

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM E APLICAÇÕES

CIRO CASTRO DE ARAUJO

GOIÂNIA - GOIÁS
2024

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Lino Castro de Araújo
Matrícula: 20202010940020
Título do Trabalho: Equação diferencial de 2º ordem e Aplicações

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 26/09/24.
Local Data

Lino Castro de Araújo
Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

CIRO CASTRO DE ARAUJO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM E APLICACÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Goiás - IFG - Câmpus
Goiânia, como requisito parcial para obten-
ção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Professora Dra. Karoline Victor Fernandes

GOIÂNIA - GOIÁS

2024

Ar15e	Araujo, Ciro de Castro Equações diferenciais de segunda ordem e aplicações / Ciro de Castro Araujo. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2024. 48 f.: il. Orientadora: Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes. TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. 1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Sistemas Massa-Mola. I. Fernandes, Karoline Victor (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título. CDD 515.35
-------	--

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva CRB1/ 2.740
 Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM E APLICAÇÕES

por

CIRO CASTRO DE ARAUJO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 20 de setembro de 2024, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Márcio Dias de Lima (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Uender Barbosa de Souza (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- **Marcio Dias de Lima**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 20/09/2024 14:13:17.
- **Uender Barbosa de Souza**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 20/09/2024 14:09:47.
- **Karoline Victor Fernandes**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 20/09/2024 14:08:55.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 10/09/2024. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 562276
Código de Autenticação: fe1e105cf2



Dedicatória

Dedico as duas mulheres mais importantes da minha vida, minha avó que apesar de todas as dificuldades sempre esteve presente me dando suporte, ate hoje sua lembrança me da forças a seguir em frente e a minha mãe com sua resiliência e exemplo de pessoa.

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus por estar aqui, expresso minha profunda gratidão a minha família e noiva que sempre me deu amparo e suporte na minha permanência no curso. Agradeço profundamente a Professora Karoline, por sua orientação, paciência e incentivo ao longo deste projeto, foram importantíssimos para mim. Suas sugestões e conhecimentos compartilhados foram essenciais.

A equipe docente do curso de Licenciatura em Matematica do IFG, agradeço por transmitirem seu conhecimento de maneira envolvente e inspiradora. Cada aula, conversa e explicação contribuíram para a minha compreensão, interesse e permanência no curso.

Não posso deixar de expressar minha gratidão aos meus colegas e amigos de classe, cujas discussões e trocas de ideias enriqueceram meu aprendizado. As horas de estudo em grupo e os debates foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

Por fim, desejo estender meus agradecimentos a todos que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho e para a minha formação. Toda interação, lição aprendida e experiência vivida deixaram uma marca imutável em minha trajetória acadêmica e profissional.

Resumo

Este trabalho aborda as equações diferenciais ordinárias (EDOs) de segunda ordem, com ênfase em suas aplicações em sistemas físicos, como o sistema massa-mola e circuitos elétricos RLC. Inicialmente, são discutidos os métodos de resolução dessas equações, tanto para sistemas homogêneos quanto não homogêneos, com a apresentação das soluções gerais e particulares. No caso do sistema massa-mola, a equação diferencial descreve o movimento oscilatório, levando em conta forças como atrito e a força restauradora da mola. Já no circuito LRC, as EDOs modelam o comportamento de corrente e carga no circuito, influenciadas por resistência, indutância e capacitância. O estudo explora como esses modelos matemáticos são essenciais para entender e prever o comportamento dinâmico desses sistemas, enfatizando suas aplicações em engenharia e física. A análise evidencia a importância das EDOs de segunda ordem na descrição de fenômenos de oscilação e amortecimento, fornecendo uma base sólida para o entendimento de sistemas reais.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem; Sistema Massa Mola, Circuito RLC.

Abstract

This work addresses second-order ordinary differential equations (ODEs), with an emphasis on their applications in physical systems such as the mass-spring system and electrical RLC circuits. Initially, the methods for solving these equations are discussed, both for homogeneous and non-homogeneous systems, with the presentation of general and particular solutions. In the case of the mass-spring system, the differential equation describes oscillatory motion, taking into account forces such as friction and the restoring force of the spring. As for the LRC circuit, ODEs model the behavior of current and charge in the circuit, influenced by resistance, inductance, and capacitance. The study explores how these mathematical models are essential for understanding and predicting the dynamic behavior of these systems, emphasizing their applications in engineering and physics. The analysis highlights the importance of second-order ODEs in describing phenomena of oscillation and damping, providing a solid foundation for understanding real systems.

Keywords: Second-order ordinary differential equations (ODEs); Mass-spring system; LRC circuit.

Sumário

1	Introdução	13
2	Preliminares	15
2.1	Equações lineares de primeira ordem	16
2.2	Equações lineares de primeira ordem não homogêneas	18
2.3	Equações de primeira ordem não-lineares	19
2.3.1	Teorema de existência e unicidade	19
2.3.2	Equações de Variáveis Separáveis	21
2.3.3	Equações Exatas	22
2.3.4	Fatores integrantes	26
2.3.5	Equações não-lineares Homogêneas	28
3	Equações lineares de Segunda Ordem	30
3.1	Equações Lineares Homogêneas	31
3.2	Redução de Ordem	39
3.3	Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes	40
3.3.1	Raízes reais distintas	40
3.3.2	Raízes reais iguais	40
3.3.3	Raízes não reais	41
3.4	Equações Lineares Não-Homogêneas	43
3.4.1	Método dos coeficientes indeterminados	44
3.4.2	Método da variação dos parâmetros	47
4	Aplicações das equações de segunda ordem	50
4.1	Sistemas Massa-Mola: Movimento Livre Não Amortecido	50
4.1.1	Sistemas Massa-Mola: Movimento Livre Amortecido	54
4.1.2	Sistemas Massa-Mola: Movimento Forçado	57

4.2	Circuito em Série Análogo	58
5	Conclusão	61
	Referências	62

1 Introdução

A história das equações diferenciais é rica e multifacetada, refletindo a evolução do pensamento matemático e científico ao longo dos séculos. As equações diferenciais surgiram como uma ferramenta para descrever e entender fenômenos naturais, sendo desenvolvidas paralelamente ao progresso da física, astronomia, e outras ciências (Çengel; III, 2014; Oliveira et al., 1997).

René Descartes (1596–1650), embora não tenha desenvolvido explicitamente as equações diferenciais, introduziu a geometria analítica, que mais tarde forneceu uma base para expressar curvas e superfícies por meio de equações, facilitando a formulação de problemas diferenciais. Pierre de Fermat (1607–1665) desenvolveu métodos que seriam fundamentais para o cálculo diferencial, como o princípio de Fermat na óptica. Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) são, ambos, creditados pelo desenvolvimento do cálculo diferencial e integral no final do século XVII. Newton utilizou o cálculo para formular as leis do movimento e da gravitação universal, introduzindo equações diferenciais para descrever a dinâmica dos corpos. Leibniz, por sua vez, desenvolveu uma notação formal para derivadas e integrais, que ainda é usada hoje. Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783) contribuiu significativamente com o trabalho em equações diferenciais parciais, especialmente em problemas de dinâmica e vibrações, como a equação da onda. Leonhard Euler (1707–1783) foi um dos matemáticos mais prolíficos na história das equações diferenciais. Ele formalizou muitas das ideias em torno de equações diferenciais ordinárias e parciais, desenvolvendo métodos de solução e aplicando-as a problemas em mecânica, hidráulica e astronomia. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) desenvolveu a mecânica analítica, onde as equações diferenciais desempenham um papel central. Sua reformulação das leis de Newton em termos de coordenadas generalizadas e as equações de Lagrange são fundamentais em muitas áreas da física (Boyer; Merzbach, 2019).

O século XIX é marcado pela formalização e surgimento novas áreas de aplicações dessas equações. Sophie Germain (1776–1831) trabalhou em problemas de elasticidade e contribuiu para o desenvolvimento de equações diferenciais em superfícies elásticas. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) e Niels Henrik Abel (1802–1829) contribuíram para a teoria das equações diferenciais, especialmente em relação às integrais elípticas e ao estudo de equações diferenciais de ordem superior. Bernhard Riemann (1826–1866) e Karl Weierstrass (1815–1897) desenvolveram a teoria das funções complexas, que estão intimamente ligadas às equações diferenciais. A formulação de equações diferenciais parciais em superfícies complexas tornou-se um campo importante.

A expansão e abstração dessa teoria surge no século XX. David Hilbert (1862–1943)

trabalhou em equações diferenciais integrais e problemas de valores de contorno, formulando problemas fundamentais que impulsionaram a análise moderna. Andrei Kolmogorov (1903–1987) trabalhou em equações diferenciais estocásticas, que generalizam as equações diferenciais clássicas para incluir a aleatoriedade, sendo fundamentais para a teoria das probabilidades e processos estocásticos. Lars Ahlfors (1907–1996) contribuiu para a teoria das equações diferenciais parciais e a geometria diferencial, trabalhando em tópicos que conectam análise complexa e topologia.

A história das equações diferenciais é marcada por contribuições de muitos matemáticos ao longo dos séculos, refletindo o desenvolvimento contínuo da matemática como ferramenta essencial para descrever o mundo natural. As equações diferenciais continuam a ser uma área central da pesquisa matemática, com aplicações em quase todos os campos da ciência e da engenharia (Boyer; Merzbach, 2019). Com o advento da computação, o estudo das equações diferenciais evoluiu para incluir métodos numéricos e algoritmos computacionais para resolver problemas que antes eram intratáveis analiticamente. As equações diferenciais de ordem superior (maior ou igual a dois) são vitais para a modelagem e compreensão de sistemas complexos em uma ampla gama de disciplinas. Elas fornecem uma visão mais profunda do comportamento dos sistemas dinâmicos, permitem soluções mais precisas e detalhadas, e são fundamentais para a inovação e avanço em ciência, engenharia e tecnologia.

Para abordarmos sobre os métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias usamos majoritariamente os livros (Zill, 2016) e (Boyce; DiPrima, 2010). No Capítulo 1 trataremos sobre as equações diferenciais de primeira ordem. No Capítulo 2 abordamos as de segunda ordem. No Capítulo 3 apresentaremos algumas aplicações seguidas pelas conclusões.

2 Preliminares

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são frequentemente usadas para modelar sistemas dinâmicos em uma ampla gama de campos, como física, engenharia, biologia e economia. Uma EDO é uma equação que envolve uma função desconhecida de uma variável independente e suas derivadas em relação a essa variável.

A ordem de uma EDO é determinada pelo grau mais alto da derivada presente na equação. Por exemplo, uma EDO de primeira ordem envolve apenas a função desconhecida e sua primeira derivada, enquanto uma EDO de segunda ordem envolve a função desconhecida e suas duas primeiras derivadas (Zill, 2016). Resolver uma EDO envolve encontrar uma função que satisfaça a equação diferencial dada, geralmente sujeita a certas condições iniciais ou de contorno.

Denotaremos por $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos e $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possua todas as suas derivadas, a menos que seja indicado o contrário. Denotaremos por:

$$y^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Poderíamos considerar uma EDO de ordem n como uma equação do tipo

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^n) = 0,$$

no entanto isso poderia gerar ambiguidades como o próximo exemplo mostra. A equação $(y'')^2 - y = 0$ dá origem a duas equações: $y'' = \sqrt{y}$ e $y'' = -\sqrt{y}$. Por isso uma EDO de ordem n , na sua forma mais geral será dada por

$$y^n = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.1)$$

Podemos também classificar uma EDO quanto a sua linearidade. Dizemos que a EDO (2.1) é **linear** se a função f é linear nas variáveis $y, y', \dots, y^{n-1}$. Se f não é linear, dizemos que a EDO é **não-linear**. Por exemplo:

1. $y' + 2ty = 0$ é linear.
2. $y'' + t^3 y = 0$ é linear.
3. $y'' + (y')^3 = 0$ não é linear.
4. $y'' + yy' = 0$ não é linear.

A forma mais geral que temos para uma EDO linear de ordem n é dada por

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t).$$

Definição 1. Uma **solução** da EDO (2.1) no intervalo $I = (\alpha, \beta)$ é uma função $y = \phi(t)$ tal que $\phi', \phi'', \dots, \phi^n$ existem e satisfazem:

$$\phi^{(n)}(t) = f(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)),$$

para todo t em I .

Exemplo 2.1. Considere

1. $\phi(t) = e^{-kt}$ é solução de $y' = -ky$.
2. $\phi_1(t) = \sin(t)$ e $\phi_2(t) = \cos(t)$ são soluções de $y'' + y = 0$.

2.1 Equações lineares de primeira ordem

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem são fundamentais tanto em teoria quanto em aplicação prática, desempenhando um papel crucial em diversas áreas da ciência, engenharia e outras disciplinas. Elas são usadas para modelar sistemas que dependem de uma única variável e sua taxa de variação. Por exemplo, a equação que descreve a taxa de crescimento populacional, a lei de resfriamento de Newton, ou a taxa de decaimento radioativo.

Em física a velocidade como derivada da posição em relação ao tempo é um exemplo clássico dessas equações. Além disso, a dinâmica de circuitos elétricos simples, como o circuito RC (resistor-capacitor), também é governada por uma EDO de primeira ordem. Em química aparecem na cinética de reações. Na biologia aparecem em modelos de crescimento populacional, como o modelo de crescimento logístico. Podem ainda ser usadas para modelar a dinâmica de preços e taxas de juros em certos contextos econômicos. Em engenharia, particularmente na teoria de controle, EDOs de primeira ordem são usadas para modelar sistemas de resposta de primeira ordem, que são sistemas que respondem a um impulso ou entrada de forma proporcional e com um tempo de resposta linear. Muitas vezes, as EDOs de primeira ordem são resolvidas numericamente quando uma solução analítica não é possível. Métodos numéricos, como o método de Euler e Runge-Kutta, são amplamente aplicados a EDOs de primeira ordem e servem como base para algoritmos mais complexos. Em sistemas dinâmicos, as EDOs de primeira ordem são frequentemente usadas para identificar e analisar pontos de equilíbrio, que são fundamentais para compreender o comportamento de longo prazo de um sistema, incluindo estabilidade e transições de fase.

Comparadas com equações de ordem superior as equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem são geralmente mais simples de resolver analiticamente. Métodos como separação de variáveis, fator integrante e variação de parâmetros são diretamente aplicáveis. O entendimento das EDOs de primeira ordem é essencial antes de avançarmos para equações de ordem superior. Muitas vezes, sistemas complexos podem ser analisados por meio da decomposição em equações de primeira ordem, especialmente na forma de sistemas de equações.

A expressão geral de uma EDO de primeira ordem é

$$y' + p(t)y = q(t). \quad (2.2)$$

Onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções conhecidas e contínuas em um intervalo $I = (\alpha, \beta)$.

Um problema de valor inicial (PVI) é um tipo de problema em equações diferenciais onde, além da equação diferencial, são fornecidos valores específicos para a função desconhecida (ou suas derivadas) em um ponto particular. O objetivo é encontrar uma solução para a equação diferencial que satisfaça essas condições iniciais. Abaixo apresentamos a forma geral de um problema de valor inicial de primeira ordem.

$$\begin{cases} y' + p(t)y = q(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Antes de apresentar a solução geral do PVI, abordaremos inicialmente um exemplo onde consideramos $q(t) = 0$ em (2.2), equações diferenciais ordinárias desse tipo são chamadas homogêneas. Observe o problema de valor inicial a seguir.

Exemplo 2.2. Encontre a solução do PVI:

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{2}y = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Demonstração. Apresentaremos a seguir dois modelos de soluções. **Solução 1:** Basta separar as variáveis da equação

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{t}{2} + c \Rightarrow y(t) = \pm e^c e^{-\frac{t}{2}}.$$

Podemos escrever a solução geral como $y(t) = ke^{-\frac{t}{2}}$. E usando a condição inicial temos $k = 1$. Logo a solução do PVI é $y(t) = e^{-\frac{t}{2}}$. **Solução 2:** Vamos multiplicar a equação

acima por um fator integrante $e^{\frac{t}{2}}$. Logo temos:

$$\left[y' + \frac{1}{2}y \right] e^{\frac{t}{2}} = 0 \Rightarrow y'e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}y = 0 \Rightarrow [ye^{\frac{t}{2}}]' = 0 \Rightarrow ye^{\frac{t}{2}} = k \Rightarrow y(t) = ke^{-\frac{t}{2}}.$$

□

Podemos aplicar a mesma forma de resolução da segunda solução anterior para resolver o PVI (2.3) com $q(t) = 0$. Considere $P(t) = \int_{t_0}^t p(s)ds$. $P(t)$ é uma primitiva de $p(t)$. Multiplicamos a equação pelo fator integrante $e^{P(t)}$, logo obtemos

$$y'e^{P(t)} + p(t)e^{P(t)}y = 0 \Rightarrow (e^{P(t)}y)' = 0 \Rightarrow y(t) = y_0e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}.$$

2.2 Equações lineares de primeira ordem não homogêneas

O mesmo procedimento visto na seção anterior será usado para resolver os PVI's da forma geral (2.3).

$$\begin{cases} y' + p(t)y = q(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

Da mesma forma como anteriormente vamos considerar $P(t) = \int_{t_0}^t p(s)ds$ e multiplicaremos a equação pelo fator integrante $e^{P(t)}$ para obter:

$$(e^{P(t)}y)' = q(t)e^{P(t)} \Rightarrow y(t) = e^{-P(t)} \left[\int_{t_0}^t q(s)e^{P(s)}ds + y_0 \right].$$

Logo a solução será dada por

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left[\int_{t_0}^t q(s)e^{\int_{t_0}^s p(x)dx} ds + y_0 \right].$$

Exemplo 2.3. Encontre a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' + 2y = te^{-2t} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Observe que

$$P(t) = \int_{t_0}^t p(s)ds = \int_1^t 2ds = 2t - 2$$

e

$$\int_{t_0}^t q(s) e^{\int_{t_0}^s p(x) dx} ds + y_0 = \int_1^t s e^{-2s} e^{\int_1^s 2 dx} ds + 0 = \int_1^t s e^{-2} ds = e^{-2} \frac{1}{2} (t^2 - 1).$$

Logo temos que a solução final é dada por:

$$y(t) = e^{-2t+2} e^{-2} \frac{1}{2} (t^2 - 1) = e^{-2t} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

□

2.3 Equações de primeira ordem não-lineares

2.3.1 Teorema de existência e unicidade

Teorema 2.4. (*Existência e Unicidade para EDO's lineares de 1° ordem*) Se p e q são contínuas em $I = (\alpha, \beta)$ que contem t_0 , então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz:

$$\begin{cases} y' + p(t)y = q(t), \quad \forall t \in I \\ \phi(t_0) = y_0. \end{cases}$$

onde y_0 é uma constante fixada.

Demonstração. Veja (Sotomayor, 1979).

□

Exemplo 2.5. Encontre o intervalo máximo de definição da solução de

$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Demonstração. A EDO pode ser escrita como $y' + \frac{2}{t}y = 4t$. Nesse caso $p(t) = \frac{2}{t}$ está definida e é contínua para todo $t \in \mathbb{R}^*$ e $q(t)$ está definida e é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo o intervalo maximal de definição da solução que contém a condição inicial $t_0 = 1$ é $I = (0, +\infty)$.

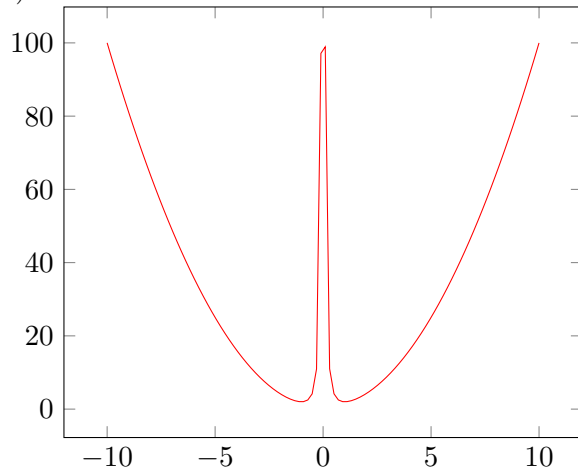
Vamos resolver a EDO acima. Para isso seja $P(t) = \int 2\frac{1}{t} dt = \ln t^2$ uma primitiva de $p(t)$. Logo $e^{P(t)} = t^2$. A solução geral é dada por

$$y(t) = e^{-P(t)} \left[\int q(t) e^{P(t)} dt + K \right].$$

ou seja

$$y(t) = \frac{1}{t^2} [t^4 + K] = [t^2 + \frac{K}{t^2}].$$

Na figura abaixo apresentamos o gráfico tomando a constante $K = 1$. Observe entretanto que a solução que satisfaz a condição inicial está definida apenas para $t \in (0, +\infty)$.



□

Exemplo 2.6. Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Demonstração. A equação fica

$$\frac{y'}{3y^{\frac{2}{3}}} = 1 \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = t - c$$

e a família

$$y(t) = (t - c)^3.$$

é uma família de soluções para a EDO. Para cada $c > 0$, considere as funções φ_c dadas por

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t - c)^3, & \text{se } t \geq c \\ 0, & \text{se } t \leq c \end{cases}$$

e considere ainda $\varphi(t) \equiv 0$. Observe que todas as φ_c e φ satisfazem o PVI acima, logo esse é um exemplo em que não temos unicidades de soluções. □

Definição 2.7. (Veja (Lima, 2004)) Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *lipschitziana* quando existe uma constante $k > 0$ (chamada *constante de Lipschitz* da função f tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ sejam quais foem $x, y \in X$. A fim de que: $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja lipschitziana é

necessário e suficiente que o quociente $[f(y) - f(x)]/(x - y)$ seja limitado, isto é, que exista uma constante $k > 0$ tal que $x, y \in X, x \neq y \Rightarrow |f(y) - f(x)|/|y - x| \geq k$. Toda função lipschitziana $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua: dado $\epsilon > 0$, tome-se $\delta = \epsilon/k$. Então $x, y \in X, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|x - y| < k\epsilon/k = \epsilon$. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio de grau 1, isto é, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, então f é lipschitziana com constante $k = |a|$ pois $|f(y) - f(x)| = |ay - b - (ax + b)| = |a| \cdot |y - x|$.

Teorema 2.8. (*Existência e Unicidade para EDO de 1° ordem não-lineares*) Seja $f = f(t, y)$ contínua e lipschitziana em relação à variável y no conjunto $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t : |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{y : |y - y_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω então existe uma única solução de

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

em I_α onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

Demonstração. Veja (Sotomayor, 1979). □

Observação 2.9. Se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em Ω , então as hipóteses do teorema (2.8) são satisfeitas e portanto temos o mesmo resultado.

Observação 2.10. No exemplo anterior temos que $f(t, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ e daí $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$ a qual não está definida numa vizinhança de $y_0 = 0$. Concluimos que não se aplica ao teorema naquele exemplo.

2.3.2 Equações de Variáveis Separáveis

Considere a seguinte definição

Definição 2.11. Uma equação $y' = f(t, y)$ é chamada separável se for possível escrevê-la como

$$y' = \frac{-M(t)}{N(y)}.$$

Nesse caso a equação fica

$$M(t) + N(y)\frac{dy}{dt} = 0. \quad (2.4)$$

A resolução de equação separável dá-se na seguinte forma: Sejam H_1 e H_2 duas primitivas de M e N respectivamente, isto é, $\frac{d}{dt}H_1(t) = M(t)$ e $\frac{d}{dy}H_2(y) = N(y)$. Nesse caso a equação (2.4) escreve-se

$$\frac{d}{dt}H_1(t) + \frac{d}{dy}H_2(y)\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}[H_1(t) + H_2(y)] = 0,$$

portanto a solução geral de (2.4) é dada implicitamente pela equação

$$H_1(t) + H_2(y) = K. \quad (2.5)$$

Exemplo 2.12. Resolva o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2y-2} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Demonstração. Nesse exemplo temos que $M(x) = -(3x^2 + 4x + 2)$ e $N(y) = (2y - 2)$, logo as primitivas de M e N são $H_1(x) = -x^3 - 2x^2 - 2x$ e $H_2(y) = y^2 - 2y$. Portanto, de acordo com a equação (2.5), a solução é $-x^3 - 2x^2 - 2x + y^2 - 2y = c$. E usando a condição inicial $y(0) = -1$ temos que $c = 3$. Logo a solução é dada implicitamente pela equação

$$-x^3 - 2x^2 - 2x + y^2 - 2y = 3.$$

Em geral não é possível ir além, no entanto como esse exemplo trata de uma equação do segundo grau na variável y é possível resolver encontrando

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4},$$

e usando novamente a condição inicial chegamos na solução explícita

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

□

2.3.3 Equações Exatas

Analisaremos o problema, sobre resolver a seguinte equação:

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0.$$

A equação acima não é linear e também não é separável. No entanto se tomarmos a função $F(x, y) = x^2 + xy^2$, então temos que $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y^2$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$ então podemos escrever a

equação do problema como

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

E pela Regra da Cadeia temos que

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0,$$

ou seja, $x^2 + xy^2 = c$ onde c é uma constante arbitrária, é uma expressão implícita para a solução do problema.

Definição 2.13. Uma equação diferencial

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.6)$$

é dito exata se existe uma função $F(x, y)$ que satisfaz $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$.

Para resolver uma equação exata, basta procedermos como no exemplo anterior. Usando o fato que $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$, a equação fica:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} F(x, y)$$

e portanto a solução geral é dada implicitamente pela equação $F(x, y) = c$. Observe que os gráficos estão contidos nas curvas de nível da função F

Precisamos agora de um resultado que nos diga quando que uma equação do tipo

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exata ou não, isto é, como saber se existe uma função $F(x, y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$.

De agora em diante usaremos a seguinte notação $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ e $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$. O seguinte teorema nos permite descobrir quando uma equação do tipo (2.6) é exata.

Teorema 2.14. *Sejam M , N , M_y e N_x funções contínuas no retângulo $\alpha < x < \beta$ e $\gamma < y < \delta$. Então a equação $M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$ é uma equação diferencial exata se, e somente se, $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ em todos os pontos (x, y) do retângulo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ é exata e vamos mostrar que $M_y = N_x$. Como a equação é exata, existe uma função F tal que $F_x = M$ e $F_y = N$, daí $M_y = F_{xy}$ e $N_x = F_{yx}$. Como por hipótese M_y e N_x são contínuas, isto é, F_{xy} e F_{yx} são contínuas, então pelo Teorema de Schwartz temos que $F_{xy} = F_{yx}$, portanto, $M_y = N_x$.

($\Leftarrow$) Suponha que $M_y = N_x$ e vamos provar que existe uma função F tal que $F_x = M$ e $F_y = N$. Integrando M em relação a x obtemos

$$F(x, y) = \left[\int M(x, y) dx \right] + h(y)$$

onde h é uma função arbitrária que depende somente de y . Derivando em relação a y obtemos

$$F_y(x, y) = \frac{d}{dy} \int M(x, y) dx + h'(y) = \int M_y(x, y) dx + h'(y).$$

Fazendo agora $F_y = N$ temos

$$h'(y) = N(x, y) - \int M_y(x, y) dx.$$

O segundo membro na equação acima, apesar da aparência, depende apenas de y , pois se derivarmos em relação a x obtemos

$$N_x(x, y) - M_y(x, y)$$

que por hipótese é zero. Logo, após uma integração em relação a y obtemos h . Portanto

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \int M_y(x, y) dx \right] dy.$$

□

Observe que a demonstração acima consiste, na realidade, em um método de resolver equações diferenciais exatas.

Exemplo 2.15. Resolva a equação diferencial

$$(5x^4 + 2xy^3) + (3x^2y^2)y' = 0.$$

Demonstração. De acordo com o teorema (2.3), visto anteriormente, temos que $M(x, y) = 5x^4 + 2xy^3$ e $N(x, y) = 3x^2y^2$. Calculando M_y e N_x temos: $M_y(x, y) = 6xy^2$ e $N_x(x, y) = 6xy^2$, logo, de acordo com o teorema anterior a equação é exata. Como na demonstração,

primeiro vamos integrar M com relação a x obtendo

$$F(x, y) = \int (5x^4 + 2xy^3)dx + h(y) = x^5 + x^2y^3 + h(y).$$

agora derivando em relação a y

$$F_y(x, y) = 3x^2y^2 + h'(y),$$

igualando a $N(x, y) = 3x^2y^2$ temos que $h'(y) = 0$, ou seja $h(y) = k$ e portanto as soluções são dadas implicitamente por $F(x, y) = c$, isto é,

$$x^5 + x^2y^3 = c$$

□

Exemplo 2.16. Resolva a equação diferencial

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sen x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

Demonstração. Observe que $M_y(x, y) = N_x(x, y) = \cos x + 2xe^y$, logo a equação é exata. Integrando M com relação a x obtemos

$$F(x, y) = y\sen x + x^2e^y + h(y).$$

Derivando em relação a y , obtemos

$$F_y(x, y) = \sen x + x^2e^y + h'(y).$$

igualando a $N(x, y)$ temos que $h'(y) = -1$, ou seja $h(y) = -y + k$ e portanto as soluções são dadas implicitamente por $F(x, y) = c$, isto é,

$$y\sen x + x^2e^y - y = c.$$

□

Exemplo 2.17. Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Demonstração. Temos que $M_y(x, y) = 3x + 2y$ e $N_x(x, y) = 2x + y$. Como $M_y \neq N_x$, então a equação não é exata. Apesar disso, vamos tentar aplicar nosso método assim mesmo. Integrando M em relação a x obtemos

$$F(x, y) = \frac{3x^2}{2}y + xy^2 + h(y).$$

Derivando em relação a y , obtemos

$$F_y(x, y) = \frac{3x^2}{2} + 2xy + h'(y)$$

e igualando a $N(x, y)$ temos que

$$h(y) = -\frac{x^2}{2} - xy,$$

ou seja, h não depende apenas de y , logo é impossível resolver a equação com esse método. $\square$

2.3.4 Fatores integrantes

A técnica do fator integrante já foi usado quando estudamos EDO's livres do tipo $y' + p(t)y = q(t)$. Naquela oportunidade, consideramos $P(t)$ como uma primitiva de $p(t)$ e multiplicamos a equação pelo fator integrante $e^{P(t)}$. Dessa forma, o primeiro membro torna-se a derivada de $ye^{P(t)}$. Muitas vezes temos uma equação da forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.7)$$

que não é exata, mas se multiplicarmos por uma função $\mu(x, y)$, a equação

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.8)$$

pode se tornar exata.

Pelo Teorema (2.14) a Equação (2.8) é exata se $(\mu M)_y = (\mu N)_x$. Como M e N são dados, temos que encontrar μ que satisfaz $\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$, isto é

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0 \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) é uma EDP de primeira ordem que eventualmente pode ter mais de uma solução. Basta que tenhamos uma solução para a EDP e nesse caso a equação (2.7) quando multiplicada por essa solução torna-se exata e daí pode ser resolvida. Geralmente

a equação (2.9) é tão difícil quanto a equação (2.7). Na prática só podem ser encontrados em casos especiais. Um desses casos é quando μ depende apenas de x . Nesse caso $\mu_y = 0$ e a equação (2.9) fica

$$-N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0 \Rightarrow \mu_x = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \quad (2.10)$$

Se $\frac{M_y - N_x}{N}$ for uma função que depende apenas de x , então existe um fator integrante μ que só depende de x , além disso μ pode ser encontrado pela resolução da equação linear (2.10).

Exemplo 2.18. Vimos acima que

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

Não é exata, pois $M_y \neq N_x$. Observe que $M_y = 3x + 2y$, $N_x = 2x + y$ e $N = x^2 + xy$. Logo

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x + y}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}.$$

A equação linear (2.10) fica

$$\mu' = \frac{1}{x}\mu$$

e uma solução é $\mu(x) = x$. Observe ainda que ao multiplicarmos a equação original por x ela se transforma em

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0,$$

a qual é exata pois $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + xy^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y)$. Seguindo-se o método de resolução de equações exatas temos:

$$F(x, y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + h(y). \quad (2.11)$$

e derivando (2.11) em relação a y e igualando com $(x^3 + x^2y)$ temos

$$h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = k.$$

Portanto a solução é dada implicitamente por

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c.$$

É importante observar que o fator integrante não é único, o fator

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy(2x + y)}$$

poderia também ser usado para o exemplo anterior. Podemos usar um procedimento semelhante para encontrar um fator integrante que dependa somente de y . Se μ depende somente de y então $\mu_x = 0$, E se $\frac{N_x - M_y}{M}$, depende apenas de y , então a equação (2.9) transforma na equação linear

$$\mu' = \frac{N_x - M_y}{M} \mu,$$

a qual pode ser resolvida facilmente como no caso anterior.

2.3.5 Equações não-lineares Homogêneas

O conceito de homogeneidade aparece em mais de um contexto no conteúdo das equações diferenciais. Como já estudado, um EDO linear de ordem n tem a forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x).$$

Uma EDO linear, como a anterior, é homogênea se $q(x) \equiv 0$. No caso das não-lineares a definição é diferente.

Definição 2.19. Uma equação da forma $y' = f(x, y)$ é homogênea sempre que a função f não depender de x ou de y separadamente, mas somente da respectiva razão $\frac{y}{x}$. Assim a equação homogênea sempre tem a forma

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Uma outra forma de verificar se a equação $y' = f(x, y)$ é homogênea é testando se $f(tx, ty) = f(x, y)$ para todo t .

Exemplo 2.20. Note que:

- (i) $y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$ é homogênea.
- (ii) $y' = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln(x/y) + \frac{1+y/x}{1-y/x}$ é homogênea
- (iii) $y' = \frac{y^3 + 2xy}{x^2} = y\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$ não é homogênea.

Para resolver uma equação homogênea $y' = F(\frac{y}{x})$ faremos uma mudança de variáveis do tipo $v = \frac{y}{x}$, ou seja, $y = xv$. Derivando em relação a x obtemos $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$, ou seja,

$$F(v) = v + x\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{F(v) - v}{x} \Rightarrow \frac{1}{F(v) - v} dv = \frac{1}{x} dx.$$

A equação acima é de variáveis separáveis e podemos resolvê-la encontrando $v = v(x)$.

Exemplo 2.21. Resolva $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = (\frac{y}{x})^2 + 2(\frac{y}{x})$.

Considere $F(v) = v^2 + 2v$, logo

$$\frac{1}{F(v) - v} = \frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}.$$

E uma primitiva de $\frac{1}{F(v)-v}$ é $\ln v - \ln(v+1)$, por outro lado uma primitiva de $\frac{1}{x}$ é $\ln x$. Logo a solução da EDO separável é

$$\ln\left(\frac{v}{v+1}\right) = \ln cx,$$

ou seja,

$$cx = \frac{v}{v+1} = \frac{y/x}{(y/x)+1} = \frac{y}{y+x}.$$

Resolvendo em y obtemos a solução:

$$y(x) = \frac{cx^2}{1 - cx}.$$

3 Equações lineares de Segunda Ordem

As equações diferenciais de segunda ordem são fundamentais em várias áreas da ciência e da engenharia, com uma importância particular pelos seguintes motivos: elas frequentemente surgem na modelagem de sistemas dinâmicos. Por exemplo, a equação de movimento de Newton ($F = ma$) para um objeto em uma dimensão é uma equação diferencial de segunda ordem. Também aparecem na análise de circuitos elétricos, onde as equações diferenciais de segunda ordem podem descrever a corrente em circuitos com componentes como resistores, capacitores e indutores. Muitos sistemas físicos que envolvem oscilações (como pêndulos, molas, ou circuitos RLC) são modelados por equações diferenciais de segunda ordem. Isso inclui, por exemplo, a equação harmônica simples, que descreve a vibração de uma mola ou as oscilações de um circuito. A equação da onda, que descreve a propagação de ondas em meios como ar, água ou em cordas vibrantes, é uma equação diferencial de segunda ordem. Isso inclui tanto ondas acústicas quanto ondas eletromagnéticas. A equação do calor, que descreve a distribuição de temperatura ao longo do tempo em um corpo, também é uma equação diferencial de segunda ordem. Em física teórica, as equações de Maxwell, que governam o eletromagnetismo, podem ser reduzidas a equações diferenciais de segunda ordem em certos contextos. Além disso, a equação de campo de Einstein na relatividade geral, que descreve a gravidade, também é uma equação diferencial de segunda ordem. As soluções dessas equações permitem prever o comportamento dos sistemas em estudo, sendo essenciais para o desenvolvimento de tecnologias, como o design de estruturas mecânicas, análise de sistemas de controle, telecomunicações, entre outros.

A forma geral de uma equação linear de segunda ordem é

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \quad (3.1)$$

Vamos nos limitar nos casos onde p , q e g são funções contínuas num intervalo I . Se uma equação de segunda ordem $y'' = f(x, y, y')$ não possui a forma geral da equação linear de segunda ordem como descrita em (3.1), então é denominada não linear.

Um **problema de valor inicial**(PVI) de segunda ordem é constituído por uma equação da forma geral (3.1) e um par de condições iniciais da forma $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = z_0$.

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Definição 3.1. A equação linear de segunda ordem $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ é chamada **homogênea** se $g(x) \equiv 0$, caso contrário é chamada **não-homogênea**.

3.1 Equações Lineares Homogêneas

Vamos considerar inicialmente os coeficientes constantes, ou seja, considere a seguinte equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (3.2)$$

onde a , b e c são constantes.

Vamos procurar uma solução $y = y(x)$ da forma $y(x) = e^{rx}$, onde r precisa ser determinado. Nesse caso temos que $y'(x) = re^{rx}$ e $y'' = r^2e^{rx}$. Substituindo na equação temos

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0. \quad (3.3)$$

Como $e^{rx} \neq 0$ para todo x , temos que

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (3.4)$$

Definição 3.2. A equação $ar^2 + br + c = 0$ é chamada equação característica da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

Observe que se r_0 é raiz de (3.4), então $y(x) = e^{r_0x}$ é solução da equação diferencial (3.2). Supondo que a equação característica (3.4) possua duas raízes reais e distintas, isto é, $b^2 - 4ac > 0$. Sejam r_1 e r_2 raízes da equação (3.4). Portanto, para todo par de constantes c_1 e c_2 , temos que $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ é solução de (3.2), pois

$$y' = c_1r_1e^{r_1x} + c_2r_2e^{r_2x}$$

$$y'' = c_1r_1^2e^{r_1x} + c_2r_2^2e^{r_2x},$$

logo

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1x} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2x} = 0.$$

Se tivermos condições iniciais

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

então podemos montar um sistema:

$$\begin{cases} c_1e^{r_1x_0} + c_2e^{r_2x_0} = y_0 \\ c_1r_1e^{r_1x_0} + c_2r_2e^{r_2x_0} = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -c_1r_2e^{r_1x_0} - c_2r_2e^{r_2x_0} = -r_2y_0 \\ c_1r_1e^{r_1x_0} + c_2r_2e^{r_2x_0} = z_0 \end{cases}$$

então

$$c_1(r_1 - r_2)e^{r_1x_0} = z_0 - r_2y_0 \Rightarrow c_1 = \frac{z_0 - r_2y_0}{r_1 - r_2}e^{-r_1x_0}$$

e substituindo na outra equação temos

$$c_2 = \frac{z_0 - r_1y_0}{r_2 - r_1}e^{-r_2x_0}$$

e com isso temos a solução do PVI.

Exemplo 3.3. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Demonstração. Primeiramente temos que resolver a equação característica

$$r^2 + 5r + 6 = 0,$$

a qual possui raízes $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$. Logo a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}.$$

A condição inicial $y(0) = 2$ fornece $c_1 + c_2 = 2$ e como $y'(x) = -2c_1e^{-2x} - 3c_2e^{-3x}$, temos que a condição inicial $y'(0) = 3$ fornece $-2c_1 - 3c_2 = 3$. Resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -2c_1 - 3c_2 = 3 \end{cases}$$

encontramos $c_1 = 9$ e $c_2 = -7$. Portanto a solução do PVI é

$$y(x) = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}.$$

□

Exemplo 3.4. Encontre α para que a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

tenda para 0 quando $x \rightarrow +\infty$.

Demonstração. A equação característica $r^2 - r - 2 = 0$ possui raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$, logo a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

As condições iniciais levam ao sistema linear

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \alpha \\ 2c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$

o qual possui solução $c_1 = \frac{2+\alpha}{3}$ e $c_2 = \frac{2\alpha-2}{3}$. Logo, a solução do PVI é

$$y(x) = \left(\frac{2+\alpha}{3}\right) e^{2x} + \left(\frac{2\alpha-2}{3}\right) e^{-x}.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos $\frac{2\alpha-2}{3}e^{-x} \rightarrow 0$ e $e^{2x} \rightarrow +\infty$. Portanto, a única chance para que $y(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ é que

$$\alpha = -2.$$

□

Vamos introduzir agora a noção de **operador diferencial**. Considere $C^2(I)$ o conjunto das funções de classe C^2 definidas em I , isto é, das funções que são duas vezes diferenciáveis e a segunda derivada é contínua. Obviamente $C^2(I)$ é um espaço vetorial, pois $f_1, f_2 \in C^2(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $f_1 + f_2 \in C^2(I)$ e $\lambda f_1 \in C^2(I)$.

Dada uma equação diferencial linear de segunda ordem da forma (3.1), chamamos a transformação linear

$$L : C^2(I) \rightarrow C^0(I) \quad (3.5)$$

Definida por $L(\phi)(x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x)$ de operador diferencial associado a equação diferencial (3.1). Podemos observar que as soluções de (3.1) é equivalente a encontrar o núcleo de (3.5). Posteriormente vamos provar que o núcleo desse operador tem dimensão 2, ou seja, existe um conjunto formado por duas soluções (base) tal que todas as outras soluções da equação são combinações lineares dessas duas.

Teorema 3.5. *(Existência e Unicidade para EDO's de 2° ordem lineares) Dado um problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

onde p , q e g são contínuas num intervalo aberto I , com $x_0 \in I$, então existe uma única solução do PVI, $y = \phi(x)$, a qual está definida para todos os pontos de I .

Demonstração. Veja (Sotomayor, 1979). □

Teorema 3.6. *Se y_1 e y_2 são soluções da equação $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então toda combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução.*

Demonstração. Por hipótese temos $L[y_1] = 0$ e $L[y_2] = 0$. Daí

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p(x)[c_1y_1 + c_2y_2]' + q(x)[c_1y_1 + c_2y_2] = \\ &= c_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + c_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0. \end{aligned}$$

□

Definição 3.7. Sejam y_1 e y_2 soluções da equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Definimos o **Wronskiano** das soluções y_1 e y_2 o seguinte determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Teorema 3.8. *Sejam y_1 e y_2 soluções da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Se $W(x_0) \neq 0$, onde x_0 é o ponto onde se fixam as condições iniciais $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = z_0$, então existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para o qual $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é solução da EDO e satisfaz as condições iniciais.*

Demonstração. Já sabemos que qualquer combinação linear da forma $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é solução da EDO. Substituindo as condições iniciais temos o sistema

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

e resolvendo-o pela regra de Cramer temos

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ z_0 & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}} \text{ e } c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}$$

□

Teorema 3.9. *Sejam y_1 e y_2 soluções da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Se existe um ponto x_0 tal que $W(x_0) \neq 0$, então a família de soluções $y = c_1y_1 + c_2y_2$ inclui todas as soluções da EDO.*

Demonstração. Dada ϕ uma solução qualquer da EDO, temos que mostrar que existem c_1 e c_2 tais que $\phi = c_1y_1 + c_2y_2$. Seja x_0 um ponto onde $W(x_0) \neq 0$. Calculemos ϕ e ϕ' nesse ponto e chamemos de y_0 e z_0 respectivamente, isto é,

$$\begin{cases} y_0 = \phi(x_0) \\ z_0 = \phi'(x_0). \end{cases}$$

Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= 0 \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= z_0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Claramente ϕ é solução de (3.6). Como $W(x_0) \neq 0$, pelo teorema (3.8), existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ seja solução de (3.6). De acordo com o Teorema de Existência e Unicidade, temos que $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ para todo x . □

Observação 3.10. Em outras palavras, o teorema anterior afirma que se y_1 e y_2 são soluções tais que o não se anula em um ponto, então o conjunto $\{y_1, y_2\}$ gera o núcleo do operador diferencial L definido anteriormente em (3.5), ou seja, gera o espaço de soluções da EDO. Portanto, de acordo com o teorema anterior, se existe um ponto onde o não se anula, então o espaço de soluções tem dimensão no máximo dois.

Vamos relacionar agora o com a dependência linear.

Definição 3.11. Duas funções f e g são **linearmente dependentes** (LD) em I se existem constantes k_1 e k_2 não simultaneamente nulas tais que $k_1f(x) + k_2g(x) = 0$ para todo $x \in I$. As funções f e g são **linearmente independentes** (LI) se não são LD.

Teorema 3.12. Se f e g são funções deriváveis em I e $x_0 \in I$ é tal que $W(f, g)(x_0) \neq 0$, então f e g são LI em I .

Demonstração. Suponhamos que $k_1f(x) + k_2g(x) = 0 \forall x \in I$, logo derivando em relação a x obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} k_1f(x_0) + k_2g(x_0) = 0 \\ k_1f'(x_0) + k_2g'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Observe que a matriz dos coeficientes desse sistema linear homogêneo é exatamente $W(f, g)(x_0)$, o qual é não nulo. Isso implica que a única solução do sistema linear é $k_1 = k_2 = 0$. Portanto f e g são LI em I . $\square$

Observação 3.13. Agora usando os teoremas (3.9) e (3.12), se existe um ponto onde o de duas soluções não se anula, então essas duas soluções formam uma base para o espaço de soluções. Resta apenas demonstrar que para qualquer equação linear homogênea de segunda ordem é possível escolher duas soluções tal que o em um determinado ponto é não nulo, neste caso sempre o espaço de soluções tem dimensão dois, isso será demonstrado no próximo teorema.

Definição 3.14. Se duas soluções da EDO y_1 e y_2 são tais que existe um ponto $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, então dizemos que $\{y_1, y_2\}$ formam um **conjunto fundamental de soluções**. Nesse caso, $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ é chamada **solução geral** da EDO. Observe que o conjunto fundamental de soluções é uma base para o núcleo do operador diferencial associado à EDO, logo a dimensão do espaço de soluções é 2.

Exemplo 3.15. Sejam $y_1 = e^{r_1x}$ e $y_2 = e^{r_2x}$ soluções de $ay'' + by' + cy = 0$, com $r_1 \neq r_2$. Calculando-se o temos

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x}.$$

e como $r_1 \neq r_2$ e a exponencial nunca se anula, temos que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

Exemplo 3.16. Mostraremos que $y_1 = \cos 2x$ e $y_2 = \sin 2x$ forma um conjunto fundamental de soluções para a equação $y'' + 4y = 0$. De fato, calculando-se o temos

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\cos 2x & 2\sin 2x \end{vmatrix} = 2(\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 2 \neq 0.$$

O próximo teorema mostra como encontrar um conjunto fundamental de soluções

Teorema 3.17. *Toda EDO da forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ possui um conjunto fundamental de soluções.*

Demonstração. Seja y_1 a solução da EDO que satisfaz as seguintes condições iniciais $y(x_0) = 1$ e $y'(x_0) = 0$. E seja y_2 a solução da EDO que satisfaz as condições iniciais $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 1$. Calculando-se dessas duas soluções no ponto x_0 temos

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Portanto $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções. $\square$

Teorema 3.18. (Abel). *Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ onde p e q são contínuas em I , então o $W(y_1, y_2)(x)$ é dado por*

$$W(y_1, y_2) = ce^{-\int p(x)dx}$$

onde c é uma constante que depende de y_1 e y_2 , mas não de x . Além disso o $W(y_1, y_2)(x)$ é identicamente nulo (caso $c = 0$), ou nunca se anula (caso $c \neq 0$).

Demonstração. Sendo y_1 e y_2 soluções, temos que

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $-y_2$ e a segunda por y_1 e somando, obtemos

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + p(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0.$$

ou seja,

$$W' + p(x)W = 0.$$

Resolvendo essa EDO linear temos

$$W(x) = ce^{-\int p(x)dx}.$$

$\square$

Exemplo 3.19. Verifique que as funções $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$ e $y_2(x) = x^{-1}$ são soluções da equação diferencial $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, com $x > 0$.

Demonstração. Podemos calcular o de duas maneiras diferentes:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

ou, usando o Teorema de Abel,

$$W(y_1, y_2)(x) = e^{-\int \frac{3}{2x} dx} = ce^{-\frac{3}{2} \ln x} = cx^{-\frac{3}{2}}.$$

Obviamente pelo segundo método a resposta depende de uma constante. $\square$

Teorema 3.20. *Sejam y_1 e y_2 soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, onde p e q são contínuas em um intervalo I . Então y_1 e y_2 são LD em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(x) = 0$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se existe $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, então pelo teorema (3.12) segue que $\{y_1, y_2\}$ é LI.

($\Leftarrow$) Escolha $x_0 \in I$ qualquer. Por hipótese $W(y_1, y_2)(x) = 0$ e daí

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

tem solução $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$ não trivial. Seja

$$\phi(x) = \tilde{c}_1 y_1(x) + \tilde{c}_2 y_2(x).$$

Desde que $\phi(x_0) = 0$ e $\phi'(x_0) = 0$, então ϕ satisfaz o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

e pelo Teorema de Existência e Unicidade, segue que $\phi \equiv 0$ em I , isto é,

$$\tilde{c}_1 y_1(x) + \tilde{c}_2 y_2(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Portanto $\{y_1, y_2\}$ é LD. $\square$

3.2 Redução de Ordem

Dada a equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, suponha que conhecemos uma solução $y_1(x)$ que não seja nula em todo ponto. Vamos procurar uma solução da forma

$$y = v(x)y_1(x),$$

então temos

$$\begin{aligned} y' &= v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x), \\ y'' &= v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v(x)y_1''(x), \end{aligned}$$

e substituindo na equação e omitindo a variável x temos

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0$$

e, como y_1 é solução, a equação fica

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0.$$

Agora chamemos $v' = u$ e daí temos

$$y_1 u' + (2y_1' + py_1)u = 0$$

que é uma equação linear em u de primeira ordem. Podemos resolvê-la e depois integrando teremos v e, finalmente, para obter y basta lembrar que $y = y_1 v$.

Exemplo 3.21. Sabendo que $y_1(x) = x^{-1}$ é solução de

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0,$$

encontre uma solução y_2 tal que $\{y_1, y_2\}$ é LI.

Demonstração. Seja $y = v(x)x^{-1}$. Logo obtemos

$$x^{-1}v'' + \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2}x^{-2}\right)v' = 0$$

e fazendo $v' = u$ obtemos a equação de primeira ordem

$$u' = \frac{1}{2x}u \Rightarrow u = cx^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto temos

$$v = \frac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}} + k \Rightarrow y = \left[\frac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}} + k \right] x^{-1} = \frac{2}{3}cx^{\frac{1}{2}} + kx^{-1}$$

e como kx^{-1} é múltiplo de y_1 , então pode ser descartada, logo

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}}.$$

□

3.3 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Nesta seção consideraremos a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3.7)$$

com a , b e c constantes. Ao procurarmos soluções da forma e^{rx} , já vimos que r tem que ser raiz da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (3.8)$$

Temos então, três possibilidades: duas raízes reais e distintas, uma raiz real dupla ou duas raízes não reais.

3.3.1 Raízes reais distintas

Esse caso já foi estudado na seção anterior e se $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, são raízes de (3.8) então a solução geral para (3.7) é

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

3.3.2 Raízes reais iguais

Quando na equação característica (3.8) temos $b^2 - 4ac = 0$, então as raízes são $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$. As duas raízes nos levam a mesma solução

$$y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Vamos usar o procedimento da redução de ordem para encontrar uma segunda solução que seja LI com a primeira. Seja $r = -\frac{b}{2a}$ e $y = v(x)e^{rx}$, temos:

$$\begin{aligned}y' &= v'(x)e^{rx} + rv(x)e^{rx} \\y'' &= v''(x)e^{rx} + 2rv'(x)e^{rx} + r^2v(x)e^{rx}\end{aligned}$$

Substituindo na equação obtemos

$$av'' + (2ar + b)v' + (ar^2 + br + c)v = 0 \Rightarrow v'' = 0$$

Logo a solução é $v = c_1x + c_2$ e portanto $y_2 = (c_1x + c_2)e^{rx}$. Escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ temos $y_2 = xe^{rx}$. Vejamos se $\{y_1, y_2\}$ forma um conjunto fundamental de soluções:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx} + rxe^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + rx - rx) = e^{2rx} \neq 0.$$

Portanto a solução geral da equação é

$$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}.$$

Exemplo 3.22. Achar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - y' - 0.25y = 0 \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Solução: A equação característica é $r^2 - r - 0.25 = 0$, logo $r = \frac{1}{2}$ é uma raiz real dupla. Portanto a solução geral é dada por

$$y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2xe^{\frac{x}{2}}.$$

Usando as condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = \frac{1}{3}$ encontramos a solução do PVI

$$y = 2e^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{3}xe^{\frac{x}{2}}.$$

3.3.3 Raízes não reais

Este é o caso em que as raízes da equação característica (3.8) são $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$. Usando as expressões de Taylor das funções e^θ , $\cos\theta$ e $\sin\theta$ vamos procurar

um significado para $e^{(\alpha+i\beta)x}$. Pela Fórmula de Taylor temos

$$\begin{aligned} e^\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}, \\ \cos\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Nesse caso temos que

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Portanto temos que

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Analogamente,

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x). \quad (3.9)$$

As soluções de $ay'' + by' + cy = 0$, quando $b^2 - 4ac < 0$, seriam $y_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ e $y_2(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$. Elas não são soluções reais, mas como

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \tilde{y}_1 \\ -\frac{1}{2}(y_1 - y_2) = \tilde{y}_2 \end{cases}$$

são combinações lineares de y_1 e y_2 , então temos que

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x \\ \tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x \end{cases}$$

são soluções reais, e como

$$W(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)(x) = e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

temos que $\{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções. A solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin\beta x.$$

Exemplo 3.23. Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} 16y'' - 8y' + 145y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Demonstração. As raízes de $16r^2 - 8r + 145 = 0$ são $r_1 = \frac{1}{4} + 3i$ e $r_2 = \frac{1}{4} - 3i$. Logo a solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{\frac{x}{4}} \cos 3x + c_2 e^{\frac{x}{4}} \sen 3x.$$

Usando as condições iniciais temos que $c_1 = -2$ e $c_2 = \frac{1}{2}$, e portanto a solução do PVI é

$$y = -2e^{\frac{x}{4}} \cos 3x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{4}} \sen 3x.$$

□

3.4 Equações Lineares Não-Homogêneas

Vamos estudar a equação não homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (3.10)$$

Para isso, considere a equação homogênea associada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3.11)$$

Teorema 3.24. Se y_P e y_Q forem duas soluções da equação não homogênea (3.10), então a diferença $y_P - y_Q$ é uma solução da equação homogênea associada (3.11).

Demonstração. Temos que:

$$\begin{cases} y_P'' + p(x)y_P' + q(x)y_P = g(x) \\ y_Q'' + p(x)y_Q' + q(x)y_Q = g(x) \end{cases}$$

e fazendo a diferença obtemos

$$(y_P - y_Q)'' + p(x)(y_P - y_Q)' + q(x)(y_P - y_Q) = 0.$$

Em outras palavras, $y_P - y_Q$ é solução de (3.11)

□

Teorema 3.25. A solução geral da equação não homogênea (3.10) pode ser escrita na

forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_P(x)$$

onde $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (3.11) e y_P é uma solução particular da equação não homogênea (3.10).

Demonstração. Dado $\phi = \phi(x)$ uma solução de (3.10), então pelo teorema 2.24 $\phi - y_P$ é solução de (3.11). Como $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (3.11), segue que existem únicas constantes c_1 e c_2 tais que $\phi - y_P = c_1 y_1 + c_2 y_2$, ou seja,

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_P(x).$$

□

A conclusão que obtemos desses dois últimos teoremas é que para resolver uma equação não-homogênea, resolve-se primeiro a homogênea associada, encontra-se um conjunto fundamental de soluções e depois encontra-se uma solução particular da equação não-homogênea. Existem pelo menos dois métodos para encontrar a solução particular de uma equação não-homogênea: método dos coeficientes indeterminados e método da variação de parâmetros.

3.4.1 Método dos coeficientes indeterminados

Esse método consiste em fazer uma boa hipótese sobre a forma da solução particular y_P , porém com coeficientes indeterminados. Depois substitui a expressão hipotética na equação (3.10) e tenta-se determinar os coeficientes. Esse método funciona bastante bem no caso em que a equação homogênea associada possui coeficientes constantes e o termo não-homogêneo é composto por polinômios, exponenciais, senos e cossenos.

Exemplo 3.26. Encontre a solução particular de $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$.

Demonstração. Como a exponencial se reproduz na derivação, uma tentativa razoável é admitir que y_P seja um múltiplo de e^{2x} . Vamos então procurar uma solução da forma

$$y_P(x) = k e^{2x}.$$

Logo $y'_P(x) = 2k e^{2x}$ e $y''(x) = 4k e^{2x}$. Substituindo na equação obtemos

$$(4k - 6k - 4k)e^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Portanto uma solução particular para a equação é

$$y_P(x) = -\frac{1}{2} e^{2x}.$$

□

Exemplo 3.27. Encontrar uma solução particular de $y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen}x$.

Demonstração. Primeira Tentativa: Como no exemplo anterior, vamos considerar $y_P(x) = A\operatorname{sen}x$, logo $y'_P(x) = A\cos x$ e $y''_P(x) = -A\operatorname{sen}x$. Substituindo na equação temos

$$(-5A - 2)\operatorname{sen}x - 3A\cos x = 0,$$

ou seja, não existe A que resolva esta equação para todos os x .

Segunda Tentativa: Vamos considerar agora $y_P(x) = A\operatorname{sen}x + B\cos x$, daí $y'_P(x) = A\cos x - B\operatorname{sen}x$ e $y''_P(x) = -A\operatorname{sen}x - B\cos x$. Substituindo na equação obtemos

$$(-5A + 3B - 2)\operatorname{sen}x + (-5B - 3A)\cos x = 0$$

e resolvendo esse sistema linear 2×2 obtemos $A = -\frac{5}{17}$ e $B = \frac{3}{17}$, portanto uma solução particular é

$$y_P(x) = -\frac{5}{17}\operatorname{sen}x + \frac{3}{17}\cos x.$$

□

Exemplo 3.28. Encontrar uma solução particular de $y'' - 3y' - 4y = -8e^x\cos 2x$.

Demonstração. Considerando $y_P(x) = Ae^x\cos 2x + Be^x\operatorname{sen} 2x$, derivando e substituindo na equação obtemos

$$(-3A + 4B - 3A - 6B - 4A)e^x\cos 2x + (-4A - 3B + 6A - 3B - 4B)e^x\operatorname{sen} 2x = -8e^x\cos 2x$$

e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} -10A - 2B = -8 \\ 2A - 10B = 0 \end{cases}$$

obtemos a solução particular

$$y_P(x) = \frac{10}{13}e^x\cos 2x + \frac{2}{13}e^x\operatorname{sen} 2x.$$

Observação 3.29. Suponha que y_1 é solução de $ay'' + by' + cy = g_1(x)$ e que y_2 é solução de $ay'' + by' + cy = g_2(x)$, então temos

$$\begin{cases} ay''_1 + by'_1 + cy_1 = g_1(x) \\ ay''_2 + by'_2 + cy_2 = g_2(x) \end{cases}$$

e quando somamos as equações obtemos

$$a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = g_1(x) + g_2(x),$$

ou seja, $y_1 + y_2$ é solução da equação particular

$$ay'' + by' + cy = g_1(x) + g_2(x).$$

□

Exemplo 3.30. Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2\operatorname{sen}x - 8e^x\cos 2x.$$

Demonstração. Separamos em 3 equações:

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} \\ y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen}x \\ y'' - 3y' - 4y = -8e^x\cos 2x \end{cases}$$

usando os três últimos exemplos e observação anterior temos que uma solução particular para a equação é

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\operatorname{sen}x + \frac{10}{13}e^x\cos 2x + \frac{2}{13}e^x\operatorname{sen}2x.$$

□

Exemplo 3.31. Encontre uma solução particular de $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$.

Demonstração. Vamos supor que $y_P(x) = Ae^{-x}$ neste caso obtemos $y'_P(x) = -Ae^{-x}$ e $y''_P(x) = Ae^{-x}$. E quando substituimos na equação, obtemos $0 = e^{-x}$, ou seja, não existe solução particular dessa forma. O problema surgiu porque as raízes da equação característica $r^2 - 3r - 4 = 0$ são $r_1 = 4$ e $r_2 = -1$, portanto Ae^{-x} é solução da equação homogênea associada. Deveríamos experimentar uma solução da forma $y_P(x) = (Ax + B)e^{-x}$, mas como Be^{-x} é solução da homogênea, vamos experimentar

$$y_P(x) = Axe^{-x}.$$

Derivando e substituindo na equação encontramos $A = -\frac{1}{5}$, ou seja, uma solução particular é

$$y_P(x) = -\frac{1}{5}xe^{-x}.$$

□

Em seguida apresentaremos um resumo das etapas do método para resolver uma equação do tipo $ay'' + by' + cy = g(x)$:

- (i) Achar a solução geral da homogênea correspondente.
- (ii) Ter certeza de que a função $g(x)$ pertence a classe de funções estudadas, isto é, exponenciais, seno, cosseno, polinômios e somas ou produtos dessas funções.
- (iii) Se $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x)$ então formular n problemas da forma $ay'' + by' + cy = g_i(x)$.
- (iv) No i -ésimo problema admitir uma solução $y_i(x)$ conforme a tabela abaixo, onde $p_n(x)$ é um polinômio de grau n ,

Se $g_i(x)$ for	o chute deverá ser	onde s é o n° de vezes
$p_n(x)$	$x^s[A_n x^n + \dots + A_0]$	que 0 é raiz da equação característica
$p_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s[A_n x^n + \dots + A_0]e^{\alpha x}$	que α é raiz da equação característica
$p_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, $p_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$	$x^s[A_n x^n + \dots + A_0]e^{\alpha x} \cos \beta x +$ $x^s[B_n x^n + \dots + B_0]e^{\alpha x} \sin \beta x$	que $\alpha + \beta i$ é raiz da equação característica

- (v) Depois de achar uma solução particular de cada problema $y_i(x)$, então $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)$ será uma solução particular da equação não-homogênea inicial.
- (vi) A solução geral da equação não-homogênea será a solução geral da equação homogênea associada (etapa 1) somado com a solução particular (etapa 5).

3.4.2 Método da variação dos parâmetros

Esse método é mais geral e pode ser aplicado a qualquer equação linear de segunda ordem e não depende de hipóteses detalhadas da função $g(x)$. Por outro lado, o método pode levar ao cálculo de integrais difíceis. O método consiste no seguinte: Dada uma equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (3.12)$$

consideramos a homogênea associada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (3.13)$$

e suponha que $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ seja a solução geral de (3.13). Admitamos agora que c_1 e c_2 dependam de x e procuremos uma solução particular para a equação (3.12) da forma

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \quad (3.14)$$

O objetivo então é encontrar $u_1 = u_1(x)$ e $u_2(x)$. Derivando (3.14) obtemos

$$y' = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x). \quad (3.15)$$

Vamos considerar que

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (3.16)$$

Logo ficamos com $y' = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)$, que quando derivamos novamente e substituímos na equação (3.12) temos

$$\begin{aligned} u_1(x)[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] &+ u_2(x)[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] + u_1'(x)y_1'(x) + \\ &+ u_2'(x)y_2'(x) = g(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Usando agora que y_1 e y_2 são soluções da homogênea associada (3.13), temos o sistema

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x) \end{cases}$$

cujas matrizes dos coeficientes $W(y_1, y_2)(x)$. Resolvendo temos que

$$u_1'(x) = \frac{-y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{-y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

$$u_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \Rightarrow u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

Acabamos de provar o seguinte teorema.

Teorema 3.32. *Se as funções p , q e g forem contínuas no intervalo I , e se as funções y_1 e y_2 forem soluções LI da equação homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então uma solução particular para a equação não homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ é*

$$y_P(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx.$$

Exemplo 3.33. Resolva a equação $x^2 y'' + xy' - y = x \ln x$, com $x > 0$, sabendo-se que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = \frac{1}{x}$ são soluções de $x^2 y'' + xy' - y = 0$.

Demonstração. A equação que temos de resolver é

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x},$$

O Wronskiano é dado por

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x},$$

além disso $y_P(x) = u_1(x)x + u_2(x)x^{-1}$. portanto

$$u_1(x) = \int \frac{-\ln x \cdot 1 \cdot (-x)}{x \cdot x \cdot 2} dx = \int \frac{\ln x}{2x} dx = \frac{(\ln x)^2}{4}.$$

e

$$u_2(x) = \int \frac{\ln x \cdot x \cdot (-x)}{x \cdot 2} dx = \int \frac{-x \ln x}{2} dx = -\frac{x^2}{8}[2\ln x - 1].$$

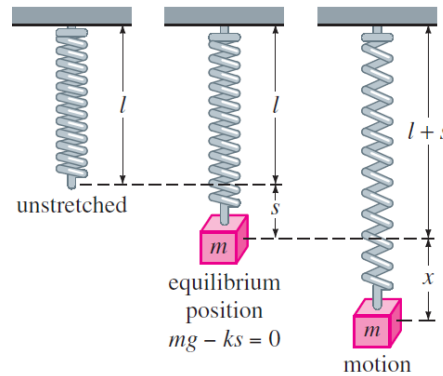
Portanto a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1x + c_2\frac{1}{x} + \frac{(\ln x)^2}{4}x - \frac{x}{8}[2\ln x - 1].$$

□

4 Aplicações das equações de segunda ordem

Figura 4.1: Sistema massa mola



Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem: (Zill, 2016)

Estudaremos oscilações mecânicas de um corpo ligado a uma mola. Vamos denotar por l o comprimento da mola em repouso, m a massa do corpo, L o enlogamento da mola provocado pela massa m , w a força peso que atua para baixo e vale mg e F_m a força da mola. De acordo com a Lei de Hooke, temos

$$F_m = -kL.$$

Onde k é a constante da mola. Usamos o sinal de menos porque F_m atua para cima (contrário ao movimento). Se a massa está em equilíbrio vale

$$mg - kL = 0.$$

4.1 Sistemas Massa-Mola: Movimento Livre Não Amortecido

Lei de Hooke Supondo que uma mola flexível esteja suspensa verticalmente em um suporte rígido e que então uma massa m seja conectada à sua extremidade livre. A distensão ou elongação da mola naturalmente dependerá da massa; massas com pesos

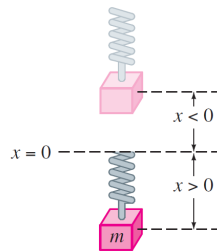
diferentes distenderão a mola diferentemente. Pela lei de Hooke, a mola exerce uma força restauradora F oposta à direção do alongamento e proporcional à distensão s . De forma mais simples, $F = ks$, onde k é uma constante de proporcionalidade chamado de **constante da mola**. A mola é essencialmente caracterizada pelo número k . Por exemplo, se uma massa de 10 libras alonga em 5 pé uma mola, então $10 = K(\frac{1}{2})$ implica que $k = 20$ lb/pés. Logo uma massa de, digamos, 8 lb necessariamente estica a mesma mola somente $\frac{2}{5}$ pé.

Segunda lei de Newton Logo após uma massa m ser conectada a uma mola ela provoca uma distensão s na mola onde atinge sua posição de equilíbrio, quando seu peso W é igual á força restauradora ks . Lembrando que o peso é definido por $W = mg$, onde a massa é medida em slugs, quilogramas ou gramas e $g = 32$ pés/ s^2 , $9,8$ m/ s^2 ou 980 cm/ s^2 , respectivamente. Conforme indicado na figura 5.1(b) a condição de equiíbrio é $mg = ks$ ou $mg - ks = 0$. Se a massa deslocada for uma quantidade x de sua posição de equilíbrio, a força restauradora da mola será então $k(s + x)$. Supondo que não haja forças de retardamento sobre o sistema e supondo que a massa vibre sem a ação de outras forças externas - **movimento livre** - podemos igualar F com a força resultante do peso e da força restauradora:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = -kx + mg - ks = -kx. \quad (4.1)$$

O sinal negativo em (4.1) indica que a força restauradora da mola age no sentido oposto ao do movimento. Além disso, podemos adotar a convenção de que deslocamentos medidos *abaixo* da posição de equilíbrio são positivos. Veja a figura 4.2

Figura 4.2: Aplicação



Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem: (Zill, 2016)

ED do Movimento Livre Não Amortecido Dividindo (4.1) pela massa m obtemos a equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0, \quad (4.2)$$

onde $w^2 = k/m$. Dizemos que a Equação (4.2) descreve um **movimento harmônico simples** ou **movimento livre não amortecido**. Duas condições iniciais óbvias associadas com (4.2) são $x(0) = x_0$ e $x'(0) = x_1$, representando, respectivamente, o deslocamento e a velocidade iniciais a massa. Por exemplo, se $x_0 > 0$, $x_1 < 0$ a massa começa de um ponto *abaixo* da posição de equilíbrio com uma velocidade inicial dirigida para cima. Quando $x_1 = 0$, dizemos que ela partiu o *repouso*. Por exemplo, se $x_0 < 0$, $x_1 = 0$ a massa partiu do repouso de um ponto $|x_0|$ unidades *acima* da posição de equilíbrio.

Solução e Equação do Movimento Para resolver a Equação 4.2, observamos que as soluções da equação auxiliar $m^2 = w_i, m_2 = -w_i$. Assim, com base em (3.9), determinamos a solução geral de (4.2) como

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt \quad (4.3)$$

O período das vibrações livres descritas por (4.3) é $T = 2\pi/w$ e a frequência é $f = 1/T = w/2\pi$. Por exemplo, para $x(t) = 2 \cos 3t - 4 \sin 3t$, o período é $2\pi/3$ e a frequência é $3/2\pi$. O primeiro número significa que o gráfico de $x(t)$ repete-se a cada $2\pi/3$ unidades; o segundo significa que há três ciclos do gráfico a cada 2π unidades ou, equivalentemente, que a massa está sujeita a $3/2\pi$ vibrações completas por unidade de tempo. Além disso, é possível mostrar que o período $2\pi/w$ é o intervalo de tempo entre dois máximos sucessivos de $x(t)$. Lembre-se de que o máximo de $x(t)$ é um deslocamento positivo correspondente à distância máxima atingida pela massa acima da posição de equilíbrio. Vamos referir cada caso como deslocamento extremo da massa. Finalmente, quando as condições iniciais forem usadas para determinar as constantes c_1 e c_2 em (4.3), diremos que a solução particular resultante ou a resposta é a equação do movimento.

Exemplo 4.1. Movimento livre não amortecido Uma massa de 2 libras distende uma mola em 6 polegadas. Em $t = 0$, a massa é solta de um ponto 8 polegadas abaixo da posição de equilíbrio, a uma velocidade de $\frac{4}{3}$ pés/s para cima. Determine a equação do movimento livre

Demonstração. Como estamos usando o sistema de unidades da engenharia, as medidas em polegadas devem ser convertidas em pés: 6 polegadas = $\frac{1}{2}$ pé; 8 polegadas = $\frac{2}{3}$ pé. Além disso, precisamos converter as unidades de peso dadas em libras em unidades de massa. De $m = W/g$, temos $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. Além disso, pela lei de Hooke, $2 = k(\frac{1}{2})$

implica que a constante de mola é $k = 4$ lb/pé. Logo, (4.1) resulta em

$$\frac{1}{16} \frac{d^2 x}{dt^2} = -4x \text{ ou } \frac{d^2 x}{dt^2} + 64x = 0.$$

O deslocamento e a velocidades iniciais são $x(0) = \frac{2}{3}$, $x'(0) = -\frac{4}{3}$, one o sinal negativo na última condição é uma consequência do fato de que é dada à massa uma velociade inicial na direção negativa ou para cima.

Como $w^2 = 64$ ou $w = 8$, a solução geral da equação diferencial é

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t. \quad (4.4)$$

Aplicando as condições iniciais a $x(t)$ e $x'(t)$, obtemos $c_1 = \frac{2}{3}$ e $c_2 = -\frac{1}{6}$. Assim, a equação o movimento será

$$x(t) = \frac{2}{3} \cos 8t - \frac{1}{16} \sin 8t. \quad (4.5)$$

Forma Alternativa de $x(t)$ Quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, a **amplitude** real A da vibração livre não é óbvia com base no exame da equação (4.3). Por exemplo, embora a massa tenha sido delocada inicialmente $\frac{2}{3}$ pé além da posição de equilíbrio, a amplitude das vibrações é um número maior que $\frac{2}{3}$. Assim sendo, em geral é conveniente converter uma solução da forma (4.3) na forma mais simples

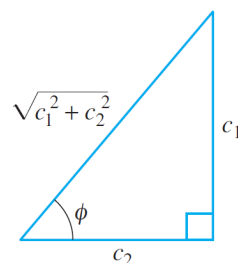
$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (4.6)$$

onde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e ϕ é um **ângulo de fase** definido por

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos \phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned} \Rightarrow \tan \phi = \frac{c_1}{c_2}. \quad (4.7)$$

Para verificar isso, desenvolveremos (4.6) usando a fórmula da adição da função seno:

Figura 4.3: Adição da função seno



Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem: (Zill, 2016)

$$A \sin wt \cos \phi + A \cos wt \sin \phi = (A \sin \phi) \cos wt + (A \cos \phi) \sin wt. \quad (4.8)$$

Segue da figura 4.3 que, se ϕ for definido por

$$\sin \phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_1}{A}, \quad \cos \phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_2}{A},$$

então (4.8) se torna

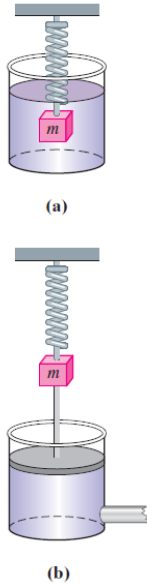
$$A \frac{c_1}{A} \cos wt + A \frac{c_2}{A} \sin wt = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt = x(t).$$

□

4.1.1 Sistemas Massa-Mola: Movimento Livre Amortecido

O conceito de movimento harmônico livre é um tanto irreal, uma vez que é descrito pela Equação (4.1) sob a hipótese de que nenhuma força de retardamento age sobre a massa em movimento. A não ser que a massa seja suspensa em um vácuo perfeito, haverá pelo menos uma força contrária ao movimento em decorrência do meio ambiente. Conforme mostra a Figura 4.4, a massa poderia estar suspensa em um meio viscoso ou conectada a um dispositivo de amortecimento.

Figura 4.4: Aplicação



Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem: (Zill, 2016)

ED do Movimento Livre Amortecido No estudo de mecânica, as forças de amortecimento que atuam sobre um corpo são consideradas proporcionais a uma potência da velocidade instantânea. Em particular, vamos supor durante toda a discussão subsequente que essa força é dada por um múltiplo constante de dx/dt . Quando não houver outras forças externas agindo sobre o sistema, segue da segunda lei de Newton que

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt}, \quad (4.9)$$

onde β é positivo e chamado de *constante de amortecimento* e o sinal negativo é uma consequência do fato de que a força amortecedora age no sentido oposto ao do movimento.

Dividindo-se (4.9) pela massa m , obtemos a equação diferencial do **movimento livre amortecido** $d^2x/dt^2 + (\beta/m)dx/dt + (k/m)x = 0$ ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + w^2x = 0, \quad (4.10)$$

onde

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \quad w^2 = \frac{k}{m}. \quad (4.11)$$

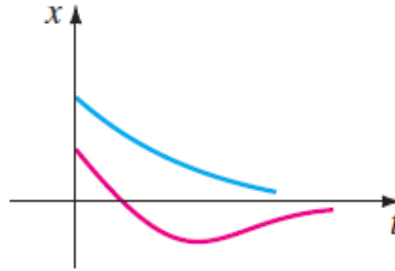
O simbolo 2λ é usado apenas por conveniência algébrica, pois a equação auxiliar é $m^2 + 2\lambda m + w^2 = 0$ e as raízes correspondentes são

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w^2}, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w^2}.$$

Agora podemos distinguir três casos possíveis dependendo do sinal algébrico de $\lambda^2 - w^2$. Como cada solução contém o *fator de amortecimento* $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, o deslocamento da massa fica desprezível após um período longo.

Caso I: $\lambda^2 - w^2 > 0$ Temos um sistema **superamortecido** nessa situação, pois o coeficiente de amortecimento β é grande quando comparado com a constante da mola k . A solução correspondente de (4.10) é $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$ ou

Figura 4.5: Aplicação



Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem: (Zill, 2016)

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - w^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - w^2}t}). \quad (4.12)$$

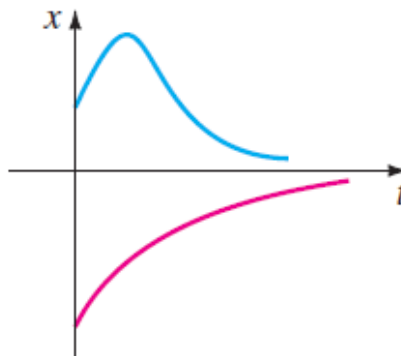
Essa equação representa um movimento suave e não oscilatório. A figura 4.5 apresenta dois gráficos possíveis de $x(t)$.

Caso II: $\lambda^2 - w^2 = 0$ Dizemos que o sistema é criticamente amortecido, pois qualquer decréscimo na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório. A solução geral de (4.10) é $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t}$ ou

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t). \quad (4.13)$$

Alguns gráficos típicos desse movimento são apresentados na figura 4.6. Observamos que o movimento é bem semelhante ao sistema superamortecido. Também é evidente em (4.13) que a massa pode passar pela posição de equilíbrio no máximo uma vez.

Figura 4.6: Aplicação

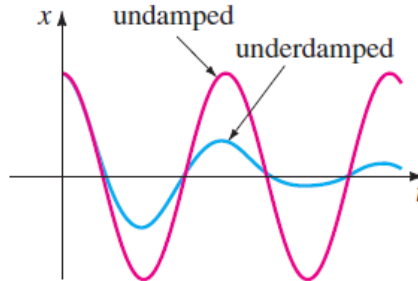


Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem: (Zill, 2016)

Caso III: $\lambda^2 - w^2 < 0$ Nesse caso o sistema é subamortecido, pois o coeficiente de

amortecimento é pequeno quando comparado com a constante da mola. As raízes m_1 e m_2 agora são complexas:

Figura 4.7: Aplicação



Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem: (Zill, 2016)

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{w^2 - \lambda^2}i, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{w^2 - \lambda^2}i.$$

Sendo assim, a solução geral da Equação (4.10) é

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos \sqrt{w^2 - \lambda^2}t + c_2 \sin \sqrt{w^2 - \lambda^2}t). \quad (4.14)$$

Como indicado na Figura 4.7, o movimento descrito por (4.14) é oscilatório, no entanto, por causa do fator $e^{-\lambda t}$, as amplitudes de vibração $\rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

4.1.2 Sistemas Massa-Mola: Movimento Forçado

ED do Movimento Forçado com Amortecimento Considerando uma força externa $f(t)$ agindo sobre uma massa vibrante em uma mola. Por exemplo, $f(t)$ pode representar uma força que gera um movimento oscilatório vertical do suporte da mola. A inclusão de $f(t)$ na formulação da segunda lei de Newton resulta na equação diferencial do **movimento forçado** ou **induzido**

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + f(t) \quad (4.15)$$

Dividindo (4.15) por m , obtemos

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + w^2 = F(t), \quad (4.16)$$

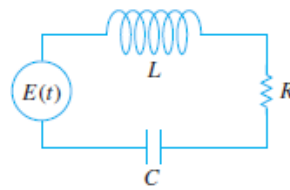
onde $F(t) = f(t)/m$. Como na seção anterior, $2\lambda = \beta/m$, $w^2 = k/m$. Para resolver essa última equação não homogênea, podemos usar tanto o método dos coeficientes a determinar quanto o de variação dos parâmetros.

4.2 Circuito em Série Análogo

Circuito em Série LRC Uma equação diferencial linear de segunda ordem semelhante à do movimento forçado com amortecimento pode ser descrito em sistemas físicos diferentes, como este caso, ou seja

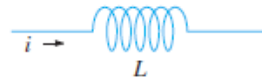
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + kx = f(t). \quad (4.17)$$

Figura 4.8: Aplicação

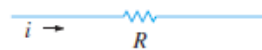


(a) LRC-series circuit

Inductor
inductance L : henries (h)
voltage drop across: $L \frac{di}{dt}$



Resistor
resistance R : ohms (Ω)
voltage drop across: iR



Capacitor
capacitance C : farads (f)
voltage drop across: $\frac{1}{C} q$



(b)

Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem: (Zill, 2016)

Se $i(t)$ denotar a corrente no **circuito elétrico em série LRC** mostrado na figura 4.8(a), então a queda e voltagem no indutor, resistor e capacitor será como a mostrada na

figura 4.8(b). Pela segunda lei de Kirchhoff, a soma dessas voltagens é igual à voltagem $E(t)$ impressa no circuito, isto é,

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \quad (4.18)$$

Mas a carga $q(t)$ no capacitor está relacionada com a corrente $i(t)$ por $i = dq/dt$ e, portanto, (4.18) torna-se equação diferencial linear de segunda ordem

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \quad (4.19)$$

A nomenclatura usada na análise de circuitos é semelhante à usada para descrever sistemas massa-mola. Se $E(t) = 0$, as **vibrações elétricas** do circuito são consideradas **livres**. Como a equação auxiliar de (4.19) é $Lm^2 + Rm + 1/C = 0$, haverá três formas e solução com $R \neq 0$, dependendo do valor do discriminante $R^2 - 4L/C$. Dizemos que o circuito é

superamortecido, se $R^2 - 4L/C > 0$;
criticamente amortecido, se $R^2 - 4L/C = 0$;
e **subamortecido**, se $R^2 - 4L/C < 0$.

Em cada um desses três casos, a solução geral de (4.19) contém o fator $e^{-Rt/2L}$ e portanto, $q(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Em subamortecido, se $q(0) = q_0$, a carga sobre o capacitor é carregado e descarregado quando $t \rightarrow \infty$. Quando $E(t) = 0$ e $R = 0$, dizemos que o circuito é não amortecido e as vibrações elétricas não tendem a zero quando t cresce sem limitação, temos que a resposta do circuito é **harmônica simples**.

Exemplo 4.2. Circuito em Série Subamortecido Vamos encontrar a carga $q(t)$ sobre o capacitor em um circuito em série LRC quando $L = 0,25\text{henry(h)}$, $R = 10\text{oms}(\Omega)$, $C = 0,001\text{ farad(f)}$, $E(t) = 0$, $q(0) = q_0$ coulombs(C) e $i(0) = 0$.

Solução Como $1/C = 1000$, a Equação (4.19) torna-se

$$\frac{1}{4}q'' + 10q' + 1000q = 0 \quad \text{ou} \quad q'' + 40q' + 4000q = 0.$$

Resolvendo essa equação homogênea da maneira usual, conseguimos verificar que o circuito é subamortecido e $q(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \sin 60t)$. Aplicando as condições iniciais, obtemos $c_1 = q_0$ e $c_2 = \frac{1}{3}q_0$. Assim,

$$q(t) = q_0 e^{-20t}(\cos 60t + \frac{1}{3} \sin 60t).$$

Quando há uma voltagem impressa $E(t)$ no circuito, as vibrações elétricas são chamadas

de **forçadas**. No caso em que $R \neq 0$, a função complementar $q_c(t)$ de (4.19) é chamada de **solução transiente**. Se $E(t)$ for periódica ou constante, então a solução particular $q_p(t)$ de (4.19) será uma **solução estacionária**.

Exemplo 4.3. Corrente Estacionária Determinando a solução estacionária $q_p(t)$ e a **corrente estacionária** em um circuito em série LRC quando a voltagem impressa for $E(t) = E_0 \sen \gamma t$ temos que a solução estacionária $q_p(t)$ é uma solução particular da equação diferencial

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E_0 \sen \gamma t.$$

Vamos procurar, usando o método dos coeficientes a determinar, uma solução particular da forma $q_p(t) = A \sen \gamma t + B \cos \gamma t$. Substituindo essa expressão na equação diferencial, simplificando e igualando os coeficientes, obtemos

$$A = \frac{E_0 \left(L\gamma - \frac{1}{C\gamma} \right)}{-\gamma \left(L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2 \right)}, \quad B = \frac{E_0 R}{-\gamma \left(L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2 \right)}.$$

É conveniente expressar A e B em termos de alguns novos símbolos.

$$\text{Se} \quad X = L\gamma - \frac{1}{C\gamma}, \quad \text{então} \quad X^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2}.$$

$$\text{Se} \quad Z = \sqrt{X^2 + R^2}, \quad \text{então} \quad Z^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2.$$

Portanto, $A = E_0 X / (-\gamma Z^2)$ e $B = E_0 R / (-\gamma Z^2)$, de forma que a carga estacionária é

$$q_p(t) = -\frac{E_0 X}{\gamma Z^2} \sen \gamma t - \frac{E_0 R}{\gamma Z^2} \cos \gamma t.$$

A carga estacionária é então dada por $i_p(t) = q'_p(t)$:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z} \left(\frac{R}{Z} \sen \gamma t - \frac{X}{Z} \cos \gamma t \right). \quad (4.20)$$

5 Conclusão

As EDOs de primeira ordem são a base do estudo de equações diferenciais e oferecem uma ferramenta poderosa para modelar e analisar uma vasta gama de fenômenos naturais e artificiais. Sua importância é evidenciada não só por sua aplicação direta em problemas simples, mas também por serem um passo inicial fundamental para a compreensão de sistemas mais complexos e de ordem superior. As equações diferenciais de ordem superior (ou seja, de segunda ordem ou superior) são ferramentas poderosas e versáteis para descrever, prever e analisar uma ampla variedade de fenômenos naturais e tecnológicos. Elas são essenciais em muitas áreas da ciência e engenharia, oferecendo uma capacidade mais sofisticada de modelar e analisar sistemas complexos. Para estudos futuros podemos explorar as soluções de equações diferenciais de ordem maior que dois e suas aplicações.

Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: LTC Rio de Janeiro, 2010. v. 10.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

ÇENGEL, Y. A.; III, W. J. P. **Equações diferenciais**. [S.l.]: AMGH Editora, 2014.

LIMA, E. L. **Análise real**. [S.l.]: Impa Rio de Janeiro, 2004. v. 1.

OLIVEIRA, E. C. de; OLIVEIRA, E. C. de; MAIORINO, J. E. **Introdução aos métodos da matemática aplicada**. [S.l.]: Unicamp, 1997.

SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. [S.l.]: Projeto Euclides, 1979. v. 1.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. [S.l.]: Cengage Learning, 2016.