

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Estudo das Cônicas: uma perspectiva na forma implícita

ADRIANE LIMA EVANGELISTA

**GOIÂNIA - GO
2023**



TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Adriane Lima Evangelista

Matrícula: 20152010940071

Título do Trabalho: Estudo das Cônicas: uma perspectiva na forma implícita.

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito),

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 03/07/2023.

Adriane Lima Evangelista

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Adriane Lima Evangelista

Estudo das Cônicas: uma perspectiva na forma implícita

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás - IFG - Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof(a). Dr(a). Regina Célia Bueno da Fonseca

Brasil
Goânia, 2023

Ev148e Evangelista, Adriane Lima.

Estudo das cônicas: uma perspectiva na forma implícita / Adriane Lima Evangelista. –
Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia,
2023.

39 f.: il.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Estudo das cônicas. 2. Curvas cônicas. I. Fonseca, Regina Célia Bueno da
(orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus
Goiânia. III. Título.

CDD 510



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

ESTUDO DAS CÔNICAS: UMA PERSPECTIVA NA FORMA IMPLÍCITA

por

ADRIANE LIMA EVANGELISTA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientadora: Dr^a. Regina Célia Bueno da Fonseca

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 15 de junho de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof^a. Dr^a. Regina Célia Bueno da Fonseca(Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof^a. Dr^a. Simone Ariomar de Souza (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- **Duelci Aparecido de Freitas Vaz**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 15/06/2023 16:48:54.
- **Simone Ariomar de Souza**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 15/06/2023 16:48:43.
- **Regina Celia Bueno da Fonseca**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 15/06/2023 16:48:14.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 07/06/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 417114

Código de Autenticação: e4b0b2abba



Agradecimentos

Primeiramente, expresso minha gratidão a Deus, cuja orientação e benção foram fundamentais ao longo de toda esta jornada. Sua força e sabedoria guiaram meus passos, fornecendo-me com coragem e perseverança para superar os desafios encontrados durante a realização deste curso.

À minha família, agradeço por seu amor incondicional e apoio contínuo. Vocês foram minha base sólida e meu porto seguro, sempre presentes em cada etapa deste processo. Suas palavras de encorajamento e suporte emocional foram fundamentais para manter minha motivação e determinação. Sou imensamente grata por cada sacrifício que fizeram por mim.

Aos meus amigos de graduação, agradeço por compartilharem comigo esses anos inesquecíveis. Juntos, enfrentamos desafios acadêmicos, celebrações e momentos de descontração. Suas presenças em sala de aula, seus debates e trocas de experiências tornaram a jornada universitária mais agradável e enriquecedora. Agradeço por todas as risadas, apoio mútuo e amizade que construímos ao longo desses anos.

Por fim, mas não menos importante, expresso minha profunda gratidão à minha professora orientadora. Sua orientação, sabedoria e paciência foram inestimáveis para a conclusão deste trabalho. Sua dedicação em me ajudar a desenvolver minhas habilidades acadêmicas e a aprimorar minha pesquisa foram fundamentais para o sucesso alcançado. Agradeço por seu constante encorajamento, direcionamento e pelos *insights* valiosos que proporcionou.

Resumo

As cônicas podem ser consideradas como curvas planas descritas, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, por uma equação de segundo grau em duas variáveis. Este trabalho teve como objetivo analisar as equações que descrevem as curvas cônicas, com o intuito de demonstrar que equações podem ser expressas tanto na forma implícita quanto na forma explícita. Durante o estudo, foram explorados conceitos fundamentais da teoria das funções implícitas, explícitas e das curvas cônicas. Os resultados obtidos revelaram que é possível escrever as equações reduzidas das cônicas em ambas as formas, foi comprovado graficamente que os gráficos resultantes são idênticos.

Palavras-chave: Estudo das Cônicas; forma implícita; forma explícita.

Sumário

	Lista de ilustrações	8
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
1.1	Fundamentação Teórica do Cálculo	12
2	CURVAS CÔNICAS	14
2.1	A Parábola	14
2.2	Elementos	15
2.3	Equação da Parábola de Vértice na Origem do Sistema	15
2.4	Translação de Eixos	17
2.5	Equação da Parábola de Vértice Fora da Origem do Sistema	18
2.6	Excentricidade da Parábola	19
2.7	Equação da Parábola na Forma Explícita	20
2.8	A Elipse	21
2.9	Elementos	22
2.10	Equação da Elipse de Centro na Origem do Sistema	23
2.11	Equação da Elipse de Centro Fora da Origem do Sistema	24
2.12	Excentricidade da Elipse	25
2.13	Equação da Elipse na Forma Explícita	26
2.14	A Hipérbole	28
2.15	Elementos	29
2.16	Excentricidade da Hipérbole	31
2.17	Equação da Hipérbole de Centro na Origem do Sistema	32
2.18	Equação da Hipérbole de Centro Fora da Origem do Sistema	33
2.19	Equação da Hipérbole na Forma Explícita	35
3	APLICAÇÕES DAS CURVAS CÔNICAS	37
3.1	Parábola	37
3.2	Elipse	38
3.3	Hipérbole	38
4	RESULTADOS OBTIDOS	41
	REFERÊNCIAS	42

Lista de ilustrações

Figura 1 – Intersecções do plano com um cone circular duplo.	10
Figura 2 – Pontos equidistantes	14
Figura 3 – Parábola	14
Figura 4 – Parábola eixo dos y	15
Figura 5 – Parábola com concavidade para cima.	16
Figura 6 – Parábola com concavidade para baixo.	16
Figura 7 – Parábola de foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	16
Figura 8 – Parábola com concavidade para direita.	17
Figura 9 – Parábola com concavidade para esquerda.	17
Figura 10 – Plano cartesiano xOy	17
Figura 11 – Translação de eixos.	18
Figura 12 – Parábola fora da origem	19
Figura 13 – Parábola sistema $x'O'y'$	19
Figura 14 – Excentricidade da Parábola.	20
Figura 15 – Gráfico da Equação(2.1)	20
Figura 16 – Gráfico da Eq. (2.2).	21
Figura 17 – Elipse.	21
Figura 18 – Construção da Elipse no papel.	21
Figura 19 – Elementos da Elipse.	22
Figura 20 – Triângulo retângulo.	23
Figura 21 – Elipse com um ponto qualquer.	23
Figura 22 – Parábola com o eixo maior sobre y	24
Figura 23 – Elipse fora da origem eixo maior x	25
Figura 24 – Elipse fora da origem eixo maior y	26
Figura 25 – Excentricidade da Elipse.	26
Figura 26 – Gráfico da Equação implícita da elipse, para $a = 4$ e $b = 16$	27
Figura 27 – Gráfico da Equação explícita da elipse, para $a = 4$ e $b = 16$	28
Figura 28 – Hipérbole.	28
Figura 29 – Hipérbole com o ponto médio C	29
Figura 30 – Elementos da Parábola.	30
Figura 31 – Circunferência de raio c	30
Figura 32 – Excentricidade da Hipérbole.	31
Figura 33 – Hipérbole com ramos "mais" abertos.	32
Figura 34 – Hipérbole equilátera.	32
Figura 35 – Hipérbole de centro na origem sobre o eixo x	33
Figura 36 – Gráfico da Eq. (2.6).	33

Figura 37 – Hipérbole de centro na origem sobre o eixo y	34
Figura 38 – Hipérbole de centro fora da origem sobre o eixo x	34
Figura 39 – Hipérbole de centro fora da origem com eixo imaginário paralelo ao eixo y	35
Figura 40 – Gráfico da Eq. (2.7) na forma explícita com duas sentenças para $a > b$	36
Figura 41 – Antena parabólica. Fonte: (SOMMERFELD, 2013).	37
Figura 42 – Trajetória de um projétil. Fonte: (MARQUES, 2020).	38
Figura 43 – Ponte JK, que liga o Lago Sul à área central de Brasília - DF. Foto: Renato Alves/Agência Brasília.	38
Figura 44 – Sistema solar. Fonte:(SOMMERFELD, 2013).	39
Figura 45 – Planetário James S. McDonnell no Centro de Ciências de Saint Louis. Site: FDDDB.org – Fulldome Database	39
Figura 46 – Telescópios Refletores. Fonte:(FILHO, 2015).	40

Introdução

A história das cônicas surgiu na Grécia com o propósito de solucionar um problema de duplicação de cubo, o intuito era determinar a aresta de um cubo de tal forma que este tivesse o dobro do volume de um outro cubo (NIETTO ; MARTINS, 2021).

As cônicas são objetos de estudo desde a Grécia antiga no século IV a.C. a partir dos trabalhos de Arquimedes, Menaecmo, Aristeu e Euclides. Segundo Higyno (2004) as secções cônicas eram obtidas pela intersecção entre três tipos de cones com um plano paralelo a um de suas geratrizes, diferentemente de Apolônio que considerou as intersecções do plano com um cone circular duplo e reto, como mostra a Figura 1¹.

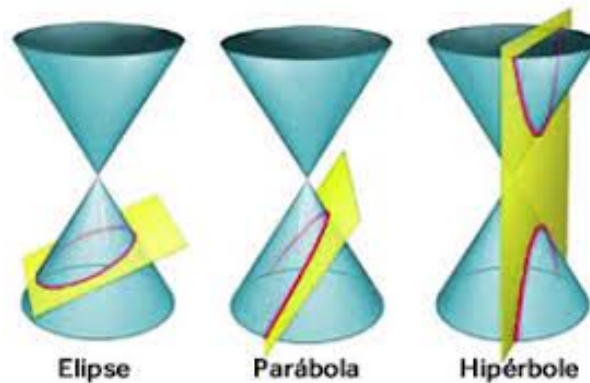


Figura 1 – Intersecções do plano com um cone circular duplo.

As curvas cônicas foram estudadas por diversos matemáticos, astrônomos e físicos assim como Apolônio de Perga (262 a.C. - 190 a.C.) em seu livro Cônicas, Euclides (325 a.C. - 265 a.C.) na obra Elementos, e Menécmo (380 a.C. - 320 a.C.) (HIGYNO, 2004).

Euclides escreveu vários livros sobre Geometria, um deles foi "os elementos", que possui treze volumes, sendo que, esses escritos estavam junto com diversos papiros gregos, o que faz os historiados especularem se realmente os manuscritos são todos de Euclides. Ao todo pode dizer que foram encontradas oito obras escritas pelo geômetra (BICUDO, 2009), (BICUDO, 2009 apud ROQUE, 2012).

Segundo Berlinski (2018), o matemático Apolônio de Perga nomeou por “Parábola”, “Elipse” e “Hipérbole” para designar as seções descritas. E afirma que:

Antes de Apolônio os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da seção meridiana fosse menor que,

¹ Disponível em: <<https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas.php>>. Acesso em 30 de junho de 2023.

igual a ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole. Só se considerava um ramo da hipérbole. Apolônio, porém, no Livro I de seu tratado, obtinha todas as secções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo (BERLINSKI, 2018).

E por fim vem Apolônio de Perga, acredita-se que esse matemático tenha estudado em Alexandria. É considerado como rival de Arquimedes. Ficou conhecido como o grande geômetra devido escrever sobre secção de cônicas, foi o que mais se aprofundou na matéria de geometria, uma vez que seus estudos são os mais completos e as nomenclaturas que foram utilizadas por ele são utilizadas até os dias hoje. Apolônio criou os termos elipse, parábola e hipérbole. A maioria das obras de Apolônio também se perderam (ALMEIDA, 2019).

Com o falecimento de Apolônio chegou ao fim a época de ouro da Geometria, dado que depois dos três celebres geômetras, não teve descobertas tão extraordinárias. Outros geômetras que foram posteriores que merecem menção são Heron de Alexandria, Menelau, Cláudio Ptolomeu e Papus (ALMEIDA, 2019).

Atualmente o estudo das cônicas é apresentado na forma de equações, são utilizadas para descrever matematicamente as características das cônicas e relacioná-las aos sistemas de coordenadas. Cada tipo de cônica (circunferência², elipse, parábola e hipérbole) possui uma equação característica que a define, e esta pesquisa enfatiza sobre as cônicas (elipse, parábola e hipérbole), uma vez que essas equações podem ser expressas em duas formas (explícita e implícita), dependendo da conveniência e do contexto do problema.

O objetivo desta pesquisa é apresentar as equações das cônicas com a perspectiva da forma implícita. Mostrar que as equações que descrevem as curvas cônicas, podem ser escritas nas formas implícita e na forma explícita.

Este trabalho de conclusão de curso (TCC) está estruturado da seguinte forma: Capítulo 1 dispõe de uma breve revisão da notação de funções e da teoria do Cálculo. No Capítulo 2 contém as definições das curvas cônicas e suas propriedades. No Capítulo 3 apresentação de algumas aplicações das curvas. E finalmente, no Capítulo 4 descrição dos resultados obtidos.

² Neste trabalho não abordamos a curva circunferência.

1 Fundamentação Teórica

Esta seção tem como objetivo apresentar conceitos fundamentais do cálculo, tais como funções explícitas e implícitas, que serão abordados em detalhes nos conceitos das cônicas (Elipse, Parábola e Hipérbole), que são definições essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Serão discutidas as equações dessas curvas dadas na forma implícita, que podem as vezes, serem escrita na forma explícita.

1.1 Fundamentação Teórica do Cálculo

Definição 1.1 (Função na Forma Explícita) Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função denotada por

$$f : A \rightarrow B, \quad (1.1)$$

é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B . O conjunto A é chamado *domínio* de f e é denotado por $D(f)$, e o conjunto B é chamado de *contradomínio* de f . Dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de valor da função f no ponto x ; e o conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado *conjunto imagem* de f e denotado por $Im(f)$, ou seja, (MUNEM; FOULIS, 1978; FLEMMING; ALVES, 2006),

$$\begin{aligned} f : \quad & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow f(x). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Exemplo 1.1 Seja

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightarrow x^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Então, $D(f) = \mathbb{R}$, e $Im(f) = [0, +\infty)$.

Observação 1.1 Usualmente x é a variável independente e y é a variável dependente. Uma equação que fornece y em termo de x , $y(x)$, determina uma função $y = f(x)$, e dizemos que f é definida por uma equação (MUNEM; FOULIS, 1978), como descrita a seguir.

Definição 1.2 (Função na Forma Implícita) Consideremos a equação

$$F(x, y) = 0. \quad (1.4)$$

Dizemos que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela Eq. (1.4) se, ao substituirmos y por $f(x)$ na Eq. (1.4), esta equação se transforma numa identidade (FLEMMING; ALVES, 2006).

Exemplo 1.2 Uma equação

$$x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \quad (1.5)$$

define implicitamente a função $y = 2(1 - x^2)$ (FLEMMING; ALVES, 2006). De fato, substituindo $y = 2(1 - x^2)$ na Eq. (1.5), obtemos a identidade.

Observação 1.2 Nem sempre é possível encontrar a forma explícita de uma função definida implicitamente. De fato, a função $y^4 + 3xy + 2\ln|y| = 0$ (FLEMMING; ALVES, 2006).

2 Curvas Cônicas

As seções cônicas são definidas por meio de equações que descrevem suas formas geométricas. Existem quatro tipos principais de seções cônicas: a circunferência, a elipse, a parábola e a hipérbole. Nesse trabalho, será realizado um estudo sobre as seções cônicas, com foco específico nas formas geométricas da elipse, parábola e hipérbole. A ordem dos conceitos estudados nesse capítulo é baseado na referência [Steinbruch e Winterle \(1987\)](#).

2.1 A Parábola

Definição 2.1 (Parábola) Consideremos em um plano uma reta d e um ponto F não pertencente a d . Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de F e d .

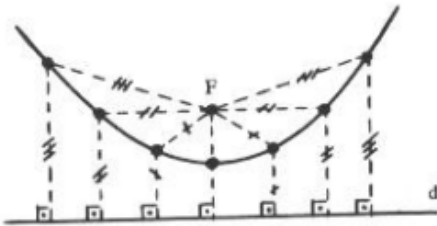


Figura 2 – Pontos equidistantes

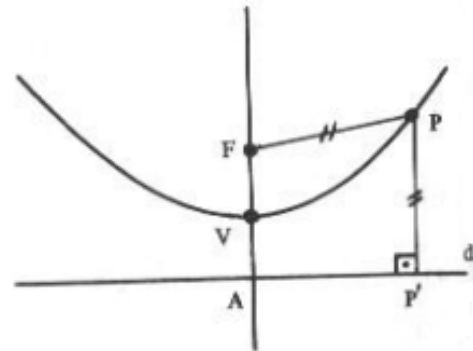


Figura 3 – Parábola

Na (Figura 2) estão assinalados sete pontos que são esquidistantes do ponto F e da reta d . Sendo P' o pé da perpendicular baixada de um ponto P do plano sobre a reta d (Figura 3), de acordo com a definição acima, P pertence à parábola se, e somente se: $d(P, F) = d(P, P')$, ou também,

$$|\vec{PF}| = |\vec{PP'}|.$$

Observação 2.1 Consideramos o fato de $F \notin d$, pois, caso contrário, a parábola se degeneraria numa reta.

2.2 Elementos

Considerando $d(V, F) = d(V, A)$ na Figura 3, temos:

- Foco: é o ponto F .
- Diretriz: é a reta d .
- Eixo: é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz.
- Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

Com a finalidade de obtermos uma equação da parábola na forma implícita, teremos que referi-la ao sistema de eixos cartesianos. Iniciemos pelo caso mais simples.

2.3 Equação da Parábola de Vértice na Origem do Sistema

1º Caso: O eixo da parábola é o eixo dos y :

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola (Figura 4) de foco $F\left(0, \frac{P}{2}\right)$. Da definição de parábola, tem-se: $|\vec{PF}| = |\vec{PP}'|$ ou $|\vec{FP}| = |\vec{P'P}|$.

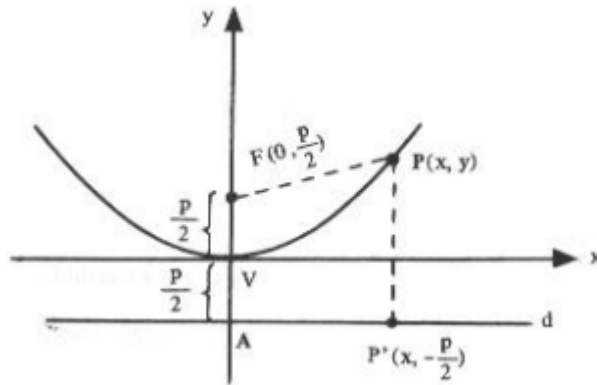


Figura 4 – Parábola eixo dos y

Como $P'\left(x, -\frac{P}{2}\right)$, então

$$\left| \left(x - 0, y - \frac{P}{2} \right) \right| = \left| \left(x - x, y + \frac{P}{2} \right) \right|$$

ou

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{P}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{P}{2}\right)^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{P}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(y + \frac{P}{2}\right)^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

ou, simplesmente

$$x^2 = 2py \quad (2.1)$$

chamada de equação reduzida da parábola e constitui a forma padrão da equação da parábola de vértice centrado na origem e concavidades (para cima ou para baixo) em y .

Da análise da Eq. (2.1) conclui-se que, tendo em vista ser $2py$ sempre positivo ou nulo (pois é igual a $x^2 \geq 0$), os sinais de p e de y são sempre iguais. Consequentemente, se $p > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e, se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo, conforme as Figuras 5 e 6.

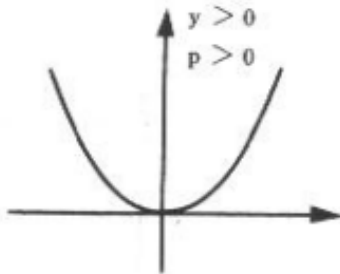


Figura 5 – Parábola com concavidade para cima.

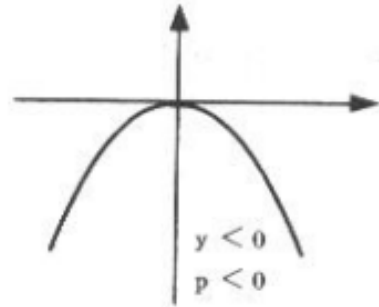


Figura 6 – Parábola com concavidade para baixo.

O número real $p \neq 0$ é conhecido como parâmetro da parábola.

2º Caso: O eixo da parábola é o eixo dos x :

Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola (Figura 7) de foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, de forma análoga ao 1º caso, obtemos a equação reduzida:

$$y^2 = 2px.$$

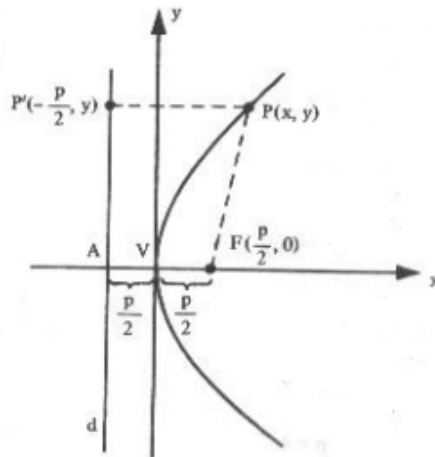


Figura 7 – Parábola de foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Conforme o sinal de p , teremos: se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para a direita (Figura 8) e, se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda (Figura 9).

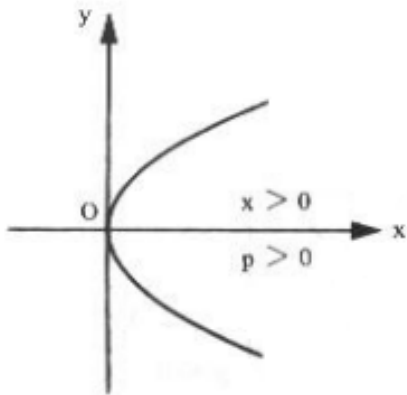


Figura 8 – Parábola com concavidade para direita.

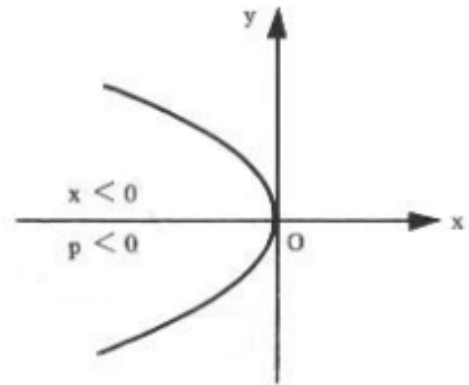


Figura 9 – Parábola com concavidade para esquerda.

2.4 Translação de Eixos

Consideremos no plano cartesiano xOy um ponto $O'(h, k)$, arbitrário. Vamos introduzir um novo sistema $x'O'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy . Nestas condições, um sistema pode ser obtido do outro, através de uma translação de eixos (Figura 10).

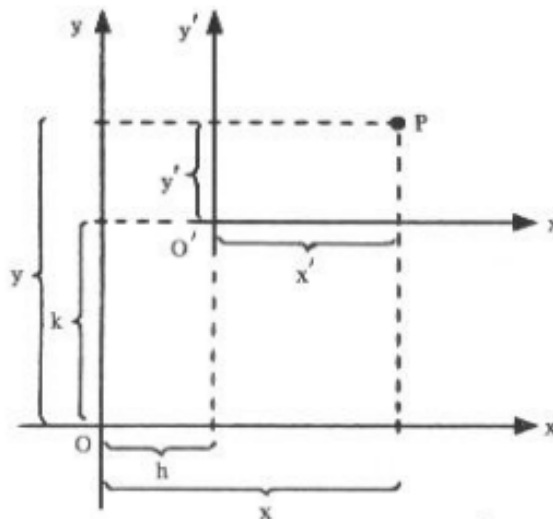


Figura 10 – Plano cartesiano xOy .

Seja um ponto P qualquer do plano tal que suas coordenadas são: x e y em relação ao sistema xOy , x' e y' em relação ao sistema $x'O'y'$. Pela Figura 10, obtém-se:

$$x = x' + h \text{ e } y = y' + k$$

ou

$$x' = x - h \text{ e } y' = y - k,$$

que são as fórmulas de translação e que permitem transformar coordenadas de um sistema para outro.

A principal finalidade da transformação de coordenadas é modificar a forma de equações. Por exemplo, seja parábola de equação $x'^2 = 4y$ referida ao sistema $x'O'y'$. Se tivermos $h = 3$ e $k = 2$, isto é, $O'(3, 2)$, e sabendo que: $x' = x - h$ e $y' = y - k$, isto é, $x' = x - 3$ e $y' = y - 2$, a equação desta parábola em relação ao sistema xOy é: $(x - 3)^2 = 4(y - 2)$, ou $x^2 - 6x + 9 = 4y - 8$ ou $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$. Reciprocamente, a equação $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$ no sistema xOy tem equação $x'^2 = 4y'$ no sistema $x'O'y'$. De fato, $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$, fazendo $x = x' + 3$ e $y = y' + 2$, obtemos

$$(x' + 3)^2 - 6(x' + 3) - 4(y' + 2) + 17 = 0$$

$$x'^2 + 6x' + 9 - 6x' - 18 - 4y' - 8 + 17 = 0$$

$$x'^2 - 4y' = 0$$

$$x'^2 = 4y'.$$

Como se observa neste caso, mediante uma adequada translação de eixos, a equação em x e y transforma-se numa equação em x' e y' bem mais simples, e ambas com o mesmo gráfico conforme (Figura 11).

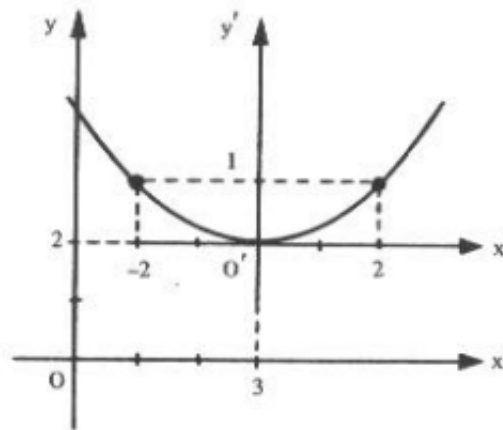


Figura 11 – Translação de eixos.

2.5 Equação da Parábola de Vértice Fora da Origem do Sistema

1º caso: O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y :

Seja uma parábola de vértice $V(h, k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y , sendo h e k coordenadas de V em relação ao sistema xOy .

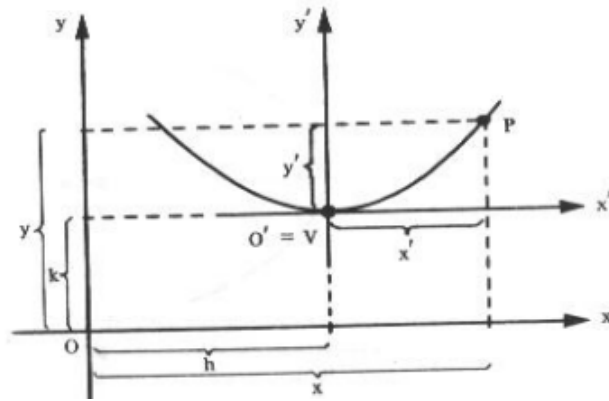


Figura 12 – Parábola fora da origem

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer desta parábola. Consideremos um novo sistema $x'O'y'$ com a origem O' em V nas condições do que foi visto em 2.4 (Figura 12).

Sabe-se que a equação da parábola referida ao sistema $x'O'y'$ é $x'^2 = 2py'$, mas $x' = x - h$ e $y' = y - k$, e daí: $(x - h)^2 = 2p(y - k)$, que é a forma padrão da equação de uma parábola de vértice $V(h, k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y .

2º O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x :

De modo análogo ao caso anterior, teremos: $(y - k)^2 = 2p(x - h)$. Observemos que se $(h, k) = (0, 0)$, voltamos a ter o caso particular de (2.1).

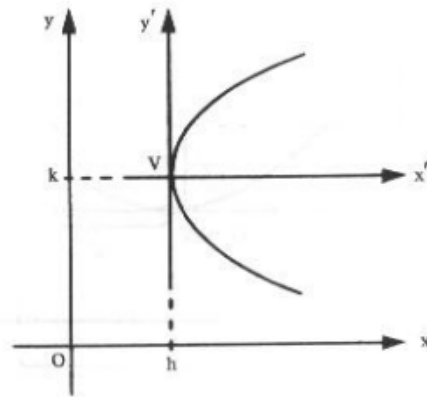


Figura 13 – Parábola sistema $x'O'y'$.

2.6 Excentricidade da Parábola

Por definição $e = \frac{c}{a}$. Na Parábola c é a distância entre a reta diretriz e um ponto $P = (x, y)$ pertencente a curva e ' a ' é a distância deste mesmo ponto P até o foco da Parábola como mostra a Figura 14.

Pela definição de parábola temos $c = a$. Portanto, a excentricidade da parábola é $e = 1$.

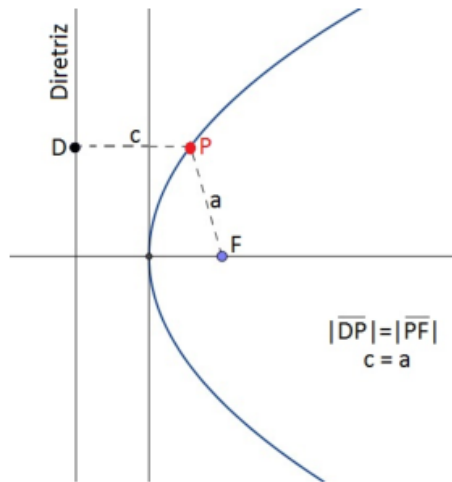


Figura 14 – Excentricidade da Parábola.

2.7 Equação da Parábola na Forma Explícita

Observa-se que a equação reduzida da parábola de vértice na origem e no eixo y , acima está na forma implícita, mostraremos a representação geométrica da Eq. (2.1) a seguir.

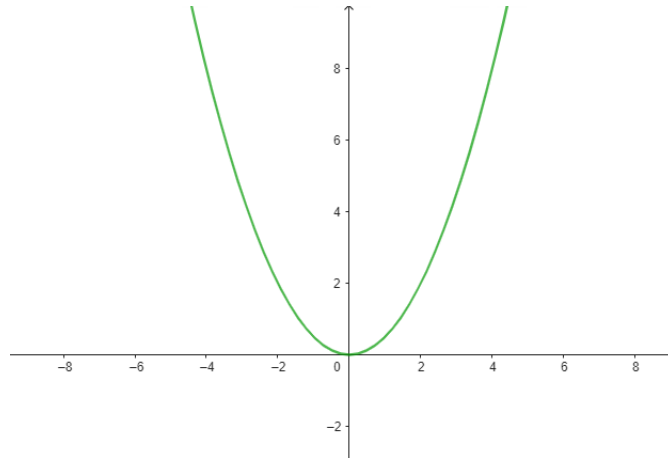


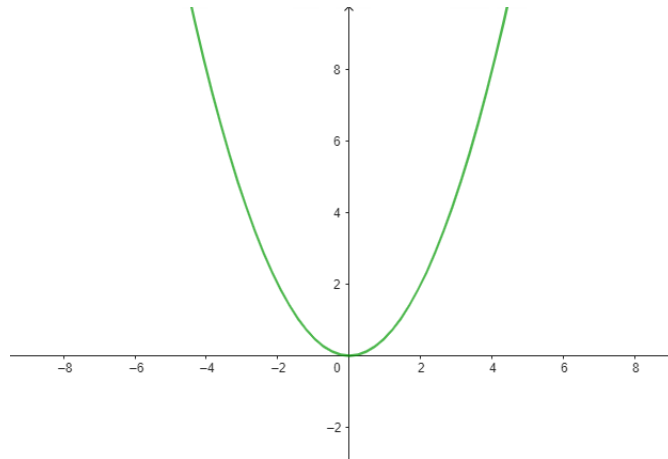
Figura 15 – Gráfico da Equação(2.1)

Pela definição 1.1 a equação pode ser escrita na forma explícita. De fato, na forma explícita, a equação é escrita como $y = f(x)$. Para a equação $x^2 = 2py$, podemos isolar y para obter a forma explícita, dividido ambos os lados por $(2p)$, temos:

$$\frac{x^2}{2p} = \frac{2py}{2p}$$

$$y = \frac{x^2}{2p}. \quad (2.2)$$

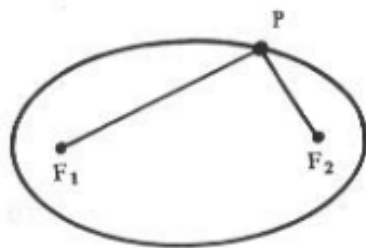
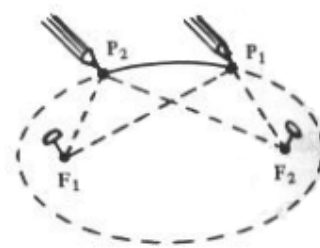
A Figura 16, mostra o gráfico da Eq. (2.2).

**Figura 16** – Gráfico da Eq. (2.2).

Conforme mostrado acima o gráfico da equação implícita $x^2 = 2py$ é igual ao gráfico da equação explícita $y = \frac{x^2}{2p}$. Apesar das diferentes formas matemáticas, a equação implícita e a equação explícita descrevem a mesma curva parabólica. Os pontos no gráfico correspondem uns aos outros e possuem a mesma forma, simetria e propriedades. Assim, o gráfico resultante das duas formas é idêntico e representa a mesma parábola.

2.8 A Elipse

Definição 2.2 A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante. Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2 , tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a > 2c$. Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ ou $|P\vec{F}_1| + |P\vec{F}_2| = 2a$ dá-se o nome de elipse (Figura 17).

**Figura 17** – Elipse.**Figura 18** – Construção da Elipse no papel.

A Figura 18 sugere como se pode construir uma elipse no papel. Nos pontos F_1 e F_2 fixamos dois percevejos e neles amarramos um fio não esticado. Tomemos um lápis e distendamos com sua ponta o fio, marcando o ponto P_1 . Então, a soma das distâncias $d(P_1, F_1)$ e $d(P_1, F_2)$ é o comprimento do fio. Se o lápis deslizar sobre o papel, mantendo o fio sempre esticado, ficará traçada uma elipse de focos F_1 e F_2 . A figura mostra outra posição P_2 da

ponta do lápis e, também para este ponto, a soma das distâncias $d(P_2, F_1)$ e $d(P_2, F_2)$ é o comprimento do fio. Assim, para as infinitas posições da ponta do lápis, a soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante. A constante $2a$ anteriormente referida é o comprimento do fio. Se mantivermos constante o comprimento do fio e variarmos as posições de F_1 e F_2 , a forma da elipse irá variar. Assim quanto mais próximos os focos estão entre si, tanto mais a forma da elipse se assemelha à da circunferência, e quando $F_1 = F_2$ obtém-se uma circunferência. Por outro lado, quanto mais afastados os focos estiverem entre si, mais "achatada" será a elipse.

2.9 Elementos

- Focos: são os pontos F_1 e F_2 .
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.
- Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2 .
- Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ (o segmento A_1A_2 contém os focos e os seus extremos pertencem à elipse).
- Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio).
- Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 .
- Excentricidade: é o número dado por $e = \frac{c}{a}$.

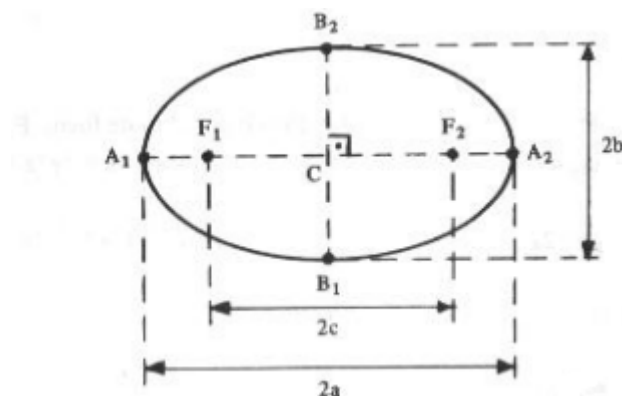


Figura 19 – Elementos da Elipse.

Tendo em vista que $c < a$, tem-se: $0 < e < 1$.

Observação 2.2 Em toda elipse vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Essa igualdade é a relação de Pitágoras no triângulo B_2CF_2 .

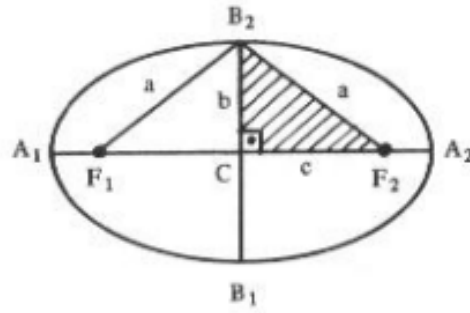


Figura 20 – Triângulo retângulo.

2.10 Equação da Elipse de Centro na Origem do Sistema

1º caso: o eixo maior está sobre o eixo dos x: Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer de uma elipse (Figura 21) de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Pela definição 2.2, tem-se $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ ou $|\vec{F_1P}| + |\vec{F_2P}| = 2a$. Ou em coordenadas,

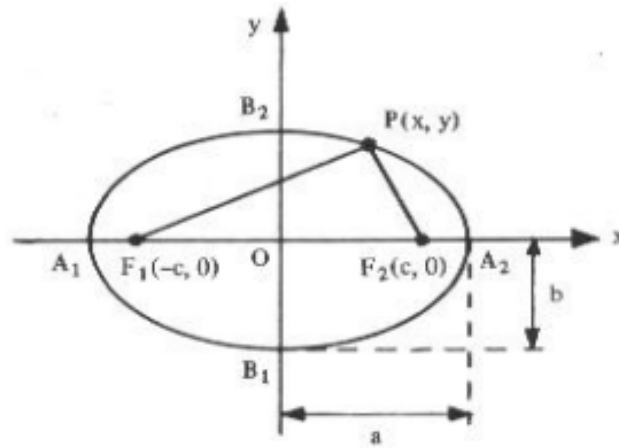


Figura 21 – Elipse com um ponto qualquer.

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + 2cx + c^2)^2} = (2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2})^2$$

$$x^2 + y^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} + x^2 + y^2 - 2cx + c^2$$

$$4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = a^2 - cx$$

$$a^2(x^2 + y^2 - 2cx + c^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Mas como $a^2 - c^2 = b^2$; logo, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2 , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.3)$$

que é a equação reduzida da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos x .

2º caso: O eixo maior está sobre o eixo dos y :

Com procedimento análogo ao 1º caso, obteremos a equação reduzida

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

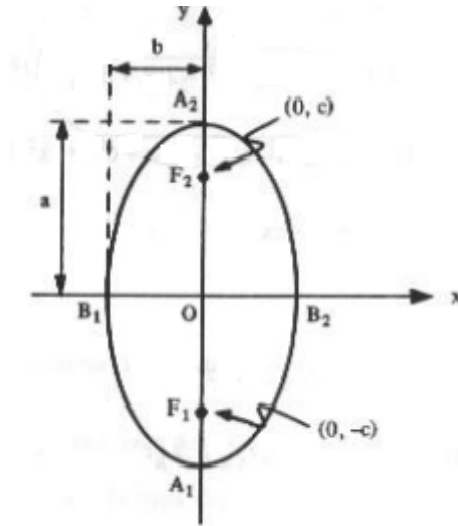


Figura 22 – Elipse com o eixo maior sobre y .

Observação 2.3 Tendo em vista que $a^2 = b^2 + c^2$, segue-se que $a^2 > b^2$ e daí: $a > b$. Então, sempre o maior dos denominadores na equação reduzida representa o número a^2 , onde a é medida do semi-eixo maior. Ainda mais, se na equação da elipse o número a^2 é denominador de x^2 , a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo dos x .

2.11 Equação da Elipse de Centro Fora da Origem do Sistema

1º caso: O eixo maior é paralelo ao eixo dos x :

Consideremos uma elipse de centro $C(h, k)$ e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mesma (Figura 23).

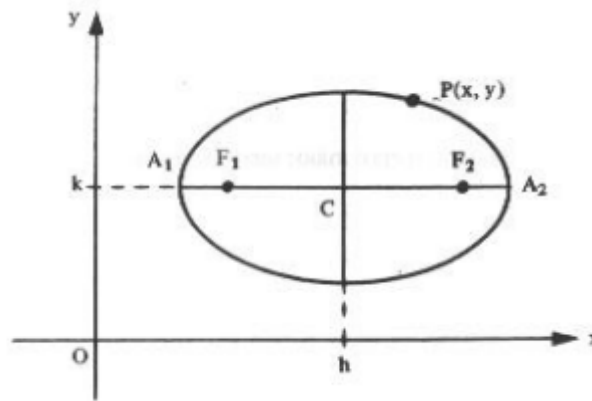


Figura 23 – Elipse fora da origem eixo maior x .

Em (2.5) estudamos o caso da equação da parábola com vértice em (h, k) quando ocorre uma translação de eixos. O caso presente da elipse é perfeitamente análogo àquele. Assim,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

é a equação de uma elipse de centro $C(0, 0)$ e eixo maior sobre o eixo dos x ; quando o eixo maior for paralelo ao eixo dos x e o centro for $C(h, k)$, a equação passa a ser

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

Este mesmo detalhe irá se repetir também no estudo da hipérbole a ser feito logo a seguir.

2º caso: O eixo maior é paralelo ao eixo dos y :

De forma análoga, temos

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1.$$

2.12 Excentricidade da Elipse

A excentricidade e mede a abertura das cônicas, ou seja, quanto mais arredondada ou achatada é a figura da cônica.

Por definição $e = \frac{c}{a}$. Na elipse temos que c é o comprimento de um dos focos, por exemplo F_1 , até a origem do plano cartesiano O e ' a ' é o comprimento deste mesmo foco F_1 até o ponto B_1 , como mostra a Figura 25.

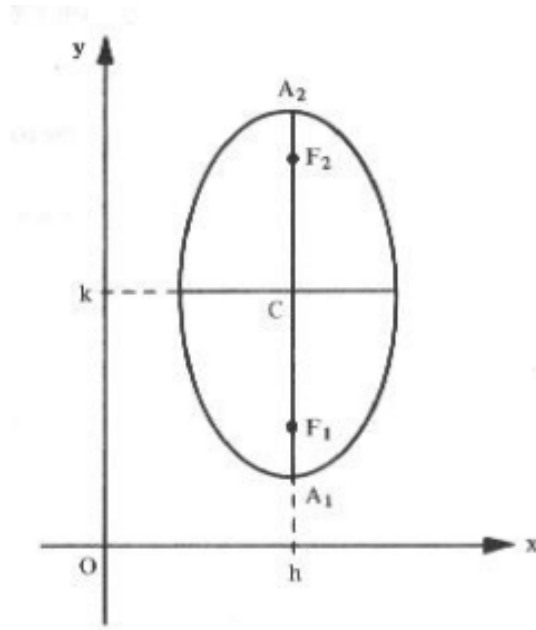


Figura 24 – Elipse fora da origem eixo maior y .

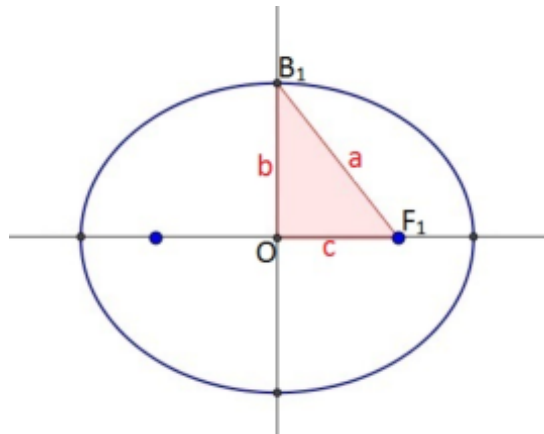


Figura 25 – Excentricidade da Elipse.

Observação 2.4 Da Figura 25 temos que $c = |F_1O|$, $a = |F_1B_1|$ e que a é a hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle OF_1B_1$. Logo, pelas propriedades do triângulo a hipotenusa é sempre maior que os catetos ou seja $a > c$, sendo $a > 0$ e $c > 0$. Portanto, $0 < e = \frac{c}{a} < 1$. Se atribuirmos valores iguais para a e b , ou seja, $a = b$, obtemos o círculo. Neste caso, temos $c = 0$ e portanto, a excentricidade da circunferência é $e = 0$.

2.13 Equação da Elipse na Forma Explícita

Observa-se que a equação reduzida da elipse com eixo menor sobre o eixo x é dada pela Eq. (2.3), sendo $a = 4$ e $b = 16$, na forma implícita. A seguir, vamos analisar o gráfico dessa equação.

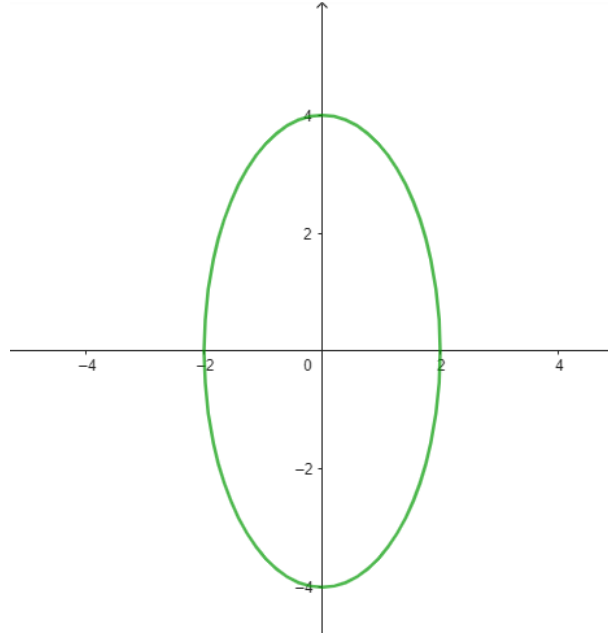


Figura 26 – Gráfico da Equação implícita da elipse, para $a = 4$ e $b = 16$.

Pela definição 1.1 a equação pode ser escrita na forma explícita, de fato. Na forma explícita, a equação é escrita como $y = f(x)$. Para a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, podemos isolar y para obter a forma explícita:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 &= 0 \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ y^2 &= b^2 \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right] \\ y &= \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

A Figura 27 mostra o gráfico da Eq. (2.4) para $a = 4$ e $b = 16$, onde temos duas sentenças:

$$y = \begin{cases} +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \\ -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \end{cases}.$$

Ambas as formas resultam no mesmo gráfico, pois todas as coordenadas (x, y) que satisfazem a equação geral também satisfazem a equação explícita, e vice-versa. Portanto, os gráficos gerados pelas duas formas são idênticos.

Observação 2.5 Nas Eq. (2.3) e Eq. (2.4), se $a > b$, o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo coordenado x . Caso $b > a$, o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo coordenado y .

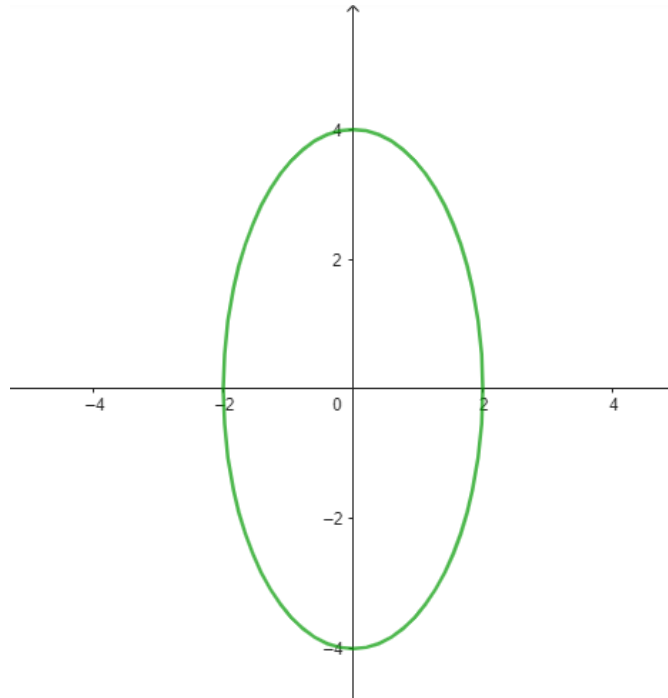


Figura 27 – Gráfico da Equação explícita da elipse, para $a = 4$ e $b = 16$.

2.14 A Hipérbole

Definição 2.3 A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante. Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a < 2c$. Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \quad (2.5)$$

ou $||P\vec{F}_1| - |P\vec{F}_2|| = 2a$, que dá-se o nome de hipérbole (Figura 28).

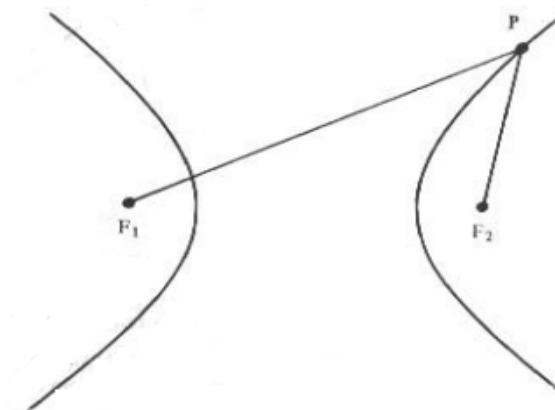


Figura 28 – Hipérbole.

Como se vê, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Na verdade, pela Eq. (2.5) um ponto P está na hipérbole se, e somente se $d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$. Quando P estiver no ramo da direita, a diferença é $+2a$ e, em caso contrário, será $-2a$.

Consideremos a reta que passa por F_1 e F_2 e sejam A_1 e A_2 os pontos de interseção da hipérbole com esta reta. Consideremos outra reta perpendicular a esta passando pelo ponto médio C do segmento F_1F_2 (Figura 29).

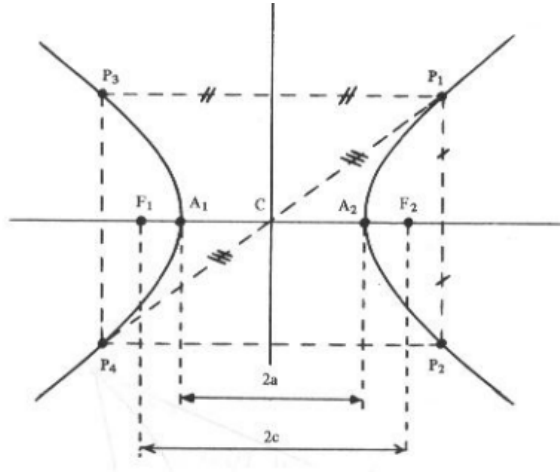


Figura 29 – Hipérbole com o ponto médio C .

A hipérbole é uma curva simétrica em relação a estas duas retas, como também em relação ao ponto C . Se P_1 é um ponto da hipérbole, existem os pontos P_2 , P_3 e P_4 tais que: P_2 é o simétrico de P_1 em relação à reta horizontal, P_3 é o simétrico de P_1 em relação à reta vertical, P_4 é o simétrico de P_1 em relação ao ponto C . Ainda, pela simetria, conclui-se que $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$ e da própria definição, vem $d(A_1, A_2) = 2a$.

2.15 Elementos

- Focos: são os pontos F_1 e F_2 .
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos
- Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2 .
- Vértices: são os pontos A_1 e A_2 .
- Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.
- Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ (Figura 30).

O valor de b é definido através da relação:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

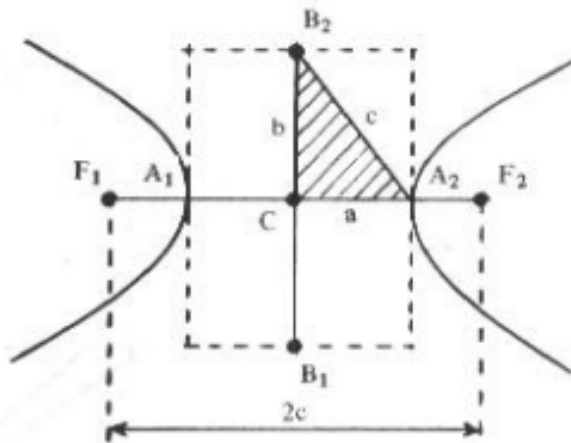
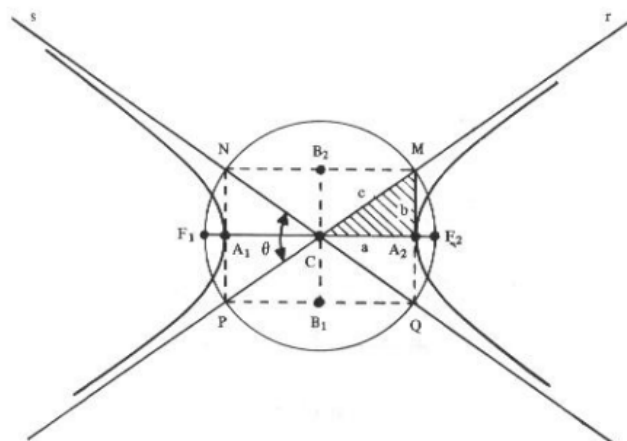


Figura 30 – Elementos da Parábola.

onde a , b e c são as medidas dos lados do triângulo retângulo B_2CA_2 .

Vamos fazer ainda uma outra consideração em torno de a , b e c . Consideremos uma circunferência de raio c e cuja centro é o próprio centro C da hipérbole. Tomemos um valor arbitrário para a e marquemos os pontos A_1 e A_2 , vértices da hipérbole. Por estes pontos tracemos cordas perpendiculares ao diâmetro F_1F_2 . As quatro extremidades destas cordas são os vértices de um retângulo $MNPQ$ inscrito nesta circunferência (Figura 31).

O retângulo assim construído tem dimensões $2a$ e $2b$ e a relação $c^2 = a^2 + b^2$ está novamente presente no triângulo retângulo hachurado na figura, com o eixo imaginário B_1B_2 bem caracterizado. As retas r e s , que contém as diagonais do referido retângulo, chamam-se assíntotas da hipérbole.

Figura 31 – Circunferência de raio c .

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos. Esta aproximação é "contínua" e "lenta" de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito. Naturalmente esta

particularidade das assíntotas constitui um excelente guia para traçar o esboço do gráfico.

O ângulo θ assinalado na figura é chamado abertura da hipérbole. Chama-se excentricidade da hipérbole ao número 'e' dado por:

$$e = \frac{c}{a},$$

mas, $c > a \therefore e > 1$.

2.16 Excentricidade da Hipérbole

Por definição $e = \frac{c}{a}$. Na hipérbole temos que c é o comprimento de A_1 até B_1 e 'a' é o comprimento de A_1 até a origem O do plano cartesiano como mostra a Figura 32.

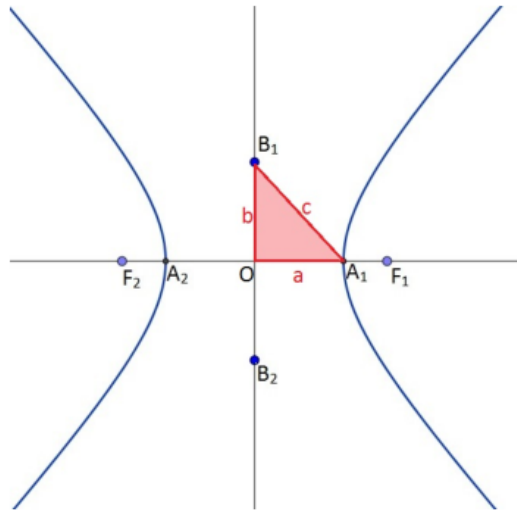


Figura 32 – Excentricidade da Hipérbole.

Observação 2.6 Da Figura 32 temos que $c = |A_1B_1|$, $a = |A_1O|$ e c é a hipotenusa do triângulo retângulo ΔOA_1B_1 . Logo, pelas propriedades do triângulo a hipotenusa é sempre maior que os catetos ou seja $c > a$, com $a > 0$ e $c > 0$. Portanto, $e = \frac{c}{a} > 1$.

A excentricidade da hipérbole está intimamente relacionada com sua abertura. De fato, voltemos outra vez à figura anterior onde a circunferência tem raio c . Mantendo o raio c da Figura 31 e tomando um valor para "a" menor de que o anterior, o novo retângulo $MNPQ$ será mais "estrito" e, em consequência, a abertura θ será maior.

Ora, diminuir o valor de "a" (mantendo c fixo) significa aumentar o valor de $e = \frac{c}{a}$. Assim, quanto maior a excentricidade, maior será a abertura, ou seja, mais "abertos" (Figura 33) estarão os ramos da hipérbole. Quando $a = b$, o retângulo $MNPQ$ se transforma num quadrado e as assíntotas serão perpendiculares ($\theta = 90^\circ$). A hipérbole, neste caso, é denominada "hipérbole equilátera" (Figura 34).

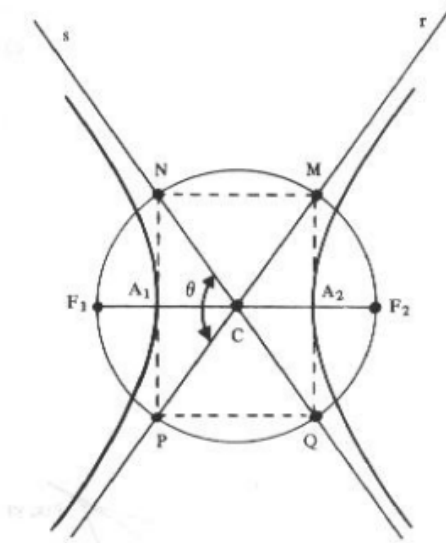


Figura 33 – Hipérbole com ramos "mais" abertos.

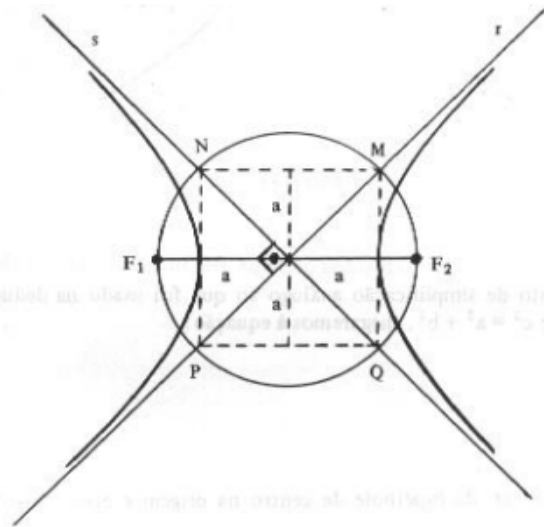


Figura 34 – Hipérbole equilátera.

2.17 Equação da Hipérbole de Centro na Origem do Sistema

1º caso: O eixo real está sobre o eixo dos x :

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole (Figura 35) de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Pela definição 2.3, tem-se:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

ou, em coordenadas $|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a$.

Com procedimento de simplificação análogo ao que foi usado na dedução da equação da elipse, e lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, chegaremos à equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.6)$$

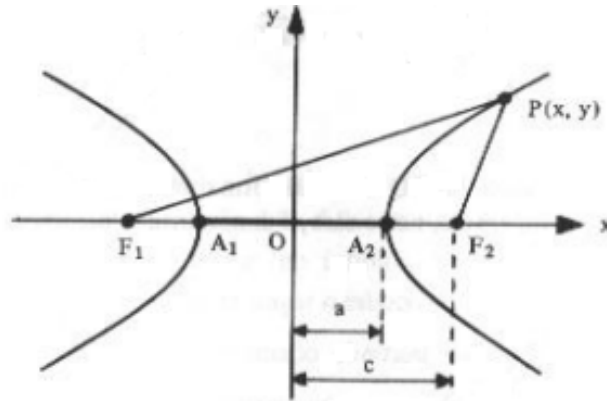


Figura 35 – Hipérbole de centro na origem sobre o eixo x .

que é a equação reduzida da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo dos x .

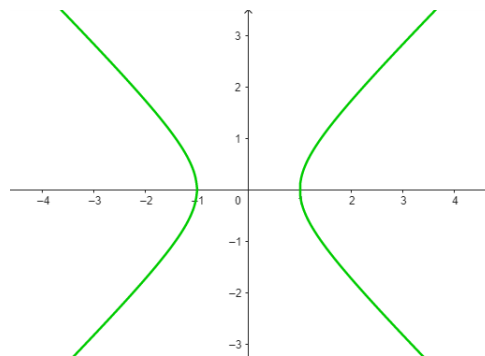


Figura 36 – Gráfico da Eq. (2.6).

2^o caso: O eixo real está sobre o eixo dos y :

Como já ocorreu com a parábola e a elipse, a equação desta hipérbole somente difere da anterior pela troca de posição das variáveis

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

.

2.18 Equação da Hipérbole de Centro Fora da Origem do Sistema

1^o caso: O eixo real é paralelo ao eixo dos x :

Consideremos uma hipérbole de centro $C(h, k)$ e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mesma. O que comentamos na Seção 2.11 para o caso da elipse também vale aqui. Assim,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

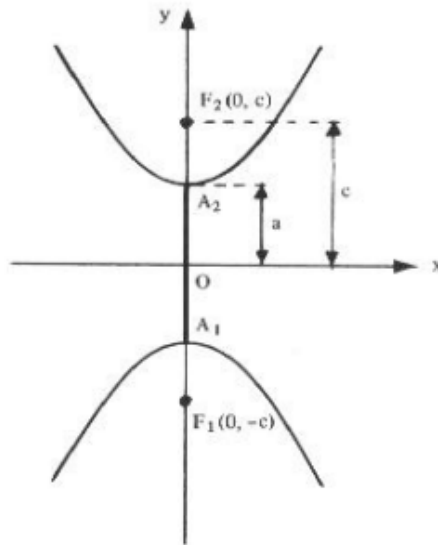


Figura 37 – Hipérbole de centro na origem sobre o eixo y

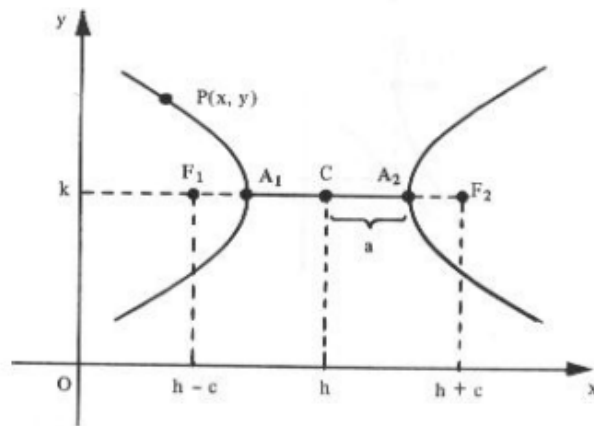


Figura 38 – Hipérbole de centro fora da origem sobre o eixo x

é a equação de uma hipérbole de centro $C(0,0)$ e eixo real sobre o eixo dos x ; quando o eixo real for paralelo ao eixo dos x e o centro é $C(h,k)$, sua equação passa a ser:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

2º caso: O eixo real é paralelo ao eixo dos y :

De forma análoga, temos:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

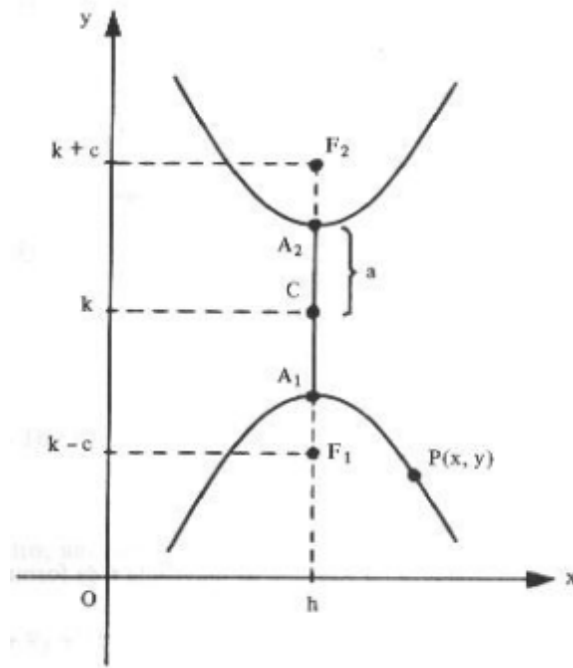


Figura 39 – Hipérbole de centro fora da origem com eixo imaginário paralelo ao eixo y .

2.19 Equação da Hipérbole na Forma Explícita

Observa-se que a equação reduzida da hipérbole de vértice na origem no eixo x . A Eq. (2.6) está na forma implícita.

Pela definição 1.1 a Eq. (2.6) pode ser escrita na forma explícita, de fato. Na forma explícita, a equação é escrita como $y = f(x)$.

Para a equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ podemos isolar y para obter a forma explícita. Vejamos:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 &= 0 \\ \frac{y^2}{b^2} &= -1 + \frac{x^2}{a^2} \\ y^2 &= b^2 \left[-1 + \frac{x^2}{a^2} \right] \\ y &= \pm b \sqrt{-1 + \frac{x^2}{a^2}}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

A Figura 40 mostra a representação geométrica da Eq. (2.7), que são duas sentenças:

$$y = \begin{cases} +b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \\ -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \end{cases}.$$

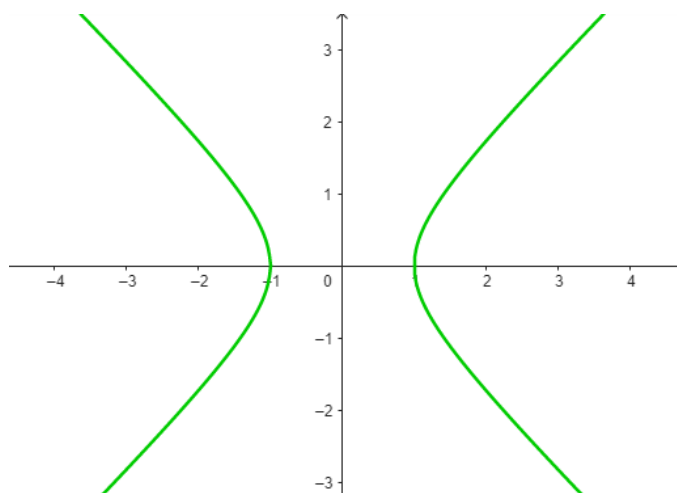


Figura 40 – Gráfico da Eq. (2.7) na forma explícita com duas sentenças para $a > b$.

Essa forma explícita expressa diretamente as coordenadas y em termos de x , usando os semi-eixos a e b . Ela descreve a hipérbole em relação aos eixos x e y . Embora as formas sejam diferentes, elas representam a mesma hipérbole. A equação geral descreve a relação entre x e y na forma mais geral da hipérbole, enquanto a equação explícita fornece uma expressão direta das coordenadas y em relação a x . Ambas as formas resultam no mesmo gráfico, pois todas as coordenadas (x, y) que satisfazem a equação geral também satisfazem a equação explícita, e vice-versa. Portanto, os gráficos gerados pelas duas formas são idênticos.

3 Aplicações das Curvas Cônicas

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações práticas das curvas cônicas.

3.1 Parábola

Problema 3.1 Podemos ver antenas parabólicas conforme (Figura 41) no topo de casas e edifícios que captam ondas eletromagnéticas de satélites em órbita ao redor da Terra. Isso só é possível devido às propriedades de uma parábola em refletir o conjunto de raios recebidos em um único ponto (o receptor de onda focal está localizado neste ponto e envia os sinais recebidos para um conversor que irá decodificá-los e enviá-los para o Receptor de TV. O radar funciona como uma antena parabólica, recebendo os ecos do pulso eletromagnético. Os refletores parabólicos de faróis e lanternas permitem que a luz da lâmpada localizada no foco se propague em raios paralelos ao eixo da parábola formando o fecho (SOMMERFELD, 2013).



Figura 41 – Antena parabólica. Fonte: (SOMMERFELD, 2013).

Problema 3.2 A trajetória de um projétil será uma parábola se o movimento for considerado num plano e a resistência do ar for desprezada (Figura 42) (LEITHOLD, 1994).

Problema 3.3 Os arcos são parabólicos e os cabos de suspensão de pontes podem ter a forma de uma parábola (Figura 43) (LEITHOLD, 1994).

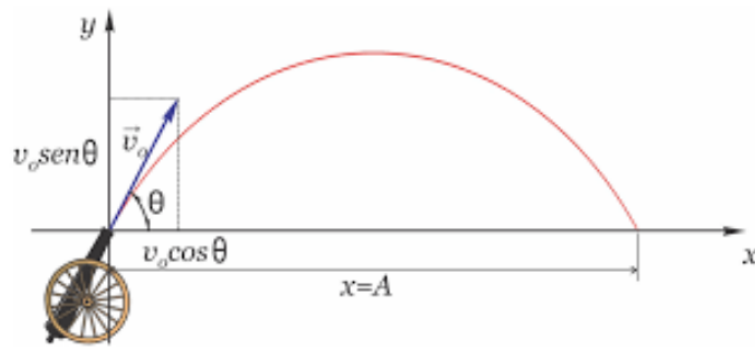


Figura 42 – Trajetória de um projétil. Fonte: (MARQUES, 2020).



Figura 43 – Ponte JK, que liga o Lago Sul à área central de Brasília - DF. Foto: Renato Alves/Agência Brasília.

3.2 Elipse

Problema 3.4 No sistema solar as órbitas dos planetas ao redor do sol são elípticas. Algumas órbitas são mais "planas" do que outras porque as órbitas são elipses diferentes (com diferentes excentricidades). Por exemplo, a órbita da Terra é quase circular, enquanto a órbita de Netuno é mais "achatada" (Figura 44). O eixo maior possui dois pontos: o periélio e o afélio, que correspondem às distâncias mínima e máxima da Terra ao Sol, respectivamente (SOMMERFELD, 2013).

3.3 Hipérbole

Problema 3.5 Na arquitetura podemos observar a hipérbole em algumas construções. Por exemplo, a forma do prédio do Planetário James S. Mc Donnell no Centro de Ciências

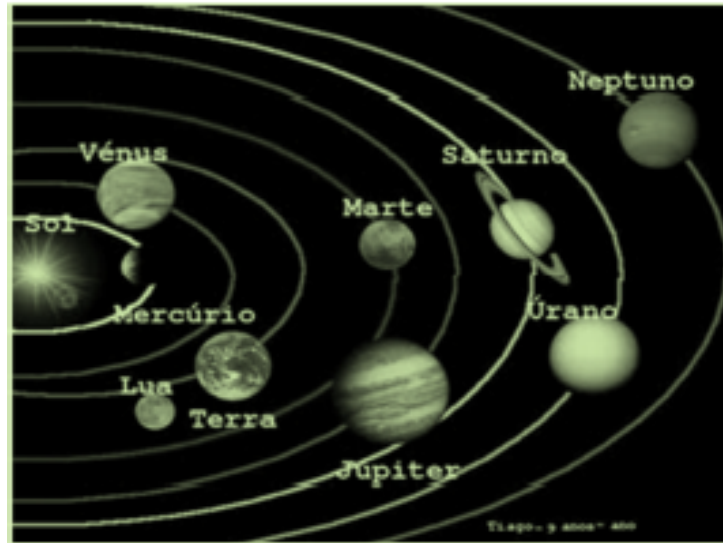


Figura 44 – Sistema solar. Fonte:(SOMMERFELD, 2013).

de Saint Louis (USA)¹, como mostra a Figura 45.



Figura 45 – Planetário James S. McDonnell no Centro de Ciências de Saint Louis. Site: Fddb.org – Fulldome Database .

Problema 3.6 O telescópio refletor consiste basicamente em dois espelhos, um maior chamado de espelho primário, que é parabólico, e um espelho menor, que é hiperbólico. Este espelho é um hiperbolóide, pois ao girar a hipérbole em torno de seu eixo focal obteve superfície, cuja forma de seção transversal é exagerado. Os espelhos são dispostos de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam, e o foco da primeira coincida com um dos focos da segunda. Quando os raios de luz refletem em um espelho parabólico, eles são direcionados para um ponto focal pelas propriedades reflexivas da parábola. Devido às suas propriedades reflexivas, este também é o foco da hipérbole, então os raios de luz são refletidos no espelho hiperbólico e seguem o outro foco da hipérbole. A luz passa por um orifício no centro do espelho primário, seguida por uma ocular que corrige ligeiramente o caminho da luz e, eventualmente, atinge o olho do observador ou o filme (Figura 46) (FILHO, 2015).

¹ Site: <https://www.fddb.org/news/job-opportunity-full-time-part-time-planetarium-educator-james-s-mcdonnell-planetarium-saint-louis-science-center/>



Figura 46 – Telescópios Refletores. Fonte:([FILHO, 2015](#)).

Problema 3.7 Hipérboles são usadas em "combates de ondas sonoras", para localizar a posição de armas inimigas, cronometrando o som dos disparos dessas armas. Alguns cometas movem-se em órbita hiperbólica. Se uma quantidade varia inversamente em relação a outra tal como a pressão e o volume na lei de Boyle para um gás perfeito ($PV = K$), o gráfico será uma hipérbole ([LEITHOLD, 1994](#)).

4 Resultados Obtidos

Este TCC analisou as equações que descrevem as curvas cônicas e demonstram que essas equações podem ser expressas tanto na forma implícita quanto na forma explícita. Ao trabalhar com conceitos importantes da teoria das funções implícitas, explícitas e das cônicas, foi possível obter resultados significativos.

Verificou-se que é possível escrever as equações reduzidas das curvas cônicas nas duas formas mencionadas e, ao analisar graficamente os resultados, constatou-se que os gráficos obtidos são os mesmos. Essa consistência visual permite afirmar que as formas implícita e explícita são equivalentes e fornecem a mesma representação geométrica das curvas cônicas. Portanto, este estudo contribuiu para uma melhor compreensão das propriedades e representações das cônicas, enfatizando a relação entre as formas implícita e explícita das equações que as descrevem.

Referências

- ALMEIDA, C. *Cônicas*. Rio de Janeiro: G Ermakogg Casa Editorial, 2019. [11](#)
- BERLINSKI, D. *Os elementos de Euclides: Uma história da geometria e do poder das ideias*. São Paulo: Zahar, 2018. ISBN 9788537817452. [10](#), [11](#)
- BICUDO, I. *Os Elementos de Euclides*. São Paulo: Unesp, 2009. ISBN 8571399352, 9788571399358. [10](#)
- FILHO, A. B. P. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, *Aplicações das cônicas*. Rio Grande do Norte: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015. [9](#), [39](#), [40](#)
- FLEMMING, D. M.; ALVES, M. B. G. *Cálculo A - funções, limite, derivação e integração*. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006. [12](#), [13](#)
- HIGYNO, D. H. *Introdução a história da matemática*. São Paulo: Da Unicamp, 2004. [10](#)
- LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Harbra, 1994. [37](#), [40](#)
- MARQUES, G. d. C. *Dinâmica do Movimento dos Corpos*. São Paulo: Univesp-USP, 2020. [9](#), [38](#)
- MUNEM, M. A.; FOULIS, D. *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 1978. [12](#)
- NIETTO ; MARTINS, R. M. *A historia das cônicas*.
<<http://www.ime.unicamp.br/apmat/historia-das-conicas/>>: Acessado em 01 de Julho às 00:40., 2021. [10](#)
- ROQUE, T. *História da matemática*. São Paulo: Zahar, 2012. [10](#)
- SOMMERFELD, G. F. F. Monografia em Matemática - Departamento de Matemática, *Cônicas, Quádricas e suas Aplicações*. Belo Horizonte: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, 2013. [9](#), [37](#), [38](#), [39](#)
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1987. ISSN 978-00-745-0409-3. [14](#)