIA RODRIGUES LEAL
Data: 18/10/2024 09:02:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Valparaíso de Goiás – GO

2024

Documento assinado eletronicamente por:

- Hércules de Carvalho Bezerra, PROF ENS BAS TEC TECNOLÓGICO-SUBSTITUTO, em 17/10/2024 15:41:06.
- Silvio Sandro Alves de Macedo, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 02/10/2024 16:30:51.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 30/09/2024. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 570139
Código de Autenticação: e6077ef8b8



*Dedico este trabalho ao meu pai,
Geraldo Gonçalves, por todo o apoio, por
sempre acreditar em meu sucesso e por ter atri-
buído um significado especial a essa conquista
em sua vida.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as bênçãos que me ajudaram a superar os obstáculos em minha jornada. Apesar de qualquer dificuldade, os planos dEle sempre foram melhores do que os meus.

Agradeço à minha família e amigos que estiveram ao meu lado em todas as fases, garantindo o suporte necessário para que eu seguisse realizando os meus objetivos. Também sou grata às pessoas com quem construí amizades ao longo do caminho, dia após dia.

Um agradecimento especial para o meu orientador, Prof. Dr. Silvio Sandro Alves de Macedo, pela grande dedicação e pelos valiosos conhecimentos que compartilhou. Agradeço também aos membros da banca examinadora por aceitarem o convite e contribuírem essencialmente para a finalização dessa etapa e ao corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática.

RESUMO

Este trabalho está situado em um ramo de estudos de Educação Matemática denominado Resolução de Problemas. Nosso foco de estudo foi a generalização, particularização e analogia, operações mentais consideradas importantes por George Pólya (1887-1985), matemático húngaro e fundador da metodologia de Resolução de Problemas. O estudo foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica, tendo como principal referência o livro *A Arte de Resolver Problemas*, de Pólya. Após fazermos uma distinção entre problema e exercício, classificamos os problemas em problemas de determinação e problemas de demonstração. O segundo capítulo contém os resultados principais do trabalho, onde mostramos como generalizar problemas de determinação e de demonstração; como usar a particularização para obter contra-exemplos ou testar um resultado e alguns usos do conceito de analogia. Nesse capítulo também há uma generalização do Teorema de Pitágoras, feita por Pólya, para ilustrar um uso da particularização, generalização e analogia; e uma solução do problema das duas panquecas, adaptado do livro de Davis e Hersh, onde a particularização e a generalização são usadas por um dos autores para sair de uma clássica “crise da compreensão” em sala de aula, gerada por uma demonstração excessivamente formal.

Palavras-chave: George Pólya; resolução de problemas; generalização; particularização; analogia.

ABSTRACT

This work is situated in a branch of Mathematics Education studies called Problem Solving. Our study focused on generalization, particularization, and analogy, mental operations considered important by George Pólya (1887-1985), a Hungarian mathematician and founder of the Problem Solving methodology. The study was conducted through bibliographic research, with Pólya's book *How to Solve It* as the primary reference. After distinguishing between problems and exercises, we classified problems into determination problems and demonstration problems. The second chapter contains the main results of the work, where we show how to generalize determination and demonstration problems; how to use particularization to obtain counterexamples or test a result; and some uses of the concept of analogy. This chapter also includes a generalization of the Pythagorean Theorem, made by Pólya, to illustrate the use of particularization, generalization, and analogy; and a solution to the two-pancake problem, adapted from the book by Davis and Hersh, where particularization and generalization are used by one of the authors to overcome a classic "crisis of understanding" in the classroom, generated by an excessively formal demonstration.

Keywords: George Pólya; problem solving; generalization; particularization; analogy.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – George Pólya	16
Figura 2 – How to Solve It	17
Figura 3 – Encontrar a diagonal d	20
Figura 4 – Bloco retangular com a incógnita auxiliar x	20
Figura 5 – Para contornar o obstáculo introduzimos o problema auxiliar P'	23
Figura 6 – Trapézio de um caso particular.	25
Figura 7 – Trapézio geral.	25
Figura 8 – Generalização do tipo 1.	26
Figura 9 – O gráfico (d) é obtido do gráfico (a), essencialmente, através de movimentos horizontais e verticais.	28
Figura 10 – Triângulos de lados a, b e c	28
Figura 11 – Trapézio e triângulo.	30
Figura 12 – Trapézio e retângulo.	30
Figura 13 – Problema das duas panquecas.	31
Figura 14 – Caso particular de uma panqueca.	32
Figura 15 – Ilustração do Lema 1.	32
Figura 16 – Resolvendo o problema das panquecas.	33
Figura 17 – Bissecção das panquecas P e Q	33
Figura 18 – Círculos sobrepostos.	34
Figura 19 – Círculos distintos.	35
Figura 20 – Uma das panquecas é circular.	35
Figura 21 – Círculo e panqueca P sobrepostos.	36
Figura 22 – A reta x bissecta a panqueca P e determina a proporção $Q(\theta)$ na panqueca Q	36
Figura 23 – Teorema de Pitágoras.	39
Figura 24 – Generalização de Pólya.	40
Figura 25 – Triângulo.	40
Figura 26 – Analogia.	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Contagem de termos.	12
Tabela 2 – Problemas de determinação x problemas de demonstração (Pólya, 2006, p. 142 - 144).	20
Tabela 3 – Variações em problemas de determinação e de demonstração.	22
Tabela 4 – Analogia entre o paralelogramo e o bloco retangular.	37
Tabela 5 – O problema e seu análogo.	37
Tabela 6 – Analogias entre segmento, triângulo e tetraedro.	38

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
	1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO PÓLYA	15
1.1	George Pólya	15
1.2	Problemas e exercícios	17
1.3	Tipos de problemas	19
1.4	Redução unilateral	19
1.5	Problemas equivalentes	21
1.6	Variações de problemas	22
1.7	Dificuldades psicológicas na resolução de problemas	23
	2 GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO E ANALOGIA	24
2.1	Generalização	24
2.1.1	Generalizando problemas de determinação	24
2.1.2	Generalizando problemas de demonstração	25
2.2	Particularização	27
2.2.1	Particularização para obter contra-exemplos	29
2.2.2	Particularização para testar um resultado	29
2.2.3	O problema das duas panquecas	30
2.3	Analogia	37
2.3.1	Inferência por analogia	38
2.3.2	Uma generalização do Teorema de Pitágoras	39
	3 O ENSINO, NA VISÃO DE PÓLYA	42
3.1	Uma entrevista imaginária com George Pólya	42
	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICE	49

INTRODUÇÃO

A Resolução de Problemas surge, como teoria, a partir dos trabalhos de George Pólya, e os pesquisadores consideram a publicação do livro *A arte de resolver problemas* (2006)¹ o marco inicial (Morais; Onuchic, 2021).

Nesse livro, Pólya apresenta sua famosa sequência de quatro etapas necessárias à resolução de qualquer tipo de problema:

- (1) compreender o problema;
- (2) estabelecer um plano;
- (3) executar o plano;
- (4) examinar a solução obtida.

O objetivo de Pólya era melhorar a habilidade dos estudantes na resolução de problemas à partir da melhoria da habilidade em resolução de problemas nos professores (Morais e Onuchic (2021).

Segundo Kilpatrick², “uma visão mais profunda e mais compreensiva da resolução de problemas nos currículos escolares de Matemática só foi possível a partir de Pólya” (Kilpatrick, 1990, p. 15 *apud* Moraes; Onuchic, 2021, p. 26).

O segundo *Congresso Internacional de Educação Matemática*³, ocorrido na Inglaterra no ano de 1972, teve Pólya como palestrante e mobilizou pesquisadores em Resolução de Problemas de diferentes partes do mundo. Em maio de 1975 ocorreu o primeiro *Seminário de Pesquisa sobre Resolução de Problemas em Educação Matemática*⁴, na Universidade da Geórgia (EUA), que “(...) estimulou o nível de colaboração entre pesquisadores em Educação Matemática que não havia existido antes (...)” (Lester, 1994, *apud* Moraes; Onuchic, 2021, p. 27).

No ano de 1980, o *Conselho Nacional de Professores de Matemática* (National Council of Teachers of Mathematics — NCTM) dos Estados Unidos publicou o livro *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*⁵ composto de 22 artigos de vários autores, dentre eles George Pólya (Morais; Onuchic, 2021).

O NCTM também publicou o documento *Uma Agenda para Ação - Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980*⁶, onde a primeira, de oito recomendações, é que a “resolução de problemas será o foco da matemática escolar na década de 1980”⁷ (Mathematics, 1980, p. 1, tradução nossa).

¹ Com título original *How to Solve It: a new aspect of mathematical method*, publicado em 1945.

² Jeremy Kilpatrick foi aluno e co-autor de Pólya (Alexanderson, 2000, p. 162).

³ International Congress of Mathematics Education.

⁴ Research Workshop on Problem Solving in Mathematical Education.

⁵ Problem Solving in Schools Mathematics. A referência (Krulik; Reys, 1997) é uma tradução desse livro para o português.

⁶ An Agenda for Action - Recommendations for school mathematics of the 1980s

⁷ “Problem solving be the focus of school mathematics in the 1980”.

Na década de 1980 muitas pesquisas foram produzidas com ênfase em Resolução de Problemas. Em Hatfiel (1978, *apud* Moraes; Onuchic, 2021), e posteriormente por Schroeder e Lester (1989 *apud* Moraes; Onuchic, 2021), já eram apontadas três abordagens de ensino de resolução de problemas:

- (1) ensino *sobre* resolução de problemas;
- (2) ensino *para* resolver problemas;
- (3) ensino *via* resolução de problemas (Moraes; Onuchic, 2021).

Ensinar *sobre* resolução de problemas é seguir o método proposto por Pólya (Moraes; Onuchic, 2021). Corresponde a considerá-la como um novo conteúdo, com forte ênfase nas heurísticas, nas regras e processos gerais, independente do conteúdo específico abordado; essa abordagem está presente, por exemplo, em Krulik e Reis (1980, *apud* Allevato; Onuchic, 2021).

Ensinar *para* resolução de problemas é se concentrar no uso da Matemática para resolver problemas (Moraes; Onuchic, 2021). O professor propõem problemas aos alunos como aplicação dos conteúdos estudados (Allevato; Onuchic, 2021). Acreditamos que o livro de Fomin, Genkin e Itenberg (2012) segue esse tipo de ensino porque a teoria matemática de cada capítulo é resumida e ele é destinado a preparar alunos para competições matemáticas.

No ensino *via* resolução de problemas, os problemas são usados não só como propósito para aprender matemática mas como o próprio significado de fazê-la, o ensino de tópicos matemáticos começa com uma situação problema (Moraes; Onuchic, 2021). Ambos, os conteúdos matemáticos e a resolução de problemas são considerados simultaneamente, essa perspectiva se consolidou com a publicação do NCTM (2000) (Allevato; Onuchic, 2021).

Analisando as pesquisas, práticas e políticas sobre Resolução de Problemas, nos Estados Unidos, de 1970 a 2007, Shoenfeld (2007) destaca que

Resolução de problemas foi um foco importante da pesquisa em educação matemática nos US desde a metade da década de 1970 até o fim da década de 1980. Pela metade dos anos de 1990 a pesquisa sob a bandeira de 'resolução de problemas' foi vista cada vez menos e a atenção do campo foi se voltando para novas áreas. Entretanto, as pesquisas naquelas áreas de fato incorporaram ideias da pesquisa em resolução de problemas, e esse trabalho continua a evoluir em caminhos importantes (p. 537, tradução de Allevato; Onuchic, 2021.)

A partir dessas reflexões, Allevato e Onuchic (2021) entendem que as pesquisas em Resoluções de Problemas permanecem relevantes.

Acompanhando essas mudanças, o Brasil reformula suas orientações curriculares, sendo recomendado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (Brasil, 1997, 1998, 1999) a resolução de problemas como ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula (Allevato; Onuchic, 2021). Na Base Nacional Curricular Comum (BNCC)

(Brasil, 2017), orientação curricular atualmente em vigor, a resolução de problemas é uma das estratégias para o ensino de Matemática (Allevato; Onuchic, 2021).

No entanto, cabe ressaltar que o termo *resolução de problemas* aparece 49 vezes nos PCNs e apenas 19 vezes na BNCC (veja a Tabela 1), o que pode sinalizar uma diminuição da ênfase em Resolução de Problemas nesses documentos oficiais.

Tabela 1 – Contagem de termos.

Termos	PCNs (1998)		BNCC (2017)	
	Ensino Fundamental 6° ao 9° ano	Ensino Médio	Ensino Fundamental 6° ao 9° ano	Ensino Médio
resolução de problemas	29	20	8	11
generalização	32	2	3	12
particularização	0	0	0	0
analogia	7	0	0	0
heurística	2	0	1	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que o termo *particularização* não é mencionado nem nos PCNs e nem na BNCC (Tabela 1). Uma leitura dos 49 contextos em que o termo *generalização* (e sua variação *generalizar*) aparece nos PCNs e na BNCC revelam pouca ou nenhuma relação com o sentido que Pólya dá a esse termo, que é a de um certo tipo de operação mental útil na resolução de problemas (veja a Seção 2.1).

Também pudemos observar que o termo *analogia* (e sua variação *análogo*), que aparece nos PCNs do Ensino Fundamental, é usado em sentidos dicionarizados e não como uma operação mental importante (veja a Seção 2.3).

Outro termo com pouco destaque (veja a Tabela 1) é *heurística*. Em contraste, Pólya dá muita importância a heurística, situando-a como um campo de estudos:

[A heurística moderna] procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as *operações mentais, típicas* desse processo, que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informações, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciencioso da Heurística deve levar em conta, tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas. Não deve esquecer aquilo que autores antigos como Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano escreveram sobre o assunto, mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atitude por parte de outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística. Nesse estudo, não devemos descurar nenhum tipo de problema, e sim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independente do assunto específico do problema. O estudo da Heurística tem objetivos ‘práticos’: melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática.

O presente livro constitui a primeira tentativa de realização de tal programa (Pólya, 2006, p. 99 - 100).

Assim, “o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção” (Pólya, 2006, p. 99). Abaixo temos uma comparação entre um raciocínio formal e um raciocínio heurístico:

Raciocínio formal	Raciocínio heurístico
Se $A \dots$ então B	Se $A \dots$ então B
B falso	B verdadeiro
A é falso	A mais verossímil

Em ambos os raciocínios uma afirmação A está sob teste. No raciocínio formal, se a partir de A deduzirmos uma afirmação B , que sabemos ser falsa, então podemos concluir que A é falsa. No raciocínio heurístico, se a partir de A deduzirmos uma afirmação B , que sabemos ser verdadeira, então A torna-se mais verossímil.

“O raciocínio heurístico, que é provisório e apenas plausível, é importante na descoberta da solução, mas não o tome por uma demonstração” (Pólya, 2006, p. 101). Porém “(...) quem desprezar completamente as conclusões heurísticas não fará nenhum progresso. Os mais importantes sinais de progresso são heurísticos” (Pólya, 2006, p. 166).

Os problemas de que Pólya trata são aqueles encontrados em livros, os quais se supõem serem *perfeitamente enunciados e razoáveis*.

“Há certas operações mentais que são tipicamente úteis na resolução de problemas” (Pólya, 2006, p. 167). O objetivo deste trabalho é focalizar em três dessas operações mentais: generalização, particularização e analogia.

O trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro capítulo inicia com um resumo da biografia de Pólya, com ênfase nos seus trabalhos acadêmicos; uma biografia completa está em Alexanderson (2000). Em seguida, após fazermos uma distinção entre problema e exercício, classificamos os problemas em dois tipos: determinação e demonstração. Através de exemplos, mostramos como se encontra as partes principais desses dois tipos de problemas.

Com base na pesquisa bibliográfica, a partir do livro *A Arte de Resolver Problemas* (2006), temos o segundo capítulo que está dividido em três partes. Na primeira parte, abordamos a *generalização*, que é definida como “(...) a passagem de consideração de um conjunto para um conjunto mais abrangente, que contém o conjunto restrito” (Pólya, 2006, p. 97). Os exemplos que apresentamos tratam da generalização de propriedades, fórmulas, figuras, teoremas e padrões.

Na segunda parte, abordamos a *particularização*, que é definida como “a passagem da consideração de um dado conjunto de elementos para a consideração de um conjunto menor (...)” (Pólya, 2006, p. 124). Buscamos dar exemplos de como se usa a particularização para testar um resultado e obter contra-exemplos. Finalizamos essa segunda parte com o problema das duas panquecas, onde reproduzimos, com algumas adaptações, uma experiência relatada por Davis e Hersh (1995) sobre como um dos

autores, usando particularização e generalização, reformulou a demonstração de um teorema em sala de aula, saindo de uma clássica “crise de compreensão”, gerada por uma demonstração excessivamente formal.

Na terceira parte, abordamos a *analogia*, e a melhor definição que encontramos desse termo foi a do filósofo Mário Ferreira dos Santos (1959): analogia é uma síntese de semelhança e diferença. Buscamos ilustrar como se usa de analogia para comparar e formular alguns problemas. Finalizamos o segundo capítulo mostrando como Pólya usou os procedimentos de generalização, particularização e analogia para fornecer uma nova demonstração do Teorema de Pitágoras.

O terceiro capítulo consiste de uma entrevista imaginária com Pólya, que é basicamente uma seleção dos ensinamentos de Pólya que melhor se adequaram aos tópicos tratados neste trabalho.

1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO PÓLYA

1.1 GEORGE PÓLYA

George Pólya nasceu na Hungria em 13 de dezembro de 1887. Dos seus estudos no ginásio, pode-se destacar as línguas clássicas, grego e latim, as línguas modernas, alemão e húngaro, e as matérias literatura e biologia. Nesse período, a sua aprendizagem em matemática não foi altamente desenvolvida, Pólya desaprovava o ensino da maioria de seus professores matemáticos (O'Connor; Robertson, 2002).

Obteve sua primeira licenciatura na Universidade de Budapeste pelos dois anos de estudos em línguas e literatura, após isso, se interessou por estudar filosofia e assim seguiu o conselho de um professor, passando a estudar física e matemática para ajudá-lo a entender esse campo do conhecimento.

Nessa etapa de sua formação, Pólya esteve em 1910 e 1911 na Universidade de Viena, retornou a Budapeste - para concluir sua dissertação sobre problemas de probabilidade geométrica com integrais associadas, onde obteve pouca orientação por não haver algum professor dessa área em Budapeste - e recebeu o seu título de Doutor em 1912 (Alexanderson, 2000).

Em seguida, após passar por Göttingen e Paris, Pólya envia uma carta para Budapeste com a intenção de conseguir um cargo, mas foi solicitada por Adolf Hurwitz sua nomeação como professor assistente na Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) em Zurich, posição que logo aceitou e ansiou pela oportunidade de trabalhar com o matemático que tanto o influenciou.

Nos anos de 1918 e 1919, publicou artigos sobre séries, teoria dos números, combinatória, astronomia e probabilidade, em 1920 foi promovido a professor extraordinário e alguns de seus trabalhos nos anos de 1920 à 1923 foram sobre distribuição normal, a prova do teorema sobre caminhadas aleatórias em uma rede inteira e mostrar que a transformada de Fourier de uma medida de probabilidade era uma função característica; isso sem deixar de lado os seus estudos sobre as funções integrais.

Reconhecendo que a sua dificuldade inicial na matemática era entender como as pessoas encontravam os resultados, Pólya decidiu abordar os problemas de uma maneira classificatória, por método de resolução, convidou o matemático húngaro Gábor Szegő e escreveram uma coleção de problemas, sendo *Problems and Theorems in Analysis I*¹ e *Problems and Theorems in Analysis II*², publicados em 1924 e vistos em Pólya e Szegő (1970, 1971).

A bolsa Rockefeller recebida em 1924 proporcionou os seus estudos em Oxford e Cambridge, onde se juntou com Godfrey H. Hardy e John E. Littlewood e come-

¹ Problemas e Teoremas em Análise I.

² Problemas e Teoremas em Análise II.

çaram a escrever o livro *Inequalities*³ - publicado em 1934 e podendo ser visto em Pólya, Hardy e Littlewood (1934)-. Seguiu nos anos de 1926 à 1928 publicando artigos que totalizaram 31 trabalhos, parcela do que contribuiu para sua nomeação a professor ordinário pela ETH nesse último ano.

Através da segunda bolsa Rockefeller, em 1933, Pólya esteve nas universidades de Princeton e Stanford. Por razões políticas, saiu de Zurique em 1940, trabalhou como professor palestrante na Universidade de Brown por dois anos e, logo adiante, continuou o seu trabalho sendo professor assistente em Stanford. A Figura 1 retrata Pólya estudando em sua casa localizada em Palo Alto.

Figura 1 – George Pólya



Fonte: (Alexanderson, 2000, p. 135).

As técnicas de resolução de problemas era seu interesse desde 1919 e a heurística se tornou um assunto evidente desde o seu trabalho com Szegő, assim, Pólya chegou à América com o rascunho escrito em alemão de *A arte de resolver problemas* (2006) que foi reescrito pelo próprio em inglês, publicado pela Princeton University Press em 1945 (a capa dessa primeira edição pode ser vista na Figura 2) e depois ganhou várias edições em vinte e quatro idiomas⁴.

Esses interesses o fazia estar sob grande influencia de Euler, principalmente por Euler ser o matemático que explicava como encontrou os seus resultados, compartilhavam de mesmo estilo matemático e a atuação em variadas áreas matemáticas (Alexanderson, 2000). Os trabalhos de Pólya tiveram bastante abrangência, além das áreas já mencionadas, passou pela geometria, teoria dos grafos e esquemas de votação.

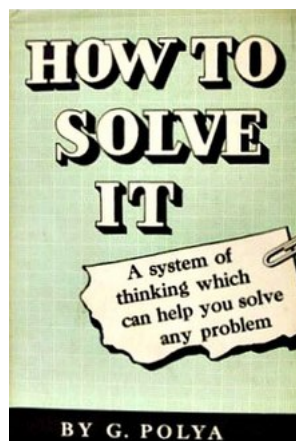
Em 1946, juntamente com Szegő, começaram uma competição de matemática do ensino médio em Stanford, consistia em problemas interessantes que, posteriormente, foram coletados e publicados por Pólya e seu aluno Jeremy Kilpatrick em 1974, *The Stanford Mathematics Problem Book: With Hints and Solutions*⁵ (Pólya; Kilpatrick, 1974).

³ Desigualdades.

⁴ Até o presente, é o único livro de Pólya que foi traduzido para o português.

⁵ O livro de problemas matemáticos de Stanford com dicas e soluções.

Figura 2 – How to Solve It



Fonte: Enciclopédia Wikipédia, vista em 22 out. 2024.

Estava sendo realizada em todos os estados do Oeste, com cerca de 1200 participantes em 151 centros, e se encerrou por decisão do Departamento de Matemática em 1965.

Tendo assumido o cargo de professor titular desde 1946, Pólya se aposentou em 1953, mas continuou com as pesquisas, seminários e aulas. Também publicou *Mathematics and Plausible Reasoning*⁶ - Vol. I em 1954 e Vol.II em 1968 - vistos em Pólya (2014), *Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*⁷ - Vol. I em 1962 e Vol. II em 1964 - vistos em Pólya (1981) e *Mathematical Methods in Science*⁸ em 1963 - visto em Pólya (1977)-.

Antes de falecer em 7 de setembro de 1985, Pólya foi homenageado por Stanford com um jantar em seu aniversário de 90 anos, com a presença de colegas e amigos, idade em que lecionou pela última vez no curso de combinatória (porém, no ano de 1978) e recebeu muitas honrarias por suas contribuições na educação.

1.2 PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

Vamos iniciar os nossos estudos buscando fazer uma distinção entre problema e exercício. No dicionário Ferreira (2010) *problema* é “qualquer questão que dá margem a hesitação ou perplexidade, por difícil de explicar ou de resolver” e *exercício* é um “trabalho escolar cujo fim é adestrar ou treinar o aluno em determinada matéria”.

Pólya (1998, p.1) deixa explícito em seu artigo que

Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema.

⁶ Matemática e raciocínio plausível.

⁷ Descoberta matemática sobre compreensão, aprendizagem e ensino de resolução de problemas.

⁸ Métodos matemáticos na ciência.

Observe o contraste entre os sentidos de *problema*, dados acima, e a caracterização de *exercício* dada por Souza e Guimarães (2015, p.137):

(...) um exercício requer de um sujeito baixo investimento cognitivo, uma vez que já está de posse dos meios e mecanismos para o resolver, que apenas necessita de aplicar, mais ou menos directamente.

O mesmo contraste é observado por Zeitz (2006, tradução nossa)⁹ em seu prefácio, afirmando que

(...) um problema é uma pergunta que não pode ser respondida imediatamente. Os problemas frequentemente são abertos, paradoxais e às vezes insolúveis, e exigem investigação antes que alguém possa chegar perto de uma solução.

Por sua vez,

Um exercício é uma pergunta que testa o domínio do estudante em uma técnica focada e estreita, geralmente uma que foi “coberta” recentemente. Os exercícios podem ser difíceis ou fáceis, mas nunca são intrigantes, pois é sempre imediatamente claro como proceder. Chegar à solução pode envolver trabalho técnico complexo, mas o caminho para a solução é sempre aparente (Zeitz, 2006, tradução nossa)¹⁰.

Observe que Pólya chama de *problema rotineiro* o que os autores mencionados acima chamam de *exercício*:

“De maneira geral, um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido” (Pólya, 2006, p. 142).

Por exemplo, se o aluno já conhece a fórmula quadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

o problema “resolva a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ ” torna-se rotineiro (ou um exercício).

Assim, podemos concluir que quando se trata de problemas, o solucionador não possui os meios imediatos para encontrar a solução, será necessário maior dedicação devido a sua complexidade.

Por fim, os exercícios, que geralmente compõem grande parte dos conteúdos dos livros didáticos, são questões pouco desafiadoras, utilizadas para aplicar algoritmos aprendidos recentemente, e o processo necessário para chegar em sua resposta já é logo mentalizado; para solucioná-lo, basta se inteirar do assunto estudado no capítulo.

⁹ “(...) a problem is a question that cannot be answered immediately. Problems are often open-ended, paradoxical, and sometimes unsolvable, and require investigation before one can come close to a solution”.

¹⁰ “An exercise is a question that tests the student’s mastery of a narrowly focused technique, usually one that was recently ‘covered.’ Exercises may be hard or easy, but they are never puzzling, for it is always immediately clear how to proceed. Getting the solution may involve hairy technical work, but the path towards solution is always apparent”.

1.3 TIPOS DE PROBLEMAS

Os problemas matemáticos são classificados por Pólya (2006) em dois tipos: problemas de determinação e problemas de demonstração. Por exemplo,

Problema 1. *Calcular a diagonal de um bloco retangular do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.*

é um problema de determinação.

Problema 2. *Todo número com um número ímpar de divisores é um quadrado perfeito.*

é um problema de demonstração.

As partes principais de um problema de determinação são a incógnita, os dados e a condicionante. Por exemplo, no Problema 1, a incógnita é a diagonal do bloco retangular, que denotaremos por d ; os dados são o comprimento, a largura e a altura, denotados por a , b , c , respectivamente; e a condicionante é a forma como os dados se relacionam com a incógnita: d é a diagonal do bloco retangular de comprimento a , largura b e altura c .

Nos problemas de determinação, em “quase todos os casos, é aconselhável começar o exame detalhado do problema pelas indagações: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?” (Pólya, 2006, p.48).

As partes principais de um problema de demonstração são a hipótese e a conclusão. Por exemplo, no Problema 2, temos:

Hipótese: n possui um número ímpar de divisores.

Conclusão: n é um quadrado perfeito.

Nos problemas de demonstração, “(. . .) devemos, de maneira geral, examinar (. . .) a hipótese e a conclusão do teorema que temos de demonstrar ou de refutar” (Pólya, 2006, p. 53 - 54).

Em seu livro, Pólya (2006) ainda classifica os problemas de determinação em teórico ou prático, abstrato ou concreto, problemas sérios ou simples enigmas. Mas nota-se que a quase totalidade dos problemas abordados pelo autor são teóricos, abstratos e sérios.

1.4 REDUÇÃO UNILATERAL

Chama-se redução unilateral a passagem de um problema proposto a um problema auxiliar mais ambicioso ou menos ambicioso (Pólya, 2006).

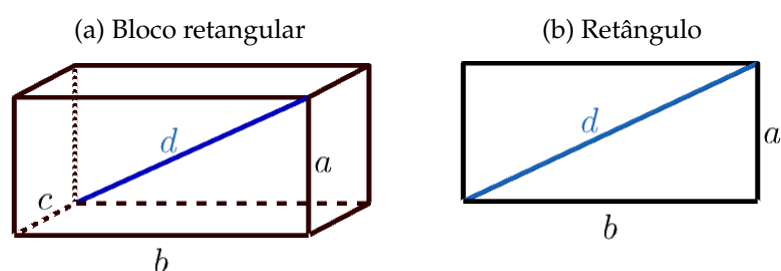
¹¹ Observação: “Nem todos os teoremas podem ser divididos naturalmente em hipótese e conclusão. Assim, é praticamente impossível dividir dessa maneira o teorema: ‘Há uma infinidade de números inteiros’ ” (Pólya, 2006, p. 143).

Tabela 2 – Problemas de determinação x problemas de demonstração (Pólya, 2006, p. 142 - 144).

Problema	Problema de determinação	Problema de demonstração
Objetivo	Encontrar um certo objeto, a incógnita do problema.	Mostrar que certa informação é verdadeira ou então que é falsa.
Tipo	- Teórico ou prático - Abstrato ou concreto - Problemas sérios ou simples enigmas.	- Demonstração. - Refutação.
Partes principais	- Incógnita - Dados - Condicionante.	- Hipótese - Conclusão ¹¹ .
Nível escolar	São mais importantes na matemática elementar.	São mais importantes na matemática superior.

Fonte: Elaborada pela autora.

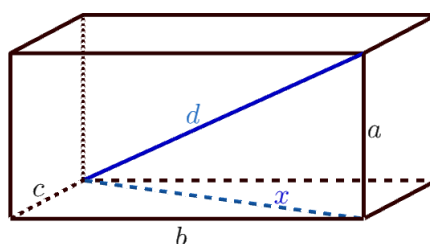
A passagem do problema do bloco retangular (Figura 3 - a) para o problema (auxiliar) do retângulo (Figura 3 - b) é uma redução unilateral para um problema menos ambicioso. A passagem na direção contrária é uma redução unilateral mais ambiciosa.

Figura 3 – Encontrar a diagonal d .

Fonte: Elaborada pela autora.

“A diferença entre um problema fácil e outro difícil pode estar em conhecer-se ou não um outro problema já anteriormente resolvido, que tenha a mesma incógnita” (Pólya, 2006, p. 45).

Vamos resolver o Problema 1 introduzindo a incógnita auxiliar x , como mostra a Figura 4 abaixo:

Figura 4 – Bloco retangular com a incógnita auxiliar x .

Fonte: Elaborada pela autora.

Aplicando o Teorema de Pitágoras duas vezes, temos

$$d^2 = a^2 + x^2 \quad (1.1)$$

$$x^2 = b^2 + c^2 \quad (1.2)$$

Substituindo (1.2) em (1.1) temos $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, e assim

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

1.5 PROBLEMAS EQUIVALENTES

Dois problemas são equivalentes quando a resolução de um deles implicar na resolução do outro (Pólya, 2006).

Por exemplo, para resolver a equação

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0, \quad (1.3)$$

introduzimos a incógnita auxiliar $y = x^2$, obtendo o seguinte problema

$$y^2 - 13y + 36 = 0. \quad (1.4)$$

O problema (1.3) e o problema auxiliar (1.4) são equivalentes.

A passagem do problema original para o auxiliar é chamada de redução conversível quando os problemas original e auxiliar forem equivalentes (Pólya, 2006). Assim, a redução do problema (1.3) para o problema (1.4) é uma redução conversível.

Vamos resolver a equação (1.3) usando uma cadeia de problemas auxiliares equivalentes:

(A) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(B) $(2x^2)^2 - 2(2x^2)13 + 144 = 0$

(C) $(2x^2)^2 - 2(2x^2)13 + 169 = 25$

(D) $(2x^2 - 13)^2 = 25$

(E) $2x^2 - 13 = \pm 5$

(F) $x^2 = \frac{13 \pm 5}{2}$

(G) $x = \pm \sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}}$

(H) $x = 3, \text{ ou } x = -3, \text{ ou } x = 2, \text{ ou } x = -2.$

“As reduções conversíveis são, sob um certo aspecto, mais importantes e mais convenientes do que outras maneiras de introduzir problemas auxiliares (...)” (Pólya, 2006, p. 139).

1.6 VARIAÇÕES DE PROBLEMAS

Os principais meios de variar um problema são generalização, particularização, analogia, decomposição e recombinação (Pólya, 2006). Neste trabalho enfocaremos essas três primeiras maneiras de variar um problema.

Voltemos ao Problema 2, que pede para provarmos que todo número com um número ímpar de divisores é um quadrado perfeito.

Começemos com o caso particular $n = 2^a 3^b$, que parece mais acessível. Observe que n possui $d = (a+1)(b+1)$ divisores. Se d for ímpar, então a e b devem ser pares. Assim, $a = 2r$ e $b = 2s$ com $r, s \in \mathbb{N}$, e portanto $n = 2^{2r} 3^{2s} = (2^r 3^s)^2$, ou seja, n é um quadrado perfeito.

Agora vejamos o caso geral. Seja $n > 1$ um número natural. Sabemos, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, que n pode ser escrito na forma $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, onde $p_1, p_2, \dots, p_r$ são primos distintos e $a_i \geq 1$. Seja d o número de divisores de n . Então $d = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_r + 1)$. Para que d seja ímpar, $a_1, a_2, \dots, a_r$ devem ser pares. Então $a_1 = 2t_1, a_2 = 2t_2, \dots, a_r = 2t_r$, com $t_1, t_2, \dots, t_r \in \mathbb{N}$. Logo

$$n = p_1^{2t_1} p_2^{2t_2} \dots p_r^{2t_r} = (p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_r^{t_r})^2. \quad (1.5)$$

Portanto n é um quadrado perfeito. O caso $n = 1$ é direto, ele possui apenas um divisor e é um quadrado perfeito.

“A variação do problema pode nos levar a elementos auxiliares ou à descoberta de um problema auxiliar mais acessível” (Pólya, 2006, p. 101).

“Difícilmente poderemos fazer qualquer progresso sem a VARIAÇÃO DO PROBLEMA” (Pólya, 2006, p. 149).

A seguir temos uma classificação formal das combinações mais comuns e úteis, no preparo de um novo problema a partir de um problema proposto, para problemas de determinação e de demonstração:

Tabela 3 – Variações em problemas de determinação e de demonstração.

Problemas de determinação (p. 48)	Problemas de demonstração (p. 54)
(1) manter a incógnita, mudar os dados e a condicionante;	(1) manter a conclusão e mudar a hipótese;
(2) manter os dados, mudar a incógnita e a condicionante;	(2) manter a hipótese e mudar a conclusão;
(3) manter a incógnita e os dados.	(3) mudar tanto a hipótese quanto a conclusão.

Fonte: Elaborada pela autora.

Quando tratarmos de generalização em problemas de demonstração (Seção 2.1.2), abordaremos as variações contidas na segunda coluna da Tabela 3.

Um vez compreendido o problema como um todo, passamos aos detalhes pois “(...) estamos em melhor posição para avaliar que pontos particulares podem ser os mais essenciais” (Pólya, 2006, p. 47).

A passagem $n = (p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_r^{t_r})^2 = p_1^{2t_1} p_2^{2t_2} \dots p_r^{2t_r}$ (veja 1.5), sugere que a seguinte direção também é verdadeira:

“Se n é um quadrado perfeito, então n possui um número ímpar de divisores”.

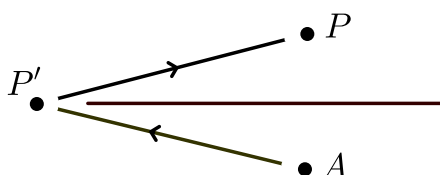
De fato, se $n = m^2$ então pondo $m = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_r^{t_r}$, onde $p_1 p_2 \dots p_r$ são primos distintos e $t_i \geq 1$, segue que $n = (p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_r^{t_r})^2 = p_1^{2t_1} p_2^{2t_2} \dots p_r^{2t_r}$, possui $d = (2t_1 + 1)(2t_2 + 1) \dots (2t_r + 1)$ divisores, que é um número ímpar.

1.7 DIFICULDADES PSICOLÓGICAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

“Resolver um problema de qualquer tipo é contornar um obstáculo” (Pólya, 2006, p. 158).

“Há uma certa dificuldade em fazer meia-volta, em afastar-se do objetivo, em caminhar sem olhar continuamente para a meta, em não seguir a trajetória que leva diretamente ao fim desejado” (Pólya, 2006, p. 159).

Figura 5 – Para contornar o obstáculo introduzimos o problema auxiliar P' .



Fonte: Elaborada pela autora.

2 GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO E ANALOGIA

2.1 GENERALIZAÇÃO

Pólya define generalização como “a passagem de consideração de um conjunto para um conjunto mais abrangente, que contém o conjunto restrito” (Pólya, 2006, p. 97).

Quando passamos de triângulos a polígonos de n lados, estamos generalizando. Por exemplo, a Proposição 2 abaixo é mais geral do que a Proposição 1:

Proposição 1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180° .*

Proposição 2. *A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados mede $(n - 2) \cdot 180^\circ$.*

Quando substituímos números por letras, generalizamos. Por exemplo, a igualdade $a(b + c) = ab + ac$ é mais geral do que a igualdade $2(3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$.

A igualdade $a_1(a_2 + \dots + a_n) = a_1a_2 + \dots + a_1a_n$ é mais geral do que a igualdade $a(b + c) = ab + ac$ porque a segunda pode ser obtida da primeira por meio das substituições $n = 3$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ e $a_3 = c$.

Observando a regularidade

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

propomos o seguinte:

Problema 3. *Será que, para cada n , a soma $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$ é sempre um quadrado perfeito?*

“Ao fazermos essa pergunta, generalizamos” (Pólya, 2006, p. 98).

2.1.1 GENERALIZANDO PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO

Problema 4. *Determinar a área de um trapézio com base menor medindo 7 cm, base maior medindo 10 cm e altura medindo 4 cm.*

Podemos obter essa área facilmente, dividindo o trapézio em dois triângulos de bases medindo 7 cm e 10 cm e com alturas medindo 4 cm, conforme a Figura 6.

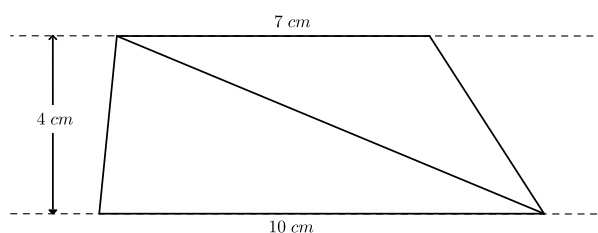
Assim,

$$A = \frac{10 \cdot 4}{2} + \frac{7 \cdot 4}{2} = 20 + 14 = 34.$$

Portanto, o trapézio possui 34 cm^2 de área.

Se substituirmos os números 10, 7 e 4 pelas letras B , b e h , obtemos a seguinte generalização do Problema 4:

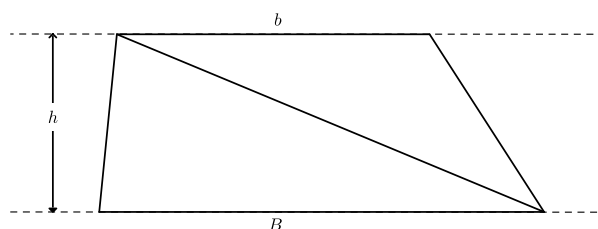
Figura 6 – Trapézio de um caso particular.



Fonte: Elaborada pela autora.

Problema 5. Determinar a área de um trapézio de base maior B , base menor b e altura h .

Figura 7 – Trapézio geral.



Fonte: Elaborada pela autora.

“Ao passarmos de um problema ‘numérico’ para um problema ‘literal’, ganharemos acesso a novos procedimentos, poderemos variar os dados e, ao fazê-lo, poderemos verificar de várias maneiras os resultados” (Pólya, 2006, p. 99).

2.1.2 GENERALIZANDO PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO

Considere um problema de demonstração comum, cujas partes principais são a hipótese e a conclusão, isto é, um enunciado da forma

Se H , então C .

Há, essencialmente, duas maneiras de generalizar esse problema (Davis; Hersh, 1995):

Tipo 1: Enfraquecer a hipótese e mudar a conclusão.

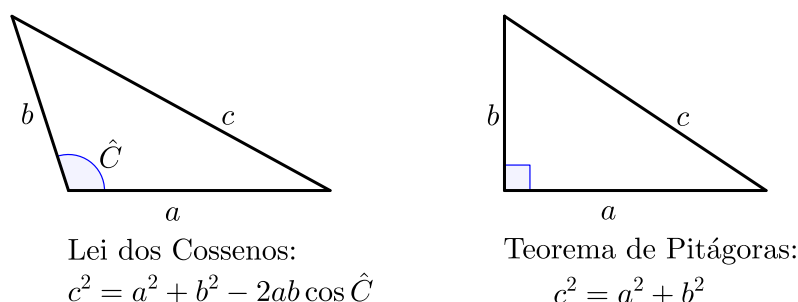
Tipo 2: Enfraquecer a hipótese e manter a conclusão.

Por exemplo, a Lei dos Cossenos:

Se ABC é um triângulo qualquer de lados medindo a, b e c , então $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$, onde $\hat{C}$ é o ângulo oposto ao lado que mede c ,

é uma generalização do Teorema de Pitágoras, pois fazendo $\hat{C} = 90^\circ$ obtemos $c^2 = a^2 + b^2$. Essa é uma generalização do tipo 1, pois a hipótese “triângulo qualquer” é mais fraca do que a hipótese “triângulo retângulo”, exigida no Teorema de Pitágoras.

Figura 8 – Generalização do tipo 1.



Fonte: Elaborada pela autora

Agora vejamos uma generalização do tipo 2:

Se ABC é um triângulo retângulo, então $area\ ABC = \frac{base \times altura}{2}$,

pode ser generalizada para

Se ABC é um triângulo qualquer, então $area\ ABC = \frac{base \times altura}{2}$.

Note que a hipótese

$P : ABC$ é um triângulo qualquer

é mais fraca do que a hipótese

$P' : ABC$ é um triângulo retângulo.

Observe que se duas sentenças P e Q forem equivalentes, denotado por $P \Leftrightarrow Q$, não podemos enfraquecer P sem perder a implicação $P \Rightarrow Q$.

De fato, se fosse $P' \Rightarrow Q$, com P' estritamente mais fraca do que P , então $P' \Rightarrow Q \Rightarrow P$, donde os objetos que satisfizessem P' também satisfariam P , o que não é possível.

Por exemplo, já vimos na Seção 1.6 que a recíproca no Problema 2 é verdadeira. Logo, se $d(n)$ for o número de divisores de um número n , então

$d(n)$ é ímpar $\Leftrightarrow n$ é um quadrado perfeito.

Se a condição “ $d(n)$ é ímpar” for enfraquecida, perdemos a implicação “ $d(n)$ ímpar $\Rightarrow n$ é quadrado perfeito”.

A indução procura encontrar regularidade e coerência nos fatos observados. Seus mais notáveis instrumentos são a generalização, a particularização e a analogia. A generalização por tentativas parte de um esforço para compreender os fatos observados; baseia-se na analogia e é verificada por meio de outros casos particulares (Pólya, 2006, p. 106).

Voltando ao Problema 3, e observando ainda uma nova regularidade:

$$\begin{array}{ll} 1 = 1 & 10 = 1 + 2 + 3 + 4 \\ 3 = 1 + 2 & 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ 6 = 1 + 2 + 3 & 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \end{array}$$

podemos reformular o Problema 3 de uma forma mais precisa:

Problema 6. *Será que $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n)^2$ para todo número natural n ?*

É bem conhecido que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

A resposta da pergunta feita no Problema 6 é afirmativa, e se usarmos (2.1), podemos escrever

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Continuando a generalizar nessa direção, temos o

Problema 7. *Encontre a soma $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ dos n primeiros naturais elevados a $k \in \mathbb{N}$.*

Para uma solução do Problema 7 veja o Apêndice.

“Uma das vantagens da generalização é a consolidação do conhecimento. Permite-nos agrupar elegantemente num só pacote vários factos dispersos que estão intimamente relacionados entre si” (Davis; Hersh, 1995, p. 135).

2.2 PARTICULARIZAÇÃO

Pólya define particularização como “a passagem da consideração de um dado conjunto de elementos para a consideração de um conjunto menor (...)” (Pólya, 2006, p. 124).

Isso significa que, em um dado problema, se aumentarmos as restrições sobre o enunciado, diminuimos o número de objetos que satisfazem as condições.

“A particularização revela-se, muitas vezes, útil na resolução de problemas” (Pólya, 2006, p. 124).

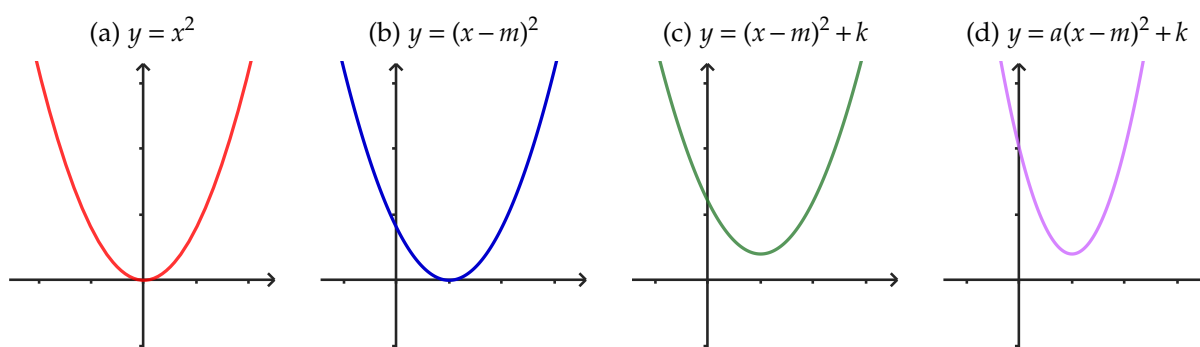
Vejamos alguns exemplos de particularizações:

Exemplo 1. Se um bloco retangular (Figura 3 - a) possui dimensões a, b e c , então a medida d da diagonal do bloco é dada por $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Se fizermos $c = 0$, então o bloco retangular torna-se um retângulo, como o mostrado na Figura 3 - b, de dimensões a e b , cuja diagonal mede $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplo 2. A função $y = x^2$ é uma particularização da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$. Desde que escrevamos a última função na forma canônica $y = a(x - m)^2 + k$, podemos obter a forma do seu gráfico a partir da forma do gráfico de $y = x^2$, conforme apresentado na Figura 9.

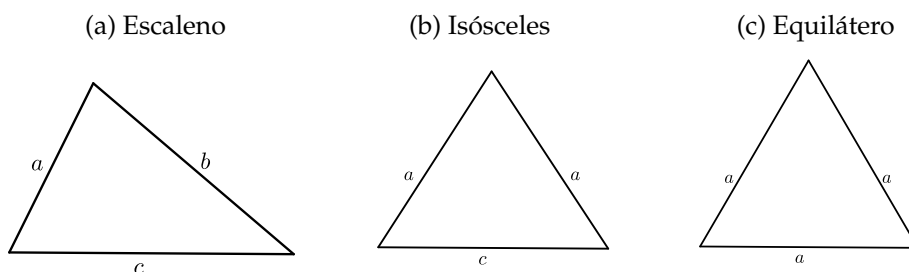
Figura 9 – O gráfico (d) é obtido do gráfico (a), essencialmente, através de movimentos horizontais e verticais.



Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplo 3. O trecho “dado um triângulo qualquer...”, de um enunciado, significa que o triângulo em discussão possui lados medindo a, b e c , que podem ser quaisquer valores, desde tornem a construção do triângulo possível: o triângulo ideal para esse enunciado tem a forma do triângulo escaleno. O triângulo equilátero é obtido pela particularização $a = b = c$ e o triângulo isósceles pela particularização $a = b$ (Figura 10).

Figura 10 – Triângulos de lados a, b e c .



Fonte: Elaborada pela autora.

O triângulo retângulo é útil em muitos casos devido à sua riqueza de propriedades, é uma particularização de triângulos quanto aos ângulos, neste caso, algum de seus ângulos internos é reto.

São interessantes as observações feitas por Davis e Hersh (1995) a respeito da particularização e da generalização:

É importante termos sempre em atenção que, embora o geral inclua alguns aspectos do particular, não pode incluí-los todos e que a própria especificidade confere privilégios suplementares. É desta forma que a teoria dos triângulos equiláteros não está contida na teoria dos triângulos isósceles. (...). Assistimos, pois, ao passarmos do particular para o geral, a dramáticas redefinições do que é importante e do que deve ser salientado.

(...)

Por ampliar o palco sobre o qual se desenrola a acção matemática, a generalização resulta num aumento de conhecimento. A consolidação pode revelar-se impossível se o estreito palco original possuir particularidades que lhe são essenciais (Davis; Hersh, 1995, p. 134 - 135).

2.2.1 PARTICULARIZAÇÃO PARA OBTER CONTRA-EXEMPLOS

É atribuído a Euler a observação de que $p(n) = n^2 - n + 41$ é primo para $n = 1, 2, \dots, 40$ (Boyer; Merzbach, 2012). Como $p(41) = 41^2$, é falso que $p(n)$ seja primo para todo n . Esse exemplo serve para ilustrar como generalizações apressadas podem levar a erros.

“(...) bastará uma exceção para refutar irrevogavelmente qualquer regra ou enunciado genérico” (Pólya, 2006, p. 125).

Fermat afirma, dentre outras coisas, que $2^{2^n} + 1$ era sempre primo. Em 1732, Euler mostrou que essa afirmação era falsa, pois $2^{2^5} + 1 = 6700417 \times 641$ (veja Boyer; Merzbach, 2012, p. 310).

“O enunciado pretensamente genérico é relativo a um certo conjunto de elementos; para refutá-lo, *particularizamos*, isto é, retiramos do conjunto um elemento que não o satisfaça” (Pólya, 2006, p.125).

2.2.2 PARTICULARIZAÇÃO PARA TESTAR UM RESULTADO

Considere um trapézio de base maior B , base menor b e altura h . Tendo encontrado uma fórmula para a área desse trapézio

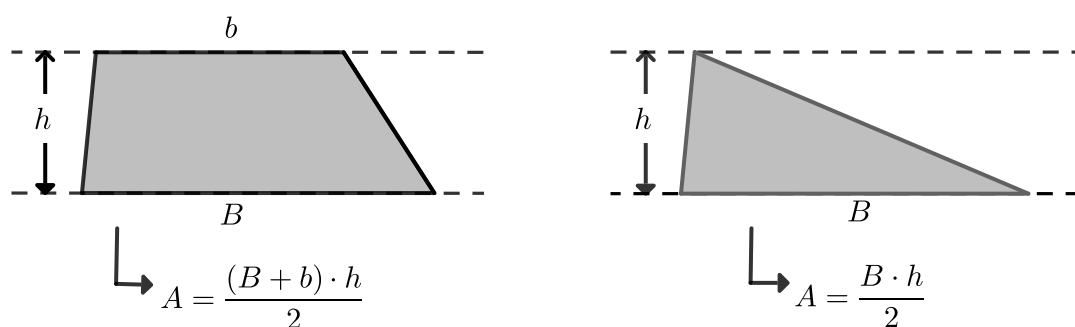
$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}, \quad (2.2)$$

Suponha que estivéssemos um pouco inseguros quanto a sua validade, poríamos verificar essa fórmula por particularização. Por exemplo, se $b = 0$, o trapézio se transforma em um triângulo de base B e altura h e a fórmula da área do trapézio se transforma na fórmula da área do triângulo $A = \frac{B \cdot h}{2}$ (Figura 11).

Ao obter a fórmula da área do triângulo (que já conhecíamos) por uma particularização da fórmula da área do trapézio, a confiança na validade da nossa fórmula aumenta.

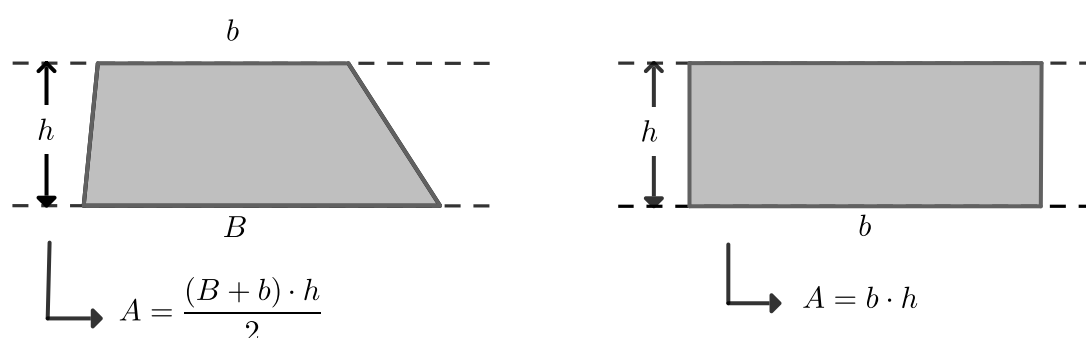
De modo análogo, o retângulo de base B e altura h também pode ser obtido por particularização do trapézio. Assim, a fórmula da área do retângulo deve ser obtida da fórmula da área do trapézio quando se faz $B = b$. De fato $A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{2b \cdot h}{2} = b \cdot h$ (Figura 12).

Figura 11 – Trapézio e triângulo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 12 – Trapézio e retângulo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Não é instrutivo verificar um argumento pela mera checagem linear dos cálculos, “(...) se errarmos uma, provavelmente erraremos outras vezes (...)” (Pólya, 2006, p. 77). Note que uma particularização bem sucedida não prova que a fórmula inicial está correta, mas se a fórmula não funcionar em um caso particular, é porque está errada.

Por que usar um tipo de verificação como essa e não simplesmente uma checagem passo a passo do argumento? “Primeiro, a simples repetição torna-se enfadonha e cansativa e não é instrutiva. Segundo, se errarmos uma provavelmente erraremos outras vezes, caso as circunstâncias forem as mesmas” (Pólya, 2006, p. 77).

“É muito bom prever as propriedades do resultado que procuramos atingir, pois elas nos proporcionam valiosas indicações e, de qualquer modo, quando chegarmos à fórmula final teremos elementos para testá-la” (Pólya, 2006, p. 182).

2.2.3 O PROBLEMA DAS DUAS PANQUECAS

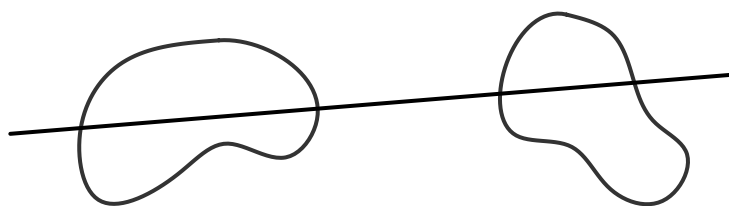
A seguir vamos reproduzir, com algumas adaptações, uma experiência relatada por Davis e Hersh (1995) sobre como um dos autores, usando particularização e generalização, reformulou a demonstração de um teorema em sala de aula, saindo de uma clássica “crise de compreensão” gerada por uma demonstração excessivamente formal.

Vamos manter a terminologia dos autores: figuras planas e fechadas também são

chamadas de panquecas e retas também são chamadas de cortes. Assim, bissectar uma panqueca com um corte significa intersectá-la com uma reta de modo que se obtenha duas figuras de mesma área.

Teorema 1 (Problema das duas panquecas). *Dadas duas panquecas quaisquer, mostre que existe um corte que bissecta simultaneamente as duas panquecas (Figura 13).*

Figura 13 – Problema das duas panquecas.



Fonte: Davis e Hersh (1995, p. 260, reprodução e adaptação nossa).

Entendendo o problema. Para que os alunos compreendam o problema, o professor escolhe resolver um caso mais simples, usando o Teorema do Valor Intermediário de maneira intuitiva.

Seja P uma panqueca arbitrária (Figura 14 - a). Para cada número x_1 no intervalo $[0, 1]$ seja

$A(x_1)$ = proporção da área da panqueca P que está à esquerda do corte $x = x_1$.

Note que $A(0) = 0\%$ e $A(1) = 100\%$, e quando x varia de $x = 0$ até $x = 1$, a proporção $A(x)$ varia de 0% até 100% . Logo haverá um ponto c tal que

$$A(c) = 50\%.$$

Assim, o corte $x = c$ divide a panqueca P em duas figuras de mesma área (Figura 14 - b).

O lema seguinte pôde ser aceito sem dificuldade pelos alunos:

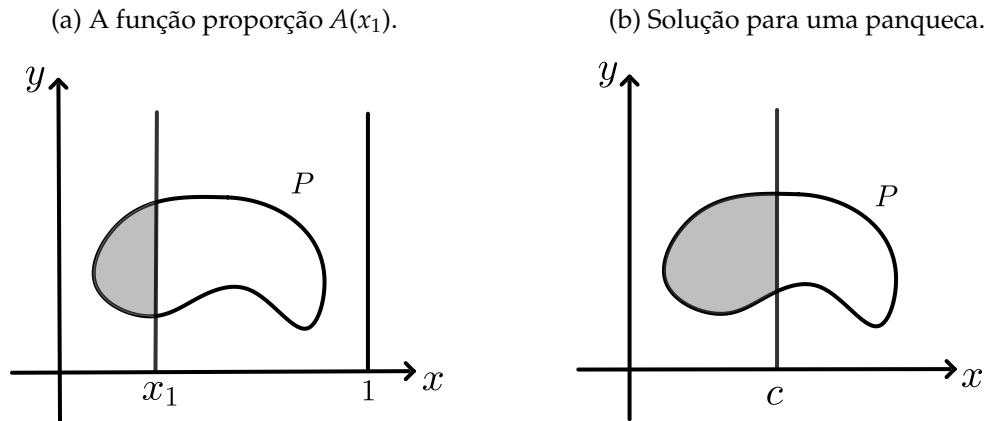
Lema 1. *Dada uma panqueca P e uma direção arbitrária θ , com $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, existe um único corte nessa direção ou perpendicular a essa direção que bissecta a panqueca.*

Para cada θ , considere o eixo x' que forma, em sentido anti-horário, um ângulo θ com o eixo x , como na Figura 15 - a.

Pelo Lema 1, cada ângulo θ determina uma perpendicular a x' que bissecta a panqueca P . A interseção dessa perpendicular com o eixo x' determina o número $p(\theta)$ (Figura 15 - b).

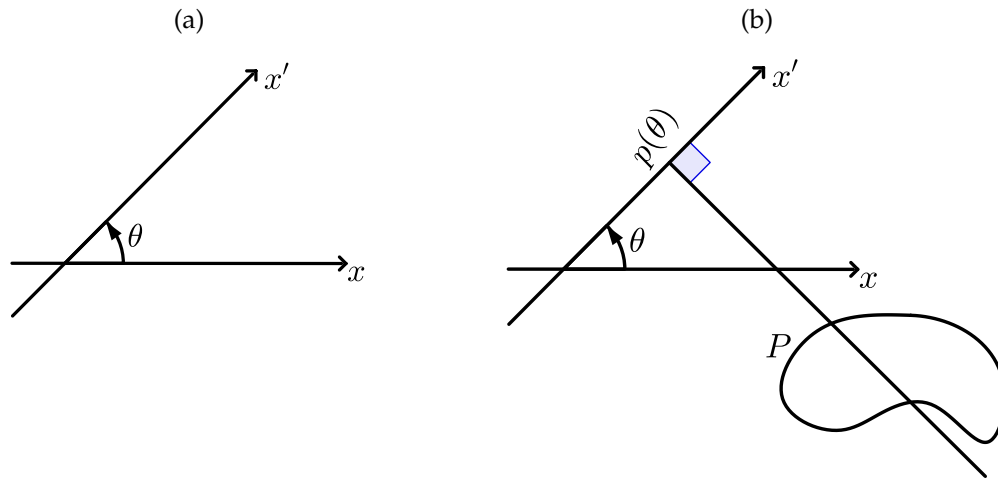
Agora estamos preparados para resolver o problema das panquecas.

Figura 14 – Caso particular de uma panqueca.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 15 – Ilustração do Lema 1.



Fonte: Elaborada pela autora.

A demonstração (excessivamente) formal

Desenha-se uma circunferência arbitrária contendo as panquecas P e Q , e com diâmetro sobre o eixo x . Considere o eixo x' , que passa pelo centro da circunferência e forma, em sentido anti-horário, um ângulo θ com o eixo x (Figura 16 - a).

Para cada θ , defina o número $p(\theta)$, que é o ponto de interseção do eixo x' com a perpendicular que bissecta a panqueca P (Figura 16 - b). De maneira análoga se define o número $q(\theta)$, com respeito a panqueca Q .

Considere agora $r(\theta) = p(\theta) - q(\theta)$.

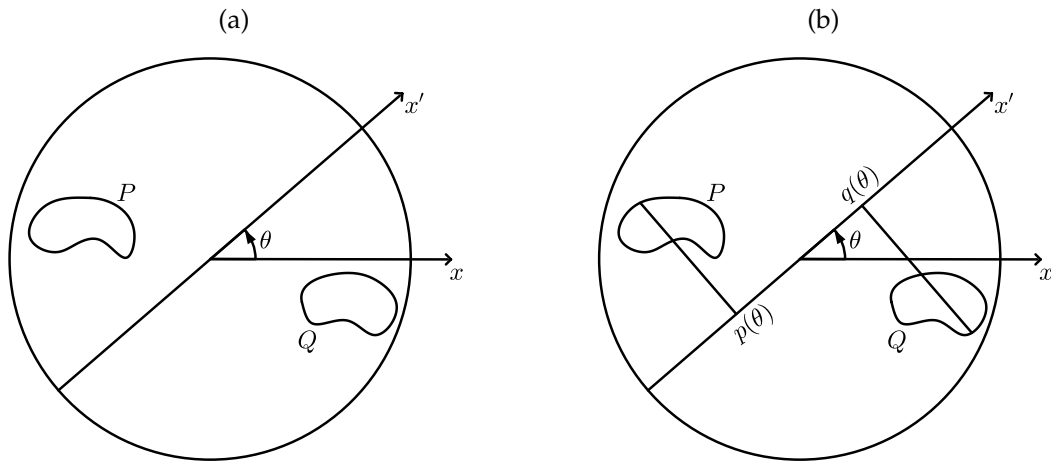
“Este foi o ponto de crise: gritos de ‘porquê?, não compreendo!, pode repetir!, estou confuso!’ ” (Davis; Hersh, 1995, p. 262).

Primeira reação do professor a crise:

“Vá lá, considerem $p(\theta) - q(\theta)$. Verão que funciona! Deixe-me prosseguir!” (Davis; Hersh, 1995, p. 262).

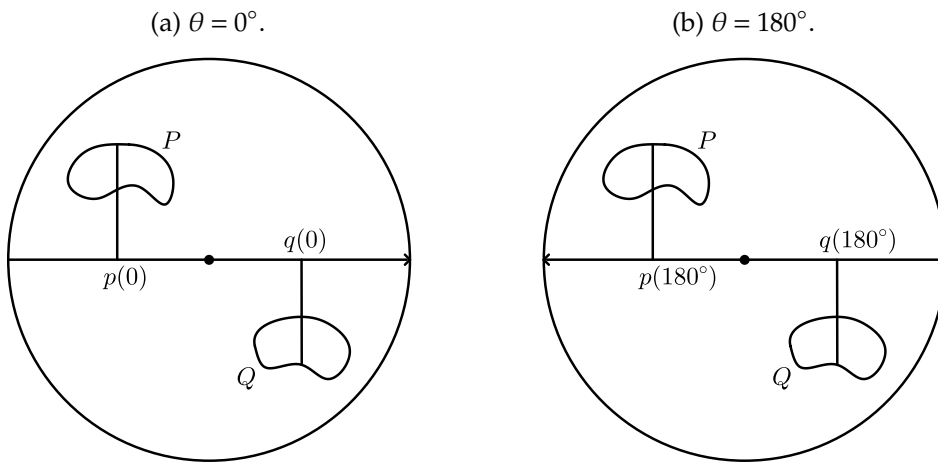
Observe que x' dá meia-volta quando θ varia de 0° até 180° , logo os eixos

Figura 16 – Resolvendo o problema das panquecas.



Fonte: Davis e Hersh (1995, p. 262, reprodução e adaptação nossa).

correspondentes a $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 180^\circ$ possuem sentidos opostos. Por outro lado, as retas que bissectam as panquecas P e Q quando $\theta = 0^\circ$ são as mesmas que bissectam P e Q quando $\theta = 180^\circ$ (Figura 17).

Figura 17 – Bissecção das panquecas P e Q .

Fonte: Davis e Hersh (1995, p. 262, reprodução e adaptação nossa).

Portanto $p(180^\circ) = -p(0^\circ)$ e $q(180^\circ) = -q(0^\circ)$. Logo

$$\begin{aligned}
 r(180^\circ) &= p(180^\circ) - q(180^\circ) \\
 &= -p(0^\circ) - (-q(0^\circ)) \\
 &= -(p(0^\circ) - q(0^\circ)) \\
 &= -r(0^\circ).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Temos duas possibilidades: $r(0^\circ) = 0$ ou $r(0^\circ) \neq 0$.

Se $r(0^\circ) = 0$ então $p(0^\circ) = q(0^\circ)$. Isso significa que as panquecas P e Q são bissectadas pelo mesmo corte, o que resolve o problema.

Se $r(0^\circ) \neq 0$ segue a igualdade $r(180^\circ) = -r(0^\circ)$ obtida em (2.3) que $r(\theta)$ muda de sinal quando θ varia de 0° até 180° . Isso significa que existe um ângulo θ' tal que $r(\theta') = 0$, isto é, $p(\theta') = q(\theta')$. Isso resolve o problema porque θ' fornece o mesmo corte que bissecta as panquecas P e Q .

A minha primeira reacção à crise foi pensar: porque ocorreu exactamente naquele ponto? Numa 'mera' definição, que até nem era a parte mais complicada. Bem, talvez fosse a última gota de água. Tínhamos acumulado alguns pontos mais complexos. O lema parece ter sido fácil. Desenhar uma circunferência à volta das panquecas foi misterioso. A medição das abcissas ao longo do raio foi complicada. Os símbolos $p(\theta)$, $q(\theta)$, despertam toda a insegurança da inexperiência na utilização da notação funcional. Revendo a demonstração de acordo com o exposto acima, fiquei com a sensação de que, no máximo, tinha conseguido convencer a minha turma a aceitar o teorema sem compreender a demonstração. Também se tomou claro que, após se ter gerado esta barreira inicial, ela não seria clarificada repetindo simplesmente a demonstração, mesmo com o mais ínfimo pormenor. Era necessária uma nova abordagem (Davis; Hersh, 1995, p. 263).

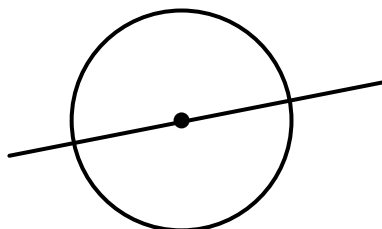
Gerando intuições preliminares.

Depois da crise, voltei para o meu escritório e construí (e documentei) uma demonstração ligeiramente diferente, que evitava o passo traumático: seja $r(\theta) = p(\theta) - q(\theta)$. Sabia que o raciocínio da mudança de sinal teria de aparecer, mas utilizá-lo-ia ligeiramente disfarçado (Davis; Hersh, 1995, p. 264).

Problema 8 (Particularização do problema das panquecas). *Dado um círculo qualquer, mostrar que existe uma reta que o divide em duas partes iguais de mesma área.*

Aqui, a particularização consiste em considerar dois círculos sobrepostos. Nesse caso, qualquer reta que contenha algum diâmetro do círculo é uma solução para o problema, conforme a Figura 18.

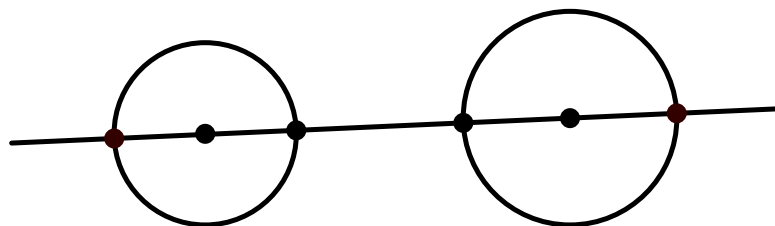
Figura 18 – Círculos sobrepostos.



Fonte: Davis e Hersh (1995, p. 261, reprodução e adaptação nossa).

Problema 9 (Particularização do problema das panquecas). *Resolver o problema das panquecas no caso em que elas são circulares.*

Figura 19 – Círculos distintos.



Fonte: Davis e Hersh (1995, p. 262, reprodução e adaptação nossa).

Nesse caso particular, há uma única solução, a reta que passa pelos centros dos dois círculos (Figura 19).

Problema 10 (Generalização do problema das panquecas). *O problema das panquecas para três círculos, em geral, não tem solução.*

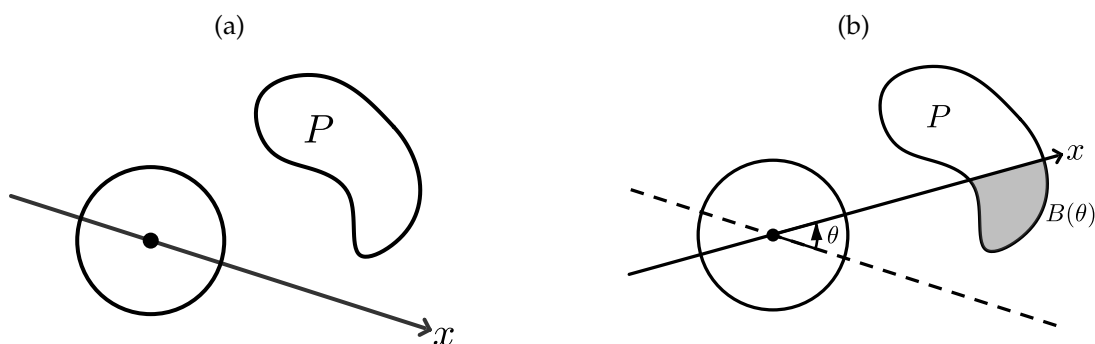
De fato, uma reta que bissecte os três círculos deve passar pelos seus centros, e isso só é possível se esses centros forem colineares.

Verificar essa impossibilidade “(...) é interessante porque põe limites às generalizações do problema [das panquecas]” (Davis; Hersh, 1995, p. 264), mais ainda, “o conhecimento desses limites aumenta o valor da afirmação original” (Davis; Hersh, 1995, p. 264).

Problema 11 (Particularização do problema das panquecas). *Resolver o problema das panquecas no caso no qual uma delas é circular e a outra é uma panqueca qualquer.*

Vamos denominar a panqueca qualquer por P e suponha que ela esteja totalmente fora do círculo. Podemos inserir o eixo x passando por um diâmetro do círculo e de modo a não intersectar a panqueca P , deixando-a inteiramente à esquerda do eixo x , como a Figura 20 - a.

Figura 20 – Uma das panquecas é circular.



Fonte: Davis e Hersh (1995, p. 265, reprodução e adaptação nossa).

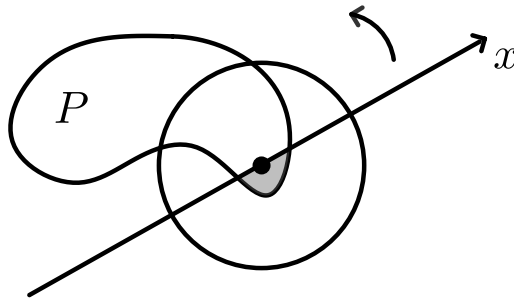
Cada giro do círculo por um ângulo θ , em sentido anti-horário, define $B(\theta)$, a proporção da área da panqueca P que está à direita do eixo x (Figura 20 - b).

Para $\theta = 0^\circ$ a panqueca está inteiramente à esquerda do eixo x , e para $\theta = 100^\circ$ a panqueca está inteiramente à direita do eixo x .

Assim $B(0^\circ) = 0\%$ e $B(180^\circ) = 100\%$ e portanto haverá um ângulo $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ tal que o eixo x bissecta a panqueca P .

Se o círculo e a panqueca P estiverem sobrepostos, não é possível $B(\theta)$ variar de 0% a 100% (veja a Figura 21), mas se o eixo x dar meia-volta completa em sentido anti-horário

Figura 21 – Círculo e panqueca P sobrepostos.



Fonte: Davis e Hersh (1995, p. 265, reprodução e adaptação nossa).

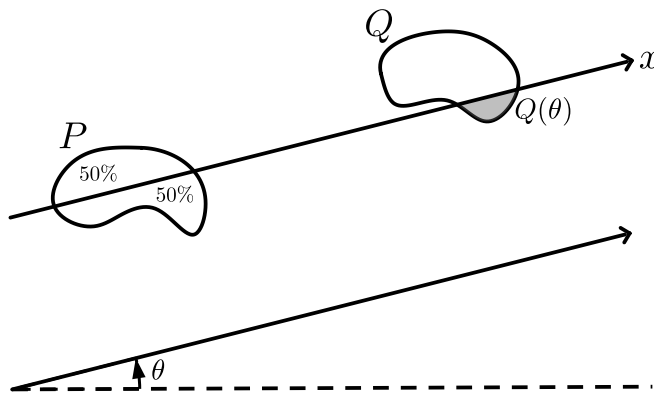
veremos que $B(0^\circ) + B(180^\circ) = 100\%$. Assim, existe um ângulo $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ tal que o eixo x bissecta a panqueca P .

A conclusão

Agora estamos prontos para resolver o problema das panquecas (Teorema 1). Vamos nos libertar do círculo e considerar duas panquecas arbitrárias P e Q .

Pelo Lema 1, para cada direção θ podemos bissectar a panqueca P com uma reta orientada x , com direção e sentido dados por θ (Figura 22).

Figura 22 – A reta x bissecta a panqueca P e determina a proporção $Q(\theta)$ na panqueca Q .



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja $Q(\theta)$ a porcentagem da área da panqueca Q que está à direita da reta orientada x . Quaisquer que sejam as posições das panquecas P e Q , podemos raciocinar como no Problema 11 e concluir que

$$Q(0^\circ) + Q(180^\circ) = 100\%.$$

Assim, existe uma direção $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ para a qual a reta x bissecta a panqueca Q ; essa reta x também bissecta a panqueca P , pela própria maneira como ela foi definida.

Esta segunda versão assentou bem. Pareceu-me melhor do que a primeira. Talvez fosse devido à exposição anterior. Talvez estivesse mais seguro na minha própria - mente era algo que tinha, de facto, pensado e construído por mim próprio. De qualquer modo, pareceu-me que tinha conseguido um maior nível de compreensão, e a turma passou a uma discussão sobre outros aspectos da crise (Davis; Hersh, 1995, p. 266).

2.3 ANALOGIA

Para Santos (1959), analogia é uma síntese de semelhança e diferença. Pólya ressalta que “objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos *coincidem em certas relações* das suas respectivas partes” (2006, p. 33).

Por exemplo, um paralelogramo retângulo é análogo a um bloco retangular (veja a Figura 3).

Tabela 4 – Analogia entre o paralelogramo e o bloco retangular.

Paralelogramo	Bloco retangular
Cada lado do paralelogramo é paralelo a apenas um outro lado e é perpendicular aos demais.	Cada face do bloco retangular é paralela a apenas uma outra face e é perpendicular às demais.

Fonte: Elaborada pela autora.

“Podemos nos considerar felizes quando, ao tentarmos resolver um problema, conseguimos descobrir *um problema análogo mais simples*” (Pólya, 2006, p. 34).

Tabela 5 – O problema e seu análogo.

Problema	Problema análogo mais simples
Calcular a diagonal de um bloco retangular do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.	Calcular a diagonal de um retângulo do qual são conhecidos o comprimento e a largura.

Fonte: Elaborada pela autora.

A analogia permeia todo o nosso pensamento, a nossa fala cotidiana e as nossas conclusões triviais, assim como os modos de expressão artística e as mais elevadas conclusões científicas. Ela é empregada nos mais diferentes níveis. É comum o uso de analogias vagas, incompletas ou obscuras, porém a analogia pode alçar-se ao nível do rigor matemático. Todos os tipos de analogia podem desempenhar um função na descoberta da solução e, por isso, não devemos desprezar nenhum deles (Pólya, 2006, p. 34).

2.3.1 INFERÊNCIA POR ANALOGIA

A analogia entre segmento, triângulo e tetraedro apresenta muitos aspectos, “sabendo que o triângulo e o tetraedro assemelha-se em muitos aspectos, conjecturamos que ele se assemelham em mais um aspecto” (Pólya, 2006, p. 38), essa conjectura é uma inferência por analogia.

Tabela 6 – Analogias entre segmento, triângulo e tetraedro.

	Pontos	Posição	Dimensão	Medidas
Segmento	A,B	situa-se numa reta	1	comprimento: $d(A,B)$
Triângulo	A,B,C	situa-se num plano	2	área: $1/2(\text{base} \times \text{altura})$
Tetraedro	A,B,C,D	situa-se no espaço	3	volume: $1/3(\text{base} \times \text{altura})$

Fonte: Elaborada pela autora.

Sabemos que o centro de gravidade G de um triângulo ABC coincide com o centro de gravidade dos seus três vértices, isto é, se $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, então

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right).$$

Inferência por analogia: o centro de gravidade de um tetraedro coincide com o centro de gravidade dos seus quatro vértices.

“A inferência por analogia parece ser o tipo mais comum de conclusão (...). Proporciona conjecturas mais ou menos plausíveis que podem ou não ser confirmadas pela experiência e pelo raciocínio mais rigoroso” (Pólya, 2006, p. 38).

Problema 12. *Encontrar o centro de gravidade de n pontos no plano.*

$G_1 = (x_1, y_1)$ é o centro de gravidade do ponto $P_1 = (x_1, y_1)$.

$G_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ é o centro de gravidade dos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

$G_3 = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$ é o centro de gravidade dos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$.

Continuariam essas afirmações válidas para $n = 4, 5, \dots$?

Será que $G_n = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \right)$ é o centro de gravidade de n pontos no plano $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$?

Essa última conjectura “é uma ‘inferência por indução’ e mostra que a indução baseia-se naturalmente na analogia” (Pólya, 2006, p. 40).

“A indução é o processo da descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as ciências, inclusive na Matemática” (Pólya, 2006, p. 104).

Não confundir “indução” com “indução matemática”, que “(...) é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo” (Pólya, 2006, p. 104).

“(...) a analogia é certamente uma das principais fontes da invenção” (Pólya, 2006, p. 167).

2.3.2 UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

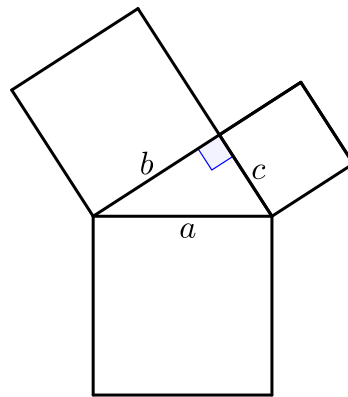
Nesta seção vamos descrever como Pólya (2014) usou os procedimentos de generalização, particularização e analogia para fornecer uma nova demonstração do Teorema de Pitágoras.

O que Pólya faz é mostrar que o Teorema de Pitágoras é equivalente à seguinte generalização dele:

Teorema 2 (Pólya). *Se três polígonos semelhantes são construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, a área daquele construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos outros dois.*

Não é difícil perceber que o Teorema 2 é uma generalização do Teorema de Pitágoras porque, na Figura 23, os quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são semelhantes e o Teorema de Pitágoras diz que a área do quadrado maior é igual a soma das áreas dos quadrados menores ($a^2 = b^2 + c^2$).

Figura 23 – Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborada pela autora.

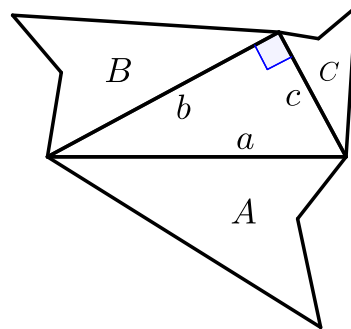
Na Figura 24, os polígonos construídos sobre os lados do triângulo são semelhantes entre si.

Seja λ um número tal que $A = \lambda a^2$ (assim $\lambda = A/a^2$). Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança (veja Lima, 2009). Então

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow B = A \frac{b^2}{a^2} = (\lambda a^2) \frac{b^2}{a^2} = \lambda b^2,$$

$$\frac{C}{A} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow C = A \frac{c^2}{a^2} = (\lambda a^2) \frac{c^2}{a^2} = \lambda c^2.$$

Figura 24 – Generalização de Pólya.



Fonte: Elaborada pela autora.

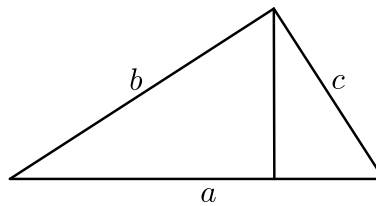
$$\text{Então } a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \lambda a^2 = \lambda b^2 + \lambda c^2 \Leftrightarrow A = B + C.$$

Isso mostra que o Teorema de Pitágoras é equivalente ao Teorema 2.

Aqui Polya fez uma observação fundamental, o Teorema 2 é equivalente a qualquer caso particular dele.

Assim basta procurar por um caso particular cujas condições do Teorema 2 seja fácil de observar.

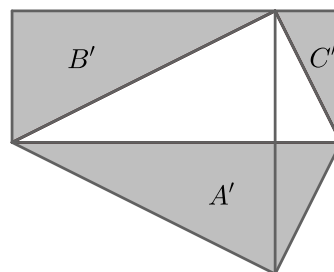
Figura 25 – Triângulo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Esse caso particular está dado pela Figura 26, cuja analogia com a Figura 23 fica mais fácil de enxergar se “abrirmos” a Figura 25.

Figura 26 – Analogia.



Fonte: Elaborada pela autora.

É claro que $A' = B' + C'$ e sabemos que os três triângulos da Figura 26 são semelhantes entre si.

Agora, basta repetir o procedimento anterior, usando a Figura 24 no lugar lugar da Figura 23:

$$A = \lambda A' \ (\lambda = A/A')$$

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{B'}{A'} \Rightarrow B = \frac{B'}{A'}A;$$

$$\frac{C}{A} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{C'}{A'} \Rightarrow C = \frac{C'}{A'}A;$$

$$\text{Então } B + C = \left(\frac{B'}{A'} + \frac{C'}{A'}\right)A = \frac{B' + C'}{A'}A.$$

Portanto $A = B + C \Leftrightarrow A' = B' + C'$. Isso prova o Teorema 2 e, consequentemente, o Teorema de Pitágoras.

3 O ENSINO, NA VISÃO DE PÓLYA

3.1 UMA ENTREVISTA IMAGINÁRIA COM GEORGE PÓLYA

A seguir, temos uma entrevista imaginária com o autor George Pólya, as perguntas foram elaboradas pela autora deste trabalho de acordo com algumas respostas que são encontradas no livro *A arte de resolver problemas* (2006).

1. O que é resolver um problema? O que é ensinar a resolver problemas?
“(...) resolver um problema consiste, essencialmente, em encontrar a conexão entre os dados e a incógnita” (p. 166). “Ensinar a resolver problemas é educar a vontade” (p. 131).
2. Qual é a regra mais importante para ensinar?
“A primeira regra de ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar” (p. 153).
3. Que deve fazer um professor que deseja ensinar seus alunos a resolver problemas?
“(...) um professor de Matemática deverá saber algo de Matemática e (...) aquele que desejar incutir em seus alunos a correta atitude mental para com os problemas deverá ter, ele próprio, adquirido essa atitude” (p. 153).
4. Então para resolver um problema não basta apenas saber matemática?
“Seria um engano supor que a resolução de problemas seja puramente uma ‘questão intelectual’: persistência e emoções desempenham, nesse caso, um papel importante” (p. 130).
5. Como se deve começar a resolver um problema?
“(...) precisamos (...) reunir e selecionar os itens relevantes do nosso conhecimento que se encontram em estado latente. (...). O Ato de extrair da nossa memória esses elementos relevantes pode ser chamado de *mobilização*” (p. 149).
6. Após a mobilização, há algum outro passo que possa ser nitidamente distinguido?
“Precisamos combinar esses fatos isolados e a sua combinação deve ficar bem adaptada ao problema em questão. (...). Essa atividade de adaptar e combinar pode ser chamada de *organização*” (p. 149).

7. Quais sinais de progresso podemos notar ao tentar resolver um problema?
“Avanço da mobilização e da organização dos nossos conhecimentos, evolução da nossa concepção do problema, previsão cada vez maior dos passos que constituirão o argumento final” (p. 150).
8. Quando os alunos estiverem progredindo na resolução, o que o professor deve fazer?
“Se (...) progridem, não necessitam de auxílio e o professor não lhes deve fazer qualquer pergunta, mas sim deixá-los trabalhar sozinhos, o que é, obviamente, muito melhor para a sua independência” (p. 184).
9. E se eles não estiverem fazendo progresso?
“O professor deve (...) tentar encontrar alguma questão adequada ou sugestões que possam auxiliar os alunos, quando estes não conseguirem ir adiante, porque aí há o risco de que o estudante se canse e abandone o problema (...)” (p. 184).
10. Como seria essa questão adequada?
“(...) o professor poderá começar pela variação dos dados do problema” (p. 182).
11. A variação do problema pode nos ajudar a suportar a falta de progresso?
“(...) se deixarmos de progredir, a atenção vacila, o interesse define e surge o risco da perda total do problema. Para escapar deste risco, temos de *nos propor uma nova indagação* sobre o problema” (p. 182).
12. É possível mostrar como se faz isso aos alunos?
“O professor pode mostrar a derivação de novos problemas a partir de um outro que acaba de ser resolvido e, assim fazendo, despertar a curiosidade de seus alunos” (p. 76).
13. E quando o meu progresso fica bloqueado, nenhuma ideia me ocorre e começo a me cansar?
“Qualquer questão que tenha possibilidade de mostrar um novo aspecto do problema será bem-vinda; ela poderá reconquistar o interesse e, assim, manter-nos a trabalhar e a pensar” (p. 184).

14. Qual a importância psicológica de se variar o problema?
“Não podemos esperar resolver um problema sério sem uma concentração intensa. Mas facilmente cansamos se concentramos intensamente a atenção num mesmo ponto. Para mantê-la viva, o objeto (...) deve variar continuamente” (p. 182).
15. O que é um raciocínio heurístico?
“É aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta” (p. 152).
16. O raciocínio heurístico é baseado em algum outro processo?
“Muitas vezes o raciocínio heurístico é baseado na indução ou na analogia” (p. 152).
17. Há alguma precaução quanto ao uso do raciocínio heurístico no ensino?
“O raciocínio heurístico vale por si próprio. O que é mau é confundi-lo com a demonstração rigorosa. Pior ainda é fazer passar um raciocínio heurístico por uma demonstração rigorosa” (p. 152).
18. O que pretende a Heurística? Quais são os seus objetos de estudo?
“Uma espécie razoável de heurística não poderá almejar regras infalíveis, mas sim tentar o estudo de processos mentais (operações, passos, lances) específicos, que contribuam para a solução de problemas” (p. 153).
19. Por fim, uma última pergunta, o que é mestria?
“A aplicação de uma regra com naturalidade, com discernimento, observando os casos aos quais ela é aplicável e sem jamais deixar o enunciado da regra obscurecer o objetivo da ação ou as oportunidades da situação, é mestria” (p. 129).

CONCLUSÃO

O trabalho focou na utilização das operações mentais de generalização, particularização e analogia na perspectiva de Pólya sobre a resolução de problemas. Através dos conceitos e aplicações abordados, pudemos obter um melhor entendimento da teoria de Resolução de Problemas de Pólya.

Vimos que foi tentando entender como os matemáticos encontravam seus resultados, que Pólya publicou muitos trabalhos relacionados à resolução de problemas.

É o trabalho com problemas, e não com meros exercícios, que possibilita iniciativas mais interessantes: examinar as suas partes, fazer reduções, introduzir problemas auxiliares ou variar o problema.

São nessas variações do problema que situam-se a generalização, a particularização e a analogia. Ao generalizarmos figuras, propriedades, expressões algébricas, expressões numéricas e padrões (em problemas de determinação) e ao generalizarmos problemas de demonstração através de enfraquecimentos de hipóteses, combinadas com mudança ou permanência de conclusões, temos uma oportunidade para consolidação dos conhecimentos.

A particularização, além de servir para refutar enunciados genéricos precipitados, no qual basta um único contra-exemplo para provar a sua falsidade, é útil também para testar fórmulas em casos particulares, possibilitando uma melhor compreensão do problema (como vimos no problema das duas panquecas), e consequente sucesso na resolução de um problema. A compreensão geralmente começa com a exploração de casos mais simples.

Usar analogia é perceber características comuns de objetos distintos. Através dela, podemos descobrir um problema análogo mais simples que pode ser usado para resolver o problema inicial.

Na percepção da autora, uma licencianda em Matemática que teve seus estudos na Educação Básica baseados nos conteúdos dos livros didáticos, nos quais houve espaço apenas para o trabalho com exercícios, a metodologia de George Pólya surge como uma ferramenta para o melhor desenvolvimento da habilidade de resolver problemas dos futuros alunos.

O interesse pessoal na metodologia começou com a experiência em aulas de práticas ministradas pelo Prof. Dr. Silvio Sandro, onde foi possível observar como o professor pode trabalhar com problemas em sala de aula e como os alunos aprendem através da execução do professor. Posteriormente, encontramos a dissertação de Silva (2022), que guiou a estrutura deste trabalho.

Ressaltou-se a importância das variações dos problemas e da orientação do professor para o progresso na resolução do Problema 7, durante algumas aulas de

Tópicos Especiais em Matemática, sendo primordial a manutenção da persistência e da concentração.

Um prosseguimento e aprofundamento dos temas tratados neste trabalho é o estudo da referência Pólya (2014) que também é, segundo Pólya, uma continuação do livro *A arte de resolver problemas*, porém abordando tópicos de matemática do ensino superior.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDERSON, G. L. *The random walks of George Pólya*. D. C.: Mathematical Association of America, 2000. 300 p.
- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. d. I. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: porque através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. d. I. R. et al. (Orgs.). *Resolução de problemas: teoria e prática*. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37 – 57.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. São Paulo: Blucher, 2012. 508 p.
- BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros nacionais curriculares*. Brasília, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental*. Brasília, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília, 1999.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2017.
- DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva, 1995. 401 p.
- FERREIRA, A. B. d. H. *Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa*. 5. ed. Curitiba: Positivo, 2010.
- FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos matemáticos: a experiência russa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na matemática escolar*. Traduzido por Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.
- LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- MATHEMATICS, N. C. o. T. o. *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston: NCTM, 1980.
- MORAIS, R. d. S.; ONUCHIC, L. d. I. R. Uma abordagem histórica da resolução de problemas. In: ONUCHIC, L. d. I. R. et al. (Orgs.). *Resolução de Problemas: teoria e prática*. São Paulo: Paco Editorial, 2021. cap. 1, p. 19–36.
- O’CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *MacTutor. George Pólya*. 2002. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya/>>. Acesso em 13 ago. 2024.
- PÓLYA, G. *Mathematics Methods in Science*. Mansfield Centre: Mathematical Association of America, 1977.
- PÓLYA, G. *Mathematical discovery on understanding, learning, and teaching problem solving, volumes I and II*. Hoboken: John Wiley Sons, 1981.

PÓLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1998. cap. 1, p. 1–3.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Traduzido por Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203 p.

PÓLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning: Vol. I - Induction and analogy in mathematics, Vol. II - Patterns of Plausible Inference*. Mansfield Centre: Princeton University, 2014.

PÓLYA, G.; HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E. *Inequalities*. London: Cambridge University Press, 1934. 314 p.

PÓLYA, G.; KILPATRICK, J. *The Stanford mathematics problem book: with hints and solutions*. US: Teachers College, 1974.

PÓLYA, G.; SZEGÖ, G. *Problems and Theorems in Analysis I: Series. Integral Calculus. Theory of Functions*. 4. ed. USA: Springer, 1970. 389 p.

PÓLYA, G.; SZEGÖ, G. *Problems and Theorems in Analysis II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry*. 4. ed. USA: Springer, 1971. 392 p.

SANTOS, M. F. d. *Tratado de simbólica*. 2. ed. São Paulo: Logos, 1959. v. 06. 257 p.

SHOENFELD, A. H. Problem solving in the united states, 1970 - 2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education*, Karlsruhe, n. 39, p. 537 – 551, jun. 2007.

SILVA, S. R. *A resolução de problemas matemáticos sob diferentes perspectivas: Um olhar para a resolução de problemas geométricos*. 100 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2022.

SOUZA, M. A. V. F. d.; GUIMARÃES, H. M. A formulação de problemas verbais de matemática: porquê e como. *Quadrante*, Espírito Santo, v. 24, n. 2, p. 135–162, out. 2015.

ZEITZ, P. *The Art and Craft of Problem Solving*. 2. ed. N.Y.: John Wiley Sons, 2006.

APÊNDICE

Problema 13. Encontre a soma $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ dos n primeiros naturais elevados a $k \in \mathbb{N}$.

Solução:

Denotemos $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$. Como $(1+n)^2 = 1^2 + 2n + n^2$, isto é, $(1+n)^2 - n^2 = 1 + 2n$, podemos escrever

$$\begin{aligned} 2^2 - 1^2 &= 1 + 2.1 \\ 3^2 - 2^2 &= 1 + 2.2 \\ 4^2 - 3^2 &= 1 + 2.3 \\ &\vdots \\ (1+n)^2 - n^2 &= 1 + 2n. \end{aligned}$$

Somando membro a membro, temos

$$\begin{aligned} (1+n)^2 - 1^2 &= n + 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ 2n + n^2 &= n + 2S_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$S_1 = \frac{n(1+n)}{2}.$$

Agora iremos calcular S_2 . Como $(1+n)^3 = 1 + 3n + 3n^2 + n^3$, temos

$$(1+n)^3 - n^3 = 1 + 3n + 3n^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2^3 - 1^3 &= 1 + 3.1 + 3.1^2 \\ 3^3 - 2^3 &= 1 + 3.2 + 3.2^2 \\ 4^3 - 3^3 &= 1 + 3.3 + 3.3^2 \\ &\vdots \\ (1+n)^3 - n^3 &= 1 + 3n + 3n^2. \end{aligned}$$

Somando membro a membro, temos

$$(1+n)^3 - 1^3 = n + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Substituindo $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ e $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ na igualdade acima, segue que

$$(1+n)^3 - 1 = n + 3 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] + 3S_2. \quad (3.1)$$

Substituindo $(1+n)^3 = 1+3n+3n^2+n^3$ acima, temos que

$$\begin{aligned} 3S_2 &= 3n+3n^2+n^3-n-\left[\frac{3n(n+1)}{2}\right] \\ 3S_2 &= \frac{2n^3+6n^2-3n^2+6n-3n-2n}{2} \\ S_2 &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6} \\ S_2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Vamos agora generalizar o procedimento acima para encontrar S_k . Segue do Binômio de Newton que

$$(1+n)^{k+1}-n^{k+1} = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} n^i.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} 2^{k+1}-1^{k+1} &= 1+\binom{k+1}{1}1+\binom{k+1}{2}1^2+\dots+\binom{k+1}{k}1^k \\ 3^{k+1}-2^{k+1} &= 1+\binom{k+1}{1}2+\binom{k+1}{2}2^2+\dots+\binom{k+1}{k}2^k \\ 4^{k+1}-3^{k+1} &= 1+\binom{k+1}{1}3+\binom{k+1}{2}3^2+\dots+\binom{k+1}{k}3^k \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (1+n)^{k+1}-n^{k+1} &= n+\binom{k+1}{1}n+\binom{k+1}{2}n^2+\dots+\binom{k+1}{k}n^k. \end{aligned}$$

Somando membro a membro, temos

$$\begin{aligned} (1+n)^{k+1}-1^{k+1} &= n+\binom{k+1}{1}(1+2+3+\dots+n)+\binom{k+1}{2}(1^2+2^2+ \\ &\quad +3^2+\dots+n^2)+\dots+\binom{k+1}{k}(1^k+2^k+3^k+\dots+n^k). \end{aligned}$$

Substituindo $S_1 = 1+2+\dots+n$, $S_2 = 1^2+2^2+\dots+n^2, \dots$, $S_k = 1^k+2^k+\dots+n^k$ na igualdade acima, obtemos

$$(1+n)^{k+1}-1 = n+\binom{k+1}{1}S_1+\binom{k+1}{2}S_2+\dots+\binom{k+1}{k}S_k.$$

Lembrando que $\binom{k+1}{k} = k+1$, temos

$$(1+n)^{k+1}-(1+n) = \binom{k+1}{1}S_1+\binom{k+1}{2}S_2+\dots+\binom{k+1}{k-1}S_{k-1}+(k+1)S_k. \quad (3.2)$$

Sendo

$$\sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} S_i = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k+1}{i} S_i + (k+1) S_k,$$

podemos escrever (3.2) como

$$(1+n)^{k+1} - (1+n) = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k+1}{i} S_i + (k+1) S_k.$$

Isolado S_k , obtemos finalmente

$$S_k = \frac{(1+n)^{k+1} - (1+n) - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k+1}{i} S_i}{k+1}.$$