

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA
ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

MONOGRAFIA DE CONCLUSÃO DE CURSO

ABORDAGENS DO MOVIMENTO BROWNIANO E
APLICAÇÕES DE FENÔMENOS ALEATÓRIOS

VICTOR MATHEUS OLIVEIRA DE ANDRADE

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

Goiânia - GO
2023

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Victor Matheus Oliveira de Andrade

Matrícula: 20221011160025

Título do Trabalho: Abordagens do movimento browniano e aplicações de fenômenos aleatórios

Autorização - Marque uma das opções

1. (X) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

_____, Goiânia, ____ de ____ de 20____
Local Data



Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

VICTOR MATHEUS OLIVEIRA DE ANDRADE

ABORDAGENS DO MOVIMENTO BROWNIANO E APLICAÇÕES DE
FENÔMENOS ALEATÓRIOS

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Matemática - Departamento de Áreas Acadêmicas II - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

Goiânia
2023

An248a Andrade, Victor Matheus Oliveira de.

Abordagens do movimento Browniano e aplicações de fenômenos aleatórios
/ Victor Matheus Oliveira de Andrade. – Goiânia: Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023.
61 f.: il.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca.

TCC (Monografia) – Especialização em Matemática, Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.
Inclui anexo.

1. Movimento browniano. 2. Processos estocásticos. 3. Séries temporais. I. Fonseca,
Regina Célia Bueno da (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 519.23

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva CRB1/ 2.740
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

Abordagens do movimento browniano e aplicações de fenômenos aleatórios

por

Victor Matheus Oliveira de Andrade

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

Monografia defendida e aprovada, em 07 de julho de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca (Presidente da Banca/ IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. André Telles Campos (SSP/DF)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Cláudio José da Silva (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- André Telles Campos, André Telles Campos - 1114 - DIRIGENTES DO SERVIÇO PÚBLICO - Secretaria de Segurança Pública do Distrito Federal (00394718000100), em 10/07/2023 12:46:22.
- Claudio Jose da Silva, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 07/07/2023 15:52:39.
- Regina Celia Bueno da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 07/07/2023 15:41:41.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 05/06/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 416144

Código de Autenticação: 56ed03cc4c



Agradecimentos

À minha família, em especial à minha mãe, Maria de Fátima Oliveira Andrade, e minha avó, Ana Dalva Antunes (*in memoriam*), pelo apoio e incentivo.

À minha orientadora Prof^a. Dr^a. Regina Célia Bueno da Fonseca, por aceitar orientar o meu trabalho de pesquisa e pelas valiosas contribuições dadas ao decorrer de todo o processo.

Agradeço também ao Instituto Federal de Goiás - Câmpus Goiânia e ao corpo docente de matemática pela oportunidade e pelos ensinamentos.

*"Não há nada mais fascinante do
que encontrar uma ordem no caos".*

Giorgio Parisi, ganhador do Nobel de
Física em 2021.

Resumo

O comportamento dos preços das ações, ativos financeiros e diversos fenômenos na natureza podem ser descritos por séries temporais, um conjunto de dados ordenados que pode ser analisado via métodos estatísticos convencionais. Séries temporais são aplicadas no estudo do movimento *browniano* com o objetivo de analisar o comportamento de partículas ao longo do tempo, permitindo assim a identificação de padrões e previsão de tendências. Na física estatística, o movimento *browniano* é descrito matematicamente por uma equação diferencial estocástica, a equação de Langevin, que inclui um termo estocástico que torna a solução da equação uma função aleatória. Esse modelo é usado para descrever o comportamento do movimento *browniano* em diferentes condições experimentais. Este trabalho tem como objetivo evidenciar a multidisciplinaridade nas aplicações do movimento *browniano*.

Palavras-chave: Movimento *browniano*, processos estocásticos, séries temporais.

Abstract

The behavior of stock prices, financial assets, and various phenomena in nature can be described by time series, which are ordered datasets that can be analyzed using common statistical methods. Time series are applied in the study of *brownian* motion to analyze the behavior of particles over time, enabling the identification of patterns and the prediction of future trends. In statistical physics, *brownian* motion is mathematically described by a stochastic differential equation, the Langevin equation, which includes a stochastic term that makes the solution of the equation a random function, this model is used to describe the behavior of *brownian* motion under different experimental conditions. The objective of this work is to compile research material, and the results obtained therein have highlighted the multidisciplinary in the applications of *brownian* motion.

Keywords: Brownian motion, stochastic processes, time series.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Capa do artigo de Robert Brown, 1828 (Real Jardim Botânico, 2019). . .	9
Figura 2 – Simulação do movimento aleatório de uma partícula. Fonte: Autor, 2022. . .	10
Figura 3 – Curvas que representam a distribuição normal. Fonte: Autor, 2023. . .	24
Figura 4 – Gráfico que representa movimentos brownianos amostrados. Fonte: O autor, 2023.	25
Figura 5 – Construção do movimento browniano (MORTERS; PERES, 2010). . .	27
Figura 6 – Passeio aleatório simétrico. Fonte: Autor, 2022.	29
Figura 7 – Rede de mobilidade humana usada no estudo da COVID-19 no Brasil (Universidade Federal de Viçosa, 2020).	33
Figura 8 – Diagrama ilustrando o modelo SIS. As caixas simbolizam os compartimentos (suscetível e infectado) e as setas são as possíveis mudanças entre esses dois estados (MORAES, 2020)	34
Figura 9 – Novos casos de covid-19 por milhão de habitantes entre 2020 e 2022 - Mundial e Brasil (Organização Mundial da Saúde - OMS, 2022).	35
Figura 10 – Mortes acumuladas causadas pela covid-19 por milhão de habitantes entre 2020 e 2022 - Mundial e Brasil (Organização Mundial da Saúde - OMS, 2022).	35
Figura 11 – Mortes causadas pela covid-19 por milhão de habitantes entre 2020 e 2022 - Países: Japão, EUA, Alemanha, Canadá, Itália, França e Reino Unido(Organização Mundial da Saúde - OMS, 2022).	36
Figura 12 – Gráficos do modelo determinístico e estocástico para a COVID-19 (TESFAYE; SATANA, 2021).	38
Figura 13 – Potencial periódico de período L e assimetria α (REZENDE, 2011). . .	39
Figura 14 – Funcionamento do motor liga-desliga (REZENDE, 2011).	40
Figura 15 – A cinesina é um exemplo de motor molecular que usa ATP para "caminhar" ao longo dos nanotúbulos.	40
Figura 16 – Imagem gerada por 100 passos. O autor, 2022.	44
Figura 17 – Imagem gerada por 500 passos. O autor, 2022.	44
Figura 18 – Imagem gerada por 1000 passos. O autor, 2022.	44
Figura 19 – Representação de um neurônio artificial. Adaptado (HAYKIN, 2001). .	49
Figura 20 – Representação de uma rede neural artificial. Adaptado (HAYKIN, 2001). .	50
Figura 21 – Jogo Chrome Dino. Fonte: https://github.com/g-arnav/DinoML	51
Figura 22 – Desempenho do melhor dinossauro da geração (gráfico em azul) x Média de desempenho de todos os dinossauros da geração (gráfico em vermelho). Fonte: https://www.youtube.com/UniversoProgramado . .	51

Sumário

	Lista de ilustrações	7
1	A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO E O MOVIMENTO BROWNIANO .	13
1.1	O tratamento de Einstein	13
1.1.1	Equações Diferenciais Parciais na Física	17
1.2	Equação da Difusão Generalizada	19
1.3	Equação de Langevin: As forças flutuantes	20
2	A VISÃO DE LÉVY E WIENER	24
2.1	A Construção de Lévy do Movimento Browniano	24
2.2	Limite Gaussiano	28
2.3	Processo de Wiener	30
2.4	Movimento Browniano Geométrico	31
3	APLICAÇÕES DO MOVIMENTO BROWNIANO	33
3.1	Séries epidemiológicas	33
3.2	Motores Brownianos	38
3.3	Caminhadas Aleatórias	41
3.4	Modelo de Black-Scholes e o Mercado de Ações	45
3.5	Redes Neurais	49
3.6	Medidas de Temperatura na Superfície do Mar	52
4	CONCLUSÃO	55
	REFERÊNCIAS	56

Introdução

Em um relatório escrito em 1827 por Robert Brown (1773-1858), foi descrito o comportamento de partículas de pólen na superfície de um meio aquoso se movendo de forma irregular e incessante (BROWN, 1828). Em homenagem à ele, esse tipo de movimento foi chamado de movimento browniano. A Figura 1 mostra a capa do referido artigo de Robert Brown.

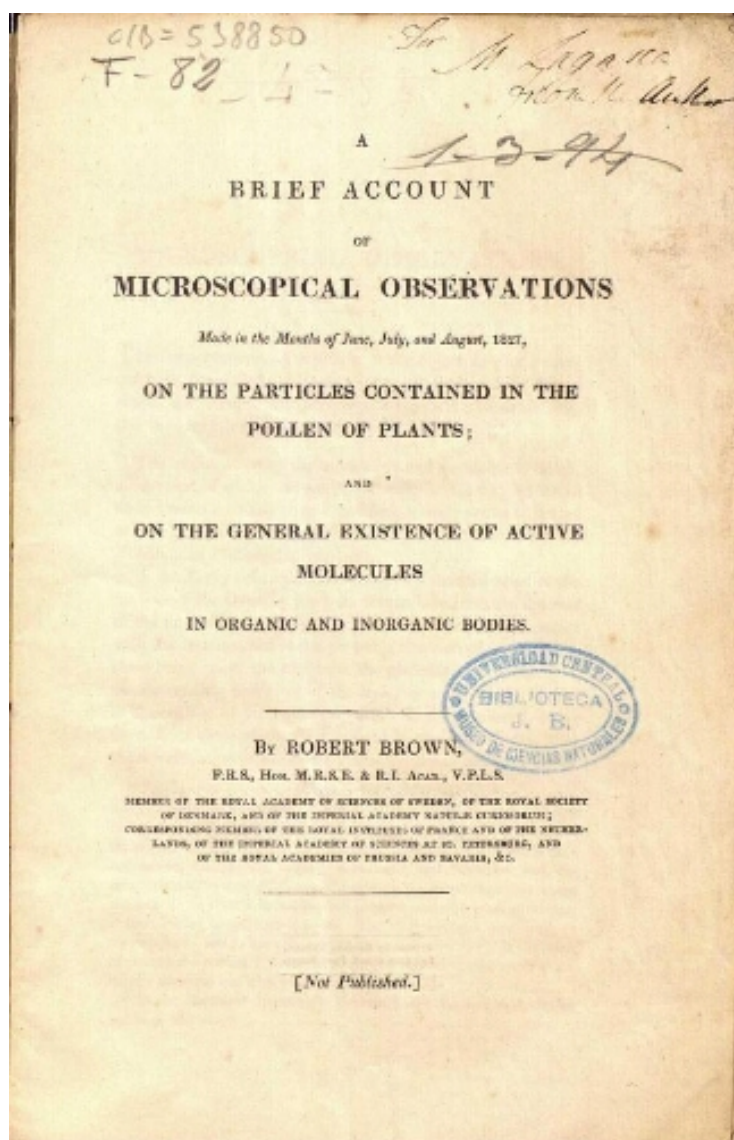


Figura 1 – Capa do artigo de Robert Brown, 1828 (Real Jardim Botânico, 2019).

Em 1888, Louis Gouy (1854-1926) utilizando de observações anteriores de Regnault (1858), Christian Wiener (1863), Cantoni e Oehl (1865), constatou o seguinte (NELSON, 2001):



Figura 2 – Simulação do movimento aleatório de uma partícula. Fonte: Autor, 2022.

- O deslocamento é maior quanto menor for a viscosidade do líquido;
- O movimento é mais ativo para quanto menores forem as partículas;
- A densidade e o tipo das partículas não afetam o movimento;
- As trajetórias parecem não possuir tangentes (Figura 2);
- Quanto maior a temperatura, mais intenso o movimento.

Em 1905 Albert Einstein (1879-1955) explicou esses movimentos postulando que as partículas estão sujeitas a perpétuas colisões com moléculas do meio. Nesta abordagem, por meio de um processo difusivo, o comportamento irregular das partículas em suspensão acontece devido aos movimentos moleculares térmicos independentes. Contudo, isso só é válido se os intervalos de tempo considerados não forem demasiadamente pequenos, mas longos o suficiente para que os movimentos executados por diferentes partículas sejam considerados eventos independentes (EINSTEIN, 1905).

Langevin (1872-1946) propôs em 1908 (LANGEVIN, 1908) um tratamento estocástico ou de força flutuante. Nesta abordagem ele aplicou diretamente a Segunda Lei de Newton, dividindo essa força em duas componentes: a força de Stokes ou força de arrasto de Stokes¹ e a força aleatória. Isso possibilitou uma melhor compreensão das flutuações estatísticas ou estocásticas presentes em diversas áreas do conhecimento como na biologia e na física.

¹ A queda em meio viscoso, a Lei de Stokes: As forças atuantes numa esfera em queda num meio viscoso.

Em 1923, Norbert Wiener (1894–1964) deu um tratamento matemático rigoroso ao movimento browniano, construindo uma distribuição associada com uma medida no espaço de caminhos contínuos (MORTERS; PERES, 2010).

Um estudo sistemático das trajetórias do movimento browniano foi iniciado por Lévy (1886-1971), demonstrando a existência da variação quadrática e as leis em arco-seno (MORTERS; PERES, 2010). A dedução baseada nas propriedades de simetria básica foi uma novidade e a propriedade forte de Markov² foi usada implicitamente na obra de Lévy.

A importância de estudar o movimento browniano se dá pela sua natureza universal dentro dos processos estocásticos. De fato, como veremos a seguir, o movimento browniano além de se identificar com as classes de processos já mencionados, é utilizado na construção e representação de vários outros. Isto se reflete na utilização do movimento em diversas áreas, como por exemplo, Física, Biologia, Matemática, Química, Economia e Finanças. Além disso, as trajetórias do movimento browniano possuem uma relevante quantidade de propriedades instigantes que o tornam um objeto matemático interessante (DUQUE, 2014).

Como exemplo de aplicabilidade da teoria de fenômenos aleatórios, pode-se citar a pandemia de Covid-19³ em 2020. Os cientistas se utilizando de modelagem matemática e simulações computacionais não medem esforços para compreender como se dá a transmissão do coronavírus SARS-CoV-2 e suas variantes potencialmente graves. Com o aprofundamento das pesquisas sobre o movimento browniano, é possível modelar a propagação de patógenos entre os seres vivos, descrever a probabilidade de determinado vírus ficar em suspensão em uma atmosfera e qual tempo médio para que este vírus chegue ao solo. Essa é uma situação de interesse pois chegando ao solo a capacidade de transmissão do vírus diminui bastante (BORGES, 2021).

Objetivo Geral

Modelar a interação entre agentes infecciosos e os seres vivos, o deslocamento de partículas em fluidos, caminhadas aleatórias, funcionamento de motores brownianos e redes neurais, mercado de ações e a variação da temperatura na superfície do mar.

Objetivos Específicos

- Explorar a teoria estocástica e aplicabilidade de fenômenos aleatórios;

² Propriedade de Markov ou propriedade markoviana se refere à propriedade de perda de memória de um processo estocástico. O nome é devido ao matemático russo Andrei Markov.

³ Segundo a World Health Organization a COVID-19 é a doença causada por um novo coronavírus denominado SARS-CoV-2. A Organização Mundial da Saúde (OMS) tomou conhecimento deste novo vírus em 31 de dezembro de 2019, após ocorrência de casos de “pneumonia viral” em Wuhan, na República Popular da China. Fonte: <https://www.paho.org/pt/covid19>

- Gerar imagens ilustrativas utilizando códigos em $\text{\LaTeX}$ para exemplificar a teoria apresentada no texto;
- Utilizar o movimento browniano como um modelo descritivo para analisar situações relevantes nas áreas das ciências físicas e biológicas.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1 fazemos uma breve descrição da equação de difusão na visão de Einstein e abordaremos também o trabalho de Langevin, no Capítulo 2, trataremos da construção do movimento browniano feita por Lévy e Wiener, já no Capítulo 3 são apresentadas algumas aplicações do movimento browniano em algumas áreas do conhecimento, e por fim, no Capítulo 4 descrevemos os resultados obtidos e a conclusão.

1 A Equação de Difusão e o Movimento Browniano

1.1 O tratamento de Einstein

Vamos supor que cada partícula execute um movimento completamente independente das outras partículas e consideremos um intervalo de tempo τ , que é pequeno em relação ao tempo de observação, mas suficientemente longo, para que os movimentos realizados por diferentes partículas neste intervalo de tempo possam ser descritos como eventos independentes.

Sejam N partículas em suspensão num líquido. No intervalo de tempo τ , as coordenadas $x + \Delta x$ das partículas sofrem um acréscimo $\Delta x = \mu$, com μ podendo ter valores positivos ou negativos. A fração de partículas que efetua um deslocamento entre x e $x + \mu$ no intervalo de tempo τ é (EINSTEIN, 1905):

$$dN/N = \phi(\mu)d\mu, \quad (1.1)$$

com a distribuição de probabilidades ϕ sendo uma função par, $\phi(\mu) = \phi(-\mu)$, e devendo satisfazer a condição de normalização:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mu)d\mu = 1. \quad (1.2)$$

Calculando agora a distribuição de partículas no instante $t + \tau$, e chamando de $\eta(x, t)$ o número de partículas por unidade de comprimento, temos:

$$\eta(x, t + \tau)dx = dx \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x + \mu, t)\phi(\mu)d\mu, \quad (1.3)$$

onde pela definição de $\phi(\mu)$, no instante $t + \tau$, o número de partículas está entre x e $x + \mu$.

Como τ e μ são muito pequenos, podemos fazer uma expansão em potências de ambos até a segunda ordem:

$$\eta(x, t + \tau) \cong \eta(x, t) + \tau \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

$$\eta(x + \mu, t) \cong \eta(x, t) + \mu \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1.5)$$

Substituindo a Eq. (1.5) na Eq. (1.3), obtemos:

$$\eta + \tau \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mu)d\mu + \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \phi(\mu)d\mu + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2}{2} \phi(\mu)d\mu. \quad (1.6)$$

Note que o segundo termo do lado direito da Eq. (1.6) é nulo, pois $\phi(\mu) = \phi(-\mu)$, portanto:

$$\eta + \tau \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2}{2} \phi(\mu) d\mu. \quad (1.7)$$

Multiplicando a Eq. (1.7) por $1/\tau$, obtemos a **equação de difusão generalizada**:

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (1.8)$$

onde a constante D é o coeficiente de difusão, definido por:

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2}{2} \phi(\mu) d\mu. \quad (1.9)$$

Aplicando o limite no primeiro termo à esquerda na igualdade da Eq. (1.8), observamos que:

$$\tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \ll \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Da Eq. (1.10), a Eq. (1.8) se resume em:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (1.11)$$

que é a forma da **equação de difusão** que Einstein utilizou para explicar o movimento browniano. A Eq. (1.8) é uma EDP¹ do tipo hiperbólica e a Eq. (1.11) é do tipo parabólica; posteriormente será discutido detalhadamente sobre a difusão generalizada.

Para obter a solução da Eq. (1.11) vamos considerar a condição inicial (SILVA; LIMA, 2007):

$$\eta(x, t = 0) = N\delta(x), \quad (1.12)$$

onde N é o número de partículas e δ é a função Delta de Dirac, definida como:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

A condição dada em Eq. (1.12) implica que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x, t = 0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} N\delta(x) dx = N. \quad (1.14)$$

¹ Equações Diferenciais Parciais (EDP) podem ser classificadas como: Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas. Uma EDP Linear de Segunda Ordem com duas variáveis independentes:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} + pu = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

A classificação depende do Sinal do Discriminante e os nomes são por analogia com as seções cônicas: $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta > 0$, a EDP é hiperbólica. Se $\Delta = 0$, a EDP é parabólica. Se $\Delta < 0$ a EDP é elíptica (N.H., 2004).

A Eq. (1.11) pode ser solucionada utilizando integrais de Fourier. Com isso, a concentração é definida como:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_k(t) e^{ikx} dk, \quad (1.15)$$

em que os coeficientes de expansão $n_k(t)$ são dados pela transformada inversa:

$$\eta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', t) e^{-ikx'} dx'. \quad (1.16)$$

As derivadas temporal e espacial de $\eta(x, t)$ (Eq. (1.15)) são:

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \eta_k(t)}{\partial t} e^{ikx} dk, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_k(t) i^2 k^2 e^{ikx} dk. \quad (1.18)$$

Substituindo as Eq. (1.17) e Eq. (1.18) na Eq. (1.11):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \eta_k(t)}{\partial t} e^{ikx} - D \eta_k(t) i^2 k^2 e^{ikx} \right) dk. \quad (1.19)$$

Finalmente,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \eta_k(t)}{\partial t} + D \eta_k(t) k^2 \right) e^{ikx} dk. \quad (1.20)$$

O integrando da Eq. (1.20) deve ser identicamente nulo, devido ao fato dessa equação ser válida para todo instante, então:

$$\frac{\partial \eta_k(t)}{\partial t} + D \eta_k(t) k^2 = 0. \quad (1.21)$$

Supondo que a solução da Eq. (1.21) seja $n_k(t) = e^{at}$, chegamos ao resultado:

$$n_k(t) = n_{k0} e^{-Dk^2 t} \quad (1.22)$$

Considerando a Eq. (1.22) e a Definição 1.15, para $t = 0$, temos:

$$\eta(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{k0} e^{ikx} dk, \quad (1.23)$$

cuja transformada inversa é:

$$\eta_{k0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) e^{-ikx'} dx'. \quad (1.24)$$

Podemos escrever:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) dx' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2 t} e^{ik(x-x')} dk \quad (1.25)$$

Usando a identidade de Euler (N.H., 2004):

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) dx' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2 t} \times (\cos[k(x-x')] + i \operatorname{sen}[k(x-x')]) dk \quad (1.26)$$

Resulta em

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) dx' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2 t} \cos[k(x - x')] dk, \quad (1.27)$$

pois a segunda parcela na Eq. (1.26) é igual a zero, devido ao fato do produto de uma função par por uma função ímpar ser nulo.

A integração da Eq. (1.27) pode ser feita com as mudanças de variáveis. Fazendo: $k = y$, $\mu = x - x'$ e $\alpha = Dt$:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x', 0) e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} dx', \quad (1.28)$$

e utilizando da condição inicial dada na Eq. (1.12):

$$\eta(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad (1.29)$$

que confirma que as partículas se comportam como num processo gaussiano difusivo. Com a expressão de $\eta(x, t)$ (Eq. (1.29)), podemos calcular a distribuição de probabilidade de uma partícula entre x e $x + \mu$ (SILVA; LIMA, 2007). E mais, é possível calcular o deslocamento quadrático médio e a variância, sendo que para se obter tal distribuição, basta dividir a concentração pelo número total de partículas:

$$P(x, t) = \eta(x, t)/N = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (1.30)$$

Sabendo que, a distribuição de probabilidades gaussiana é a dada por:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.31)$$

Comparando as Eq. (1.30) e Eq. (1.31), a média é $\langle x \rangle = 0$, e a variância é $\sigma^2 = 2Dt$. No movimento browniano as grandezas fisicamente pertinentes estão em concordância com os primeiros e os segundos momentos da distribuição, e são calculados por (SILVA; LIMA, 2007):

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n P(x, t) dx. \quad (1.32)$$

O primeiro momento é o deslocamento médio:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 0, \quad (1.33)$$

e o segundo momento é o deslocamento quadrático médio:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 2Dt, \quad (1.34)$$

obtidos da Eq. (1.32) quando $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente.

Einstein (1905) mostrou que o coeficiente de difusão D pode ser calculado utilizando a mobilidade $b = 1/6\pi\gamma a$ de partículas esféricas de raio a , temperatura T do meio, coeficiente de viscosidade γ , e constante de Boltzmann k_B , isto é:

$$D = k_B T b = \frac{k_B T}{6\pi\gamma a}. \quad (1.35)$$

Substituindo a Eq. (1.35) na Eq. (1.34):

$$\langle x^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi\gamma a N_a} t. \quad (1.36)$$

A constante de Boltzmann k_B pode ser escrita como $k_B = R/N_a$, sendo R a constante universal dos gases e N_a o número de Avogadro². A Eq. (1.36) foi uma das primeiras relações de uma flutuação quadrática média envolvida em um processo dissipativo. Contudo, como as quantidades envolvidas são mensuráveis, pode-se estimar o número de Avogadro com um cronômetro e um microscópio adequados (PAIS, 1982).

Einstein observou que seus resultados tinham inconsistências para tempos curtos em relação aos tempos característicos do sistema. No limite $t \rightarrow 0$, a velocidade $v \rightarrow \infty$, em outras palavras, a função delta de Dirac centrada em $x = 0$, mostrava que todas as partículas estavam inicialmente localizadas na origem e que para intervalos de tempos tão pequenos quanto se queira a curva gaussiana indicava que as partículas se espalhavam com uma velocidade infinita. Para corrigir esse problema, deve-se considerar o termo de derivada segunda na Eq. (1.11), o que sugere que para tempos curtos a solução será ondulatória. Esta solução será discutida na seção 1.2.

1.1.1 Equações Diferenciais Parciais na Física

Considerando $u = u(x, t)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, uma EDP do tipo parabólica tem a seguinte forma geral (SODRÉ, 2003):

$$u_t = \alpha^2 \nabla^2 u. \quad (1.37)$$

Exemplo 1.1. A equação do calor, que é uma equação que descreve um processo de condutividade térmica, é do tipo parabólica. Considerando um coeficiente de condutividade térmica κ e um campo de temperaturas $u = u(x, y, z, t)$, temos (CANNON, 1984):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (1.38)$$

Na física estatística, a equação do calor está relacionada com o estudo do movimento browniano por meio da equação de Fokker–Planck (SILVA; LIMA, 2007). A equação de

² $N_a = 6.022 \ 140 \ 76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (ASSAEL, 2014).

difusão é uma versão mais geral da equação do calor e também se relaciona com o estudo da difusão das partículas nas reações químicas.

As equações classificadas como tipo hiperbólica são escritas na forma (SODRÉ, 2003):

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u. \quad (1.39)$$

Exemplo 1.2. A equação da onda é tipo hiperbólica. Ela descreve a propagação de ondas sonoras, luminosas ou aquáticas, e é dada na forma (ARFKEN, 2006):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.40)$$

onde v é a velocidade da onda.

Exemplo 1.3. Na Mecânica Quântica, a Equação de Schrödinger, que modela como o estado quântico de um sistema físico muda com o tempo, é uma EDP parabólica complexa:

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.41)$$

Exemplo 1.4. A equação de Poisson é do tipo elíptica, é descrita na forma: (SODRÉ, 2003):

$$\nabla^2 u(x, y) = h(x, y). \quad (1.42)$$

Na Eq. (1.42), se $h(x, y) = 0$, temos a chamada equação de Laplace:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0. \quad (1.43)$$

Na Eletrostática (ARFKEN, 2006), a função potencial elétrico de um campo elétrico estacionário, $V = V(x, y, z, t)$, com um termo de fonte $-\rho/\epsilon_0$ satisfaz a equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.44)$$

Analogamente, a energia potencial de uma partícula com densidade ρ que sofre a ação de um campo gravitacional, também satisfaz a equação de Poisson:

$$\nabla^2 U = -4G\pi\rho. \quad (1.45)$$

Observação 1.1. As equações de Laplace e Poisson são muito relevantes na Física, pois modelam diversos fenômenos da natureza, tais como hidrodinâmica, escoamento irrotacional de fluido perfeito e ondas superficiais, fenômenos eletromagnéticos incluindo dielétricos, correntes estáveis e magnetostática além de problemas envolvendo gravitação (ARFKEN, 2006).

1.2 Equação da Difusão Generalizada

A equação utilizada para decrever a condução de calor e a difusão de partículas é um modelo aproximado, pois é uma forma menos rigorosa de modelar esses fenômenos (SILVA; LIMA, 2007).

Considere uma partícula se deslocando aleatoriamente com velocidade $v = l/\tau$ em um intervalo de tempo τ . A Eq. (1.8), que descreve uma onda amortecida para a caminhada aleatória, pode ser reformulada como (SILVA; LIMA, 2007):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{v^2}{D} \frac{\partial \eta}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (1.46)$$

Para estudar a solução desta equação (1.46), iremos considerar algumas condições iniciais. Para $x = 0$, temos que $\eta(0, t) = e^{i\omega t}$, onde ω é a frequência angular. Então:

$$\eta(x, t) = e^{Ax} e^{i(\omega t - Bx)}, \quad (1.47)$$

onde as constantes A e B são definidas por:

$$A^2 = \frac{\omega^2}{2v^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{v^4}{D^2\omega^2}\right)} - 1 \right] \quad (1.48)$$

e

$$B^2 = \frac{\omega^2}{2v^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{v^4}{D^2\omega^2}\right)} + 1 \right]. \quad (1.49)$$

com a velocidade de propagação da onda v_p , dada por

$$v_p^2 = \frac{\omega^2}{B^2} = \frac{2v^2}{\left[\left(1 + \frac{v^4}{D^2\omega^2}\right) + 1\right]}. \quad (1.50)$$

Observação 1.2. Da Eq. (1.50) é relevante observar que, para o caso $\omega \ll v^2/D$, os resultados são os mesmos obtidos na equação de difusão usual (1.11), na qual em alguns regimes as velocidades das partículas são infinitas. E para o caso $\omega \gg v^2/D$, a velocidade de propagação da onda tem como limite a velocidade das partículas do meio (SILVA; LIMA, 2007).

Considerando que são dadas as funções de Bessel de primeira espécie J_0 e J_1 e as condições $\eta(x, 0) = N\delta(x)$ e $(\partial\eta/\partial t)_{t=0} = 0$, temos para $|x| \leq vt$, a solução da Eq. (1.46) será (SILVA; LIMA, 2007):

$$\eta(x, t) = Ne^{-t/\tau} \left[\frac{1}{2}\delta(x + vt) + \frac{1}{2}\delta(x - vt) \right] + \frac{N}{2v\tau} J_0 \left[\frac{\sqrt{x^2 - v^2t^2}}{v\tau} \right] + \frac{Nt}{2\tau} J_1 \left[\frac{\sqrt{(x^2 - v^2t^2)/vt}}{\sqrt{(x^2 - v^2t^2)}} \right]. \quad (1.51)$$

Sabemos da solução de D'Alembert, para $|x| > vt$, que:

$$\eta(x, t) = Ne^{-t/\tau} \left[\frac{1}{2}\delta(x + vt) + \frac{1}{2}\delta(x - vt) \right]. \quad (1.52)$$

A expansão assintótica para as funções de Bessel é:

$$J_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (1.53)$$

Assim, a Eq. (1.51) fica:

$$\eta(x, t) = N e^{-t/\tau} \left[\frac{1}{2} \delta(x + vt) + \frac{1}{2} \delta(x - vt) \right] + \frac{N e^{-ty^2/\tau}}{4v\tau} \left[\frac{\pi t}{2\tau} (1 - y^2)^{1/2} \right]^{-1/2} [1 + (1 + y^2)^{-1/2}] \quad (1.54)$$

A Eq. (1.54) é a solução geral da equação de onda modificada para a caminhada aleatória. Com o limite $x \ll vt$ (tempos longos), o segundo termo da solução é dado por:

$$\eta(x, t) = \frac{N}{\sqrt{2v^2\tau t\pi}} e^{-x^2/2v^2\tau t} = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \quad (1.55)$$

Observação 1.3. Note que a Eq. (1.55) é a mesma solução da equação de difusão usual, portanto, a Eq. (1.46) fornece resultados para o processo difusivo em tempos curtos, como Einstein reconheceu na teoria do movimento browniano (SILVA; LIMA, 2007).

1.3 Equação de Langevin: As forças flutuantes

Nesta seção fazemos uma breve descrição do procedimento estocástico da equação de Langevin. Pouco tempo após o trabalho de Einstein, o físico francês Paul Langevin abordou o problema na perspectiva das equações diferenciais estocásticas.

Langevin aplicou diretamente a Segunda Lei de Newton em uma partícula de massa m que se desloca em um fluido com viscosidade γ (REZENDE, 2011):

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) + \zeta(t), \quad (1.56)$$

sendo $\zeta(t)$ uma força aleatória (ou flutuante) que varia rapidamente em comparação com os intervalos de observação, e que deve satisfazer as seguintes condições:

- $\zeta(t)$ tem uma densidade de probabilidade gaussiana e sua média é nula;
- A correlação temporal de $\zeta(t)$ obedece à relação de flutuação-dissipação:

$$\langle \zeta(t_1), \zeta(t_2) \rangle = \sigma \delta(t_1 - t_2), \quad (1.57)$$

sendo σ uma constante que depende da viscosidade do meio e $\delta(t_2 - t_1)$ representa a função delta de Dirac.

A solução da Eq. (1.56) pode ser obtida pelo método do fator integrante, $I(t) = e^{\gamma t/m}$, isto é:

$$\frac{dv}{dt} e^{\gamma t/m} + \frac{\gamma v}{m} e^{\gamma t/m} = \frac{\zeta(t)}{m} e^{\gamma t/m} \quad (1.58)$$

$$\int \frac{d}{dt}(ve^{\gamma t/m}) = \frac{1}{m} \int_0^t \zeta(t')e^{\gamma t'/m} dt'. \quad (1.59)$$

Cuja solução dá a velocidade das partículas:

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t/m} + \frac{e^{-\gamma t/m}}{m} \int_0^t \zeta(t')e^{-\gamma t'/m} dt'. \quad (1.60)$$

Para obter a posição das partículas brownianas, podemos reescrever a Eq. (1.56) na forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} + \zeta(t), \quad (1.61)$$

considerando $dx(t)/dt = v(t)$, sendo que $x(t)$ descreve o movimento das partículas. A solução é obtida utilizando a Transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \tilde{f}(s), \quad (1.62)$$

que possui as seguintes propriedades (chamando $\gamma' = \gamma/m$) (BOYCE; DIPRIMA, 2015):

- $\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s\tilde{f}(s) - f(0)$
- $\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(t')g(t-t')dt'\right\} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$
- $\mathcal{L}\{e^{-\gamma't}\} = \frac{1}{s + \gamma't}$
- $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}\right\} = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$
- $\mathcal{L}\left\{\frac{1 - e^{-\gamma't}}{\gamma'}\right\} = \frac{1}{s^2 + s\gamma'}$
- $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1.$

Então, pelo teorema das derivadas na transformada de Laplace, obtemos:

$$s^2\tilde{x}(s) - sx(0) - \frac{dx(0)}{dt} = -\gamma'(s\tilde{x}(s) - x(0)) + \frac{\tilde{\zeta}(t)}{m} \quad (1.63)$$

Simplificando:

$$\tilde{x}(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{v(0)}{s^2 + s\gamma'} + \frac{\tilde{\zeta}(t)}{m} \frac{1}{s^2 + s\gamma'}. \quad (1.64)$$

Aplicando as Transformadas Inversas de Laplace, chegamos na expressão para a posição das partículas brownianas:

$$x(t) = x(0) + \frac{v(0)}{\gamma'}(1 - e^{-\gamma't}) + \frac{1}{\gamma'm} \int_0^t \zeta(t')(1 - e^{\gamma'(t'-t)})dt'. \quad (1.65)$$

Calculando a média das Eq. (1.60) e Eq. (1.65), temos:

$$\langle v(t) \rangle = \langle v(0) \rangle e^{-\gamma' t}, \quad (1.66)$$

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle + \frac{\langle v(0) \rangle}{\gamma'} (1 - e^{-\gamma' t}). \quad (1.67)$$

Para encontrar o valor de σ no teorema de flutuação-dissipação³ (Eq. 1.57), temos que encontrar a relação entre as velocidades de uma partícula em dois instantes (REZENDE, 2011). Assim, usando a Eq. (1.65) e fazendo a média de ensemble para os instantes t_1 e t_2 , resulta

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \langle v^2(0) \rangle e^{-\gamma'(t_1+t_2)} + \frac{e^{-\gamma'(t_1+t_2)}\sigma}{m^2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-\gamma'(t_3+t_4)} \langle \zeta(t_3)\zeta(t_4) \rangle dt_3 dt_4 \quad (1.68)$$

Temos que considerar dois casos ao integrar, $t_1 \geq t_2$ e $t_2 > t_1$. Contando com ambos os casos, pode-se sintetizar o resultado da Eq. (1.68) por meio da função módulo:

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \langle v^2(0) \rangle e^{-\gamma'(t_1+t_2)} + \frac{\sigma}{2\gamma'm^2} (e^{-\gamma'|t_1-t_2|} - e^{-\gamma'(t_1+t_2)}) \quad (1.69)$$

Pelo teorema da equipartição da energia⁴,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} m \langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (1.70)$$

para $t = t_1 = t_2$, a Eq. (1.69) fica:

$$\sigma = 2m\gamma'k_B T \quad (1.71)$$

Enfim, encontramos a expressão para o teorema flutuação-dissipação (1.57):

$$\langle \zeta(t_1)\zeta(t_2) \rangle = 2m\gamma'k_B T \delta(t_1 - t_2). \quad (1.72)$$

Podemos também calcular o coeficiente de difusão, dado (REZENDE, 2011):

$$\langle x(t) \rangle = \left\langle \left(x(0) + \int_0^t v(t_1) dt_1 \right)^2 \right\rangle = \langle x^2(0) \rangle + 2 \int_0^t \langle x(0)v(t_1) \rangle dt_1 + \int_0^t \int_0^t \langle v(t_1)v(t_2) \rangle dt_1 dt_2 \quad (1.73)$$

Sendo as velocidades descorrelacionadas, $\langle x(0)v(t_1) \rangle = \langle x(0) \rangle \langle v(t_1) \rangle$, fazendo uso da Eq. (1.66) e Eq. (1.68) e integrando, obtemos:

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2(0) \rangle + \frac{2 \langle x(0) \rangle \langle v(0) \rangle}{\gamma'} (1 - e^{-\gamma' t}) + \frac{\langle v^2(0) \rangle}{\gamma'^2} (1 - e^{-\gamma' t})^2 + \frac{k_B T}{m\gamma'^2} (2\gamma' t - 3 + 4e^{-\gamma' t} - e^{-2\gamma' t}) \quad (1.74)$$

³ O Teorema de Flutuação-Dissipação (TFD) diz respeito a uma série de relações, muito gerais, entre correlações e respostas de sistemas estatísticos em equilíbrio (STARIOLO, 2020).

⁴ Em Mecânica Estatística Clássica, o teorema da equipartição é uma fórmula geral que relaciona a temperatura de um sistema com a sua energia cinética. Por exemplo, a energia cinética média no movimento translacional de uma molécula deve ser igual à energia cinética média do seu movimento rotacional. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/>

Elevando ao quadrado a Eq. (1.67), chegamos em:

$$\langle x(t) \rangle^2 = \langle x(0) \rangle^2 + 2 \frac{\langle x(0) \rangle \langle v(0) \rangle}{\gamma'} + \frac{\langle v(0) \rangle^2}{\gamma'^2} (1 - e^{-\gamma' t}). \quad (1.75)$$

Dada a variância como $\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$, temos a seguinte expressão:

$$\langle (x(0) - \langle x(0) \rangle)^2 \rangle + \frac{\langle (v(0) - \langle v(0) \rangle)^2 \rangle}{\gamma'^2} (1 - e^{-\gamma' t})^2 \frac{k_B T}{m \gamma'^2} (2\gamma' t - 3 + 4e^{-\gamma' t} - e^{-2\gamma' t}). \quad (1.76)$$

O coeficiente de difusão é obtido dividindo-se a expressão (1.76) por $2t$ (REZENDE, 2011), quando $t \rightarrow \infty$ obtemos:

$$D = \frac{k_B T}{m \gamma'}. \quad (1.77)$$

O coeficiente de atrito viscoso de Stokes é dado por $\gamma = 6\pi\nu a$. Relembrando que fizemos a substituição $\gamma' = \gamma/m$, chegamos na equação para o Coeficiente de Difusão de Einstein:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\nu a} = \frac{RT}{6\pi\nu a N_A}. \quad (1.78)$$

Observação 1.4. Note que a Eq. (1.78) é equivalente à Eq. (1.35).

Logo, para tempos longos a descrição de Langevin leva ao trabalho de Einstein, contribuindo portanto para consolidar a descrição do movimento browniano feita por Einstein e sustentando as ideias sobre átomos e partículas na época.

2 A Visão de Lévy e Wiener

2.1 A Construção de Lévy do Movimento Browniano

No Capítulo 1, tratamos do aspecto físico do movimento browniano, fundamentado nas teorias de Einstein e Langevin. Neste capítulo, abordaremos os seus aspectos matemáticos mais importantes.

Iniciamos com a teoria de Lévy, que se baseia em uma classe de processos estocásticos mais abrangentes, incluindo o movimento browniano como um caso particular.

Definição 2.1. O movimento browniano está intimamente ligado com a distribuição normal (Gaussiana). Adotando X como uma variável aleatória com média $\langle x \rangle$ e variância σ^2 , sabemos que: (MORTERS; PERES, 2010)

$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^\infty e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} dx \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

A distribuição normal possui um comportamento geométrico descrito por uma curva característica, como podemos notar na Figura 3, feita utilizando códigos do L^AT_EX.

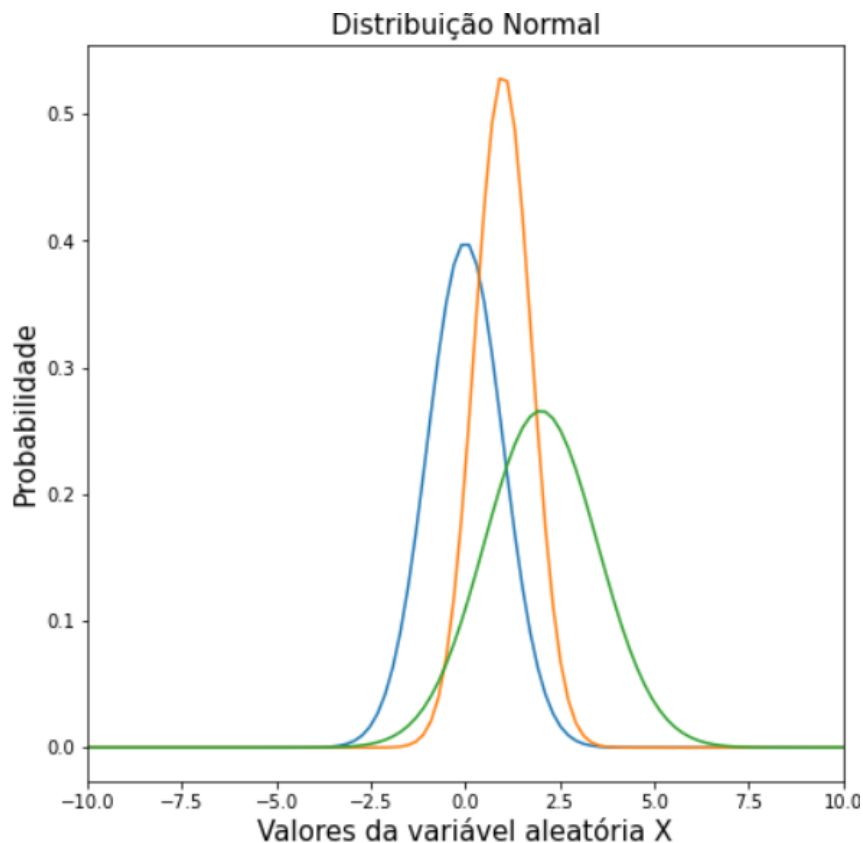


Figura 3 – Curvas que representam a distribuição normal. Fonte: Autor, 2023.

Definição 2.2. Um processo estocástico $\{B(t) : t \geq 0\}$ é chamado de um **movimento browniano linear** se para $x \in \mathbb{R}$, são satisfeitas as condições (MORTERS; PERES, 2010):

- $B(0) = x$;
- O processo possui incrementos independentes. Para todo tempo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, temos que $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$ são variáveis aleatórias independentes;
- Para todo $t \geq 0$ e $h > 0$, os incrementos $B(t+h) - B(t)$ são normalmente distribuídos com expectativa zero e variância h ;
- A função $t \mapsto B(t)$ é contínua.

Portanto, definimos o movimento browniano como um processo estocástico $\{B(t) : t \geq 0\}$ de uma família de incontáveis variáveis aleatórias $\omega \mapsto B(t, \omega)$ em um espaço de probabilidade (Ω, A, P) . A Figura 4 mostra o movimento browniano amostrado. Nele, a trajetória da partícula se torna uma série de posições discretas ligadas por segmentos retos, essa abordagem permite uma análise estatística e tem várias aplicações em diversas áreas científicas, como veremos adiante.

Observação 2.1. Um processo estocástico também pode ser descrito como um processo aleatório.

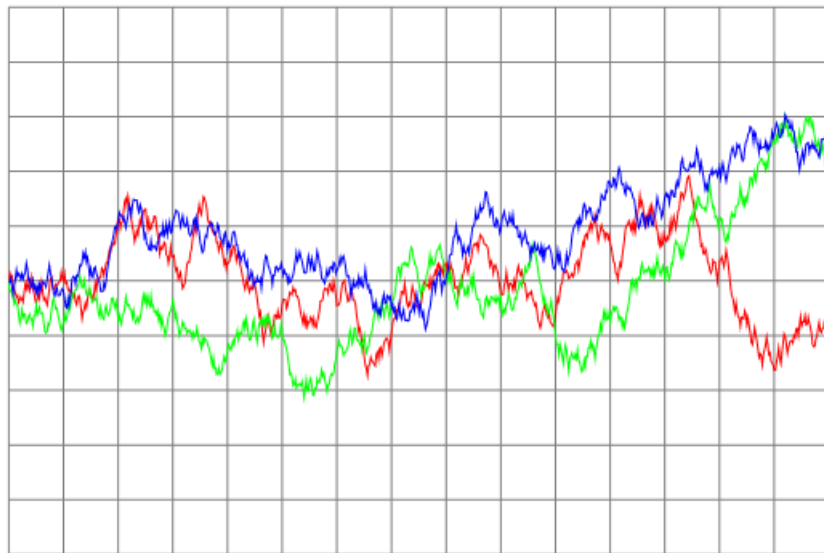


Figura 4 – Gráfico que representa movimentos brownianos amostrados. Fonte: O autor, 2023.

Wiener (1923) demonstrou que existe movimento browniano padrão o construindo como um limite uniforme de funções contínuas para garantir que haja caminhos contínuos. Considerando o intervalo $[0, 1]$ como um elemento aleatório do espaço $C[0, 1]$ de

funções contínuas, pode-se construir o movimento browniano em conjuntos finitos de pontos diádicos¹:

$$\mathfrak{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n \right\} \quad (2.2)$$

Então, interpolamos os pontos de $\mathfrak{D}_n$ e verificamos que o limite uniforme dessas funções contínuas existe e é um movimento browniano. Seja

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}_n \quad (2.3)$$

e o espaço de probabilidades (Ω, A, P) no qual as variáveis aleatórias distribuídas normalmente $\{Z_t : t \in \mathfrak{D}\}$ podem ser definidas. Dado $B(0) = 0$ e $B(1) = Z_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ as variáveis aleatórias $B(d), d \in \mathfrak{D}_n$ são definidas como (WIENER, 1923):

- para todo $r < s < t$ em $\mathfrak{D}_n$ as variáveis $B(t) - B(s)$ são normalmente distribuídas com média zero e variância $t - s$, e são independentes de $B(s) - B(r)$,
- os vetores $(B(d) : d \in \mathfrak{D}_n)$ e $\{Z_t : t \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_n\}$ são independentes.

Definimos também $B(d)$ em $d \in \mathfrak{D}_n/\mathfrak{D}_{n-1}$ como

$$B(d) = \frac{B(d - 2^{-n}) + B(d + 2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}. \quad (2.4)$$

Os incrementos $B(d) - B(d - 2^{-n})$ para $d \in \mathfrak{D}_n - \{0\}$ são independentes e também são independentes aos pares, devido ao vetor desses incrementos ter distribuição gaussiana. Os pares $B(d) - B(d - 2^{-n}), B(d + 2^{-n}) - B(d)$ com $d \in \mathfrak{D}_n/\mathfrak{D}_{n-1}$ são independentes.

Tendo assim escolhido os valores do processo em todos os pontos diádicos, interpolamos entre eles. Formalmente, defina

$$F_0(t) = \begin{cases} Z_1 & \text{para } t = 1 \\ 0 & \text{para } t = 0 \\ \text{linear} & \text{entre eles} \end{cases} \quad (2.5)$$

e para cada $n \geq 1$,

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} Z_t & \text{para } t \in \mathfrak{D}_n/\mathfrak{D}_{n-1} \\ 0 & \text{para } t \in \mathfrak{D}_{n-1} \\ \text{linear} & \text{entre pontos consecutivos de } \mathfrak{D}_n \end{cases} \quad (2.6)$$

As funções nas Eq. (2.5) e Eq. (2.6) são contínuas em $[0, 1]$ e para todo $n, d \in \mathfrak{D}_n$, conforme vemos na Figura 5.

¹ No conjunto de números diádicos, os números são racionais cujo denominador é uma potência de 2, isto é, $k/2^n; k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$.

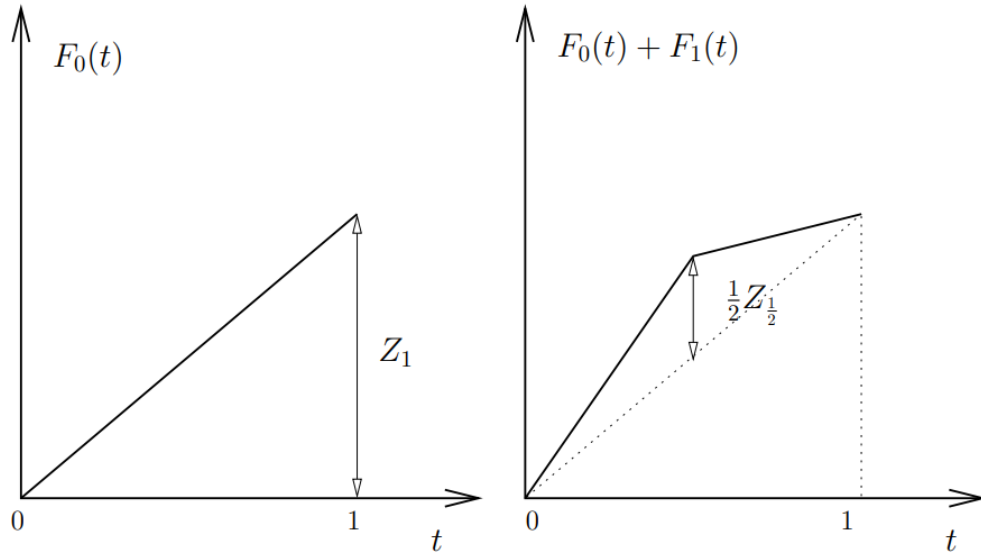


Figura 5 – Construção do movimento browniano (MORTERS; PERES, 2010).

Logo,

$$B(d) = \sum_{i=0}^n F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d). \quad (2.7)$$

Para mostrar a Eq. (2.7) vamos supor que para $n-1$ temos $d \in \mathfrak{D}_n / \mathfrak{D}_{n-1}$. Então para $0 \leq i \leq n-1$ a função F_i é linear no intervalo $[d-2^{-n}, d+2^{-n}]$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i(d) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i(d-2^{-n}) + F_i(d+2^{-n})}{2} = \frac{B(d-2^{-n}) + B(d+2^{-n})}{2} \quad (2.8)$$

Assim, temos $F_n(d) = 2^{-(n+1)/2} Z_d$. Considere agora a definição abaixo (MORTERS; PERES, 2010):

Lema 2.1. Suponha X uma variável aleatória normalmente distribuída, então para todo $x > 0$:

$$\frac{x}{x^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}\{X > x\} \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (2.9)$$

Portanto, para $c > 1$ e n grande, temos para a Eq. (2.8):

$$\mathbb{P}\{|Z_d| \geq c\sqrt{n}\} \leq \exp\left(\frac{-c^2 n}{2}\right). \quad (2.10)$$

Pela Eq. (2.10), a série abaixo irá convergir para $c > \sqrt{2 \log 2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\exists d \in \mathfrak{D}_n \text{ com } |Z_d| \geq c\sqrt{n}\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d \in \mathfrak{D}_n} \mathbb{P}\{|Z_d| \geq c\sqrt{n}\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) \exp\left(\frac{-c^2 n}{2}\right). \quad (2.11)$$

Para prosseguirmos, é necessário conhecer o resultado do Lema de Borel-Cantelli (FAL-LEUR; LI; YAN, 2010):

Lema 2.2. Seja $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty. \quad (2.12)$$

Então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup(E_k) \quad (2.13)$$

é mensurável e vale zero.

Pelo Lema 2.1, podemos fixar um c de modo que existirá N tal que para todo $n \geq N$ e $d \in \mathfrak{D}_n$ temos $|Z_d| < c\sqrt{n}$, contudo:

$$\|F_n\|_{\infty} < c\sqrt{n}2^{-n/2}. \quad (2.14)$$

Isso implica que a série abaixo converge uniformemente para $[0, 1]$:

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t). \quad (2.15)$$

Este resultado é decorrente das propriedades de B no conjunto $\mathfrak{D} \subset [0, 1]$ e da continuidade dos caminhos. Contudo, supondo $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ em $[0, 1]$, encontramos $t_{1,k} \leq t_{2,k} \leq \dots \leq t_{n,k}$ em $\mathfrak{D}$ com $\lim_{k \uparrow \infty} t_{i,k} = t_i$ e a partir da continuidade de B , encontramos o resultado (MORTERS; PERES, 2010):

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = \lim_{k \uparrow \infty} B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}). \quad (2.16)$$

Como $\lim_{k \uparrow \infty} \mathbb{E}[B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k})] = 0$ e $\lim_{k \uparrow \infty} \text{Cov}(B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}), B(t_{j+1,k}) - B(t_{j,k})) = \lim_{k \uparrow \infty} 1_{i=j}(t_{i+1,k} - t_{i,k}) = 1_{i=j}(t_{i+1} - t_i)$; os incrementos $B(t_{i+1}) - B(t_i)$ são independentes e as variáveis aleatórias possuem média 0 e variância $t_{i+1} - t_i$.

Até o momento analisamos um processo contínuo $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Por fim, vamos considerar a sequência $B_0, B_1, \dots$ de variáveis aleatórias independentes. Define-se $\{B(t) : t \geq 0\}$ como:

$$B(t) = B_{[t]}(t - [t]) + \sum_{i=0}^{[t]-1} B_i(1), \quad (2.17)$$

uma função aleatória contínua $B : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que representa um movimento browniano padrão (MORTERS; PERES, 2010).

2.2 Limite Gaussiano

O limite gaussiano consiste em assumir que a probabilidade está relacionada com uma distribuição gaussiana. Para estudá-lo, vamos considerar um modelo binomial simétrico que cresce por um fator u ou decresce por um fator d , cujos movimentos ascendentes e descendentes difiram por um mesmo fator (BESSADA, 2005).

Os modelos binomiais aditivos são aqueles em que a diferença do termo entre dois instantes é um fator adicionado ou subtraído, conforme mostra a Figura 6.

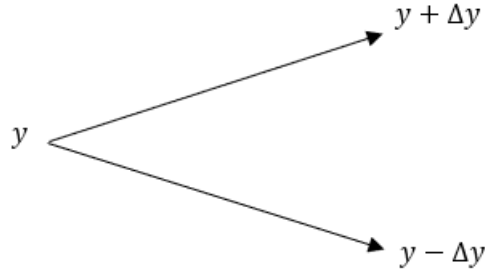


Figura 6 – Passeio aleatório simétrico. Fonte: Autor, 2022.

Podemos obter um modelo simétrico binomial utilizando o logaritmo natural (BES-SADA, 2005):

$$\ln(Z_{n+1}) = \ln(Z_n) + \ln(u) \quad (2.18)$$

ou

$$\ln(Z_{n+1}) = \ln(Z_n) + \ln(d). \quad (2.19)$$

Temos que $\ln(u) = -\ln(d)$, então:

$$\ln(Z_n) + \ln(u) = \ln(Z_n) - \ln(d) \Rightarrow \ln(u \cdot d) = 0 \quad (2.20)$$

Para que a Eq. (2.20) seja satisfeita, é necessário que:

$$u = \frac{1}{d} \quad (2.21)$$

O passo seguinte é obter um processo que tenha uma distribuição gaussiana, para isso temos os valores para u , d , e da probabilidade p :

$$u = e^{\sigma\sqrt{h}} \quad (2.22)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{h}} \quad (2.23)$$

$$p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{h} \right), \quad (2.24)$$

onde σ é o desvio padrão, μ é a média e h é uma constante dada por:

$$h = \frac{1}{\sqrt{npq}}. \quad (2.25)$$

Sabe-se que pela seguinte definição, para uma probabilidade $q = 1 - p$, então (BES-SADA, 2005):

$$\mu = p \ln \left(\frac{u}{d} \right) + \ln(d) \quad (2.26)$$

$$\sigma^2 = pq \left[\ln \left(\frac{u}{d} \right) \right]^2. \quad (2.27)$$

Substituindo as Eq. (2.22), (2.23) e (2.24) nas Eq. (2.26) e (2.27), obtemos:

$$E[\ln(Z)] = \mu t \quad (2.28)$$

e

$$\text{Var}[\ln(Z)] = (\sigma^2 - \mu^2 h)t. \quad (2.29)$$

No limite $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E[\ln(Z)] = \mu t \quad (2.30)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Var}[\ln(Z)] = \sigma^2 t. \quad (2.31)$$

Calculando os seguintes parâmetros e aplicando o Teorema de De Moivre-Laplace (SILVA; ALMEIDA, 2015):

$$x_k = (k - np)h = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}[\ln(Z)]}} (\ln(Z) - E \ln(Z)) \quad (2.32)$$

$$h = \sqrt{npq} = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}[\ln(Z)]}} \ln(Z). \quad (2.33)$$

Contudo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} hx_k^3 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(u/d)}{\text{Var}[\ln(Z)]^2} (\ln(Z) - E \ln(Z))^3 = 0. \quad (2.34)$$

Analisando as condições do teorema de De Moivre-Laplace, concluímos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left[\frac{\ln(Z) - \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \leq \xi \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{x^2/2} dx. \quad (2.35)$$

Então, o processo

$$\chi = \frac{\ln(Z) - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}, \quad (2.36)$$

possui distribuição gaussiana com valor esperado $\mu t = 0$ e variância $\sigma^2 t = 1$. Utilizando a Eq. (2.36) representamos um processo com distribuição gaussiana onde $\chi \sim N(0, 1)$:

$$Y_t = \mu t - \chi \sigma \sqrt{t}. \quad (2.37)$$

É através desta equação e de suas propriedades que se fundamenta o processo chamado de movimento browniano.

2.3 Processo de Wiener

Em 1923, o movimento browniano foi formalizado matematicamente por Norbert Wiener, e por esse motivo foi denominado por **processo de Wiener** (LUIZ; SILVA; SOUZA, 2013).

Pela Definição 2.2, é possível relacionar o fenômeno físico do movimento browniano à teoria matemática dos Processos Estocásticos, e pode-se estender a teoria para casos mais abrangentes e generalizar o conceito de movimento browniano.

O movimento browniano é um Processo de Markov (KLAFTER; SHLESINGER; ZUMOFEN, 1996), isso significa que a posição em determinado instante de tempo só depende da posição no instante anterior, e não do restante do caminho. Com isso, a Definição 2.2 coloca restrições em um dado processo de modo que este seja um movimento browniano ou Processo de Wiener.

Podemos representar um deslocamento $B_t - B_s$ em função de um termo aleatório ξ , e a diferença $t - s$ como (BESSADA, 2005):

$$B_t - B_s = \xi \sqrt{t - s}, \quad (2.38)$$

onde a variável aleatória ξ é gaussiana, tem valor esperado igual à zero e deve satisfazer $E[\xi^2] = 1$.

Podemos ampliar mais a Eq. (2.38) de modo a abranger processos que possuem valores esperados não-nulos. Para isso é necessário adicionar um termo, $\mu\Delta t$, de modo que o processo discreto tenda à um movimento browniano no limite infinito (BESSADA, 2005), obtendo $E[\xi] = 0$ e $E[\xi^2] = 1$. Finalmente, segue-se que o processo estocástico:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \mu\Delta t + \xi\sqrt{\Delta t}, \quad (2.39)$$

é um processo de Wiener.

2.4 Movimento Browniano Geométrico

Suponha que W seja um movimento browniano padrão, um processo estocástico $S(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$ é chamado movimento browniano geométrico se satisfaz (KONG, 2017):

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (2.40)$$

tal que para $t \in [0, \infty)$:

$$S(t) = \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right]. \quad (2.41)$$

Seja $S(0)$ um valor inicial de $S(t)$, então podemos reescrever a Eq. (2.41):

$$S(t) = S(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right]. \quad (2.42)$$

O movimento browniano geométrico (MBG) possui algumas propriedades (KONG, 2017):

- É um processo estocástico utilizado para modelar processos que nunca podem assumir valores negativos;
- A expectativa é dada por $\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}[S_0 \exp(\mu t + \sigma W(t))] = S_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t\right)$;
- A variância é $\text{Var}[S(t)] = \mathbb{E}[(S(t) - \mathbb{E}[S(t)])^2] = S_0^2 \exp(2\mu t + \sigma^2 t)[\exp(\sigma^2 t) - 1]$;
- $\sigma S(t)$ é o termo de difusão da parte estocástica da equação. Se $\sigma = 0$ temos uma equação diferencial determinística;
- $\mu S(t)$ representa a taxa de crescimento do MBG, se $\mu > 0$ temos um crescimento positivo, caso contrário $\mu < 0$;
- O parâmetro $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ representa o comportamento assintótico do MBG.
- Se o coeficiente de deriva $\mu = 0$, o MBG é um martingale².

Podemos descrever o movimento browniano geométrico em múltiplas dimensões. Para isso é necessário especificar um sistema de equações diferenciais estocásticas (KONG, 2017):

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sigma_i X_i(t), \quad (2.43)$$

onde $S_i = (S_1, \dots, S_d)$, $\mu_i = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ e $X_i(t)$ é um movimento browniano padrão unidimensional. Portanto, para d dimensões, cada dimensão i pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sum_{j=1}^d A_{ij} dW_j(t), \quad (2.44)$$

onde $i = 1, \dots, d$ e A_{ij} é a matriz de covariância $d \times d$ do processo estocástico S , definida como:

$$\sum_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}, \quad (2.45)$$

onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre $X_i(t)$ e $X_j(t)$, e σ_i, σ_j são coeficientes de difusão, que indicam a dispersão do movimento browniano.

² Um martingale é uma sequência de variáveis aleatórias com expectativa condicional do próximo valor igual ao valor atual, baseado em um conhecimento prévio. Essa propriedade é fundamental em várias áreas da teoria das probabilidades e finanças, devido ao fato de relacionar a ausência de oportunidades de lucro com base em informações passadas (BESSADA, 2005).

3 Aplicações do Movimento Browniano

3.1 Séries epidemiológicas

O estudo de processos de disseminação de epidemias se mostrou crucial no ano de 2020 devido à pandemia de COVID-19, uma doença infecciosa transmitida por meio do vírus SARS-CoV-2, que até o mês de julho deste ano, havia causado mais de seis milhões de mortes e mais de quinhentos e cinquenta milhões de casos confirmados ao redor do planeta ([Organização Mundial da Saúde, 2022](#)).

A epidemiologia é a ciência que estuda, quantitativamente, os padrões da ocorrência de doenças em populações humanas e os fatores condicionantes e determinantes destes padrões, além de analisar a ocorrência de doenças em massa, ou seja, coletividades, classes sociais, grupos específicos, em sociedades (como o da COVID-19), entre outros.

Estudar a propagação de epidemias considerando todas as variáveis envolvidas pode ser extremamente difícil ou até impraticável, devido à complexidade ou falta de dados necessários. Contudo, é possível fazer modelagens usando conjuntos de parâmetros existentes, como por exemplo a mobilidade humana entre cidades ([MORAES, 2020](#)). A Figura 7 mostra uma rede de unidades territoriais, onde a cor das ligações corresponde à intensidade do fluxo entre as cidades.

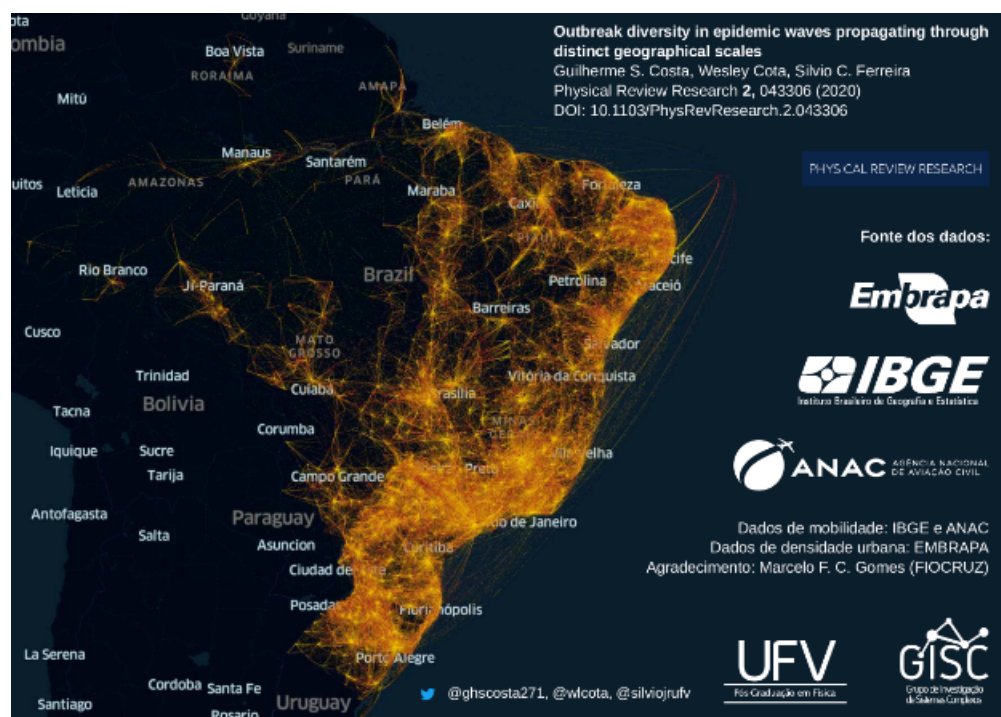


Figura 7 – Rede de mobilidade humana usada no estudo da COVID-19 no Brasil ([Universidade Federal de Viçosa, 2020](#)).

Se os habitantes de duas cidades vão e voltam frequentemente para trabalhar ou estudar, diz-se que essas duas cidades estão conectadas e possuem uma rede que é fundamental para o estudo de transmissão de doenças infecciosas.

Pode-se também investigar processos de disseminação através de modelos compartimentais, em que os nós ou pontos da rede são divididos em compartimentos, de acordo com seu estado em relação ao processo de disseminação. Esses compartimentos podem ser (MORAES, 2020):

- Suscetível (S) - o nó está saudável mas com possibilidade de contrair a infecção;
- Infectado (I) - o nó encontra-se infectado e pode transmitir a doença;
- Recuperado (R) - o nó não pode ser mais infectado nem transmite a doença ou não faz mais parte da rede.

A aplicação de modelos matemáticos à epidemiologia é uma área de pesquisa. Os primeiros modelos que surgiram são designados de modelos SIS (suscetível-infectado-suscetível), sendo um dos modelos compartimentais mais utilizados. A Figura 8 mostra um diagrama do modelo SIS, em que os indivíduos são separados nos compartimentos suscetível e infectado. Um nó no estado I pode transmitir a doença com uma taxa de infecção λ ou se curar espontaneamente com uma taxa de cura ρ (MORAES, 2020).

Na literatura, alguns modelos foram desenvolvidos para estudar a evolução de epidemias, os principais sendo os modelos SIR, SIS, SIRS, SEIS, SEIR, SEIAR, MSIR, MSEIR, MSEIRS (SHIL, 2016).

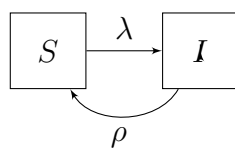


Figura 8 – Diagrama ilustrando o modelo SIS. As caixas simbolizam os compartimentos (susceptível e infectado) e as setas são as possíveis mudanças entre esses dois estados (MORAES, 2020)

O modelo SIS nos fornece percepções de como acontece o processo de disseminação de uma doença infecciosa. Como já vimos anteriormente na construção do movimento browniano de Wiener, conhecemos a "forma" de um gráfico que representa um movimento desse tipo. Analisando os gráficos (9-11) fornecidos pela Organização Mundial da Saúde à respeito da disseminação do Sars Cov-2, podemos comparar a evolução da COVID-19 com o comportamento de um processo estocástico. As Figuras 9-11 mostram os comportamentos dos casos acumulados e novas mortes da covid-19, Mundial, no Brasil e em alguns países.

Na modelagem estocástica, um processo aleatório permite explorar o comportamento do modelo contemplando sua evolução com o tempo.

Santos (2021) apresentou um modelo estocástico para o acompanhamento da evolução da Covid-19, para avaliação da capacidade de leitos públicos de UTI para atendimento da população da cidade de Macaé-RJ.

Souza, Dávalos e Estumano (2022) aplicaram um modelo de simulação estocástico baseado no método de simulação Monte Carlo via cadeias Markovianas (MCMC) e o modelo epidemiológico SEIR (Suscetível, Exposto, Infectado e Recuperado) para a realização de previsões dos principais indicadores da COVID-19 da microrregião de Florianópolis. Para realizar uma análise comparativa dos resultados do modelo proposto aplica-se o modelo não estacionário de previsão de Holt Winters.

Segundo Weisheimer e Tondato (2021) os modelos Markovianos são úteis na modelagem de problemas relacionados a enfermidades como a COVID-19, trabalhando com estados discretos e probabilidades de transição entre eles. Aplicaram o modelo de Markov para avaliar o ganho na qualidade de vida de pacientes, usando a dinâmica de internações anteriores e posteriores à vacinação em massa. No modelo proposto utilizaram o conceito de anos de vida ajustados por qualidade (QALY) para quantificar o incremento. Probabilidades de transição de estado foram encontradas a partir de pesquisas sobre o assunto e reunidas em um modelo Markoviano utilizado para estimar o impacto da vacinação nas internações por COVID-19. taxa de mortalidade de pacientes vacinados internados por COVID-19, além do aumento significativo nos anos de vida ajustados por qualidade ganhos nessa intervenção.

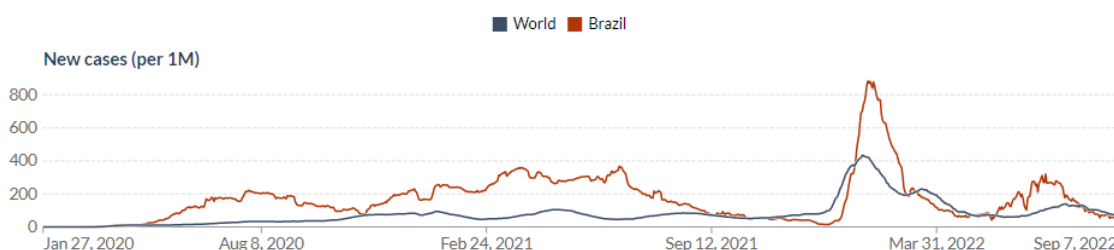


Figura 9 – Novos casos de covid-19 por milhão de habitantes entre 2020 e 2022 - Mundial e Brasil (Organização Mundial da Saúde - OMS, 2022).



Figura 10 – Mortes acumuladas causadas pela covid-19 por milhão de habitantes entre 2020 e 2022 - Mundial e Brasil (Organização Mundial da Saúde - OMS, 2022).

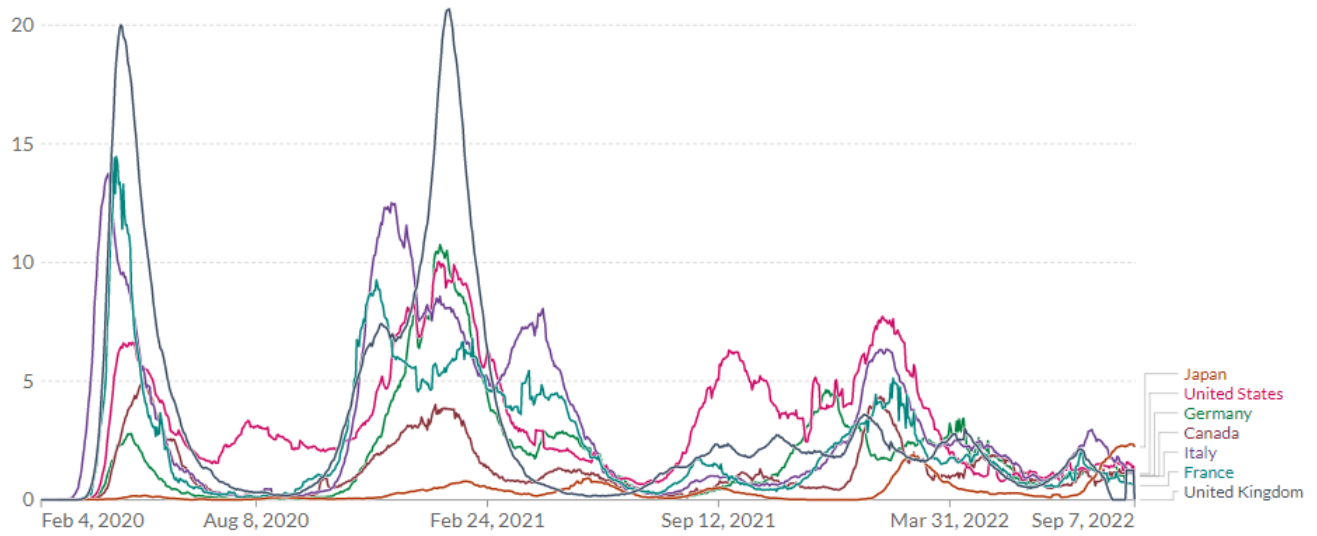


Figura 11 – Mortes causadas pela covid-19 por milhão de habitantes entre 2020 e 2022 - Países: Japão, EUA, Alemanha, Canadá, Itália, França e Reino Unido (Organização Mundial da Saúde - OMS, 2022).

Para modelar a disseminação da Covid-19, utilizaremos um modelo que consiste em cinco compartimentos: suscetível $S(t)$, indivíduos vacinados $V(t)$, infectados $I(t)$, tratados $T(t)$ e recuperados $R(t)$ em todos os tempos $t > 0$ (TESFAYE; SATANA, 2021). Depois do tratamento, alguns indivíduos estão recuperados da doença e não a transmitem mais, mas as populações suscetíveis são aumentadas pela taxa de recrutamento φ , seja por nascimento ou migração. Estes indivíduos podem ser vacinados na taxa θ e infectados pelo COVID-19 com taxa de contato α . Contudo, indivíduos infectados podem obter tratamento na taxa δ , podendo se recuperar da doença à taxa ρ , morrerem à uma taxa τ , ou morrerem em decorrência de complicações causadas pela COVID-19 à uma taxa ω . Devemos considerar também a taxa μ de morte natural da população. É necessário incluir os indivíduos vacinados e recuperados que podem perder a imunidade temporária em taxas σ_2 e σ_1 , respectivamente, tornando-se suscetível novamente. Esse modelo, chamado de SVITR (Suscetível-Vacinado-Infectado-Tratado-Recuperado), é constituído pelas seguintes suposições: todos os parâmetros são não negativos, o tamanho total da população é constante, a vacinação é introduzida nos indivíduos suscetíveis, o número de indivíduos suscetíveis cresce por nascimento ou migração, indivíduos tratados não podem transmitir a doença COVID-19 à população suscetível e, ao perder a imunidade temporária, os indivíduos recuperados tornam-se suscetíveis novamente. Temos as seguintes equações (TESFAYE; SATANA, 2021):

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \varphi + \sigma_1 R(t) + \sigma_2 V(t) - (\alpha I(t) + \theta + \mu)S(t) \\ \frac{dV(t)}{dt} = \theta S(t) - (\mu + \sigma_2)V(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) - (\mu + \delta + \tau)I(t) \\ \frac{dT(t)}{dt} = \delta I(t) - (\mu + \rho + \omega)T(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \rho T(t) - (\mu + \sigma_1)R(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

para as seguintes condições iniciais $S(0) = S_0$, $V(0) = V_0$, $I(0) = I_0$, $T(0) = T_0$ e $R(0) = R_0$. Incorporando fatores estocásticos β_I no modelo determinístico SVITR, obtemos um modelo estocástico para as Equações (3.1):

$$\begin{cases} dS(t) = (\varphi + \sigma_1 R(t) + \sigma_2 V(t) - (\alpha I(t) + \theta + \mu)S(t))dt + \beta_1 S(t)dB_1(t) \\ dV(t) = (\theta S(t) - (\mu + \sigma_2)V(t))dt + \beta_2 V(t)dB_2(t) \\ dI(t) = (\alpha S(t)I(t) - (\mu + \delta + \tau)I(t))dt + \beta_3 I(t)dB_3(t) \\ dT(t) = (\delta I(t) - (\mu + \rho + \omega)T(t))dt + \beta_4 T(t)dB_4(t) \\ dR(t) = (\rho T(t) - (\mu + \sigma_1)R(t))dt + \beta_5 R(t)dB_5(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Sendo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5 \geq 0$ intensidades de movimentos brownianos, e B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 movimentos brownianos independentes.

Tesfaye e Satana (2021) realizaram uma simulação numérica dos modelos determinístico (3.1) e estocástico (3.2) da COVID-19 utilizando os softwares Maple 18 e MATLAB. Os valores das condições iniciais $S(0) = 50$, $V(0) = 35$, $I(0) = 20$, $T(0) = 15$ e $R(0) = 10$ do modelo e dos parâmetros, foram assumidos, estimados e obtidos, conforme mostra a tabela abaixo.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros e variáveis (TESFAYE; SATANA, 2021).

Parâmetro	Valor
ϕ	0.008
α	0.0143
ρ	0.0012
μ	0.016
δ	0.004
θ	0.01
σ_1	0.15
σ_2	0.0005
ω	0.002
τ	0.017

O modelo é assintoticamente estável, tanto para abordagens determinísticas quanto estocásticas conforme verificado numericamente na Figura 12. Observa-se também que tanto nas abordagens determinísticas quanto estocásticas, o número de indivíduos infectados aumentará e a população suscetível diminuirá após um longo período de tempo, quando os indivíduos suscetíveis entrarem em contato com os infectados.

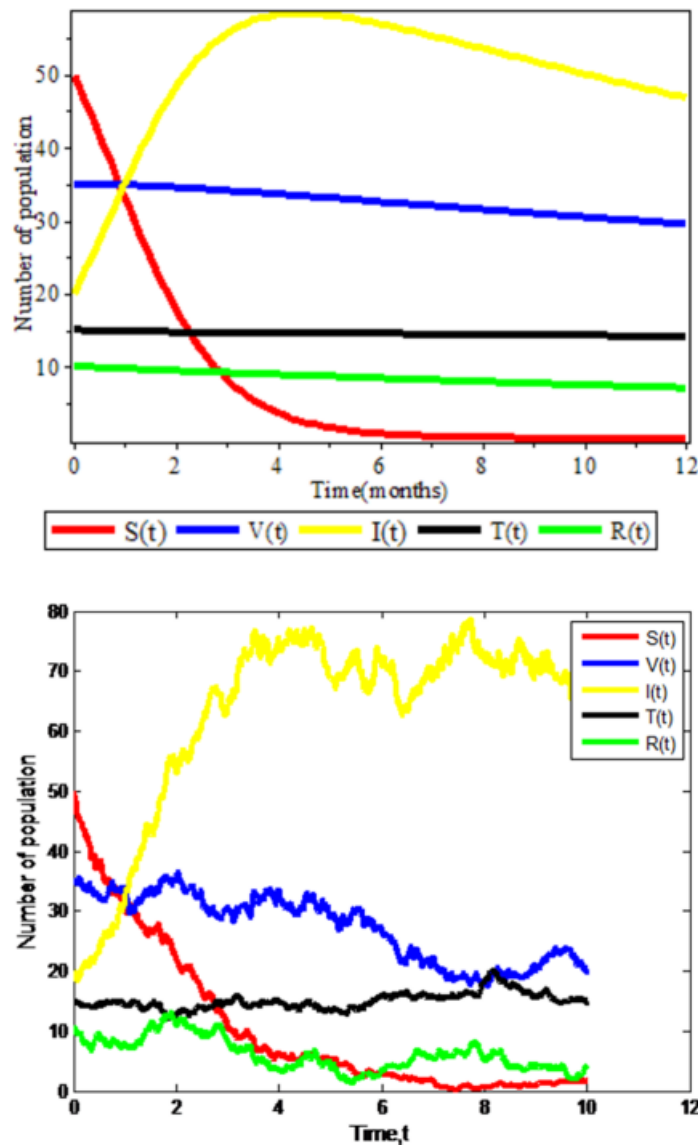


Figura 12 – Gráficos do modelo determinístico e estocástico para a COVID-19 (TESFAYE; SATANA, 2021).

Além disso, no caso determinístico, o gráfico mostra uma curva suave, enquanto no caso estocástico, vemos propriedades zigzagueantes (o que implica que há uma probabilidade de indivíduos suscetíveis serem infectados pela COVID-19 quando indivíduos infectados entram em contato com indivíduos suscetíveis). Portanto, podemos concluir que a abordagem estocástica é mais aconselhável para esse tipo de doença (TESFAYE; SATANA, 2021).

3.2 Motores Brownianos

Motores brownianos estão presentes na escala de tamanho mesoscópica¹, ou seja, são sistemas que estão entre o microscópico e o macroscópico. Para que possam se movimen-

¹ Na escala de comprimento: pode variar de micrômetros (10^{-6} m) a milímetros (10^{-3} m).

tar utilizam flutuações térmicas de maneira construtiva para realizar trabalho útil e se deslocar como em um processo difusivo (REZENDE, 2011).

O motor browniano que será discutido aqui é do tipo liga-desliga com memória, ele é bastante utilizado para descrever motores moleculares e funciona basicamente prendendo partículas carregadas em poços de potenciais periódicos. Se o potencial for "desligado", então as partículas se deslocam de acordo com um processo difusivo. Quando o potencial é estabelecido novamente as partículas movem para o fundo do poço de potencial, compondo uma dinâmica periódica em que as partículas seguem uma direção preferencial e são descritas pela equação de Langevin (REZENDE, 2011):

$$m\dot{v}(t) = -\gamma mv + \zeta(t) - |F_{ext}| - \frac{\partial U(x)}{\partial x} f(t), \quad (3.3)$$

sendo $|F_{ext}|$ uma força externa constante, podendo ser uma força elétrica ou a força peso por exemplo.

Analisando o termo $\frac{\partial U(x)}{\partial x} f(t)$, onde $U(x)$ é um potencial assimétrico e espacialmente periódico, e $f(t)$ uma função que assume apenas dois valores 0 e 1, podemos criar um mecanismo que assegure que a média das partículas siga um sentido desejado.

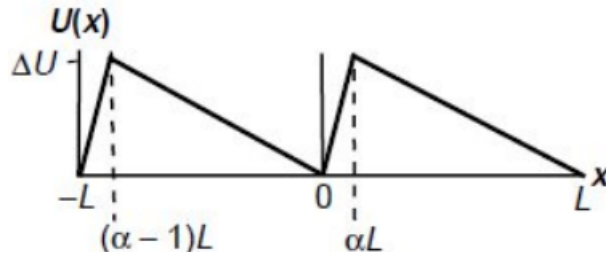


Figura 13 – Potencial periódico de período L e assimetria α (REZENDE, 2011).

O funcionamento desse motor segue os seguintes princípios (REZENDE, 2011):

- No intervalo de tempo em que o potencial permanece ligado Δt_l , as partículas estão confinadas no primeiro poço de potencial;
- No intervalo de tempo em que o potencial permanece desligado Δt_d as partículas se difundem de acordo com uma densidade de probabilidade gaussiana com média zero;
- Ao se ligar novamente o potencial após Δt_d um grande número de partículas é presa nos poços de potencial seguintes, outra parte se mantém no mesmo poço e a outra se move para poços anteriores.

Como exemplo, podemos tratar cinesinas como motores brownianos do tipo liga-desliga. Cinesinas são motores moleculares que transportam mitocôndrias, microtúbu-

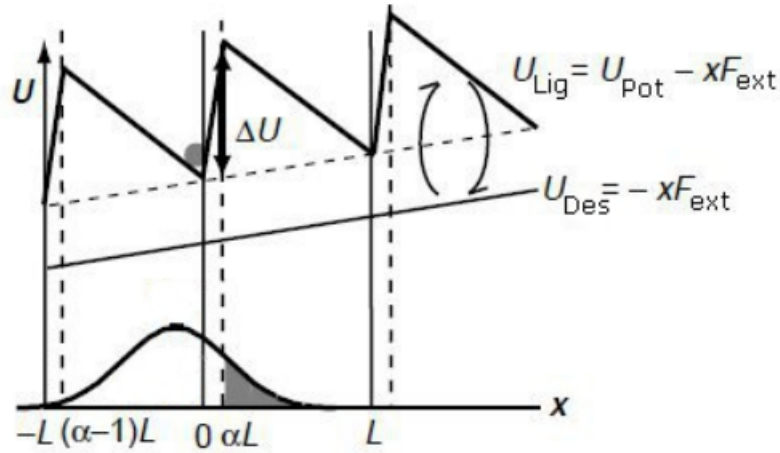


Figura 14 – Funcionamento do motor liga-desliga (REZENDE, 2011).

los e vesículas que contém neurotransmissores (FOX; CHOI, 2001). Ela é uma molécula processiva, isso significa que ela "anda" muito antes de se desprender do microtúbulo.

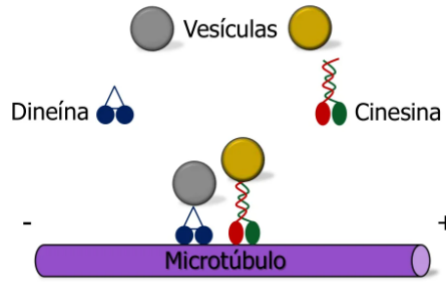


Figura 15 – A cinesina é um exemplo de motor molecular que usa ATP para "caminhar" ao longo dos nanotúbulos.

É possível adaptar o modelo do motor browniano para a cinesina ao considerar um potencial periódico gerado pela interação entre a cabeça da cinesina e o microtúbulo, que segue um padrão semelhante a um dente de serra. Nesse caso, uma das cabeças está ancorada ao microtúbulo, enquanto a outra cabeça fica confinada em uma região que contém três locais de ligação, chamados de poços de potencial. Identificaremos o primeiro poço como 0 e os outros como L e $2L$. Quando a cabeça da cinesina se solta do primeiro poço, ela deve se mover até o poço de potencial $2L$, que está a uma distância de 16 nm do primeiro poço. O poço L é ocupado pela outra cabeça do dímero (REZENDE, 2011).

A distribuição de probabilidades durante o processo de difusão no qual as partículas atingem os poços de potencial durante o período desligado Δt_d depende de uma função de distribuição gaussiana (REZENDE, 2011):

$$p(x, t_d) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(\Delta t_d)\Delta t_d}} \exp \left[-\frac{(x - \langle x(t_d) \rangle)^2}{4D(\Delta t_d)\Delta t_d} \right], \quad (3.4)$$

onde $\langle x(t) \rangle$ é a posição média das partículas e $D(t)$ é o coeficiente de difusão.

Existem duas condições de contorno para este problema. A primeira condição é que a cabeça da molécula de cinesina não pode se mover para o poço $-L$ porque está presa à primeira cabeça. Isso implica que o fluxo de probabilidade para trás é nulo no poço zero. A segunda condição é que, uma vez que a cabeça alcança o poço de potencial $2L$, ela se conecta à ele instantaneamente. Essa condição faz com que a probabilidade se anule nesse ponto. (REZENDE, 2011).

Com a distribuição (3.4), podemos calcular o número médio de passos dados pela cabeça da cinesina, denotado como $\langle R \rangle$:

$$\langle R \rangle = N \sum_{i=0}^{i=2} i P_i(\Delta t_d), \quad (3.5)$$

onde $P_i(\Delta t_d)$ é a probabilidade da partícula se encontrar no *inésimo* poço de potencial $[(\alpha - 1 + i)L, (\alpha + i)L]$ após o tempo Δt_d , e N é uma constante que normaliza as probabilidades

$$N = \frac{1}{\sum_{i=0}^{i=2} P_i(\Delta t_d)}. \quad (3.6)$$

Diferentes tipos de memória podem aumentar a velocidade e a eficiência do modelo de cinesina, e muito provavelmente também da cinesina real. No entanto, a maior aplicação desta teoria está na criação de motores artificiais, nos quais é possível controlar o ambiente de funcionamento, permitindo assim determinar a função memória desejada. Isso abre caminho para o desenvolvimento de motores artificiais com desempenho otimizado (REZENDE, 2011).

3.3 Caminhadas Aleatórias

Problemas envolvendo caminhantes aleatórios são muito recorrentes em física e possuem um caráter geral (SILVA; LIMA, 2007). Em problemas envolvendo difusão de partículas em um meio intermolecular podemos supor que dada partícula executa duas colisões seguidas com as moléculas ao redor e com isso se desloque a uma distância média l , então qual será a distância percorrida depois de N colisões?

Mark Kac (KAC, 1947) estudou a solução para o problema da caminhada aleatória. De início, podemos considerar uma dimensão e imaginar que um caminhante aleatório parta da origem e se desloque em linha reta, realizando n_1 passos de comprimento fixo l para a direita com probabilidade p e n_2 passos para a esquerda com probabilidade $q = 1 - p$, de tal forma que $p + q = 1$. Devemos considerar que os passos são eventos mutuamente independentes e o problema é determinar qual a probabilidade $P_N(m)$ de encontrar o caminhante na posição $x = ml$, onde $-N \leq m \leq N$, após N passos. A quantidade total

de passos é:

$$N = n_1 + n_2, \quad (3.7)$$

onde m é a grandeza que parametriza a distância total percorrida, ou seja,

$$m = n_1 - n_2 \quad (3.8)$$

Como cada passo tem comprimento l , a distância que o caminhante percorre desde a origem é

$$x = (n_1 - n_2)l = ml. \quad (3.9)$$

Os passos são estatisticamente independentes, de probabilidades p e q , com isso a probabilidade de realizar n_1 passos para a direita e n_2 passos para a esquerda é independente da sequência de passos, assim (SALINAS, 1999):

$$p \cdot p \cdot p \dots p \times q \cdot q \cdot q \dots q = p^{n_1} q^{n_2}. \quad (3.10)$$

Há muitas maneiras de arranjar N passos de modo que n_1 seja o número de passos para a direita e n_2 seja o número de passos para a esquerda. Arranjar n_1 e n_2 passos significa descobrir de quantos modos distintos podem ser arranjados $n_1 + n_2$ objetos. Portanto o número de possibilidades distintas é (MATHEWS; WALKER, 1973):

$$\frac{N!}{n_1! n_2!}, \quad (3.11)$$

sendo $P_N(n_1)$ a probabilidade total de realizar n_1 passos para a direita e n_2 para a esquerda e N o número total de passos em qualquer ordem é igual à

$$P_N(n_1) = \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!} p^{n_1} q^{N - n_1}. \quad (3.12)$$

O valor de $P_N(n_1)$ é uma distribuição binomial. Uma expansão binomial de $(p + q)^N$, onde p e q são dois números quaisquer, é dada por

$$(p + q)^N = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!} p^{n_1} q^{N - n_1}. \quad (3.13)$$

A distribuição $P_N(n_1)$ é normalizada, então

$$\sum_{n_1=0}^N P_N(n_1) = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!} p^{n_1} q^{N - n_1} = (p + q)^N = 1. \quad (3.14)$$

Para determinar a probabilidade $P_N(m)$ do caminhante estar na posição $x = ml$, tomamos as Eq. (3.7) e Eq. (3.8)

$$n_1 = \frac{N + m}{2} \quad e \quad n_2 = \frac{N - m}{2}. \quad (3.15)$$

Substituindo na Eq. (3.12), a distribuição $P_N(m)$ é

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}}. \quad (3.16)$$

Para obter uma conexão com o fenômeno de difusão, precisamos descrever o problema do caminhante aleatório usando uma equação diferencial com variáveis contínuas (SALINAS, 1999). Considere τ o tempo para dar um passo, então $P_N(m)$ é a probabilidade da partícula estar na posição $x = ml$ no tempo $N\tau$. Apenas uma partícula que esteja em $x = (m-1)l$ ou $x = (m+1)l$ no tempo $t = (N-1)\tau$ poderá alcançar a posição $x = ml$. No passo seguinte, a probabilidade $P_N(m)$ segue a relação de recorrência (KAC, 1947)

$$P_{N+1}(m) = pP_N(m-1) + qP_N(m+1), \quad (3.17)$$

que é um processo markoviano. Nas equações estocásticas a dinâmica de um sistema físico são fornecidas por leis probabilísticas que são fundamentais no estudo de sistemas fora do equilíbrio. Se N é suficientemente grande, então a função discreta $P_N(m)$ pode ser substituída por uma função contínua $\eta(N\tau, ml) = \eta(t, x)$. A relação de recorrência (3.17) para $\eta(t, x)$, fica

$$P_{N+1}(m) = \eta((N+1)\tau, ml) = \eta(N\tau + \tau, ml) = \eta(t + \tau, x) \quad (3.18)$$

$$P_N(m+1) = \eta(N\tau, (m+1)l) = \eta(N\tau, ml + l) = \eta(t, x + l) \quad (3.19)$$

$$P_N(m-1) = \eta(N\tau, (m-1)l) = \eta(N\tau, ml - l) = \eta(t, x - l). \quad (3.20)$$

Substituindo na Eq.(3.17) e expandindo ambos os lados em série de Taylor

$$\eta + \tau \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = (p+q)\eta + l(q-p) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (p+q) \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (3.21)$$

Sabendo que a probabilidade total é $p+q=1$, então

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{l}{\tau} (p-q) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{l^2}{2\tau} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (3.22)$$

essa é a equação generalizada para a caminhada aleatória. Essa é uma equação diferencial do tipo hiperbólica, então supomos que sua solução seja válida também no regime de tempos curtos, pois ela tem uma derivada segunda com respeito ao tempo em $\eta(x, t)$.

Como foi visto na seção sobre a difusão generalizada, a presença dessa derivada é necessária para corrigir as inconsistências na descrição de Einstein. Considerando a Eq.(3.22), para haver a conexão com o movimento browniano difusivo deve-se estabelecer $p = q = 1/2$. Definindo

$$D = \frac{l^2}{2\tau} \quad (3.23)$$

a Eq. (3.22) se torna

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (3.24)$$

que também é a Eq.(1.8) e que descreve um processo difusivo. Nas imagens abaixo, feitas utilizando códigos do $\text{\LaTeX}$ com intuito de ilustrar caminhadas aleatórias, temos o resultado de algumas simulações para os ângulos de 0° , 60° , 120° , 180° , 240° , 300° e diferentes números de passos:



Figura 16 – Imagem gerada por 100 passos. O autor, 2022.

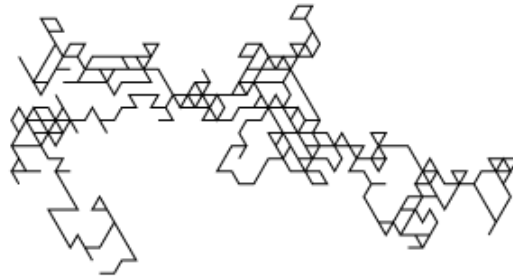


Figura 17 – Imagem gerada por 500 passos. O autor, 2022.

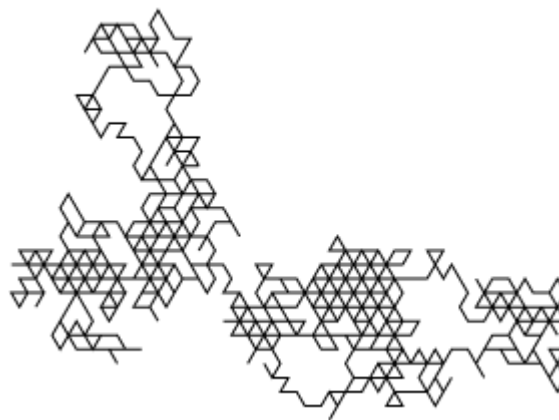


Figura 18 – Imagem gerada por 1000 passos. O autor, 2022.

3.4 Modelo de Black-Scholes e o Mercado de Ações

Um mercado financeiro eficiente é aquele em que toda a informação relevante está embutida no preço dos ativos negociados (DIMSON; MUSSAVIAN, 1998).

Nesse mercado os valores futuros dos ativos não podem ser antecipados de modo que os agentes não possuam informações privilegiadas. Mesmo essa ideia sendo simples nos dias de hoje, no começo do século passado ela era inovadora. Essa ideia deu início à formulação matemática que culminou no processo de Einstein-Wiener do movimento browniano e em diversos trabalhos desenvolvidos pelos estudantes de finanças na segunda metade do século XX (DIMSON; MUSSAVIAN, 1998).

Nesse sentido pode-se destacar o desenvolvimento da teoria do passeio aleatório, como visto na seção anterior, para o movimento dos ativos financeiros, o estudo de métodos para se prever a movimentação dos preços dos ativos, o método gráfico e o método fundamentalista (FAMA, 1995).

Para modelar o comportamento do preço de ações ao longo do tempo pode-se usar o movimento browniano geométrico que satisfaz a equação diferencial estocástica (BRIGO et al., 2007):

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (3.25)$$

onde $S(t)$ é o preço de um ativo financeiro no instante t , μ é o coeficiente de deriva, σ é a volatilidade² e dW é um processo de Wiener.

Os economistas Black e Scholes (1973) publicaram no artigo “*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*” a fórmula de Black – Scholes, para descrever o comportamento de ações europeias, e com a ajuda do economista Robert Carhart Merton para aprimorar o modelo, os três conquistaram o prêmio Nobel de Economia em 1997. Contudo, somente Scholes e Merton receberam o prêmio, já que Black faleceu em 1995.

O trabalho com as opções consiste em adquirir uma opção de comprar ações sob um preço determinado até uma certa data futura. Caso o valor da ação ultrapasse o valor acordado dentro do período, o comprador da opção, compra a ação, e caso queira pode vender imediatamente a ação e obter o lucro. Se o valor da ação não ultrapassar o preço do acordo, não há motivo para comprar a ação, perdendo assim o dinheiro pago pela compra da opção. Portanto, o comprador saberá antecipadamente qual sua perda máxima, observando que será o custo da opção, e mais, que a possibilidade de ganho dependerá se a ação sobe fortemente durante o período (SILVA, 2017).

Para definir um preço justo para a opção de uma ação em particular, Fischer Sheffey Black, Myron Samuel Scholes e Robert Carhart Merton (SILVA, 2017) estudaram o

² Volatilidade é um indicador que mede o risco de um determinado investimento. Quanto maior ele é, maior o risco para o investidor, uma volatilidade alta significa que o valor da cotação apresenta forte variação (SILVA, 2017).

que acontece com o valor de um ativo financeiro dependente de eventos aleatórios como veremos a seguir.

Considere $S(t)$ o valor de um ativo financeiro no instante t , e o que acontece com o preço desse ativo em um instante seguinte sendo definido por $S(t + \Delta t)$. Para estudar a forma como esses valores se relacionam, podemos considerar uma variação relativa (SILVA, 2017):

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)}. \quad (3.26)$$

Dado μ como sendo a taxa de juros, temos que o retorno relativo é:

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t. \quad (3.27)$$

No limite quando $\Delta t \rightarrow 0$,

$$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt} = \mu S(t). \quad (3.28)$$

A equação diferencial (Eq. (3.28)) tem a seguinte solução

$$S(t) = e^{\mu t + C}, \quad (3.29)$$

sendo que, em $t = t_0$:

$$S(t = t_0) = S_0 = e^{\mu t_0 + C}, \quad (3.30)$$

e encontramos o valor da constante C :

$$C = \ln|S_0| - \mu t_0. \quad (3.31)$$

Substituindo o valor C em Eq. (3.29), obtemos:

$$S(t) = S_0 e^{\mu(t-t_0)}. \quad (3.32)$$

O modelo 3.32 é do tipo determinístico para o comportamento do ativo financeiro. Contudo, nem sempre é possível ficar imune de influências externas inesperadas no comportamento do preço de um ativo financeiro. É necessário trabalhar com processos aleatórios, para se ter em mãos um modelo de retorno mais realista (SILVA, 2017). Considerando $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ uma variação cujos incrementos satisfazem a construção de Lévy do modelo browniano, e σ sendo a volatilidade ou desvio padrão do retorno, segue-se que

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t + \sigma \Delta X(t). \quad (3.33)$$

Assim:

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \mu S(t) \Delta t + \sigma S(t) \Delta X(t). \quad (3.34)$$

Dado um índice $j = 0, 1, \dots, k-1$ e $S(t_0) = S_0 \in \mathbb{R}$:

$$S(t) = S(t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu S(t_j) \Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma S(t_j) \Delta X(t_j). \quad (3.35)$$

No caso estocástico a integral pode ser entendida como uma integral de Itô (MISTURINI, 2010), então no limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ a Eq. (3.35), fica

$$\begin{cases} S(t) = S_0 + \int_{t_0}^t \mu S_t dt + \int_{t_0}^t \sigma S_t dX_t \\ S(t_0) = S_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.36)$$

e pode ser reescrita como

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (3.37)$$

sendo nesse processo $X_t = B_t$.

O lema de Itô³ diz que se $\{S_{t \geq 0}\}$ é um processo de Itô e $f(t, S_t)$ é uma função duas vezes continuamente diferenciável em $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$, o processo estocástico $\{R_{t \geq 0}\}$ definido por $R_t = f(t, S_t)$ é um processo de Itô (MILANÉS, 2004). A equação estocástica associada pode ser escrita na forma:

$$dR_t = \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial S^2} (dS_t)^2. \quad (3.38)$$

Substituindo (3.37) em (3.38):

$$dR_t = \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial S^2} (dS_t)^2. \quad (3.39)$$

Então:

$$dR_t = \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} \mu S_t dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} \sigma S_t dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial S^2} (dS_t)^2. \quad (3.40)$$

Sabendo que $dt \times dt = 0$, $dt \times dB_t = 0$ e $dB_t \times dB_t = dt$ (MISTURINI, 2010), o termo $(dS)^2$ pode ser calculado da seguinte forma:

$$(dS)^2 = (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt. \quad (3.41)$$

Substituindo a Eq. (3.41) na Eq.(3.40):

$$dR_t = \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} \mu S_t dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} \sigma S_t dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt, \quad (3.42)$$

obtemos

$$dR_t = \left(\frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} \sigma S_t dB_t. \quad (3.43)$$

É preciso eliminar o risco⁴ que pode ocorrer em dB_t , pois é um processo que muda constantemente (SILVA, 2017). Suponha que o preço de uma opção europeia seja descrito por uma função $V(t, S)$ continuamente diferenciável em $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Adotando uma

³ O lema de Itô é uma identidade usada para encontrar a diferencial de uma função dependente do tempo de um processo estocástico, é derivado da expansão da série de Taylor de uma função. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/>

⁴ Risco é o grau de incerteza da rentabilidade de um investimento (SILVA, 2017).

estratégia de negociação segundo a qual é fixada uma opção negociada continuamente de forma a manter-se $\frac{\partial V}{\partial S}$ ações. No tempo t , o valor desse portfólio⁵ será:

$$\Pi = V(t, S) - S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S}, \quad (3.44)$$

que é chamado de protegido em delta e varia a cada instante no tempo. Chamando de R o lucro (ou prejuízo) acumulado com essa estratégia, no intervalo de tempo $(t, t + dt)$, o lucro ou prejuízo instantâneo é

$$dR = dV(t, S) - \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} dS. \quad (3.45)$$

Substituindo as Eq. (3.37) e (3.43) em (3.44):

$$dR = \left(\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} \right) dt. \quad (3.46)$$

Observando que, a Eq. (3.46) não contém dB_t , isso significa que a estratégia é completamente sem risco e sob essas condições ideais, a taxa de retorno desse portfólio precisa ser igual à taxa de retorno de qualquer outro instrumento sem risco.

Considerando a taxa de retorno livre de risco r ,

$$r\Pi dt = dR = \left(\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} \right) dt \quad (3.47)$$

Substituindo Π (Eq. (3.44)) e dividindo por dt na Eq. (3.47), obtemos a Equação Diferencial Parcial (EDP) de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.48)$$

A EDP de Black Scholes (Eq. (3.48)) também nos permite estudar dividendos⁶. Se assumirmos que uma determinada ação paga um dividendo contínuo de q , então o dividendo pago no intervalo $(t, t + dt)$ é igual a $qS_t dt$, assim a dinâmica do preço das ações deve satisfazer (HAUGH, 2016):

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q, \quad (3.49)$$

onde W_t^Q é um movimento browniano. Portanto, o processo de ganho ou perda de capital pela detenção do título mais o acumulado dividendos, é um Q -martingale.

⁵ Portfólio é um conjunto de títulos e valores mantido por um fundo mútuo ou por um investidor (SILVA, 2017).

⁶ Dividendo é a parcela do lucro da empresa que é distribuída aos acionistas, de acordo com a quantidade de ações possuídas, geralmente é o resultado dos lucros obtidos por uma empresa (SILVA, 2017).

3.5 Redes Neurais

Redes neurais é um campo da ciência da computação relacionado à inteligência artificial, que se fundamenta no funcionamento do sistema nervoso biológico com o objetivo de implementar modelos matemáticos para processar, armazenar e transferir informações vindas de um meio exterior (FERNEDA, 2006). A Figura 19 representa um modelo de rede neural (neurônio artificial) apresentado por Haykin (HAYKIN, 2001), nesse modelo temos:

- Um conjunto de n conexões de entrada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com pesos $(p_1, p_2, \dots, p_n)$;
- Um somatório Σ para acumular os sinais de entrada;
- Uma função de ativação φ que limita o intervalo de amplitude do sinal de saída y para um valor fixo;

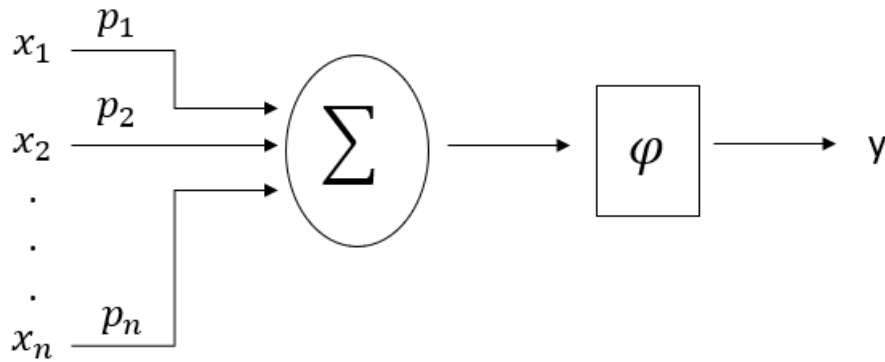


Figura 19 – Representação de um neurônio artificial. Adaptado (HAYKIN, 2001).

Quando os neurônios artificiais são conectados e organizados, eles configuram a estrutura ou arquitetura de uma rede neural, com diversas características e aplicações. As redes neurais podem ter uma única camada ou múltiplas camadas. Na rede formada por uma única camada, há a entrada de dados e uma única camada de neurônios em paralelo, que é a própria camada de saída. Existem também redes multicamadas, formadas por uma camada de entrada, uma ou mais camadas intermediárias e uma camada de saída (FERNEDA, 2006). De forma geral, uma rede neural artificial pode ser vista como um grafo, onde os nós são os neurônios e as ligações fazem a função das sinapses, como mostra a Figura 20.

Redes neurais são utilizadas no mercado de opções (mercado em que os proprietários têm o direito de comprar ou vender um ativo a um preço predeterminado). Com elas, é possível analisar a precificação de opções e a previsão da volatilidade implícita. Alguns trabalhos concluem que a técnica de redes neurais é uma importante ferramenta para a análise e compreensão desse tipo de mercado, tal como fizeram Hutchinson (1994), Malliaris e Salchenberger (1996).

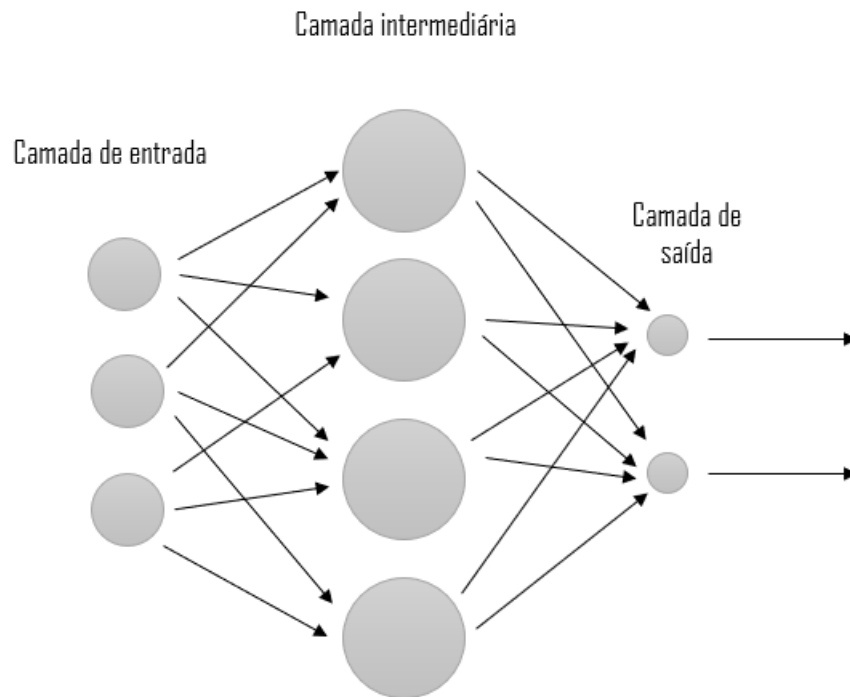


Figura 20 – Representação de uma rede neural artificial. Adaptado (HAYKIN, 2001).

O modelo de Black-Scholes é um dos principais modelos da área de finanças, porém alguns dos pressupostos desse modelo não são verificados na prática, resultando em diferenças consideráveis entre o valor da opção, calculado pelo modelo, e o valor de fato verificado no mercado. Portanto, são utilizadas redes neurais para melhorar a precisão dos modelos de precificação de opções. Uma maneira de fazer isso é usá-las para ajustar os parâmetros do modelo de Black-Scholes com base em dados de mercado (FREITAS, 2001). Ao se obter as entradas do modelo de Black-Scholes, pode-se determinar o modelo de rede neural para precificar as opções de compra. Para isso, é necessário fazer o treinamento de uma rede neural, ajustando os pesos sinápticos p_n (MACIEL; BALLINI; SILVEIRA, 2009).

Esse treinamento faz com que a rede consiga generalizar um problema. Contudo, não é necessário saber todas as entradas necessárias para se obter a saída. A rede recebe os vetores de entrada e saída desejados e ela ajusta os pesos entre os neurônios de maneira a se obter a saída almejada, ou seja, ela é treinada para fornecer um conjunto de saída dado um estímulo de entrada específico (MACIEL; BALLINI; SILVEIRA, 2009).

É possível treinar uma rede neural para jogar Chrome Dino, no Google Chrome (Figura 21). Esse jogo tem como objetivo fazer um dinossauro desviar de obstáculos, e há dois comandos para isso: pular (pressionando a tecla *up* do teclado) ou abaixar (pressionando a tecla *down* do teclado).

Durante o treinamento, o modelo de rede neural recebe um *feedback* sobre suas ações com base nas recompensas recebidas. Por exemplo, se o dinossauro pular e evitar um

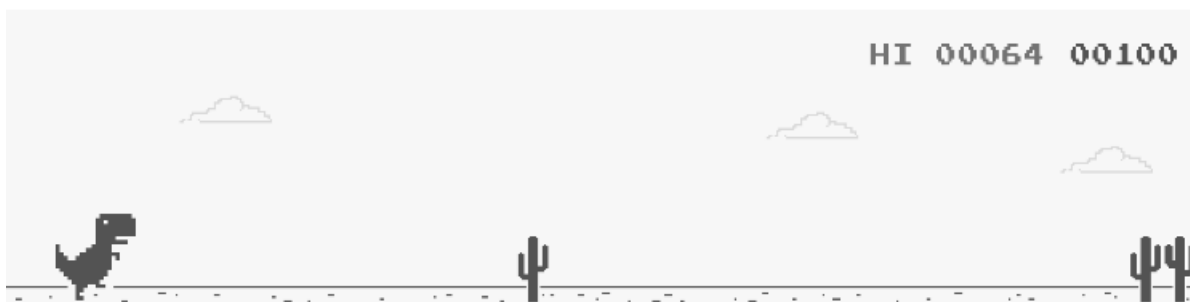


Figura 21 – Jogo Chrome Dino. Fonte: <https://github.com/g-arnav/DinoML>

obstáculo, ele recebe uma recompensa positiva. Por outro lado, se o dinossauro colidir com um obstáculo, ele recebe uma recompensa negativa. Essas recompensas ajudam a rede neural a ajustar seus pesos e a aprender a tomar melhores decisões no jogo. O modelo de rede neural recebe como entrada informações sobre o ambiente do jogo, como a posição do dinossauro, a altura dos obstáculos e a velocidade do jogo. Com base nessas informações, a rede neural realiza cálculos e produz uma saída que indica se o dinossauro deve pular ou não.

Pode-se criar vários dinossauros sob essas condições e colocá-los para jogar simultaneamente, a rede neural analisa continuamente as informações de entrada do jogo, processa essas informações e decide quando pular ou abaixar para evitar obstáculos (Figura 22). Após todos os dinossauros morrerem, o dinossauro que obteve o melhor desempenho pode ser clonado, e com base nas experiências adquiridas durante o jogo, os parâmetros podem ser modificados aleatoriamente. São criados vários clones e se repete todo o processo até se obter um dinossauro que não perca o jogo.

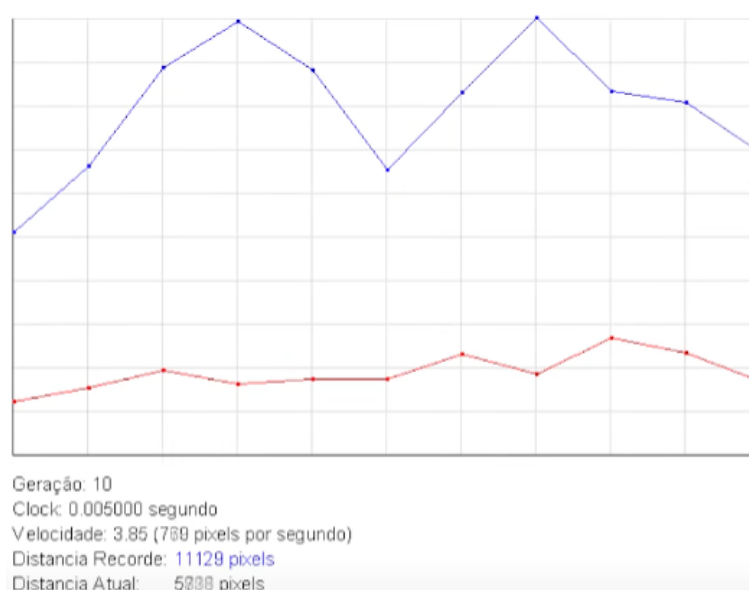


Figura 22 – Desempenho do melhor dinossauro da geração (gráfico em azul) x Média de desempenho de todos os dinossauros da geração (gráfico em vermelho). Fonte: <https://www.youtube.com/UniversoProgramado>

Assim, o modelo de rede neural permite que o dinossauro aprenda a jogar autonomamente, utilizando informações do ambiente do jogo para tomar decisões sobre quando pular e evitar obstáculos, através do treinamento e ajuste de uma rede neural artificial.

3.6 Medidas de Temperatura na Superfície do Mar

O movimento browniano tem implicações importantes para a compreensão da distribuição e do transporte de calor na superfície do mar. As medidas de temperatura são fundamentais para entender a dinâmica do oceano e sua interação com a atmosfera. Contudo, a interpretação dessas medidas é difícil pois a temperatura da superfície do mar muda de forma complexa e aleatória (LUCZKA; ZABOREK, 2004).

A influência das flutuações de temperatura no movimento da partícula browniana é um problema estudado na estatística de Tsallis⁷ (WILK; LODARCZYK, 2000), com aplicação nas flutuações de velocidade em um fluxo turbulento, porém as flutuações de temperatura são referentes ao caso estático, ou seja, as flutuações são representadas por uma variável aleatória independente do tempo. Esse problema é matematicamente trivial no sentido de que a densidade de probabilidade de velocidade pode ser calculada para uma variável aleatória arbitrária que modele as flutuações, entretanto o modelo mais realista é o modelo dinâmico, desenvolvido utilizando um ruído dependente do tempo, para o qual as flutuações de temperatura são representadas por um processo estocástico estacionário (LUCZKA; ZABOREK, 2004).

Na teoria clássica da difusão, a posição de uma partícula browniana de massa m em um meio unidimensional homogêneo de temperatura T em equilíbrio é descrita de acordo com o teorema flutuação-dissipação⁸:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = \sqrt{2\gamma k_B T}\zeta(t), \quad (3.50)$$

onde γ é o coeficiente de atrito, k_B é a constante de Boltzmann e $\zeta(t)$ é uma força aleatória modelada pelo ruído branco gaussiano (LUCZKA; ZABOREK, 2004):

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \langle \zeta(t)\zeta(s) \rangle = \delta(t - s). \quad (3.51)$$

⁷ A estatística de Tsallis ou entropia de Tsallis, é uma generalização da mecânica estatística tradicional baseada na entropia de Boltzmann-Gibbs. A entropia de Tsallis é:

$$S_q = \frac{k}{1-q} \left(1 - \sum_i (p_i)^q \right)$$

k é a constante de Boltzmann, p_i é a probabilidade de ocorrência do estado i , e q é o parâmetro de não extensividade (PEDRON, 1999).

⁸ O Teorema de Flutuação-Dissipação (TFD) diz respeito a uma série de relações, muito gerais, entre correlações e respostas de sistemas estatísticos em equilíbrio (STARIOLO, 2020).

A velocidade é um processo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck⁹, e sua densidade de probabilidade $P(v, t)$ obedece à equação de Fokker-Planck, portanto:

$$\frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{m} \frac{\partial P(v, t)}{\partial v} + \frac{\gamma k_B T}{m^2} \frac{\partial^2 P(v, t)}{\partial v^2}, \quad (3.52)$$

com solução geral dada por:

$$P(v, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(v, t|v_0, 0) P(v_0, 0) dv_0, \quad (3.53)$$

sendo $P(v_0, 0)$ uma distribuição inicial. A distribuição de probabilidade de transição é dada por:

$$p(v, t|v_0, 0) = [2\pi\sigma^2(t)]^{-1/2} \exp \left\{ -[v - v_0 e^{-\gamma t/m}]^2 / 2\sigma^2(t) \right\}, \quad (3.54)$$

onde a variância é:

$$\sigma^2(t) = \frac{k_B T}{m} (1 - e^{-2\gamma t/m}). \quad (3.55)$$

Por fim a função de distribuição de velocidade estacionária $P_M(v)$ não depende da distribuição inicial $P(v, 0)$, sendo portanto chamada de distribuição de Maxwell, que significa que o estado estacionário no espaço de velocidades é um estado de equilíbrio termodinâmico dado por (LUCZKA; ZABOREK, 2004):

$$P_M(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp \left(\frac{-mv^2}{2k_B T} \right). \quad (3.56)$$

Sendo $\eta(t)$ um processo estocástico estacionário com média zero, considere que a temperatura de um fluido varia em torno de um valor médio T_0 :

$$T = T(t) = T_0 + \eta(t) \quad (3.57)$$

com $T(t) > 0$ e $\eta(t) \in Y = (-T_0, \infty)$, sendo Y o espaço de fase de $\eta(t)$. A distribuição de probabilidade de velocidades $P(v, t)$ pode ser obtida através da Eq. (3.53), com densidade inicial de transição sendo:

$$p(v, t|v_0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega v} C_v(\omega, t; v_0) \quad (3.58)$$

onde $C_v(\omega, t; v_0)$ é a função característica¹⁰ condicional da velocidade:

$$C_v(\omega, t; v_0) = \langle e^{i\omega v(t)} \rangle \quad (3.59)$$

⁹ Um processo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck, é um modelo matemático utilizado para descrever a evolução temporal de uma variável aleatória que tem tendência a retornar a um ponto de equilíbrio ao decorrer do tempo. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/>

¹⁰ Dada uma função complexa $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, e um vetor d-dimensional $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)$, a função característica de $\phi(\vec{z})$ é definida como (SILVA, 2022):

$$\varphi(\vec{z}) = \mathbb{E}[e^{i\vec{z} \cdot \vec{X}}] = \mathbb{E}[\cos(\vec{z} \cdot \vec{X})] + i\mathbb{E}[\sin(\vec{z} \cdot \vec{X})]$$

Podemos obter a velocidade $v(t)$ por meio da Eq. (3.50) com a temperatura em função do tempo:

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t/m} + \sqrt{2k\gamma/m^2} \int_0^t ds e^{-\gamma(t-s)/m} \sqrt{T(s)} \xi(s) \quad (3.60)$$

onde $\xi(s)$ é um processo estocástico chamado de ruído térmico¹¹. Substituindo a Eq. (3.60) na Eq. (3.59), obtemos (LUCZKA; ZABOREK, 2004):

$$C_v(\omega, t; v_0) = \exp(i\omega v_0 e^{-\gamma t/m}) C(\omega, t) \quad (3.61)$$

onde

$$C(\omega, t) = \left\langle \exp \left[i\omega \sqrt{2k\gamma/m^2} \int_0^t ds e^{-\gamma(t-s)/m} \sqrt{T(s)} \xi(s) \right] \right\rangle_{\xi, \eta} \quad (3.62)$$

Os índices ξ e η indicam a média do ruído térmico $\xi(t)$ e das flutuações de temperatura $\eta(t)$, respectivamente.

Aplicando o método da função característica obtemos uma distribuição de probabilidade de velocidade dependente do tempo para a partícula browniana movendo-se em um meio no qual a temperatura flutua. Considerando as flutuações simples de temperatura como um processo markoviano estacionário de dois estados, o problema é reformulado para um processo estocástico markoviano arbitrário, onde que para um processo estocástico $\psi(t)$ é necessário encontrar o gerador infinitesimal $\hat{L}$ desse processo (LUCZKA; ZABOREK, 2004). Observe que a função de correlação da força $F(t) = \sqrt{2\gamma k_B T(t)} \zeta(t)$ na Eq. (3.50), pode ser escrita como:

$$\langle F(t) F(s) \rangle = 2\gamma k_B T \delta(t - s), \quad (3.63)$$

independentemente das flutuações estatísticas de $\psi(t)$, o que é uma propriedade da relação de dissipação-flutuação.

¹¹ O ruído térmico é o nome dado às flutuações aleatórias na energia ou na temperatura de um sistema físico em equilíbrio térmico. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/>

4 Conclusão

A pesquisa feita durante o desenvolvimento desse trabalho teve como intenção apresentar o movimento browniano como um fenômeno fundamental da física que pode ser observado em diversas áreas, desde a biologia até a ciência da computação, utilizando-se da análise de séries temporais, equações de difusão e equações de Langevin para entender sua natureza e aplicações em diferentes contextos.

Portanto, verificou-se a diversidade de aplicações da teoria de fenômenos aleatórios. A pesquisa em processos estocásticos é um campo ativo e em constante evolução. É necessário continuar a investigação de novas teorias e técnicas para entender melhor a natureza dos processos estocásticos e suas aplicações na ciência e na tecnologia.

Referências

- ARFKEN, G. *Física Matemática Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. São Paulo: Campus Elsevier, 2006. v. 1. [18](#)
- ASSAEL ed. by M. J. *Advances in transport properties of fluids*. [S.l.]: Cambridge Royal Society of Chemistry 2014, 2014. Volume IX (9). (Experimental thermodynamics, Volume IX (9)). ISBN 9781849736770,1849736774,9781782625254,1782625259,9781782621492,1782621490. [17](#)
- BESSADA, D. F. A. Generalizações do movimento browniano e suas aplicações à física e a finanças. Instituto de Física Teórica - Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2005. [28](#), [29](#), [31](#), [32](#)
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, v. 81, n. 3, 1973. [45](#)
- BORGES, V. de G. Movimento browniano e suas aplicações matemáticas na medicina. *Desvendando a Engenharia: sua abrangência e multidisciplinaridade*, v. 2, 2021. [11](#)
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. [S.l.]: LTC, 2015. [21](#)
- BRIGO, D. et al. *A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management*. [S.l.: s.n.], 2007. ISSN 1556-5068. [45](#)
- BROWN, R. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. Philosophical Magazine, v. 4, p. 161–173, 1828. [9](#)
- CANNON, J. R. *The one-dimensional heat equation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. [17](#)
- DIMSON, E.; MUSSAVIAN, M. A brief history of market efficiency. Published in European Financial Management, v. 4, n. 1, 1998. [45](#)
- DUQUE, O. M. L. *Uma breve análise do movimento Browniano*. Vitória -ES: Universidade Federal do Espírito Santo – UFES, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014. [11](#)
- EINSTEIN, A. On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat. Annalen der Physik (English translation, 1956), v. 17, p. 549–560, 1905. [10](#), [13](#), [17](#)
- FALLEUR, A. M.; LI, D.; YAN, Y. The borel-cantelli lemma and its applications. The University of New Mexico, Albuquerque, Novo México, 2010. [27](#)
- FAMA, E. F. Random walks in stock market prices. Financial Analysts Journal, v. 51, 1995. [45](#)

- FERNEDA, E. Redes neurais e sua aplicação em sistemas de recuperação de informação. *Ci. Inf., Brasília*, v. 35, n. 1, p. 25–30, 2006. [49](#)
- FOX, R. F.; CHOI, M. *Rectified brownian motian and kinesian motian along microtubules*. [S.l.]: Physical Review, 2001. [40](#)
- FREITAS, S. O. de. *Utilização de um Modelo Baseado em Redes Neurais para a Precificação de Opções*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais Departamento de Ciências Administrativas Centro de Pós-graduação e Pesquisa em Administração – CEPEAD, 2001. [50](#)
- HAUGH, M. The black-scholes model. IEOR E4706: Foundations of Financial Engineering, 2016. [48](#)
- HAYKIN, S. *Redes neurais: princípios e prática*. Porto Alegre: Bookman, 2001. [7](#), [49](#), [50](#)
- HUTCHINSON, J. M. *A nonparametric approach to pricing and hedging derivate securities via learning networks*. n.3. [S.l.]: Journal of Finance, 1994. v. 49. [49](#)
- KAC, M. *Random Walk and the Theory of Brownian Motion*. [S.l.]: Cornell University, 1947. [41](#), [43](#)
- KLAFTER, J.; SHLESINGER, M.; ZUMOFEN, G. Beyond brownian motion. Physics Today, 1996. [31](#)
- KONG, Y. Geometric brownian motion. Seminar Monte-Carlo Methods in Finance Practice, 2017. [31](#), [32](#)
- LANGEVIN, P. Sur la théorie du mouvement brownien. C. R. Acad. Sci., Paris, p. 530–533, 1908. [10](#)
- LUCZKA, J.; ZABOREK, B. *Brownian motion: a case of temperature fluctuations*. Poland: Institute of Physics, University of Silesia, 2004. [52](#), [53](#), [54](#)
- LUIZ, J. L. P.; SILVA, B. F. d.; SOUZA, F. S. *Teoremas de kolmogorov e o movimento browniano*. [S.l.]: Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, p. 147–149, 2013. [30](#)
- MACIEL, L. dos S.; BALLINI, R.; SILVEIRA, R. L. F. da. Apreçamento de opções de dólar no brasil: uma avaliação dos modelos de redes neurais. *Departamento de Teoria Econômica Instituto de Economia, Universidade Estadual de Campinas*, XXXVII Encontro Nacional de Economia, 2009. [50](#)
- MALLIARIS, M.; SALCHENBERGER. *Using neural networks to forecast the SP 100 implied volatility*. p. 183-195. [S.l.]: Neurocomputing, 1996. v. 10. [49](#)
- MATHEWS, J.; WALKER, R. *Mathematical Methods of Physics*. 2. ed. Nova Iorque: Addison Wesley, 1973. [42](#)
- MILANÉS, A. *Uma introdução ao cálculo estocástico e às equações diferenciais estocásticas*. [S.l.]: Relatório Técnico, RTE-03/2004- Série Ensino., 2004. [47](#)
- MISTURINI, R. *Movimento browniano, integral de Itô e introdução às equações diferenciais estocásticas*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010. [47](#)

- MORAES, J. T. de. *Estudo de séries de prevalência epidêmica utilizando o grafo de visibilidade*. [S.l.]: Universidade Federal de Viçosa, 2020. 7, 33, 34
- MORTERS, P.; PERES, Y. *Brownian Motion*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics: Cambridge University Press, 2010. 7, 11, 24, 25, 27, 28
- NELSON, E. *Dynamical theories of brownian motion*. Princeton: Princeton University Press, 2001. 9
- N.H., A. *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*. Second edition. [S.l.]: Prentice Hall, 2004. ISBN 0-13-148096-0. 14, 15
- Organização Mundial da Saúde. *Pandemia da doença de coronavírus (COVID-19)*. 2022. [Online; Acessado em 14-Julho-2022]. Disponível em: <<https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>>. 33
- Organização Mundial da Saúde - OMS. *World Health Organizations - WHO*. 2022. [Online; Acessado em 08 de setembro de 2022]. Disponível em: <<https://www.who.int/>>. 7, 35, 36
- PAIS, A. *Sútil é o Senhor: vida e pensamento de Albert Einstein*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1982. 17
- PEDRON, I. T. Integrais, equações diferenciais e entropia de tsallis. *Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Física, Dissertação de Mestrado*, Maringá, Paraná, 1999. 52
- Real Jardim Botânico. *A brief Account of microscopical observations on the particles contained in the pollen of plants*. 2019. [Online; Acessado em 25 de maio de 2023]. Disponível em: <<https://bibdigital.rjb.csic.es/>>. 7, 9
- REZENDE, G. R. de. *Movimento browniano e motores brownianos*. [S.l.]: Tese de doutorado do Instituto de Física - Universidade de Brasília, 2011. 7, 20, 22, 23, 39, 40, 41
- SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 1999. 42, 43
- SANTOS, R. F. A aplicação de um modelo estocástico para o acompanhamento da evolução da covid-19 no município de macaé-rj. *American Psychological Association (APA) - EXACTA - Engenharia de Produção*, 2021. 35
- SHIL, P. Mathematical modeling of viral epidemics: A review. *Biomedical Research Journal*, v. 3(2), p. 195–215, 2016. 34
- SILVA, A. A. C.; ALMEIDA, A. C. L. *Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição Normal: uma abordagem no ensino de distribuição normal de probabilidade*. São João del-Rei: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ - Campus Alto Paraopeba Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015. 30
- SILVA, B. F. C. da. *Modelo de Black-Scholes como alternativa de investimento para os produtores rurais dos Vales de Jequitinhonha e Mucuri*. [S.l.]: Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Programa de Pós-Graduação em Tecnologia, Ambiente e Sociedade, 2017. 45, 46, 47, 48

- SILVA, E. L. da Silva e. O método da função característica aplicado na renormalização da energia potencial e da força resultante média em um sistema com n partículas distribuídas aleatoriamente. *Universidade de Brasília, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Tese de doutorado.*, Brasília - DF, 2022. 53
- SILVA, J. M.; LIMA, J. A. S. Quatro abordagens para o movimento browniano. *Revista brasileira de Ensino de Física*, v. 20, 2007. 14, 16, 17, 19, 20, 41
- SODRÉ, U. *Equações Diferenciais Parciais*. Universidade Estadual de Londrina: [s.n.], 2003. 17, 18
- SOUZA, T. L. de; DÁVALOS, R. V.; ESTUMANO, D. C. Aplicações da simulação estocástica e do modelo holt winter para a previsão dos indicadores covid-19 na microrregião de florianópolis-sc. XII Congresso Brasileiro da Engenharia de Produção - Anais do ConBRepro 2022, v. 1, p. 1–12, 2022. 35
- STARIOLO, D. A. *Dinâmica estocástica de sistemas desordenados*. Santa Catarina: Departamento de Física, Universidade Federal Fluminense, VIII Encontro de Física e Astronomia da UFSC, 2020. 22, 52
- TESFAYE, A. W.; SATANA, T. S. Stochastic model of the transmission dynamics of covid-19 pandemic. *Advances in Difference Equations - a SpringerOpen Journal*, 2021. 7, 36, 37, 38
- Universidade Federal de Viçosa. *Modelagem do avanço da COVID-19 no interior do Brasil*. 2020. [Online; Acessado em 14-Julho-2022]. Disponível em: <<https://covidbr.github.io/pub/1>>. 7, 33
- WEISHEIMER, V. P.; TONDATO, R. *Utilização de Modelo Markoviano para Estimar Impacto da Vacinação de COVID-19 através do Indicador QALY*. 2021. [Online; Acessado em 21-Maio-2023]. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br:8080/jspui/handle/1/27645>>. 35
- WIENER, N. Differential space. *Journal Math. Phys.*, 1923. 25, 26
- WILK, G.; LODARCZYK, Z. W. Interpretation of the nonextensivity parameter q in some applications of tsallis statistics and lévy distributions. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 2770, 2000. 52

Anexo - Códigos utilizados no trabalho

Simulação do movimento aleatório de uma partícula, página 10:

```
\usepackage{randomwalk}
\framebox{\RandomWalk {number = 1000, length = 2pt,
    angles = {0,10,20,50,-10,-20,-50}, degree, angles-relative}}
\end{document}
```

Gráficos que resultam em gaussianas, página 24:

```
#
# Values of random variable
#
x = np.linspace(-10, 10, 100)
#
plt.figure(figsize=(7.5,7.5))
#
# Normal distribution with mean 0 and std as 1
#
plt.plot(x, stats.norm(0, 1).pdf(x))
#
# Normal distribution with mean 1 and std as 0.75
#
plt.plot(x, stats.norm(1, 0.75).pdf(x))
#
# Normal distribution with mean 2 and std as 1.5
#
plt.plot(x, stats.norm(2, 1.5).pdf(x))
plt.xlim(-10, 10)
plt.title('Normal Distribution', fontsize='15')
plt.xlabel('Values of Random Variable X', fontsize='15')
plt.ylabel('Probability', fontsize='15')
plt.show()
```

Gráfico que representa movimentos brownianos amostrados, página 25:

```
\documentclass[parskip]{scrartcl}
\usepackage[margin=15mm]{geometry}
\usepackage{tikz}

\begin{document}

\newcommand{\Emmett}[5]{% points, advance, rand factor, options, end label
\draw[#4] (0,0)
\foreach \x in {1,...,#1}
{   -- ++(#2,rand*#3)
}
}
```

```
\begin{tikzpicture}
\draw[help lines] (0,-5) grid (15,5);
\Emmett{750}{0.02}{0.2}{red}{}
\Emmett{750}{0.02}{0.2}{green}{}
\Emmett{750}{0.02}{0.2}{blue}{}
\end{tikzpicture}

%\pgfmathsetseed{1337}

\end{document}
```

Caminhadas aleatórias, página 44:

```
\usepackage{randomwalk}
\begin{document}
\RandomWalk {number = 1000, angles =
{0,60,120,180,240,300}, degree}
```