

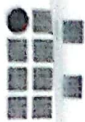
**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**DIAGONALIZAÇÃO DAS FORMAS QUADRÁTICAS E A CLASSIFICAÇÃO
DAS CÔNICAS E QUÁDRICAS**

FÁBIO NEVES OLIVEIRA

**GOIÂNIA - GOIÁS
2023**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: | |

Nome Completo do Autor:

Matrícula:

Título do Trabalho:

Autorização - Marque uma das opções

- ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
- ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
- ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2** ou **3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 18/12/2023
Local Data

Fábio Neves Oliveira

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

FÁBIO NEVES OLIVEIRA

**DIAGONALIZAÇÃO DAS FORMAS QUADRÁTICAS E A CLASSIFICAÇÃO
DAS CÔNICAS E QUÁDRICAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Colegiado do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Goiás -
IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial
para obtenção do Diploma de Licenciado em
Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Professora Dra. Karoline Victor Fernandes

**GOIÂNIA - GOIÁS
2023**

Ol41d Oliveira, Fábio Neves.

Diagonalização das formas quadráticas e a classificação das cônicas e quádras / Fábio Neves Oliveira. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023.
47 f.: il.

Orientadora: Profª. Dra. Karoline Victor Fernandes.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Autovalores. 2. Autovetores. 3. Formas bilineares. 4. Formas quádras. I. Fernandes, Karoline Victor (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 516

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva CRB1/ 2.740
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

DIAGONALIZAÇÃO DAS FORMAS QUADRÁTICAS E A CLASSIFICAÇÃO DAS CÔNICAS E QUÁDRICAS

por

FÁBIO NEVES OLIVEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Prof^a. Karoline Victor Fernandes

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 18 de dezembro de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof^a. Dr^a. Karoline Victor Fernandes (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Luciano Duarte da Silva (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Uender Barbosa de Souza (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Uender Barbosa de Souza, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 18/12/2023 15:18:27.
- Luciano Duarte da Silva, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 18/12/2023 15:16:55.
- Karoline Victor Fernandes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 18/12/2023 15:15:55.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 11/12/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 488415

Código de Autenticação: 4105f20036



Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre me apoiaram e incentivaram a seguir meus sonhos na área da matemática.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que me direcionou durante todo o percurso da graduação e colocou pessoas incríveis ao meu lado, que me apoiam e apoiaram durante todo o percurso.

Agradeço também à minha orientadora, Doutora Karoline Victor Fernandes, pelos ensinamentos, orientação e apoio na elaboração deste trabalho de conclusão de curso.

Aos meus professores e alunos, pela troca de conhecimentos e pelo suporte mútuo.

Em especial, agradeço ao meu pai, Valdemar Antonio de Oliveira, que desde o início desta graduação tem me apoiado.

E, por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

As cônicas e quádricas podem ser classificadas usando autovalores e autovetores das suas respectivas matrizes associadas. Para cônicas, a matriz é obtida a partir da equação geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Para quádricas tridimensionais, a matriz é derivada da equação geral $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$. A classificação depende dos autovalores e autovetores da matriz. Para cônicas, se todos os autovalores forem do mesmo sinal, a cônica é classificada como elipse ou ponto. Se um autovalor é zero, é uma parábola. Se os autovalores têm sinais opostos, temos uma hipérbole. Para quádricas, a natureza da superfície (elipsóide, hiperbolóide, parabolóide, etc.) é determinada pelos autovalores e autovetores da matriz. A interpretação exata pode variar dependendo da dimensão (2D ou 3D) e das características específicas das equações.

Palavras-chave: Autovalores, autovetores, formas bilineares, formas quádricas.

Abstract

Conics and quadrics can be classified using eigenvalues and eigenvectors of their respective associated matrices. For conics, the matrix is obtained from the general equation $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. For three-dimensional quadrics, the matrix is derived from the general equation $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$. The classification depends on the eigenvalues and eigenvectors of the matrix. For conics, if all eigenvalues are of the same sign, the conic is classified as an ellipse or a point. If an eigenvalue is zero, it is a parabola. If the eigenvalues have opposite signs, we have a hyperbola. For quadrics, the nature of the surface (ellipsoid, hyperboloid, paraboloid, etc.) is determined by the eigenvalues and eigenvectors of the matrix. The exact interpretation may vary depending on the dimension (2D or 3D) and the specific characteristics of the equations.

Keywords: Eigenvalues, eigenvectors, bilinear forms, quadric forms.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Cônicas	3
1.1.1 Translação de eixos	3
1.1.2 Circunferência	3
1.1.3 Elipse	6
1.1.4 Hipérbole	10
1.1.5 Parábola	14
1.2 Quádricas	17
1.2.1 Superfícies de revolução	17
1.2.2 Formas canônicas	24
2 Formas lineares, bilineares e quadráticas	26
2.1 Formas lineares	26
2.2 Formas Bilineares	27
2.3 Matriz de uma transformação linear	29
2.4 Forma bilinear simétrica	30
2.5 Formas quadráticas	31
2.6 Diagonalização da forma quadrática	33
3 Classificação das cônicas e quádricas	37
3.1 Cônicas em $\mathbb{R}^2$	37
3.1.1 Procedimento Geral de Classificação das Cônicas	40
3.2 Quádricas em $\mathbb{R}^3$	42
Referência Bibliográfica	47

Introdução

As cônicas e quádricas são figuras geométricas que desempenharam papéis significativos na história da matemática. A palavra “cônica” refere-se a seções cônicas, que incluem a elipse, parábola e hipérbole. Aristóteles estudou algumas propriedades das seções cônicas no século IV a.C. No século III a.C., Apolônio de Perga, conhecido como “o grande geômetra”, fez contribuições substanciais ao estudar as cônicas em sua obra “Conicas”, introduzindo o conceito de excentricidade e investigando diversas propriedades dessas curvas. Quanto às quádricas, elas são superfícies tridimensionais, como esferas, elipsóides e parabolóides. A matemática envolvida em quádricas evoluiu ao longo dos séculos, com importantes contribuições de matemáticos como René Descartes e Pierre de Fermat no século XVII. No século XIX, com o desenvolvimento da geometria analítica e álgebra linear, as cônicas e quádricas foram estudadas de forma mais abrangente, como descrito por [Simons \(1987\)](#) e [Pedoe \(2013\)](#). Atualmente as cônicas, como círculos, elipses, parábolas e hipérbolas, desempenham um papel crucial na matemática e em diversas áreas da ciência e engenharia. Elas são fundamentais em geometria analítica, física, óptica, astronomia, engenharia de satélites, entre outras disciplinas. Além disso, as cônicas têm aplicações práticas em design de lentes, trajetórias de projéteis e modelagem de fenômenos naturais. As superfícies quádricas, como esferas, elipsóides e parabolóides, desempenham um papel significativo em várias disciplinas. Elas são fundamentais na geometria diferencial, física matemática, engenharia, computação gráfica e em modelagem matemática de fenômenos físicos. As quádricas são frequentemente utilizadas para descrever formas tridimensionais complexas, proporcionando uma maneira eficaz de analisar e compreender propriedades geométricas e físicas. Sua importância se estende a campos como óptica, dinâmica de fluidos, mecânica celeste e design de superfícies em computação gráfica, destacando-se como ferramentas versáteis na representação e compreensão de fenômenos naturais e artificiais. Em resumo, compreender as propriedades das cônicas é essencial para diversas aplicações teóricas e práticas, como exposto em [Hoffman e Kunze \(1979\)](#), [Lima \(2006\)](#) e [Steinbruch e Winterle \(1987\)](#). Objetivo do trabalho é utilizar a diagonalização das formas quadráticas para classificar as cônicas e quádricas. No capítulo 1 apresentamos a análise geométrica das cônicas e quádricas, por exemplo, a elipse é o lugar dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é uma constante. No capítulo 2 apresentamos definições e exemplos que serão essenciais para a classificação das cônicas e quádricas utilizando autovalores e autovetores, destacamos as formas lineares, bilineares e quadráticas, a matriz de uma forma bilinear e a diagonalização da forma quadrática. No capítulo 3 estamos interessados nas cônicas e quádricas definidas algebricamente, aqui os autovalores e autovetores desempenham um papel importante na análise das cônicas e quádricas. Para as cônicas, a matriz de coeficientes associada ao sistema de equações é diago-

nalizada usando autovalores e autovetores. No contexto de cônicas, isso permite determinar a forma canônica da equação, facilitando a identificação da elipse, parábola ou hipérbole. Já para quádricas, as superfícies tridimensionais, o uso de autovalores e autovetores é crucial na diagonalização da matriz quadrática associada. Isso auxilia na simplificação da forma da equação e na identificação da natureza da quádrica, como esfera, elipsoide, cilindro ou cone.

1

Preliminares

1.1 Cônicas

Apresentamos aqui uma análise geométrica das cônicas e quádricas, para isso é crucial considerarmos as interseções, simetrias, eixos principais, focos e diretrizes, bem como as relações dimensionais específicas de cada curva. Essa análise proporcionará uma compreensão profunda das características visuais e estruturais das cônicas e quádricas. Utilizaremos aqui os livros [REIS e SILVA \(2002\)](#) e [WINTERLE \(2000\)](#).

1.1.1 Translação de eixos

Considere o plano xy e um ponto $O'(h, k)$ do plano. Dado um ponto $P(x, y)$ do plano seja $P'(x', y')$ tal que

$$\begin{aligned}x' &= x - h & x &= x' + h \\y' &= y - k & y &= y' + k\end{aligned}$$

que são as fórmulas de translação.

Neste caso, temos um novo sistema de coordenadas $x'O'y'$, com a mesma unidade de medida, em que o ponto $O'(h, k)$ é a origem e as retas $O'x'$ e $O'y'$ são paralelas respectivamente as retas Ox e Oy .

Por exemplo, se $O' = O'(3, 2)$ então as coordenadas do ponto $P(5, 4)$ no sistema xOy são $P'(5 - 3, 4 - 2) = P'(2, 2)$ no plano $x'O'y'$. De modo geral, qualquer ponto $P(x, y)$ pode ser identificado com o ponto $P'(x - 3, y - 2)$. O sistema obtido é uma translação de eixos.

1.1.2 Circunferência

Embora seja considerado um caso particular da elipse, convém considerar a circunferência separadamente.

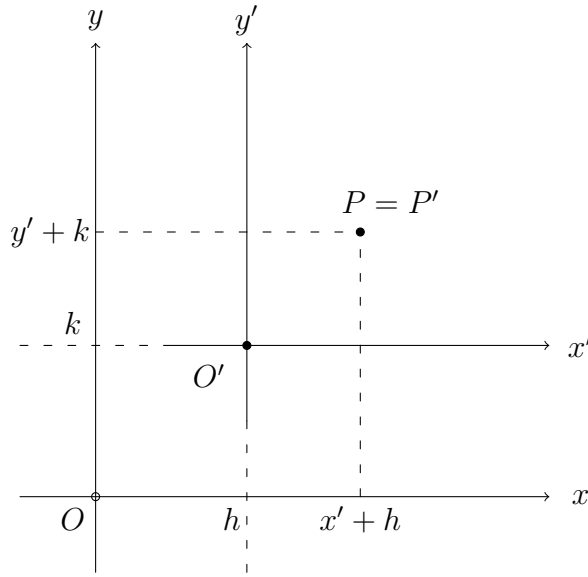


Figura 1.1: Translação de eixos

Equações paramétricas da circunferência

Definimos a circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio $r > 0$ como o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cuja distância ao centro C é igual a r , isto é, é o conjunto $\mathcal{C}$ de pontos do plano dado por

$$\mathcal{C} = \{P(x, y) \mid d(P, C) = r\}. \quad (1.1)$$

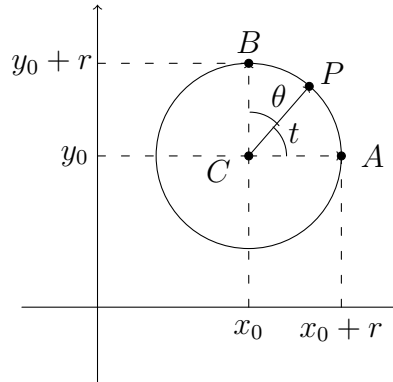


Figura 1.2: Circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r

Para determinar as equações paramétricas da circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência e destaquemos os pontos $A(x_0 + r, y_0)$ e $B(x_0, y_0 + r)$, veja Figura 1.2.

Os vetores $\vec{CA}$, $\vec{CP}$ e $\vec{CB}$ todos têm norma igual a r e os ângulos t entre $\vec{CA}$ e $\vec{CP}$, e θ entre $\vec{CP}$ e $\vec{CB}$ são dados por

$$\cos(t) = \frac{\langle \vec{CA}, \vec{CP} \rangle}{\|\vec{CA}\| \|\vec{CP}\|} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \frac{\langle \vec{CP}, \vec{CB} \rangle}{\|\vec{CP}\| \|\vec{CB}\|}. \quad (1.2)$$

Agora observe que $\overrightarrow{CA} = A - C = (r, 0)$, $\overrightarrow{CP} = P - C = (x - x_0, y - y_0)$ e $\overrightarrow{CB} = B - C = (0, r)$. Portanto, (1.2) torna-se

$$\cos(t) = \frac{\langle (r, 0), (x - x_0, y - y_0) \rangle}{r^2} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \frac{\langle (x - x_0, y - y_0), (0, r) \rangle}{r^2}. \quad (1.3)$$

De (1.3) obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} r(x - x_0) = r^2 \cos(t) \\ r(y - y_0) = r^2 \cos(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + r \cos(t) \\ y = y_0 + r \cos(\theta) \end{cases}. \quad (1.4)$$

Finalmente, observe que $t + \theta = 90^\circ$. Logo,

$$\cos(\theta) = \cos(90^\circ - t) = \cos(90^\circ) \cos(t) + \operatorname{sen}(90^\circ) \operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(t).$$

Donde, um ponto $P(x, y)$ da circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r satisfaz as equações:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(t) \\ y = y_0 + r \operatorname{sen}(t) \end{cases}, \quad (1.5)$$

em que t é o ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{CP}$ e o eixo das abscissas. Agora note que cada ponto da circunferência é unicamente determinado por esse ângulo que varia entre $0 \leq t < 360^\circ$.

Por outro lado, se um ponto $Q(x, y)$ qualquer do plano satisfaz $(x, y) = (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \operatorname{sen}(t))$ então,

$$d(Q, C) = \sqrt{(x_0 + r \cos(t) - x_0)^2 + (y_0 + r \operatorname{sen}(t) - y_0)^2} = r.$$

Em outras palavras Q pertence a circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r . Donde, essa circunferência fica unicamente determinada pelas equações (1.5), que são as equações paramétricas da circunferência.

Equação cartesiana da circunferência

Das equações paramétricas da circunferência (1.5), obtemos $x - x_0 = r \cos(t)$ e $y - y_0 = r \operatorname{sen}(t)$. Donde,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \cos^2(t) + r^2 \operatorname{sen}^2(t) = r^2 \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

A equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ é a equação cartesiana da circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r .

Exemplo 1.1. As equações paramétricas e cartesianas da circunferência de centro $C(1, -1)$ e raio 3 são dadas por

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cos(t) \\ y = -1 + 3 \operatorname{sen}(t) \end{cases}, 0 \leq t < 2\pi \quad \text{e} \quad (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

Exemplo 1.2. A equação $x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0$ pode ser escrita como

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Isso mostra que a equação $x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0$ representa a equação de uma circunferência de centro $C(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e raio $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

1.1.3 Elipse

Dados dois pontos F e F_1 e um número $r > d(F, F_1)$, o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que

$$d(P, F) + d(P, F_1) = r,$$

é chamado Elipse de focos F e F_1 e eixo maior r .

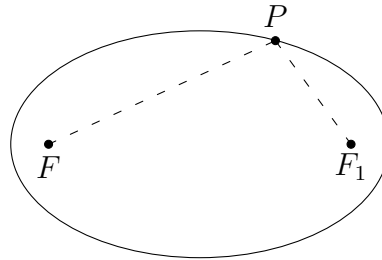


Figura 1.3: Elipse de focos F e F_1 e eixo maior r .

Vamos determinar a equação da elipse no caso particular em que os focos estão sobre os eixos coordenados. Temos que considerar dois casos:

Os focos estão sobre o eixo das abcissas.

Considere uma elipse de acordo com a Figura (1.4) com focos $F_1(-c, 0)$ e $F(c, 0)$, $c > 0$ e eixo maior r . Vamos destacar os pontos de interseção da elipse com os eixos coordenados, isto é: $B(0, b)$ e $B_1(0, -b)$, $b > 0$, sobre o eixo das ordenadas y . $A(a, 0)$ e $A_1(-a, 0)$, $a > 0$, sobre o eixo das abcissas x .

Observe que vale $r = d(A, A_1)$. Para ver isso basta observar que

$$\begin{cases} d(A, F_1) + d(A, F) = r \\ d(A_1, F_1) + d(A_1, F) = r \end{cases} \iff [d(A, F_1) + d(A, F)] + [d(A_1, F_1) + d(A_1, F)] = 2r$$

Por outro lado, $d(A_1, F_1) + d(F_1, A) = d(A_1, A)$ e $d(A, F) + d(F, A_1) = d(A, A_1)$. Donde,

$$2d(A_1, A) = 2r \iff d(A_1, A) = r.$$

Portanto, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da elipse tem-se:

$$d(P, F) + d(P, F_1) = d(A, A_1) = 2a \tag{1.6}$$

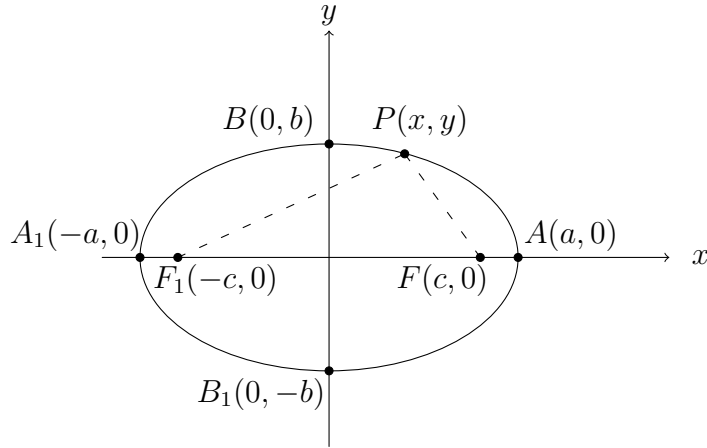


Figura 1.4: Elipse de focos sobre o eixo das abcissas

Agora observe que $d(P, F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ e $d(P, F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ portanto a equação (1.6) torna-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (1.7)$$

Elevando ambos os membros na equação (1.7) ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo essa expressão obtemos

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (1.8)$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros de (1.8) resulta

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

Donde obtemos,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (1.9)$$

Agora observe que o triângulo F_1BF é isósceles, desde que F_1 e F estão a mesma distância do eixo e o segmento $\overline{OB}$ é a altura do triângulo. Em outras palavras: $d(B, F_1) = d(B, F) = a$. Observe ainda que o triângulo OBF é retângulo, donde

$$d(B, F)^2 = b^2 + c^2 \iff a^2 = b^2 + c^2 \iff b^2 = a^2 - c^2.$$

Substituindo em (1.9) temos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \quad (1.10)$$

Como, $a, b, c > 0$ podemos dividir ambos os membros de (1.10) por a^2b^2 que resulta em

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.11)$$

Isso mostra que se $P(x, y)$ pertence a elipse com focos $F_1(-c, 0)$ e $F(c, 0)$, $c > 0$ e eixo maior $2a$ satisfaz a equação (1.11). Reciprocamente se $P(x, y)$ é um ponto do plano que satisfaz (1.11) então pode-se mostrar que P é um ponto da elipse com focos $F_1(-c, 0)$ e $F(c, 0)$, $c > 0$ e eixo maior $2a$.

Para verificar isto basta fazermos o processo inverso ao realizado para obter esta equação.

Os focos estão sobre o eixo das ordenadas.

Os focos estão sobre o eixo maior, neste caso os cálculos que fizemos na seção anterior não mudam, exceto pelo fato de que se tem a e b em posições trocadas em relação aos eixos coordenados.

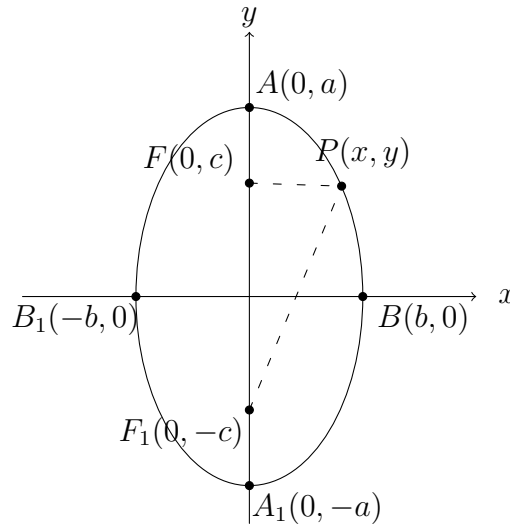


Figura 1.5: Elipse de focos sobre o eixo das ordenadas

Procedendo como na seção anterior concluímos que a elipse é dada pela equação

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Elementos da Elipse:

Focos: São os pontos F e F_1 .

Distância Focal: $d(F_1, F) = 2c$.

Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2 .

Eixo maior: é o segmento A_1A de comprimento $2a$.

Eixo menor: é o segmento B_1B de comprimento $2b$.

Vértices: são os pontos $B(0, b)$ e $B_1(0, -b)$, $b > 0$, e $A(a, 0)$ e $A_1(-a, 0)$, $a > 0$.

Excentricidade: É o número real $e = \frac{c}{a}$. Como $a, b, c > 0$ e $c < a$, temos $0 < e < 1$.

Observação 1.3. Como em toda elipse tem-se $a > b$ (por convenção), para saber se uma elipse tem seu eixo maior sobre o eixo das abscissas ou sobre o eixo das ordenadas, basta observar qual dos números denominadores na Equação (1.11) é maior. Se o maior denominador for o do x então os focos estão sobre o eixo das abscissas, caso contrário no eixo das ordenadas. Por exemplo, a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ tem os focos sobre o eixo das ordenadas pois o denominador do y^2 é o maior denominador na equação.

Os focos não estão sobre os eixos coordenados

Nos casos que acabamos de ver, o centro da elipse era a origem do plano xy . Agora, vamos considerar casos em que o centro é um ponto qualquer $C(h, k)$. Vamos obter a equação da elipse a partir de uma translação de eixos utilizando as equações obtidas nas Seções 1.1.3 e 1.1.3.

1º - O eixo maior é paralelo ao eixo das abscissas:

Neste caso consideramos as fórmulas de translação $x' = x - h$ e $y' = y - k$. Neste caso, em relação ao sistema $x'O'y'$ a equação da elipse será

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, fazendo a substituição de x' e y' temos

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1. \quad (1.12)$$

Em outras palavras a equação da elipse de centro $C(h, k)$ em que os focos são paralelos ao eixo x é a Equação (1.12).

Para determinar os vértices e focos no sistema original xOy demos utilizar as fórmulas de translação $x = x' + h$ e $y = y' + k$, de modo que os vértices (no sistema xOy) são os pontos $(a + h, k)$ e $(-a + h, k)$ e $(h, b + k)$ e $(h, -b + k)$ e os focos $(c + h, k)$ e $(-c + h, k)$, observando que $c^2 = a^2 - b^2$.

2º - O eixo maior é paralelo ao eixo das ordenadas: Neste caso, em relação ao sistema $x'O'y'$ a equação da elipse será

$$\frac{(x')^2}{b^2} + \frac{(y')^2}{a^2} = 1.$$

Portanto, fazendo a substituição de x' e y' temos

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1. \quad (1.13)$$

Em outras palavras a equação da elipse de centro $C(h, k)$ em que os focos são paralelos ao eixo

x é a Equação (1.13).

Valem as mesmas considerações que fizemos com os vértices e focos do caso anterior, isto é, utilizando as fórmulas de translação $x = x' + h$ e $y = y' + k$, de modo que os vértices (no sistema xOy) são os pontos $(h, a + k)$ e $(h, -a + k)$ e $(h + b, k)$ e $(h - b, k)$ e os focos $(h, c + k)$ e $(h, -c + k)$, observando que $c^2 = a^2 - b^2$.

Observe que desenvolvendo a expressão $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ obtemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2xh - 2a^2yk + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0.$$

O que mostra que a equação de uma elipse é uma equação de segundo grau.

Exemplo 1.4. A equação $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ representa a equação da elipse $\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$ cujo eixo maior é paralelo ao eixo y . O centro é o ponto $O'(1, -2)$. $a = 3$, $b = 2$ implica que os vértices são os pontos $(1, -5)$, $(1, 1)$ e $(-1, -2)$, $(3, -2)$. Os focos são os pontos $(-c, k)$ e $(c, -k)$ mas $c^2 = a^2 - b^2 = 5$ logo $c = \sqrt{5}$. Portanto os vértices são os pontos $(1, -2 - \sqrt{5})$ e $(1, -2 + \sqrt{5})$.

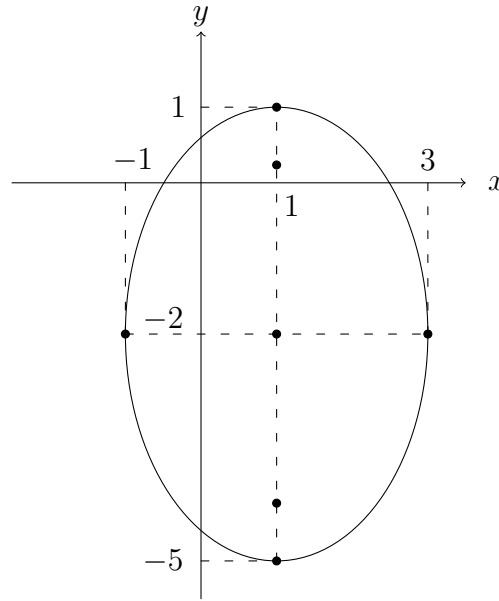


Figura 1.6: Elipse de equação geral $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

1.1.4 Hipérbole

Dados os pontos F_1 e F do plano e $r > 0$, o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F)| = r$$

é a hipérbole de focos F_1 e F e eixo r , veja Figura 1.7.

Os pontos A_1 e A são os vértices da hipérbole e tem-se

$$d(A, A_1) = r.$$

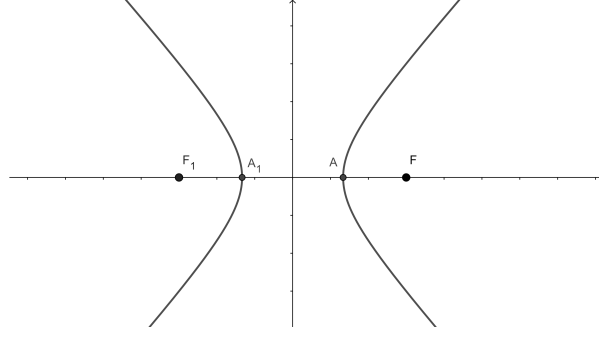


Figura 1.7: Hipérbole de focos F_1 e F e eixo r

Com o objetivo de obter uma equação mais simples para a hipérbole, vamos eleger um sistema de coordenadas onde um dos eixos contém os focos e a origem seja o ponto médio do segmento F_1F (que também é o ponto médio do segmento A_1A). Como no caso da elipse, temos, também, dois casos.

Os focos estão sobre o eixo das abcissas.

Neste caso sejam $F_1(-c, 0)$, $F(c, 0)$, $A_1(-a, 0)$ e $A(a, 0)$ com $a, c > 0$. Então, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da hipérbole temos $|d(P, F_1) - d(P, F)| = r$, isto é

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Essas contas são análogas às desenvolvidas na Seção 1.1.3 obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (1.14)$$

Agora, tomando $c^2 - a^2 = b^2$ a equação (1.14) torna-se

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Ou ainda,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.15)$$

Para finalizar, devemos mostrar que se um ponto satisfaz a equação (1.15) então é um ponto da hipérbole com focos $F_1(-c, 0)$, $F(c, 0)$ e vértices $A_1(-a, 0)$ e $A(a, 0)$. Lembre-se de tomar $c^2 = a^2 + b^2$.

Portanto a equação da hipérbole cujos focos são $F_1(-c, 0)$, $F(c, 0)$ e vértices $A_1(-a, 0)$ e $A(a, 0)$ é dada pela equação (1.15).

Os focos estão sobre o eixo das ordenadas.

Agora, a equação da hipérbole com focos $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ e vértices $A_1(0, -a)$ e $A_2(0, a)$ é dada pela equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

O procedimento para obtenção dessa equação é o mesmo realizado na seção anterior.

Elementos da Hipérbole:

Focos: São os pontos F e F_1 .

Distância Focal: $d(F_1, F) = 2c$.

Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2 .

Eixo real: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.

Eixo imaginário: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, perpendicular ao segmento real passando pelo vértice.

Vértices: são os pontos $A(a, 0)$ e $A_1(-a, 0)$, $a > 0$.

Excentricidade: É o número real $e = \frac{c}{a}$. Como $c > a$, temos $e > 1$.

Observação 1.5. As retas assintotas à hipérbole são as retas r e s que passam pelo centro da hipérbole (que por enquanto é a origem) e têm declividade, respectivamente, $m = \frac{b}{a}$ e $m' = -\frac{b}{a}$ se o eixo real está sobre o eixo x e $m = \frac{a}{b}$ e $m' = -\frac{a}{b}$ se o eixo real estiver sobre o eixo y . Suas equações são dadas respectivamente por $y = mx$ ou $y = m'x$.

Exemplo 1.6. A equação $x^2 - 4y^2 = 16$ representa a hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Os vértices são os pontos $A_1(-4, 0)$ e $A_2(4, 0)$. Os focos são os pontos $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(2\sqrt{5}, 0)$, desde que $c = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. As assintotas r e s são as retas de equações $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -\frac{1}{2}x$.

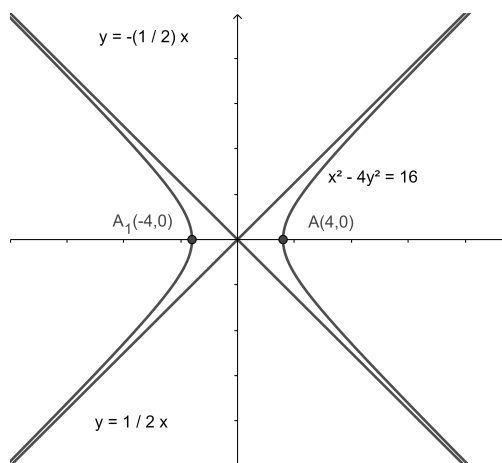


Figura 1.8: Hipérbole de equação $x^2 - 4y^2 = 16$

O eixo real é paralelo aos eixos coordenados

Agora, vamos considerar casos em que o centro é um ponto qualquer $C(h, k)$ e o eixo real é paralelo a um dos eixos coordenados. Assim como procedemos na Seção 1.1.3 vamos obter a equação da elipse a partir de uma translação de eixos utilizando as fórmulas de translação.

1º - O eixo real é paralelo ao eixo das abscissas:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \quad (1.16)$$

2º - O eixo real é paralelo ao eixo das ordenadas:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \quad (1.17)$$

Exemplo 1.7. Determinar a equação da hipérbole cujos vértices são os pontos $A_1(-2, 1)$ e $A(2, 1)$, sabendo que $F(3, 1)$ é um de seus focos. Em primeiro lugar precisamos encontrar o centro da hipérbole. Para isso, observe que o centro é o ponto médio do segmento A_1A , donde $C(0, 1)$. Agora, lembre-se que $c = d(C, F) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-1)^2} = 3$. Portanto, temos $b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Portanto uma equação para a hipérbole é

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

Para determinar o gráfico devemos observar que as assíntotas não vão passar pela origem, e sim pelo centro $C(0, 1)$. Neste caso devemos utilizar a fórmula

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Então, $m = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $m' = -\frac{\sqrt{5}}{2}$. Logo as equações das assíntotas são:

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 \text{ e } y_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2} + 1$$

Para finalizar esta seção, observe que se desenvolvemos a equação $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2xh + 2a^2yk + b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0.$$

O que mostra que a equação de uma hipérbole é uma equação de segundo grau.

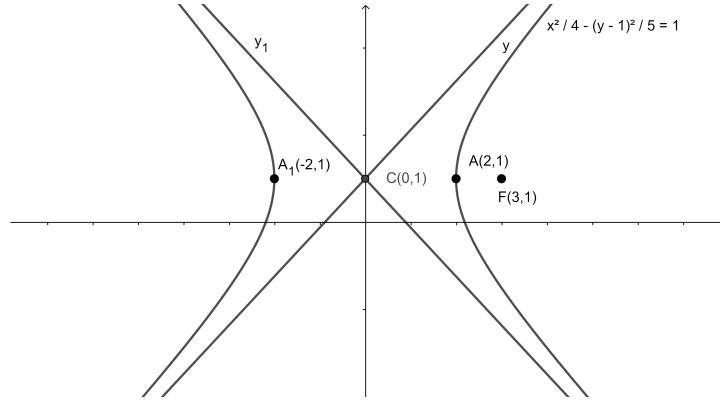


Figura 1.9: Hipérbole de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$

1.1.5 Parábola

Dados um ponto F e uma reta r chama-se parábola de foco F e diretriz r ao lugar geométrico dos pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

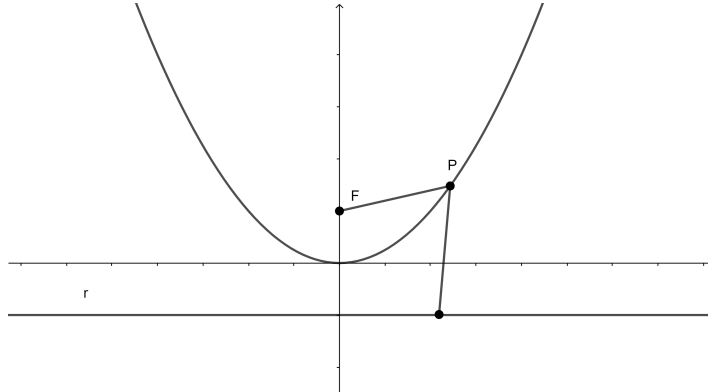


Figura 1.10: Parábola de foco F e diretriz r

Para determinar a equação da parábola com foco $F(a, 0)$ sobre o eixo y e diretriz $y = -a$ paralela ao eixo x conforme Figura 1.10, estamos assumindo que a distância entre o foco e a diretriz é dada por

$$d(F, r) = 2a.$$

Um ponto $P(x, y)$ pertence a parábola se, e somente se, $d(P, F) = d(P, r)$, ou

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = |y + a|.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado temos

$$x^2 + y^2 - 2ya + a^2 = y^2 + 2ya + a^2.$$

Que resulta em

$$x^2 = 4ay \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{4a}x^2. \quad (1.18)$$

Esta última é a equação da parábola.

Se a parábola tivesse a abertura voltada para baixo, isto é, se a diretriz fosse a reta $y = a$ e o foco estivesse sobre o eixo y abaixo da reta Ox a equação seria

$$x^2 = -4ay \quad \text{ou} \quad y = -\frac{1}{4a}x^2. \quad (1.19)$$

Os outros casos, quando o foco fica sobre o eixo x e a diretriz é a reta $x = a$ ou $x = -a$ temos as respectivas equações

$$y^2 = 4ax \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{4a}y^2. \quad (1.20)$$

E,

$$y^2 = -4ax \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4a}y^2. \quad (1.21)$$

Elementos da Parábola:

Foco: É o ponto F .

Diretriz: é a reta r .

Eixo: é a reta que passa por F e é perpendicular a diretriz r .

Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com seu eixo.

Observação 1.8. O número real $a \neq 0$ é o parâmetro da parábola. Quando a abertura da parábola, a qual damos o nome de concavidade, será voltada para cima ou para baixo, para direita ou para esquerda de acordo com o sinal de a . Se o eixo da parábola é o eixo y e $a > 0$ então a parábola é côncava para cima, se $a < 0$ é côncava para baixo. Se o eixo da parábola é o eixo x e $a > 0$ então a parábola é côncava direita, se $a < 0$ é côncava para esquerda. O gráfico de uma parábola é simétrico em relação ao seu eixo. Em outras palavras se, por exemplo a equação da parábola é $x^2 = 4ay$ então os um dos pontos $(-x, y)$ e (x, y) pertencem ao gráfico se, e somente se, ambos pertencem.

De modo análogo aos casos da elipse e da hipérbole as equações da parábola quando o eixo é paralelo a um dos eixos coordenados são dadas por

$$(x - h)^2 = 4a(y - k) \quad \text{ou} \quad (x - h)^2 = -4a(y - k), \quad (1.22)$$

quando o eixo é paralelo ao eixo y , ou

$$(y - k)^2 = 4a(x - h) \quad \text{ou} \quad (y - k)^2 = -4a(x - h), \quad (1.23)$$

quando o eixo é paralelo ao eixo x .

Exemplo 1.9. Determinar a equação da parábola com vértice na origem e foco $F(2, 0)$.

Solução: Estamos diante do caso $x^2 = 4ay$ com $a = 2$. Logo, a equação procurada é $x^2 = 8y$.

Exemplo 1.10. Determinar a equação da parábola cujo vértice é o ponto $V(-3, 2)$ e o foco é o ponto $F(0, 2)$.

Solução: Observe que neste caso o eixo é paralelo ao eixo x e $a > 0$. Logo, a equação é do tipo $(y - k)^2 = 4a(x - h)$. Mais precisamente,

$$(y - 2)^2 = 8(x + 3).$$

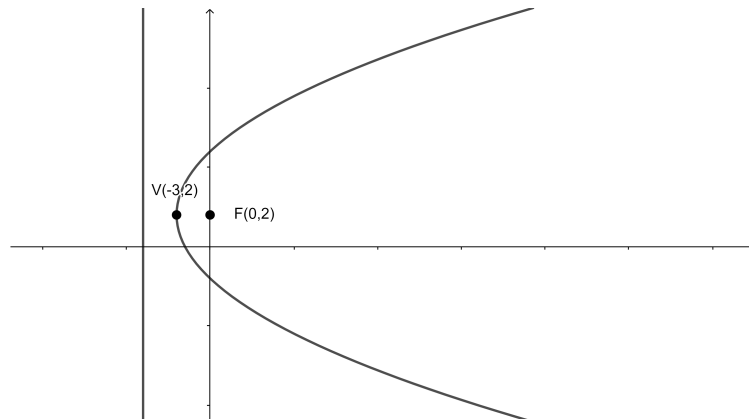


Figura 1.11: Parábola de equação $(y - 2)^2 = 8(x + 3)$

Quando desenvolvemos a expressão $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ obtemos

$$x^2 - 2xh + h^2 - 4ay - 4ak = 0 \tag{1.24}$$

que é a equação geral da parábola.

1.2 Quádricas

O conjunto de pontos $P(x, y, z)$ do espaço que satisfazem uma equação do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1.25)$$

com $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$ é uma superfície quádrlica, exceto quando este conjunto for vazio.

Observe que se uma superfície quádrlica for cortada por um plano coordenado ou por um plano paralelo a qualquer um dos planos coordenados então a curva obtida pela interseção é uma cônica. Por exemplo, se fizermos $z = 1$ na equação (1.25) obtemos

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Ey + Fx + Gx + Hy + (J + I + C) = 0 \quad (1.26)$$

Exemplo 1.11. Identifique a curva obtida pela interseção da expressão $2x^2 + 4y^2 - z^2 + 4x - 6y - 2xy + 2xz + 3 = 0$ e o plano $x = 1$. **Solução:** Se fazemos $x = 1$ na equação acima, obtemos

$$4y^2 - z^2 - 8y + 2z + 9 = 0.$$

Mas essa expressão pode ser escrita na forma

$$\frac{(z - 1)^2}{6} - \frac{(y - 1)^2}{3/2} = 1,$$

que representa a equação de uma hipérbole.

1.2.1 Superfícies de revolução

Uma superfície de revolução é a superfície gerada por uma curva plana, chamada geratriz, que gira 360° em torno de uma reta, que é o eixo de rotação. A interseção de uma superfície de revolução com um plano perpendicular ao eixo de rotação é uma circunferência.

Em geral, uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana C contida no plano yz em torno de um eixo z .

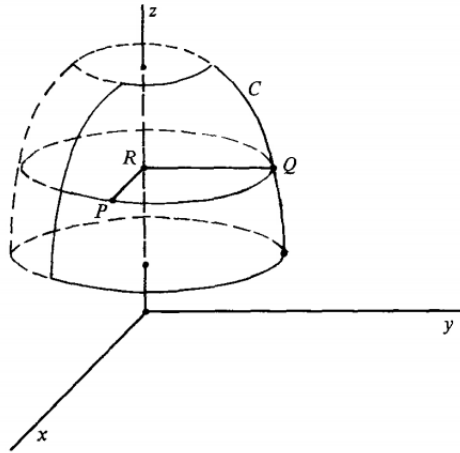


Figura 1.12: Superfície de revolução. Fonte: REIS e SILVA (2002).

Neste caso temos as equações

$$F(y, z) = 0, \quad x = 0.$$

Qualquer ponto $P(x, y, z)$ da superfície pertence a uma circunferência de centro $R(0, 0, z)$ (observe que como a rotação é em torno do eixo z , o centro de qualquer uma delas é um ponto sobre esse eixo). Agora tomando um ponto Q da circunferência sobre a curva $F(y, z) = 0$ que contém o ponto P , esse ponto tem coordenadas de $Q(0, y_1, z)$ (observe que essa circunferência é dada pela interseção da superfície com o plano $z = z$. Se o raio dessa circunferência é o número real r tem-se $d(Q, R) = d(P, R) = r$. Mas

$$r^2 = y_1^2.$$

Por outro lado $P(x, y, z)$ também pertence a circunferência, isto significa que

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Donde, obtemos

$$y_1^2 = x^2 + y^2.$$

Como Q pertence a curva $F(y, z) = 0$ temos,

$$F(y_1, z) = 0.$$

Logo, a equação da superfície é dada por

$$F(y_1, z) = 0, \quad y_1^2 = x^2 + y^2.$$

Se fizermos a rotação da mesma curva em torno do eixo y obtemos

$$F(y, z_1) = 0, \quad z_1^2 = x^2 + z^2.$$

Na próxima seção iremos repetir o procedimento descrito para encontrar a equação do elipsoide de revolução, nas demais apenas utilizaremos já que fizemos um caso geral.

Exemplo 1.12. A superfície de revolução gerada pela rotação da elipse

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

é a quádrlica

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

cuja equação foi obtida tomando

$$F(y_1, z) = \frac{y_1^2}{9} + \frac{z^2}{4}, \quad y_1^2 = x^2 + y^2.$$

Elipsoide de revolução

É a superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos.

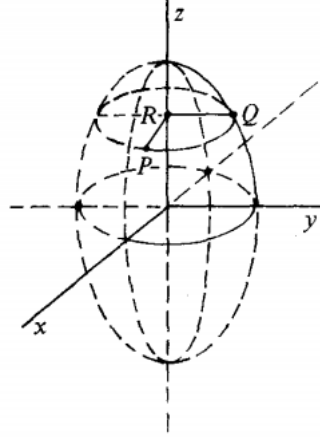


Figura 1.13: Elipsoide de revolução. Fonte: REIS e SILVA (2002)

Para deduzir a equação dessa superfície vamos tomar uma elipse no plano yz de equação

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0. \quad (1.27)$$

E vamos determinar a rotação dessa elipse em torno do eixo z .

Seja $P(x, y, z)$ um ponto da superfícies, particularmente este ponto pertence a circunferência cujo centro é o ponto $R(0, 0, z)$, $-c \leq z \leq c$. Cada ponto Q desta circunferência também pertence a elipse (1.27) e tem coordenadas $Q(0, y_1, z)$, em outras palavras,

$$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.28)$$

Como $Q(0, y_1, z)$ e $P(x, y, z)$ pertencem a mesma circunferência eles estão à mesma distância do centro. Logo,

$$\|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{QR}\| \iff x^2 + y^2 = y_1^2. \quad (1.29)$$

Substituindo em (1.28) temos

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \iff \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.30)$$

Essa última é a equação do elipsoide de revolução em torno do eixo z .

Se a elipse tivesse sido girada em torno do eixo y teríamos a equação

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.31)$$

Se $b = c$ a cônica de equação (1.28) é uma circunferência e o elipsoide de revolução uma

esfera. Em outras palavras a equação da esfera de centro na origem e raio b é dada por

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ ou } x^2 + y^2 + z^2 = b^2. \quad (1.32)$$

Hiperboloides de revolução

São as superfícies geradas pela rotação de uma hipérbole de equação

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0, \quad (1.33)$$

em torno do seus eixos.

9.1.2.1 Hiperboloide de uma folha

Como vimos, a equação da superfície gerada pela rotação da curva de equações

$$F(y, z) = 0, \quad x = 0$$

em torno do eixo z é dada por

$$F(y_1, z) = 0, \quad y_1 = x^2 + y^2.$$

Aqui temos

$$F(y, z) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1. \quad (1.34)$$

Portanto a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ em torno do eixo z é

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.35)$$

Essa superfície é o Hiperboloide de uma folha como mostra a Figura 1.14.

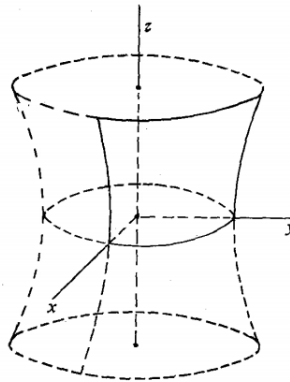


Figura 1.14: Hiperboloide de uma folha. Fonte: REIS e SILVA (2002)

9.1.2.2 Hiperboloide de duas folhas

Analogamente a seção anterior a equação da superfície gerada pela rotação da curva de equações

$$F(y, z) = 0, \quad x = 0$$

em torno do eixo y é dada por

$$F(y, z_1) = 0, \quad z_1 = x^2 + z^2,$$

em que,

$$F(y, z) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1. \quad (1.36)$$

Portanto a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ em torno do eixo y é

$$-\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.37)$$

Essa superfície é o Hiperboloide de duas folhas como mostra a Figura 1.15.

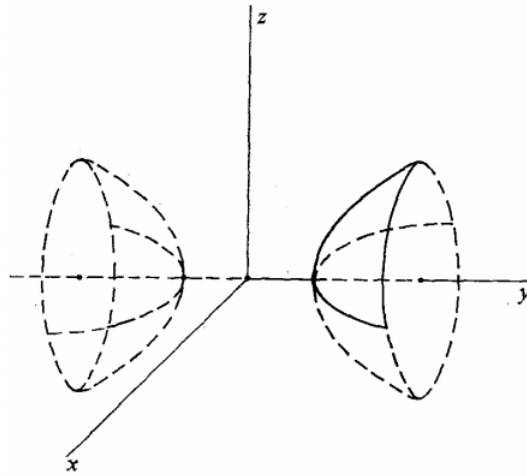


Figura 1.15: Hiperboloide de duas folhas. Fonte: REIS e SILVA (2002)

9.1.2.2 Paraboloide de revolução

Considere a parábola de equações

$$x = y^2, \quad z = 0.$$

A equação da superfície obtida pela sua rotação em torno do eixo x é dada por

$$F(x, y_1) = 0, \quad \text{com } y_1^2 = y^2 + z^2,$$

em que $F(x, y) = x - y^2$. De modo que,

$$F(x, y_1) = x - y_1^2 = x - (y^2 + z^2).$$

Portanto a equação procurada é dada por

$$x = y^2 + z^2.$$

Essa superfície é chamada Parabolóide de revolução, Figura 1.16.

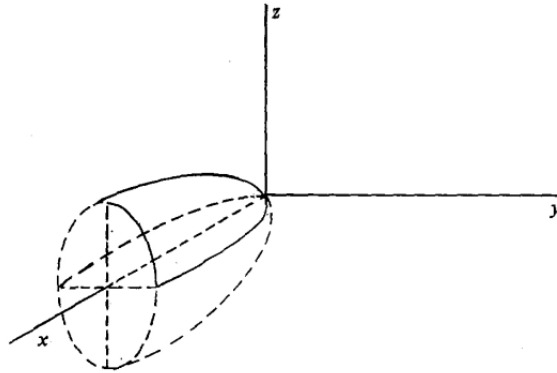


Figura 1.16: Parabolóide de revolução. Fonte: REIS e SILVA (2002)

Cone de revolução

Chama-se cone de revolução a superfície gerada pela rotação de uma reta em torno de outra que a intercepta. Em outros termos, fixamos uma reta e tomamos outra concorrente a ela e a fazemos girar em torno da primeira.

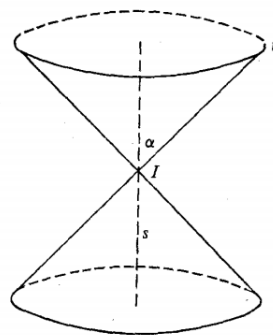


Figura 1.17: Cone de revolução. Fonte: REIS e SILVA (2002)

Para deduzirmos a equação do cone vamos estabelecer um sistema de coordenadas em que o eixo z coincide com o eixo do cone e o plano yz contém a reta r . Portanto, no plano yz , uma equação de r é

$$y = mz, \quad x = 0.$$

em que m é a tangente do ângulo formado pelas retas r e s . Assim, temos

$$y = mz, \quad x = 0.$$

Assim, temos

$$F(y, z) = y - mz = 0.$$

Assim, a equação da superfície de rotação obtida é dada por

$$y_1 - mz = 0 \text{ com } y_1^2 = x^2 + y^2.$$

De $y_1 - mz = 0$ obtemos $y_1^2 = m^2 z^2$. Donde,

$$x^2 + y^2 = m^2 z^2.$$

Que é a equação do cone de revolução.

Cilindro de revolução

Cilindro de revolução ou cilindro circular é a superfície gerada pela rotação de uma reta r em torno de uma reta s paralela a r .

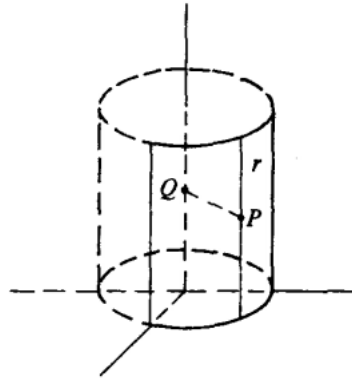


Figura 1.18: Cilindro de revolução. Fonte: [REIS e SILVA \(2002\)](#)

Vamos deduzir a equação desse cilindro de revolução cuja rotação da reta r ocorre em torno de uma reta s sobre o eixo z . Nesta caso seja R a distância entre r e s . Então, um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se,

$$d(P, s) = R.$$

Mas, $d(P, s) = d(P, Q)$ em que $Q(0, 0, z)$. Logo, $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se,

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{1.38}$$

que é a equação do cilindro circular.

Se, por outro lado, fixamos s sobre o eixo x e fazemos a rotação de uma reta r em torno de s obtemos a equação

$$y^2 + z^2 = R^2. \quad (1.39)$$

Finalmente, fixando s sobre o eixo y e fazendo a rotação de uma reta r em torno de s obtemos a equação

$$x^2 + z^2 = R^2. \quad (1.40)$$

1.2.2 Formas canônicas

Agora, vamos tratar dos casos mais gerais de superfícies quádricas. Para isto considere a equação (1.25), isto é,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Se $A = B = C = D = E = F = 0$ ficamos com a equação

$$Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

que é a equação de um plano.

Se, por outro lado, temos $D = E = F = G = H = I = J = 0$ ficamos com

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

que representa um ponto quando $A, B, C > 0$.

Parabolóide hiperbólico

Uma superfície cuja equação é dada por

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad (1.41)$$

é denominada parabolóide hiperbólico. Esta equação é a forma canônica do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo z .

As formas canônicas do parabolóide hiperbólico ao longo dos eixos x e y são, respectivamente:

$$x = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}. \quad (1.42)$$

Outras formas canônicas

De modo geral as formas canônicas geram as seguintes superfícies quádricas com as respectivas equações

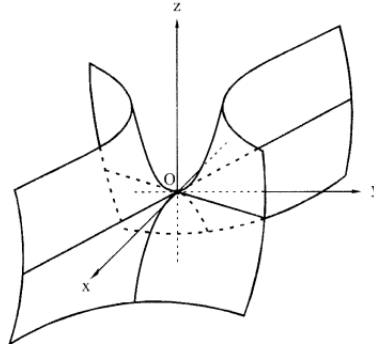


Figura 1.19: Paraboloide hiperbólico sobre o eixo Z . Fonte: [WINTERLE \(2000\)](#)

- Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- Hiperboloide de uma folha

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- Hiperboloide de duas folhas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- Paraboloide elíptico

$$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

- Paraboloide hiperbólico

$$\begin{aligned} x &= \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, & y &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}, & z &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \\ x &= -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, & y &= -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, & z &= -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \end{aligned}$$

- Cone quádrico

$$x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

2

Formas lineares, bilineares e quadráticas

2.1 Formas lineares

Apresentaremos aqui algumas definições e exemplos que serão úteis para a classificação das cônicas e quádricas utilizando autovalores e autovetores. Como referencial teórico utilizamos os livros [Boldrini et al. \(1980\)](#) e [Steinbruch e Winterle \(1987\)](#).

Definição 2.1.1. Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W , $T : V \longrightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:

1. Quaisquer que sejam u e v em V ,

$$T(u + v) = T(u) + T(v).$$

2. Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$T(kv) = kT(v).$$

Como caso particular, apresentamos a seguinte definição de forma linear.

Definição 2.1.2. Seja V um espaço vetorial real. Uma forma linear é uma transformação linear $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$

Exemplo 2.1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \mapsto x + y$, ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(x, y, z) \mapsto 2x + y - z$, ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Se $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear, $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é base de V e $\beta = \{\mathbf{w}\}$ é base de $\mathbb{R}$, então

$$[f]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}_{1 \times n},$$

onde $a_i = \frac{f(v_i)}{w}$, $1 \leq i \leq n$.

Se $\mathbf{v} \in V$ é tal que

$$[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

então $[f(\mathbf{v})]_{\beta} = [f]_{\beta}^{\alpha} [\mathbf{v}]_{\alpha}$.

De um modo geral, para $T : V \longrightarrow W$ linear, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, e $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ são bases de V e W , respectivamente, teremos que $[T]_{\beta}^{\alpha}$ é uma matriz de ordem $m \times n$, onde cada coluna é formada pelas componentes das imagens dos vetores de α em relação a base β :

$$[\mathbf{T}]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$ depende das bases α e β consideradas, isto é, a cada dupla de bases corresponde uma particular matriz. Assim, uma transformação linear poderá ter uma infinidade de matrizes para representá-las. No entanto fixada as bases a matriz é única.

2.2 Formas Bilineares

Consideraremos agora funções associadas a espaços vetoriais que se comportam de forma análoga ao produto interno, isto é, funções que a cada par de vetores associam um número de tal forma que uma vez fixado o primeiro vetor, a função seja uma forma linear em relação ao segundo vetor, e vice-versa.

Definição 2.2.1. Seja V um espaço vetorial real. Uma forma bilinear é uma aplicação $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ tal que:

i) Para todo $\mathbf{w}$ fixado, $B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ é uma forma linear em $\mathbf{v}$, isto é,

$$B(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$$

e $B(a\mathbf{v}, \mathbf{w}) = aB(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

ii) Para todo $\mathbf{v}$ fixado, $B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ é uma forma linear em $\mathbf{w}$, isto é,

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$$

e $B(\mathbf{v}, a\mathbf{w}) = aB(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Exemplo 2.3. O produto usual de números reais

$$p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto p(x, y) = xy$$

é uma forma bilinear. Verificando *i*) e *ii*):

$$p(x, y + z) = x(y + z) = xy + xz = p(x, y) + p(x, z),$$

$$p(ax, y) = ax \cdot y = a(xy) = ap(x, y).$$

Analogamente mostram-se as outras propriedades.

Exemplo 2.4. $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2y_1y_2$$

é uma forma bilinear. De fato,

$$\begin{aligned} B((x_1, y_1), (x_2, y_2) + (x_3, y_3)) &= B((x_1, y_1), (x_2 + x_3, y_2 + y_3)) \\ &= x_1(x_2 + x_3) + 2y_1(y_2 + y_3) \\ &= (x_1x_2 + 2y_1y_2) + x_1x_3 + 2y_1y_3 \\ &= B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + B((x_1, y_1), (x_3, y_3)). \end{aligned}$$

As outras propriedades são verificadas de modo análogo.

Exemplo 2.5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Podemos definir a forma bilinear $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. O fato de B ser bilinear é uma consequência das propriedades de produto interno.

Vamos considerar agora um exemplo importante.

Exemplo 2.6.

$$\text{Seja } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos associar a $\mathbf{M}$ uma forma bilinear $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \\ &= -2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3. \end{aligned}$$

A bilinearidade de B decorre das propriedades do produto e da soma de matrizes.

Exemplo 2.7. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e α uma base de V . De modo análogo ao que foi feito no exemplo anterior, dada uma matriz qualquer $\mathbf{M}_{n \times n}$, podemos associar uma forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [\mathbf{v}]_{\alpha}^T \mathbf{M} [\mathbf{w}]_{\alpha}$$

se

$$[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{w}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Observe que se $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear e dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ em V , em geral temos

$$B(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \neq B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2),$$

pois

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) &= B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \\ &= B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2). \end{aligned}$$

Observe, ainda, que no exemplo 2.6, temos $V = \mathbb{R}^3$ e a base canônica. A seguir veremos que, na verdade, toda forma bilinear pode ser escrita na forma do exemplo 2.7, dado acima.

2.3 Matriz de uma transformação linear

Sejam V um espaço vetorial e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dada uma base $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de V , associamos a B uma matriz $[B]_{\alpha}^{\alpha}$ chamada matriz da forma bilinear B , na base α , do seguinte modo: Se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$ e $\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n$.

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n, y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n) = \sum_{i,j}^n x_i y_j B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & \dots & B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1) & \dots & B(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{v}]_{\alpha}^T [B]_{\alpha}^{\alpha} [\mathbf{w}]_{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.8. Seja $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear dada por

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2,$$

onde $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{w} = (y_1, y_2)$. Então se $\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, temos

$$[B]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Com isto, podemos escrever a forma bilinear dada na forma matricial:

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

ou seja, $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [\mathbf{v}]_\alpha^T [B]_\alpha^\alpha [\mathbf{w}]_\alpha$.

Exemplo 2.9. Seja $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear definida por

$$B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = -2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

Procuremos $[B]_\alpha^\alpha$, onde $\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, é base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$[B]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{bmatrix}.$$

Nesta matriz determinamos, por exemplo, $B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = B((0, 1, 0) \cdot (1, 0, 0)) = -2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 4$. Calculando os outros elementos, obtemos

$$[B]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Compare com o Exemplo 2.6 Como não poderia deixar de ser, $[B]_\alpha^\alpha = \mathbf{M}$.

2.4 Forma bilinear simétrica

Definição 2.4.1. A forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica se $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Exemplo 2.10. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em V . Então a forma bilinear $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ é simétrica, pois $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.

Exemplo 2.11. $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_2,$$

onde

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2) \text{ e } \mathbf{w} = (y_1, y_2).$$

Calculando, $B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$, temos

$$\begin{aligned} B(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= ((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \\ &= -y_1x_1 + 3y_2x_1 + 3y_1x_2 + 2y_2x_2. \end{aligned}$$

Como $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$, B é simétrica. Observe que $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica. De fato:

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Este resultado vale em geral, podendo ser enunciado no teorema abaixo.

Teorema 2.4.1. Uma forma bilinear $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é simétrica se e somente se $[B]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz simétrica.

Veja [Lima \(2006\)](#). □

2.5 Formas quadráticas

Consideremos uma partícula de massa m deslocando-se no espaço com velocidade $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. A energia cinética que esse corpo possui é dada pela expressão

$$E_c = \frac{m \|\mathbf{v}\|^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right)^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{m}{2} \cdot v_x^2 + \frac{m}{2} \cdot v_y^2 + \frac{m}{2} \cdot v_z^2 = \\ &= \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m/2 & 0 & 0 \\ 0 & m/2 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dessa forma, a energia cinética pode ser interpretada como uma função (que não é linear) da velocidade.

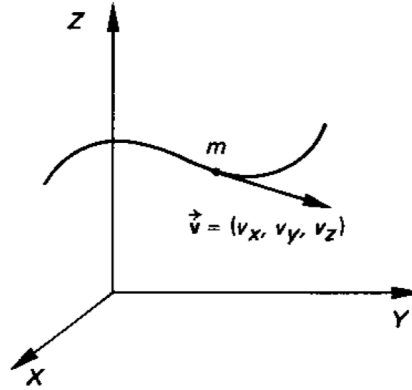


Figura 2.1: Energia Cinética, Fonte [Boldrini et al. \(1980\)](#)

$$E_c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v_x, v_y, v_z) \longmapsto \frac{m}{2} \cdot v_x^2 + \frac{m}{2} \cdot v_y^2 + \frac{m}{2} \cdot v_z^2$$

Se considerarmos, agora, a aplicação bilinear simétrica

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{cuja expressão é } B((v_x, v_y, v_z), (w_x, w_y, w_z)) = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m/2 & 0 & 0 \\ 0 & m/2 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix},$$

observamos que

$$E_c(v_x, v_y, v_z) = B((v_x, v_y, v_z), (v_x, v_y, v_z)).$$

Expressões que se comportam como a da energia cinética, isto é, que provêm de formas bilineares simétricas, recebem o nome de formas quadráticas. Agora, poderemos formalizar este conceito.

Definição 2.5.1. Seja V um espaço vetorial real e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. A função $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ é chamada forma quadrática associada a B .

Utilizando a expressão (2.1) em relação a uma base α de V , Q pode ser expressa na seguinte forma:

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\alpha}^T [B]_{\alpha}^{\alpha} [\mathbf{v}]_{\alpha},$$

onde $[B]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz simétrica.

Exemplo 2.12. Seja $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(\mathbf{v}) = x^2 - 10xy + y^2$, onde $\mathbf{v} = (x, y)$. Sabemos que

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

portanto, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = x^2 - 10xy + y^2$, conseqüentemente, $a = 1, 2b = -10, c = 1$. Substituindo,

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Observe ainda que Q é a forma quadrática associada à forma bilinear:

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

onde $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{w}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e $[B]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ e α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. O procedimento adotado no exemplo anterior pode ser aplicado a uma forma quadrática genérica $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$. Concluímos então que sua forma matricial é

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.13. Seja $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 5yz$. Em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$, Q é dada pela seguinte forma matricial:

$$Q(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Análogo ao resultado anterior as formas quadráticas $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz$$

tem forma matricial

$$Q(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{F}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{E}{2} \\ \frac{F}{2} & \frac{E}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Exemplo 2.14. A forma bilinear quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2$$

tem forma matricial

$$Q(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

2.6 Diagonalização da forma quadrática

Veremos a seguir que qualquer que seja a forma quadrática $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ sempre existe uma base ortonormal de V em relação a qual a matriz de Q é diagonal, ou seja, Q terá uma forma parecida com a equação (2.4). Antes de formalizar este resultado no teorema (2.6.1), vamos “diagonalizar” a forma quadrática do exemplo (2.2), onde $Q(\mathbf{v}) = x^2 - 10xy + y^2$ onde $\mathbf{v} = (x, y)$. Procuremos uma base β de modo que se

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

e

$$Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2,$$

ou ainda,

$$Q(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

temos

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\mathbf{v}]_{\alpha}^T [B]_{\alpha}^{\alpha} [\mathbf{v}]_{\alpha}$$

onde α é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Como a matriz $[B]_{\alpha}^{\alpha}$ é simétrica, ela é diagonalizável, admitindo um conjunto de autovetores ortonormais.

Os autovalores de $[B]_\alpha^\alpha$ são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$. Procurando os autovetores, encontramos para $\lambda_1 = 6$, $\mathbf{v}_1 = (x, -x)$ e para $\lambda_2 = -4$, $\mathbf{v}_2 = (x, x)$. Assim, uma base ortonormal β de autovetores será dada por

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ e } \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Seja $[I]_\alpha^\beta$ a matriz de mudança da base α para base β . Ou seja a matriz obtida considerando as colunas como as componentes dos vetores da base β escritas como combinação linear da base α . Além disso, $[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta [v]_\beta$. É possível mostrar que Então $[B]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta [B]_\beta^\beta [I]_\beta^\alpha$, onde $[I]_\alpha^\beta = \left([I]_\beta^\alpha \right)^{-1}$. Substituindo em $Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_\alpha^T [B]_\alpha^\alpha [\mathbf{v}]_\alpha$, temos $Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_\alpha^T [I]_\alpha^\beta [B]_\beta^\beta [I]_\beta^\alpha [\mathbf{v}]_\alpha$, onde

$$[B]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Como $[I]_\alpha^\beta$ é ortogonal, pois α e β são bases ortonormais, $[I]_\beta^\alpha = \left([I]_\alpha^\beta \right)^{-1} = \left([I]_\alpha^\beta \right)^T$ donde

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_\alpha^T \left([I]_\beta^\alpha \right)^{-1} [B]_\beta^\beta \left([I]_\beta^\alpha [\mathbf{v}]_\alpha \right) = [\mathbf{v}]_\alpha^T \left([I]_\beta^\alpha \right)^T [B]_\beta^\beta \left([I]_\beta^\alpha [\mathbf{v}]_\alpha \right), \quad (2.5)$$

ou ainda

$$Q(\mathbf{v}) = \left([I]_\beta^\alpha [\mathbf{v}]_\alpha \right)^T [B]_\beta^\beta \left([I]_\beta^\alpha [\mathbf{v}]_\alpha \right) = [\mathbf{v}]_\beta^T [B]_\beta^\beta [\mathbf{v}]_\beta. \quad (2.6)$$

Isto é,

$$Q(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 6x_1^2 - 4y_1^2, \quad (2.7)$$

onde $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$

Teorema 2.6.1. Seja $Q(v) = B(v, v)$ uma forma quadrática em V . Existe uma base ortonormal β de V tal que se

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

então $Q(v) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$.

Demonstração. Seja α uma base ortonormal qualquer de V . Então $Q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_\alpha' [B]_\alpha^\alpha [\mathbf{v}]_\alpha$. Logo, a matriz $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica e, portanto, corresponde a um operador auto-adjunto $T : V \rightarrow V$ que tem como matriz $[T]_\alpha^\alpha = [B]_\alpha^\alpha$. Como um operador auto-adjunto pode ser diagonalizado mediante uma base β de autovetores ortonormais, então

$$\begin{aligned}
[B]_{\alpha}^{\alpha} &= [T]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\beta} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}_{\beta}^{[I]_{\beta}^{\alpha}} \\
&= ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_{\beta}^{\alpha} \\
&= ([I]_{\beta}^{\alpha})' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_{\beta}^{\alpha},
\end{aligned}$$

pois α e β são bases ortonormais e, portanto, $[I]_{\beta}^{\alpha}$ é uma matriz ortogonal. Então,

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{v}) &= [\mathbf{v}]_{\alpha}' \cdot ([I]_{\beta}^{\alpha})' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [\mathbf{v}]_{\alpha} \\
&= ([I]_{\beta}^{\alpha} [\mathbf{v}]_{\alpha})' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} ([I]_{\beta}^{\alpha} [\mathbf{v}]_{\alpha}) \\
&= [\mathbf{v}]_{\beta}' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\beta} \\
&= \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.15. Seja a forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\begin{aligned}
Q(v) &= -4x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_2^2 \\
&= -4x_1^2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_2 + 6x_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$. Calculemos os autovalores.

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 33 \\
\lambda_1 &= 1 - \sqrt{34} \text{ e } \lambda_2 = 1 + \sqrt{34}.
\end{aligned}$$

Então existe uma base β (que é aquela de autovetores da matriz) tal que se

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

então

$$Q(v) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{34} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$Q(v) = (1 - \sqrt{34})y_1^2 + (1 + \sqrt{34})y_2^2.$$

Esta diagonalização das formas quadráticas (forma normal) tem muitas aplicações e uma delas será vista na classificação das cônicas, e quádras que apresentaremos no próximo capítulo.

3

Classificação das cônicas e quádricas

Aqui estamos interessados nas definições algébricas das cônicas e quádricas.

3.1 Cônicas em $\mathbb{R}^2$

Para tratar das cônicas no plano de forma adequada procederemos estudando figuras padrão e, através da diagonalização de formas quadráticas associadas, mostraremos que as equações representam uma das figuras padrão centrada, possivelmente, em outro referencial.

Definição 3.1.1. Uma cônica em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A ou B ou $C \neq 0$.

Observe que a equação da cônica envolve uma forma quadrática, $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, uma forma linear, $L(x, y) = Dx + Ey$, e um termo constante F . Isto é, a equação que define a cônica é:

$$Q(x, y) + L(x, y) + F = 0.$$

Exemplo 3.1. Dada a equação na base canônica α de $\mathbb{R}^2$:

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0,$$

nosso objetivo, mais uma vez, será determinar que figura esta cônica representa no plano. Para isto, precisamos inicialmente eliminar os termos mistos, do tipo xy , através da diagonalização da forma quadrática.

Passo 1: Escrevendo a equação anterior na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0.$$

Passo 2 : Vamos calcular os autovalores e os autovetores ortonormais da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 4 = -4\lambda + \lambda^2.$$

Então os autovalores são 0 e 4 .

$$\text{Para } \lambda_1 = 0, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{v}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{Para } \lambda_2 = 4, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 4y \end{bmatrix}, \text{ donde } \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Sabemos que pelo Teorema (2.6.1) que nesta nova base de autovetores $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, a forma quadrática

$$Q(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ onde } [\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

se reduz a

$$Q(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ se } [\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Passo 3 : Agora precisamos determinar a relação que existe entre $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e substituir o resultado na parte linear da equação dada.

$$L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

entretanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I] \begin{matrix} \text{autovetores} \\ \text{canônica} \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

logo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4 : A equação original se reduz a

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 8 = 0$$

$$0x_1^2 + 4y_1^2 + 4\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \right) + 12\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \right) - 8 = 0,$$

ou seja,

$$4y_1^2 - 4x_1 + 4y_1 + 12x_1 + 12y_1 - 8 = 4y_1^2 + 8x_1 + 16y_1 - 8 = 0,$$

portanto $y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0$. Esta última equação representa a cônica em relação ao novo referencial formado pelas retas suporte de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, como mostra a Figura abaixo:

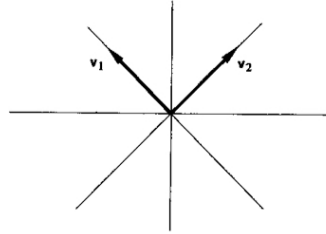


Figura 3.1:

Vamos ainda introduzir uma nova mudança de coordenadas para identificar a cônica. Ela será dada por uma translação do referencial acima.

Passo 5: Para “eliminar” os termos lineares onde isto é possível ($\lambda \neq 0$), agrupamos os termos de $y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0$ convenientemente.

$$\begin{aligned} (y_1^2 + 4y_1 + 4) - 4 + 2x_1 - 2 &= 0 \\ (y_1 + 2)^2 + 2(x_1 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Tornando $x_2 = x_1 - 3$ e $y_2 = y_1 + 2$, obtemos $y_2^2 + 2x_2 - 6 = 0$ ou finalmente

$$x_2 = -\frac{1}{2}y_2^2.$$

Assim, a equação acima representa a cônica em relação a um novo referencial R_3 , obtido por translação e podemos finalmente identificá-la como sendo uma parábola, conforme indica a Figura (3.1) A origem deste último referencial R_3 será $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$, isto é, $x_1 - 3 = 0$ e $y_1 + 2 = 0$.

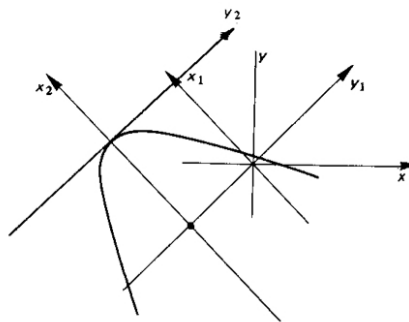


Figura 3.2:

Agora iremos formular o procedimento geral de classificação das cônicas, estabelecendo em detalhes o que deve ser feito em cada passo.

3.1.1 Procedimento Geral de Classificação das Cônicas

Dada a equação (em coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^2$)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 (A \text{ ou } B \text{ ou } C \neq 0)$$

para achar que figura ela representa no plano, devemos proceder do seguinte modo:

Passo 1 : Escrevemos a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0.$$

Passo 2 : Diagonalizamos a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Para isto, precisamos encontrar os autovalores λ_1 e λ_2 e os autovetores ortonormais $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ de $\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$.

Passo 3 : Obtemos as novas coordenadas. Para isto, utilizamos a equação

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I] \begin{matrix} \text{autovetores} \\ \text{canônica} \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4 : Substituímos as novas coordenadas na equação, obtendo a equação na nova base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [D \ E][I] \begin{matrix} \text{autovetores} \\ \text{canônica} \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F = 0,$$

ou seja,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0.$$

Passo 5 : Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos. Temos então três casos:

i) λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$: Neste caso

$$\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + \lambda_2 y_1^2 + by_1 + F = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{b}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0.$$

Seja $x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y_2 = y_1 + \frac{b}{2\lambda_2}$, temos então $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0$, onde

$$f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}.$$

ii) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$: Neste caso

$$\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + by_1 + F = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + by_1 + F = 0.$$

Tornando $x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y_2 = y_1$, temos

$$\lambda_1 x_2^2 + by_2 + f = 0,$$

onde

$$f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}.$$

iii) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. (similar ao anterior).

Como vimos, este procedimento permite-nos, através de uma mudança de referencial, colocar qualquer cônica na forma de uma das equações típicas. Neste processo classificamos a cônica, damos suas dimensões e posições no plano. Muitas vezes, entretanto, estaremos interessados apenas em classificar a cônica dada por uma equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, sem determinar suas dimensões e localização. Visando solucionar este problema de uma forma mais rápida, vamos discutir as possibilidades que temos em função dos sinais dos autovalores associados à forma quadrática.

Teorema 3.1.1. Dada uma cônica definida pela equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores associados à sua forma quadrática; então:

- i) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações (um ponto ou o vazio).
- ii) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ esta equação representa uma hipérbole ou sua degeneração (par de retas concorrentes).
- iii) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ esta equação representa uma parábola ou suas degenerações (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio).

Demonstração. Consideremos, portanto, os autovalores

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ de } \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.$$

Como já vimos, obteremos depois da eliminação do termo misto uma equação da forma

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0. \quad (3.1)$$

(I) Vamos analisar inicialmente, a situação em que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Neste caso, através de uma translação obtemos

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0.$$

Note que se:

- i) λ_1 e λ_2 forem ambos positivos, teremos para $f < 0$ uma elipse; para $f = 0$ teremos um ponto ($x_2 = y_2 = 0$) e para $f > 0$ teremos o conjunto vazio.
- ii) Se λ_1 e λ_2 forem ambos negativos, também teremos uma elipse, um ponto ou vazio, conforme f seja positivo, nulo ou negativo.
- iii) Se λ_1 e λ_2 tiverem sinais opostos, poderemos ter uma hipérbole, quando $f \neq 0$, ou um par de retas concorrentes se $f = 0$.

(II) Consideremos agora a situação em que $\lambda_1 = 0$ (e, portanto $\lambda_2 \neq 0$). Como vimos, partindo da equação (3.1), chegamos a uma equação:

$$\lambda_2 y_2^2 + ax_2 + f = 0.$$

Note que:

- i) se $a \neq 0$ teremos uma parábola.
- ii) se $a = 0$, poderemos ter um par de retas paralelas, uma reta ou o vazio.
- iii) O caso em que $\lambda_2 = 0$ é discutido de maneira análoga ao ii).

□

Podemos afirmar que o determinante associado à forma quadrática $\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ é igual ao produto de seus autovalores $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. Assim o sinal de $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ é o mesmo de $-\left(\frac{B^2}{4} - AC\right)$, que por sua vez tem o mesmo sinal de $-(B^2 - 4AC)$. Podemos assim reescrever o teorema anterior em função do “discriminante” $B^2 - 4AC$.

Teorema 3.1.2. Dada a equação: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, esta equação no plano representará:

- i) uma elipse ou suas degenerações, se $B^2 - 4AC < 0$
- ii) uma parábola ou suas degenerações, se $B^2 - 4AC = 0$
- iii) uma hipérbole, se $B^2 - 4AC > 0$.

3.2 Quádricas em $\mathbb{R}^3$

Definição 3.2.1. Uma cônica em $\mathbb{R}^3$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

onde A ou B ou C ou D ou E ou $F \neq 0$.

A equação que define a quádrlica pode representar o conjunto vazio ($x^2 = -1$), um ponto ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$), um plano ($z^2 = 0$), dois planos paralelos ($z^2 = 1$) ou dois planos que se interceptam ($xy = 0$). Estes casos são denominados degenerados. Da mesma forma que foi feito para a cônica, mostraremos através de uma mudança de referencial conveniente é possível classificar as quádrlicas.

Exemplo 3.2. Para classificar a quádrlica $-x^2 + 2yz + z - y = 100$, escrevemos a equação acima na forma matricial, obtendo:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 100$$

Calculando os autovalores e os autovetores já normalizados da matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos:

1. para $\lambda_1 = -1$; $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e
2. para $\lambda_2 = 1$; $\mathbf{v}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Temos ainda

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{can.}} = [I]_{\text{canónica}}^{\text{autovetores}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \text{ aut. ,}$$

onde

$$[I]_{\text{canónica}}^{\text{autovetores}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ & \sqrt{2} & \end{bmatrix}.$$

Então, a equação da quádrlica em relação a o referencial dado pelos autovetores será:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 100,$$

isto é, $-x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 = 100$.

Faremos agora uma nova mudança de coordenadas para eliminar os termos lineares onde isto é possível.

$$z_1^2 - x_1^2 - \left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} - 100 = 0.$$

Sejam $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $z_2 = z_1$; assim, temos a seguinte equação:

$$-\frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} = 1$$

que representa a quádrlica em relação ao referencial obtido por translação a partir daquele dos autovetores, cuja origem é dada por $x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 0$. Então

$$x_1 = 0, y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{e} \quad z_1 = 0.$$

Observando a equação obtida com as equações vemos que esta quádrlica é um hiperbolóide de duas folhas.

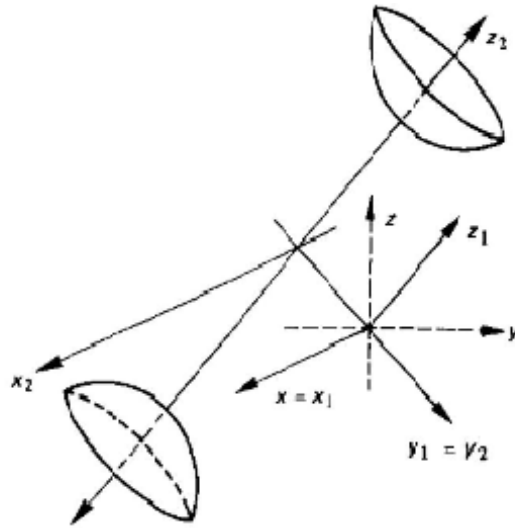


Figura 3.3: Hiperbolóide de duas folhas. Fonte [Boldrini et al. \(1980\)](#).

Exemplo 3.3. Para achar a figura dada pela equação

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81$$

devemos resolver

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 81.$$

Calculando os autovalores e autovetores respectivos (já normalizados) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \mathbf{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \\ \lambda_2 &= 1, \mathbf{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right) \\ \lambda_3 &= 4, \mathbf{v}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [I] \begin{matrix} \text{autovetores} \\ \text{canônica} \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \text{ autovetores ,}$$

onde

$$[I]_{\text{canônica}}^{\text{autovetores}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Então, a equação se torna

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 81$$

ou $x_1^2 + y_1^2 + 4z_1^2 = 81$, que é um elipsóide.

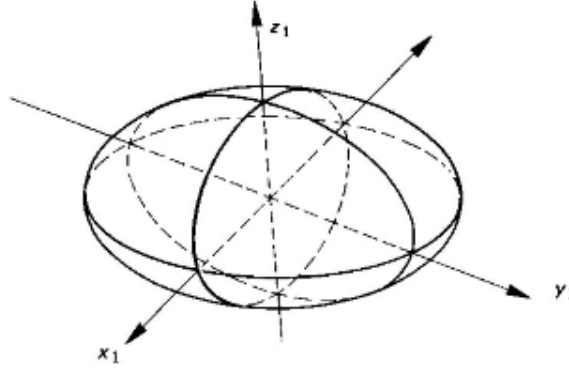


Figura 3.4: Elipsóide. Fonte [Boldrini et al. \(1980\)](#).

Como não aparecem os termos lineares, se não estivermos interessados na posição dos novos eixos mas apenas no formato da figura, bastaria calcular os autovalores, escrever a equação $x_1^2 + y_1^2 + 4z_1^2 = 81$ e já teríamos identificado a quádrlica.

Também no estudo das quádrlicas em geral, se tivermos problemas onde somente a classificação destas seja importante, não interessando suas dimensões ou posição no espaço, poderemos resolvê-los apenas estudando os sinais dos autovalores associados à forma quadrática.

Conclusão

Classificar as cônicas e quádras utilizando os autovalores e autovetores me permitiu uma revisão de importantes conteúdos estudados durante o curso, pude entender melhor a construção geométrica das cônicas e quádras, revisar os conceitos básicos de Álgebra linear como espaços vetoriais, base, dimensão, espaços vetoriais com produto interno, transformações lineares, autovalores e autovetores e a relação existente entre eles, além de aprender novos conceitos como formas bilineares, formas bilineares quadráticas e diagonalização da forma quadrática. Utilizando a análise espectral da matriz associada à equação da forma quadrática correspondente percebemos que os autovalores e autovetores dessa matriz contêm informações importantes sobre a geometria da cônica ou quádras.

1. Cônicas: Para uma equação geral de uma cônica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, a matriz associada seria:

$$Q = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

Os autovalores λ_1 e λ_2 e os autovetores correspondentes v_1 e v_2 de Q fornecem informações sobre a cônica. Se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, a cônica é elíptica. Se tiverem sinais opostos, é hiperbólica. Se um deles for zero, é parabólica.

2. Quádricas: Para uma equação geral de uma quádras

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

a matriz associada seria:

$$Q = \begin{bmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{bmatrix}.$$

Os autovalores λ_1 , λ_2 , e λ_3 e os autovetores correspondentes v_1 , v_2 , e v_3 de Q oferecem informações sobre a quádras. A classificação depende dos sinais e valores dos autovalores. Todos positivos/negativos indicam uma elipsóide, mistura de sinais indica um hiperbolóide, e um autovalor zero sugere uma parabolóide. Em resumo, ao utilizar autovalores e autovetores na análise de cônicas e quádras, é possível simplificar as equações associadas e obter informações valiosas sobre a natureza e a orientação dessas figuras geométricas.

Referências Bibliográficas

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra linear*. [S.l.]: Harper & Row, 1980.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Algebra linear*, 2a. edição. *Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro*, 1979.

LIMA, E. L. *Álgebra linear: coleção matemática universitária. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil*, 2006.

PEDOE, D. *Geometry: A comprehensive course*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.

REIS, G.; SILVA, V. *Geometria analítica segunda edição. Rio de Janeiro: LTC*, 2002.

SIMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill*, v. 2, 1987.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra linear*. 1987.

WINTERLE, P. *Vetores e geometria analítica*. ed. Makron Books, 2000.