

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

HIPÓTESE DE RIEMANN: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA

MARCUS VINÍCIUS BARBOSA DA SILVA

GOIÂNIA - GOIÁS

2023



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Marcus Vinícius Barbosa da Silva

Matrícula: 20181010940113

Título do Trabalho: Hipotese de Riemann: Uma Perspectiva Histórica E Epistemológica

Autorização - Marque uma das opções

1. (x) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 03/07/2023.

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

MARCUS VINÍCIUS BARBOSA DA SILVA

HIPÓTESE DE RIEMANN: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Professor Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos

GOIÂNIA - GOIÁS

ANO

S586h Silva, Marcus Vinícius Barbosa da.
Hipótese de Riemann: uma perspectiva histórica e epistemológica / Marcus Vinícius Barbosa da Silva. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023.
47 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Riemann, hipótese de. 2. Matemática. I. Vasconcelos, José Eder Salvador de (orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

HIPOTÉSE DE RIEMANN: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA

por

MARCUS VINICIUS BARBOSA DA SILVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 15 de junho de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos(Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Jolivê Mendes de Santana Filho(IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Profª Drª. Karoline Victor Fernandes (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jolive Mendes de Santana Filho**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 15/06/2023 13:56:44.
- **Karoline Victor Fernandes**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 15/06/2023 13:56:01.
- **Jose Eder Salvador de Vasconcelos**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 15/06/2023 13:55:09.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 07/06/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 417082

Código de Autenticação: e3c8f3ca90



Dedicatória

Dedico este trabalho à minha amada mãe, cujo amor e apoio incansáveis foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me dar saúde, força e capacidade para conseguir chegar até aqui.

Gostaria de dedicar esse momento especial para expressar minha profunda gratidão à minha mãe, Tereza, você sempre esteve ao meu lado, me incentivando e acreditando em mim, mesmo nos momentos mais desafiadores. Sua força, sabedoria e amor incondicional foram verdadeiros pilares para mim durante todo o meu percurso acadêmico.

Quero agradecer ao meu orientador José Eder pelos valiosos conselhos ao longo deste trabalho. Sua dedicação, paciência e conhecimento foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico.

Também sou grato aos membros da banca avaliadora, por dedicarem seu tempo e expertise na avaliação deste trabalho. A minha noiva, Débora pelo seu apoio emocional e seu carinho constante me deram a confiança necessária para enfrentar os obstáculos e seguir em frente. Gostaria de expressar minha gratidão aos meus colegas de classe e amigos que me apoiaram durante todo o percurso acadêmico. A todos que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho, meu mais sincero agradecimento.

Resumo

Neste trabalho fazemos um retrospecto histórico sobre a Hipótese de Riemann e sua importância nas diversas áreas da matemática. Abordamos temas como a função Zeta de Riemann, a obra de Riemann e suas contribuições para a matemática, além de tratar de alguns aspectos teóricos envolvendo a Hipótese de Riemann. Apresentamos os famosos problemas do milênio. Tratamos mais detalhadamente dos números primos, apresentando suas principais propriedades e trazendo alguns resultados importantes da teoria relacionada a eles.

Palavras-chave: Riemann; Problemas do milênio; Números primos; Função Zeta de Riemann.

Abstract

In this work we make a historical retrospective on the Riemann Hypothesis and its importance in the various areas of mathematics. We address topics such as the Riemann Zeta function, Riemann's work and his contributions to mathematics, as well as dealing with some theoretical aspects involving the Riemann Hypothesis. We present the famous problems of the millennium. We plot more at length the prime numbers, presenting their main properties and bringing some important results of the theory related to them.

Keywords: Riemman; Millennium problems; Primes; Riemann Zeta function.

Sumário

Introdução	12
1 Riemann e suas contribuições à matemática	14
1.1 Geometria Riemanniana	15
1.1.1 Superfície de Riemann	15
1.1.2 Análise Complexa	16
1.1.3 Teoria Analítica dos Números	16
2 Clay Mathematics Institute (CMI)	18
2.1 A conjectura de Poincaré	18
2.2 A conjectura de Hodge	18
2.3 Problema P versus NP	19
2.4 Yang-Mills e o intervalo de massa	20
2.5 Equações de Navier-Stokes	20
2.6 Conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer	20
3 Números primos	22
3.1 Propriedades dos números primos	22
3.1.1 Unicidade da fatoração	22
3.1.2 Infinitude dos números primos	22
3.1.3 Distribuição irregular	22
3.1.4 Primos gêmeos	23
3.1.5 Primos de Mersenne	24
3.1.6 Testes de primalidade	24
4 Função Zeta de Riemann	28
4.1 Função contadora de primos	28
4.2 Função Zeta de Riemann	29
4.3 Zeros da função Zeta	31

5 Hipótese de Riemann	32
5.1 Solução apresentada por Michael Atiyah	33
Referência Bibliográficas	36
Apêndice A Os 23 problemas de Hilbert	37
A.1 Provar a hipótese do continuum (HC) de Cantor	37
A.2 Demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética	38
A.3 Pode-se provar que dois tetraedros têm o mesmo volume (sob certas condições)?	39
A.4 Construir todos os espaços métricos em que as linhas são geodésicas	39
A.5 Todo grupo contínuo é automaticamente um grupo diferencial?	40
A.6 Transformar toda a Física em axiomas	41
A.7 b é transcendente para $a \neq 0, 1$ algébrico e b irracional algébrico? (ex: $2^{\sqrt{2}}$)	42
A.8 A Hipótese de Riemann e a Conjectura de Goldbach	42
A.9 Achar a lei de reciprocidade mais geral em todo campo de número algébrico	43
A.10 Encontrar um algoritmo que determine se uma equação diofantina tem solução	43
A.11 Formas quadráticas com quaisquer coeficientes numéricos algébricos	44
A.12 Estender o Teorema de Kronecker-Weber para os corpos não abelianos.	44
A.13 Demonstrar a impossibilidade de resolver equações de sétimo grau através de funções de somente duas variáveis	45
A.14 Provar o carácter finito de certos sistemas completos de funções	45
A.15 Desenvolver bases sólidas para o cálculo enumerativo de Schubert	45
A.16 Topologia de curvas e superfícies algébricas	46
A.17 Topologia de curvas e superfícies algébricas	46
A.18 Construir um espaço euclidiano com poliedros congruentes	46
A.19 As soluções dos problemas regulares no calculado das variações são sempre necessariamente analíticas?	46
A.20 Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um determinado grupo monodrômico	46
A.21 Uniformizar as curvas analíticas através de funções automorfas	47
A.22 Desenvolver um método geral de resolução no cálculo de variações	47

Introdução

Este trabalho apresenta de forma sucinta a história de Georg Friedrich Bernhard Riemann¹, nascido na Alemanha, em uma aldeia situada em Hanover, no ano de 1826. Era filho de um pastor luterano e ao que se sabe, sua mãe morreu antes que os filhos atingissem idade adulta. Em seguida, abordamos algumas de suas contribuições para a Matemática, na qual ajudou a desenvolver a teoria das funções complexas. Em especial o trabalho abordará, de maneira mais profunda, o famoso problema conhecido por ser o mais difícil da Teoria dos Números ainda em aberto, sendo um dos Problemas do Milênio, à função Zeta de Riemann e a hipótese de Riemann relacionada a ela, sendo um dos “problemas do milênio” (JAFPE, 2006), listados a seguir:

- P versus NP;
- A conjectura de Hodge;
- A conjectura de Poincaré (resolvido por Grigori Perelman);
- A hipótese de Riemann;
- A existência de Yang-Mills e a falha na massa;
- A existência e suavidade de Navier-Stokes;
- A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer.

No decorrer do trabalho apresentaremos cada um deles, de forma breve, com maiores detalhes.

A função Zeta de Riemann, dada por

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots \quad (1)$$

em que $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, (SANTOS, 2011). O problema central baseia-se em estudar a convergência dessa série para cada z . A “Hipótese de Riemann” estabelece uma classe de soluções para essa questão. Neste trabalho vamos apresentar a evolução histórica desse problema, como a função zeta foi constituída e, apresentar a hipótese e tratar dela em linhas gerais.

O entendimento sobre a história de Georg Friedrich Bernhard Riemann e como seus estudos foram importantes para a Teoria dos Números, despertaram curiosidade sobre sua vida e seus trabalhos acadêmicos. Escrever sobre a vida de Riemann e seu trabalho dentro da Teoria dos números tornou-se um alvo de pesquisa a

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, Reino de Hanôver, 17 de setembro de 1826 — Selasca, Verbania, 20 de julho de 1866) que foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial.

partir do momento em que houve o aprofundamento nos estudos sobre os Problemas do Prémio Millennium. É um tema que contém grandes informações relevantes para a história da matemática e que contribui para que haja uma empolgação e esforço para o desenvolvimento desse e de tantos outros trabalhos na área de matemática. Sendo assim, este trabalho, justifica-se, pelo fato de poder discorrer sobre o maior problema da teoria dos números, após saber ser este um assunto que possui mais de 160 anos e ainda não há uma solução.

Grandes matemáticos ao redor do mundo gastaram longos anos de suas vidas em busca da solução para o problema que ficou conhecido como hipótese de Riemann, exemplo disso foi o matemático Godfrey Harold Hardy, que certa vez fez uma lista sobre as coisas que ele queria fazer no ano novo e o primeiro item da lista era provar a hipótese de Riemann, e David Hilbert, que em 1900, em uma palestra durante o segundo congresso internacional dos matemáticos em Paris, iniciou sua palestra com a frase “Se eu acordasse de um sono de 500 anos, a primeira coisa que eu perguntaria é se conseguiram provar a hipótese de Riemann” (HILBERT, 1900).

Outra curiosidade é o fato do matemático Michael Atiyah apresentar uma suposta prova para a hipótese, entretanto sua demonstração ainda não foi considerada válida. Há também o fato de que aquele que desvendar o mistério por traz da complexidade da distribuição dos números primos, receberá do Instituto Clay de Matemática o valor de um milhão de dólares pelo feito, que a partir dos anos 2000 passou a ser o valor oficial do prêmio. Um aspecto interessante da vida de Riemann é o fato de ter sido aluno de Gauss e ser reconhecido por este como uns dos únicos capazes de compreender a matemática que ele desenvolvia. Ademais, Riemann conseguiu ser professor titular em uma posição que antes era ocupada por Dirichlet e Gauss. Infelizmente, devido à sua saúde debilitada, em 1866 morreu em razão de uma tuberculose, com quarenta anos de idade.

Neste trabalho é constituído majoritariamente por meio de Pesquisa Bibliográfica que, de acordo com Pizzani et al. (2012), é um processo de pesquisa que facilita a dinâmica das informações obtidas e a recuperação dessas informações. Para tratar dos temas descritos, usamos os trabalhos de Menezes e Avila (2015), Aguilera-Navarro et al. (1999) e Moreira e Avila (2015), além dos autores já citados, para tratar especificamente dos temas centrais. Quando necessário retomaremos pontos do cálculo complexo, e para isso usaremos Pessoa (2008) e Magalhães (2004).

No Capítulo 1 apresentaremos a história de Riemann e suas contribuições à matemática.

No Capítulo 2, apresentamos o Clay Mathematics Institute ou CMI a organização que promoveu “Problemas do Prémio Millennium” e vamos discorrer sobre cada um dos 7 problemas, que se solucionados além da premiação de um milhão de dólares, sua resolução terá grande impacto nas mais diversas áreas da matemática.

No Capítulo 3 discorremos sobre os números primos. Apresentamos suas principais propriedades e dois critérios de primalidade, isto é, que permitem decidir se um número é primo.

No Capítulo 4 o foco será a função Zeta de Riemann e os zeros triviais e não-triviais.

No Capítulo 5 vamos abordar a Hipótese de Riemann expondo toda a história em torno de uns dos maiores problemas em aberto da teoria dos números.

1 Riemann e suas contribuições à matemática

Georg Friedrich Benhard Riemann nasceu na Alemanha, em uma aldeia situada em Hanover, mais especificamente em Breselenz, no dia 17 de setembro de 1826. Desde sua infância, ele enfrentava problemas devido sua débil saúde, era uma criança acometida de substanciais colapsos nervosos. Era filho de um ministro luterano chamado Friedrich Riemann, que mesmo com dificuldades financeiras sempre investiu na educação de seu filho. Foi pai de seis filhos sendo Benhard seu segundo filho, e foi o professor de Benhard com auxílio de um professor local.

Ao que se sabe, a mãe de Benhard, Charlotte Ebell, morreu antes que ele atingisse a idade adulta, portanto ela não pode vislumbrar as conquistas de seu filho. Independente da modesta condição financeira da família, Riemann teve acesso a uma ótima formação, na qual começou seus estudos básicos em 1840, frequentando a escola Johanneum Lüneburg e entrando diretamente na terceira classe. Esta é uma escola que ainda se mantém ativa nos dias atuais. Estudou em Berlim e Göttingen, e embora tivesse algumas adversidades em seus dias na escola, em razão de sua saúde debilitada e sua timidez, Benhard foi um bom aluno. Esteva sempre na média, tendo dificuldades assim como a maioria dos colegas.

No ensino secundário dedicou-se em grande parte ao estudo religioso, porém já demonstrava grande interesse na matemática, interesse que foi notado por seus professores, visto que os superava com certa facilidade. Riemann, ainda no ensino secundário, estudou trabalhos de grandes nomes da matemática como Euler¹ e Lagendre²

Com o despertar do seu interesse por matemática, o diretor da escola permitiu que ele usasse a sua biblioteca particular para estudar os textos de matemática, em um determinado momento lhe emprestou um livro de Legendre, que possuía 900 páginas sobre teoria dos números, e Benhard terminou de ler o livro em apenas seis dias. Com o incentivo de seu pai, em 1845, tendo 19 anos, ingressou na faculdade de Göttingen para estudar teologia com o propósito de ser tornar um membro de maior relevância na igreja, entretanto dado ao seu entusiasmo à matemática, e após uma palestra de Carl Friedrich Gauss³ com a licença de seu pai e incentivo de Gauss, depois de uma conversa com o mesmo Riemann muda de curso, voltando seus estudos agora à matemática

¹Leonhard Paul Euler Basileia, 15 de abril de 1707 – São Petersburgo, 18 de setembro de 1783) foi um matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez importantes descobertas em várias áreas da matemática como o cálculo e a teoria dos grafos. Também introduziu muitas das terminologias da matemática moderna e da notação matemática, particularmente na análise matemática, assim como no conceito de função matemática. Também é reconhecido por seus trabalhos na mecânica, dinâmica de fluidos, óptica, astronomia e teoria da música.

²Adrien-Marie Legendre (Paris, 18 de setembro de 1752 — Paris, 10 de janeiro de 1833) foi um matemático francês. Fez importantes contribuições à estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática. Foi eleito membro da Royal Society em 1789.

³Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de abril de 1777 — Göttingen, 23 de fevereiro de 1855) foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica. Alguns se referem a ele como princeps mathematicorum (em latim: “o príncipe da matemática” ou “o mais notável dos matemáticos”) e um “grande matemático desde a antiguidade”. Gauss tinha uma marca influente em muitas áreas da matemática e da ciência e é um dos mais influentes na história da matemática. Ele considerava a matemática como “a rainha das ciências”

Isto posto, um ano após sua admissão na faculdade, Riemann se transferiu para o curso de matemática na Universidade de Berlim, na qual durante o decorrer de seu curso chamou a atenção de outros notáveis nomes da matemática, como Dirichlet⁴ e Jacobi⁵. Dado início a sua vida acadêmica na Universidade de Göttingen, Riemann apresenta a tese sobre a teoria das funções complexas. Neste trabalho foi publicado o que conhecemos hoje por condições de Cauchy-Riemann, que são um par de equações diferenciais que garantem que uma função complexa possa ser diferenciável num ponto. Em 1854, Riemann apresenta suas primeiras palestras, cujos conteúdos foram as bases de um novo campo de estudo, a Geometria Riemanniana.

Em 1849, Riemann volta a Universidade de Göttingen, alcançando o título de doutor em 1851. Sua tese foi no campo da teoria das funções complexas e foi orientado por Gauss. A vida de Bernhard Riemann foi relativamente curta e ele faleceu aos 39 anos de idade, em 20 de julho de 1866, em Selasca, Itália, devido a complicações causadas pela tuberculose. Embora Riemann tenha tido uma carreira brilhante como matemática, ele criou muitos desafios em sua vida pessoal e de saúde. Ele lutou com uma doença durante grande parte de sua vida adulta, e seu estado de saúde muitas vezes o impediu de trabalhar em sua pesquisa. Hoje, o legado de Riemann vive através de suas ideias e contribuições para a matemática. Seus trabalhos em geometria diferencial, análise complexa e teoria dos números continuam a inspirar e inspirar matemáticos em todo o mundo, e ele é lembrado como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

1.1 Geometria Riemanniana

A geometria riemanniana é um ramo da geometria diferencial que estuda as propriedades elementares dos espaços que possuem uma métrica riemanniana, que é uma generalização da noção de distância para espaços que não são necessariamente euclidianos.

Um espaço riemanniano é definido como um espaço topológico. A geometria riemanniana é utilizada em várias áreas da matemática e física, como na teoria da relatividade de Einstein, que descreve a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo, e na geometria de variedades, que estuda a geometria de espaços de dimensões maiores. Além disso, a geometria riemanniana também tem aplicações em áreas como a análise harmônica, teoria espectral e geometria algébrica. Riemann também foi o primeiro matemático a sugerir o uso de dimensões maiores do que 3 ou 4 para o estudo dos espaços em matemática. Fruto dessa nova abordagem, a análise matemática pode ser desenvolvida no espaço n -dimensional.

1.1.1 Superfície de Riemann

Uma superfície de Riemann é uma superfície munida de uma estrutura complexa, que é uma estrutura que permite definir funções complexas em torno de cada ponto da superfície. Essa estrutura é definida por uma

⁴Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, 13 de fevereiro de 1805 — Göttingen, 5 de maio de 1859) foi um matemático alemão, a quem se atribui a moderna definição formal de função.

⁵Carl Gustav Jakob Jacobi (Potsdam, 10 de dezembro de 1804 — Berlim, 18 de fevereiro de 1851) foi um matemático alemão, que fez contribuições fundamentais para funções elípticas, dinâmica, equações diferenciais e teoria dos números. Seu nome está escrito ocasionalmente como Carolus Gustavus Iacobus Iacobi em seus livros latinos, e seu primeiro nome é dado às vezes como Karl.Jacobi foi o primeiro matemático judeu a ser nomeado professor em uma universidade alemã.

função que atribui um produto interno hermitiano (auto adjunto) em cada ponto da superfície, permitindo definir a noção de distância e ângulos complexos.

Uma superfície de Riemann pode ser pensada como uma generalização das funções complexas de uma variável para funções complexas de duas variáveis, ou seja, uma superfície é uma extensão de um plano complexo em duas dimensões. Essa generalização permite estudar as propriedades analíticas das funções complexas de várias variáveis.

As superfícies de Riemann são importantes em várias áreas da matemática, como a análise complexa, geometria algébrica, topologia e física teórica. Na análise complexa em superfícies de Riemann, estuda-se a teoria das funções holomorfas, que são funções complexas suaves que aderiram à condição de Cauchy-Riemann. Na geometria algébrica, as superfícies de Riemann são estudadas como variedades complexas projetivas.

1.1.2 Análise Complexa

A análise complexa é usada em diversas áreas da matemática, incluindo a geometria diferencial, teoria das funções modulares, teoria dos números, teoria das singularidades e geometria algébrica. Na física, ela é usada em áreas como a mecânica quântica, relatividade eletromagnética, eletrodinâmica quântica e teoria das cordas.

As contribuições de Riemann à análise complexa tiveram um impacto profundo na matemática, e suas ideias continuam a ser estudadas e desenvolvidas até os dias de hoje. A teoria das superfícies de Riemann, por exemplo, é fundamental para a compreensão da geometria algébrica e das variedades complexas em geral, enquanto a hipótese de Riemann continua a desafiar os melhores matemáticos do mundo.

Algumas aplicações da análise complexa incluem o cálculo de integrais complexos, a resolução de diferenças diferenciais parciais, a análise de problemas de valores de contorno e a construção de funções especiais, como as funções de Bessel e as funções elípticas. A análise complexa também tem aplicações em engenharia, como a análise de circuitos elétricos e a resolução de problemas de transferência de calor.

1.1.3 Teoria Analítica dos Números

Riemann fez importantes contribuições à Teoria Analítica dos Números, que é uma área da matemática que estuda as propriedades dos números inteiros usando ferramentas da análise matemática.

Uma das principais contribuições de Riemann foi a formulação da famosa hipótese de Riemann, que é um dos mais importantes e exigentes problemas não resolvidos da matemática. A hipótese de Riemann propõe uma conexão entre a distribuição dos números primos e a distribuição dos zeros da função zeta de Riemann, que é uma função complexa que generaliza a série harmônica.

Em particular, a hipótese de Riemann afirma que todos os zeros não triviais da função zeta de Riemann têm parte real igual a $1/2$. Isso implica em muitas propriedades interessantes dos números primos, como a estimativa do número de primos menores que um dado número.

Além da hipótese de Riemann, Riemann também contribuiu para a Teoria Analítica dos Números através do estudo das funções theta, que são funções complexas de várias variáveis que surgem na teoria das

superfícies de Riemann e na teoria dos números. Ele mostrou que essas funções têm propriedades interessantes, como simetria e modularidade, que as tornam importantes em várias áreas da matemática.

As contribuições de Riemann à Teoria Analítica dos Números tiveram um impacto profundo na matemática, e suas ideias continuam a ser estudadas e desenvolvidas até os dias de hoje. A hipótese de Riemann, em particular, é considerada um dos mais importantes problemas da matemática e sua resolução teria raízes profundas em muitas áreas da matemática e da física.

2 Clay Mathematics Institute (CMI)

O Instituto Clay de matemáticas (em inglês: Clay Mathematics Institute ou CMI) é uma organização sem fins lucrativos que se dedica a promover e apoiar a investigação em matemática pura. Foi fundado em 1998 pelo empresário estadunidense Landon T. Clay. Tem como objetivos e propositos: aumentar e disseminar o conhecimento matemático, educar matemáticos e outros cientistas sobre novas descobertas no campo da matemática, incentivar alunos superdotados a seguir carreiras matemáticas, reconhecer conquistas e avanços extraordinários na pesquisa matemática.

O Instituto é conhecido por estabelecer o Prêmio do Milênio, uma série de sete prêmios de um milhão de dólares, destinado a recompensar os matemáticos que conseguirem resolver os chamados problemas do milênio. Os problemas do milênio serão detalhados ao decorrer do trabalho.

Além dos prêmios, o CMI apoia a investigação em matemática e promove o ensino de matemática por meio de programas de apostas, conversas e conferências. O instituto tem sua sede na cidade de Providence, Rhode Island, Estados Unidos.

2.1 A conjectura de Poincaré

A conjectura de Poincaré é um famoso problema matemático que foi formulado pelo matemático francês Henri Poincaré no princípio do século XX. A conjectura estabelece que qualquer variedade tridimensional fechada e com grupo fundamental trivial é homeomorfa a uma esfera tridimensional.

Em termos mais simples, a conjectura afirma que se um objeto tridimensional não tem agulhas em seu interior (como uma rosquinha), então deve ser uma esfera. Embora a conjectura pareça óbvia e fácil de demonstrar, tornou-se um dos problemas mais difíceis da história da matemática.

Após mais de um século de tentativas por vários matemáticos, a conjectura finalmente foi demonstrada pelo matemático russo Grigori Perelman em 2003, que utilizou técnicas inovadoras de geometria e topologia para resolver o problema.

A demonstração de Perelman foi verificada e aceita pela comunidade de matemática. Após terem sido compartilhados na internet em revistas especializadas, os argumentos de Perelman nunca foram contestados. Em 24 de março de 2010, Grigori Perelman, pela segunda vez, recusou-se a receber o prêmio de um milhão de dólares.

2.2 A conjectura de Hodge

A conjectura de Hodge é uma afirmação importante no campo da geometria algébrica, que estabelece uma conexão entre a topologia de algumas variedades algébricas complexas e sua estrutura algébrica. Foi formulada pelo matemático britânico William Hodge na década de 1950.

De maneira mais precisa, a conjectura de Hodge afirma que qualquer classe co-homológica em um

complexo algébrico variado pode ser representada por uma forma algébrica diferencial nesse variado. Em outras palavras, estabelece uma relação entre a topologia e a geometria algébrica de uma variedade. Em termos mais simples, a conjectura de Hodge afirma que qualquer classe de cohomologia de uma variedade complexa pode ser representada por uma forma diferencial suave e harmoniosa.

A conjectura tem profundas ramificações e aplicações em diversas áreas da matemática, incluindo a geometria algébrica, a teoria de representação e a teoria das formas automórficas. A sua resolução completa teria implicações importantes para o entendimento da estrutura das variedades algébricas complexas.

A conjectura de Hodge tem sido demonstrada em muitos casos importantes, incluindo variedades projetivas suaves e variedades Kähler compactas. No entanto, segue sendo um dos problemas mais importantes da geometria algébrica e sua demonstração completa segue sendo um tema de investigação ativo na atualidade.

2.3 Problema P versus NP

O problema P versus NP é um dos problemas não resolvidos mais importantes e desafiadores em Ciência da Computação e matemática. Em essência, é uma questão sobre a dificuldade de resolver problemas computacionais.

O problema pergunta se todos os problemas que podem ser verificados em tempo polinomial também podem ser resolvidos em tempo polinomial. Em outras palavras, questiona se o conjunto de problemas que podem ser verificados com eficiência (NP) é equivalente ao conjunto de problemas que podem ser resolvidos com eficiência (P). A classe P consiste em todos os problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial, enquanto a classe NP consiste em problemas que podem ser verificados em tempo polinomial.

Acredita-se amplamente que existem problemas em NP que não estão em P, o que significa que eles não podem ser resolvidos de forma eficiente. Se é simples confirmar se uma solução para um problema está correta, isso implica que também é fácil encontrar uma solução? Essa é a questão central em relação à classe de problemas P versus NP.

Um exemplo clássico de um problema NP é o problema do caminho hamiltoniano: dado um conjunto de N cidades para visitar, como é possível percorrer todas elas sem repetir nenhuma cidade? Se alguém me fornecer uma solução, posso verificar facilmente se está correto. No entanto, encontrar uma solução por conta própria não é tão fácil. Se o problema P versus NP pudesse ser resolvido e fosse determinado que P é igual a NP, isso significaria que todos os problemas que podem ser verificados com eficiência também podem ser resolvidos com eficiência. Isso teria profundas implicações para muitas áreas da ciência da computação, incluindo criptografia, otimização e inteligência artificial. No entanto, apesar de décadas de pesquisa, o problema P versus NP permanece sem solução e é considerado um dos problemas em aberto mais importantes da ciência da computação.

2.4 Yang-Mills e o intervalo de massa

As normas da física quântica correspondem ao domínio das partículas fundamentais de maneira análoga às regras de Newton da mecânica clássica no âmbito macroscópico. A teoria de sobre o intervalo de massa é baseada em um conjunto de diferenças divergentes que descrevem como os campos de força interagem com as partículas elementares.

A teoria de Yang-Mills é uma teoria com base no grupo das matrizes n por n unitárias com determinante igual a 1 ($SU(n)$). Em relação ao intervalo de massa, a teoria de Yang-Mills não prevê diretamente o valor das massas das partículas elementares, como os elétrons e prótons, mas sim como eles interagem através das forças fundamentais. O intervalo de massa das partículas é determinado pela interação dessas partículas com o campo de Higgs, que é uma parte fundamental do modelo padrão da física de partículas.

Na teoria de Yang-Mills, as partículas elementares são descritas por campos quânticos que interagem com campos de força. O campo de força associado à interação eletromagnética é o campo eletromagnético, enquanto os campos de força associados às forças energéticas fortes e fracas são chamados de glúons e bósons intermediários, respectivamente. A massa das partículas elementares surge de sua interação com o campo de Higgs, que é um campo escalar que permeia todo o espaço. Quando as partículas interagem com o campo de Higgs, elas adquirem uma massa. Portanto, a teoria de Yang-Mills não prevê diretamente o valor das massas das partículas, mas sim como elas interagem através das forças fundamentais que são descritas pela teoria.

2.5 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes expõe a dinâmica do movimento dos fluidos por exemplo líquidos e gases. As reflexões de Navier-Stokes são muito importantes para a compreensão de fenômenos como a turbulência, a formação de redemoinhos e a dinâmica dos fluidos em geral.

As considerações de Navier-Stokes descrevem a conservação de massa e a conservação do momento em um fluido. Elas relacionam a taxa de variação temporal da velocidade do fluido com os gradientes de pressão, assimilação e tolerância. As reflexões podem ser escritas de forma diferencial ou em sua forma integral, dependendo do contexto e da abordagem utilizada.

Independentemente de sua formulação as equações descreverem de forma correta tanto a vazão caótica quanto a não caótica, até este momento não há uma elucidação rigorosa de como o fluido passa de um fluxo caótico para um não caótico.

2.6 Conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer

A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer é uma das conjecturas mais famosas na teoria dos números e na geometria algébrica. Foi proposta em 1960 por Bryan Birch e Peter Swinnerton-Dyer. Em termos simples, a conjectura afirma que há uma relação entre o número de pontos racionais em uma curva elíptica (que é uma curva definida por uma aprovação polinomial de grau 3) e a ordem do grupo de Selmer dessa curva elíptica. O

grupo de Selmer é uma construção matemática que ajuda a entender a estrutura do conjunto de soluções inteiras de uma aprovação.

A conjectura é importante porque está relacionada com a questão da existência de soluções inteiras para certas diofantinas, que são com reflexão inteiras e soluções inteiras. Se a conjectura for verdadeira, então haverá uma fórmula para o número de soluções inteiras nessas reflexões, o que é um problema muito difícil na matemática. A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer ainda é um dos problemas mais desafiadores da matemática e fica sem solução completa até hoje. No entanto, há muitos resultados parciais importantes que foram obtidos desde a sua formulação original, e a conjectura continua a ser um objeto de estudo ativo e fascinante para os matemáticos.

3 Números primos

Os números primos são números inteiros maiores que 1 que só são divisíveis por 1 e por si mesmo. Isso significa que não há nenhum divisor diferente deles mesmos e de 1. Por exemplo, os primeiros números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e assim sucessivamente.

3.1 Propriedades dos números primos

3.1.1 Unicidade da fatoração

Todo número inteiro maior que 1 pode ser decomposto de forma única em um produto de números primos. Esse é conhecido como o Teorema Fundamental da Aritmética. Por exemplo, o número 12 pode ser decomposto em $2 \cdot 2 \cdot 3$.

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental da Aritmética - (GONÇALVES, 1979)). *Todo inteiro maior que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem dos fatores) como um produto de fatores primos.*

3.1.2 Infinitude dos números primos

Existe um número infinito de números primos. Essa afirmação foi provada pela primeira vez pelo matemático grego Euclides. Seja M , uma lista finita qualquer de números primos $M = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$, pode-se mostrar que existem números primos que não estão nessa lista. Da seguinte maneira: sendo L o produto de todos os números primos da lista: $L = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n)$ e sendo $q = L + 1$, logo q pode ser primo ou não: se q é primo então há pelo menos um número primo a mais que não está listado. Se q não é primo, então algum fator primo p divide q . Esse fator p não está na nossa lista M : se estivesse, ele dividiria L , mas como sabemos, p divide $L + 1 = q$. Então para não deixar resto, p teria que dividir a diferença entre os dois números, que é $(L + 1) - L$ ou seja, 1. Mas não existe número primo que divida 1, assim haveria uma contradição, logo p não pode estar na lista. Isso significa que pelo menos mais um número primo existe além dos que estão na lista. Isso prova que para qualquer lista finita de números primos, há um número primo que não está na lista. Portanto, existem infinitos números primos.

3.1.3 Distribuição irregular

Os números primos não são distribuídos uniformemente ao longo dos números naturais. Em outras palavras, não é possível prever exatamente onde o próximo número primo automatizado. A distribuição dos números primos ao longo dos números naturais é um fenômeno conhecido como distribuição irregular dos números primos. Embora os números primos se tornem menos frequentes à medida que os números aumentam, não existe uma fórmula simples que visualize exatamente onde cada número primo está situado.

Em outras palavras, não é possível determinar com precisão qual será o próximo número primo após um determinado número sem realizar uma verificação sistemática. Por exemplo, embora existam algumas heurísticas e conjecturas que descrevem padrões aproximados na distribuição dos números primos, como a Conjectura dos Números Primos Gêmeos e a Lei dos Números Primos, elas não fornecem uma fórmula determinística para a localização exata de cada número primo.

A distribuição irregular dos números primos é um dos problemas mais profundos e desafiadores da matemática. Muitos matemáticos têm se dedicado consideravelmente para estudar e entender melhor esse fenômeno, desenvolvido em avanços experimentados, mas ainda há muito a ser descoberto. No entanto, a função de contagem de primos, que dá o número de primos menores ou igual a um dado número, segue uma tendência geral de crescimento conforme o número aumenta.

Teorema dos números primos: O teorema dos números primos, também conhecido como a Lei dos Grandes Números Primos, estabelece que a proporção de números primos entre os números naturais diminui à medida que os números aumentam. Esse é o motivo pelo qual os números primos se tornam mais raros à medida que se avança na sequência dos números naturais.

3.1.4 Primos gêmeos

Um par de primos é chamado de primo gêmeos se eles são dois números primos p e q tais que $q = p + 2$ exemplos: (5 e 7, 17 e 19) os primos gêmeos são pares de números primos consecutivos que diferem apenas por 2. Em outras palavras, são dois números primos que têm uma diferença de 2 entre eles.

A Conjectura dos Números Primos gêmeos afirma que existem infinitos pares de primos gêmeos. Essa conjectura foi formulada por Euclides há mais de dois milênios e até hoje permanece sem prova definitiva. Embora muitos exemplos de pares de primos gêmeos tenham sido encontrados e acredite-se fortemente na veracidade da conjectura, ainda não foi estabelecida uma demonstração geral. Em 17 de abril de 2013 Zhang Yitang ¹ anunciou a prova de que para algum número inteiro N que é no máximo 70 milhões, existem infinitos pares de primos com distância N entre si.

Uma consequência direta da Conjectura dos Números Primos gêmeos é que a densidade dos primos gêmeos diminui à medida que os números aumentam. À medida que os números aumentam, a ocorrência de pares de primos gêmeos se torna menos frequente. No entanto, mesmo com essa diminuição na densidade, espera-se que sempre existam novos pares de primos gêmeos à medida que a sequência dos números primos se estende infinitamente.

Os primos gêmeos continuam sendo um tópico interessante e desafiador na teoria dos números, e a busca por pares adicionais de primos gêmeos e a demonstração da conjectura são áreas ativas de pesquisa na matemática.

¹é um matemático chinês. Trabalha com teoria dos números. Zhang obteve um bacharelado em matemática na Universidade de Pequim e um doutorado em 1991 na Universidade de Purdue, orientado por Tzuong-Tsieng Moh, com a tese The Jacobian Conjecture and the Degree of Field Extension.

3.1.5 Primos de Mersenne

Os primos de Mersenne são primos que podem ser escritos na forma $2^p - 1$, onde p é um número primo. Por exemplo, 3, 7, 31 são primos de Mersenne. Esses números têm propriedades especiais e têm sido objeto de estudo por muitos anos. O fato de os primos de Mersenne ter uma caracterização, permite que eles sejam a forma mais comum de determinação de novos números primos.

Os primos de Mersenne são denominados assim em homenagem ao matemático francês Marin Mersenne, que estudou esses números no século XVII. Mersenne foi um dos primeiros a investigar as propriedades dos números primos e suas relações com os primos de Mersenne.

3.1.6 Testes de primalidade

Existem vários testes de primalidade que podem ser usados para verificar se um número é primo ou não. Alguns dos testes conhecidos incluem o teste de divisibilidade, o teste de primalidade de Fermat, o teste de primalidade de Miller-Rabin e o teste de primalidade de AKS.

Essas são apenas algumas das propriedades dos números primos. A teoria dos números é um campo vasto e fascinante, com muitos outros aspectos relacionados aos números primos a serem explorados. Os números primos são muito importantes em matemática e têm muitas aplicações em diferentes áreas, como a criptografia e a teoria dos números. Também tem um papel fundamental na decomposição em fatores primos de um número, que é uma forma de expressar um número como uma multiplicação de números primos.

Existem diferentes métodos e algoritmos para determinar se um número dado é primo. Algumas delas incluem o método de força bruta, o teste de primalidade de Miller-Rabin e o crivo de Eratóstenes. Esses métodos são utilizados para encontrar números primos grandes e serão abordados ao decorrer do trabalho. A lista de números primos é infinita e não segue nenhum padrão previsível. No entanto, à medida que os números aumentam, eles se tornam menos frequentes. Isso é conhecido como a "distribuição dos números primos" e é um tema de estudo na teoria dos números.

Crivo de Eratóstenes

Uma aplicação direta do Teorema de Euclides é o Crivo de Eratóstenes que permite determinar todos os números primos menores que um determinado número inteiro positivo fixado. O crivo de Eratóstenes consiste em, fixado um inteiro positivo n determinar todos os números primos menores que ou igual a $\sqrt{n}$ e listar todos os seus múltiplos (exceto os primos pré-fixados) até n .

Teorema 3.2 (Teorema de Euclides - (GONÇALVES, 1979)). *O conjunto P dos números primos é infinito.*

Demonstração. Suponha por contradição que o conjunto P de todos os números primos seja finito. Digamos,

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}. \quad (3.1)$$

Seja

$$R = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1. \quad (3.2)$$

Claro que $p_i \nmid R$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ (Seção 6.1 - E2). Pelo Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) ou R é primo ou se escreve como um produto de fatores primos. Como R não é primo, pois não pertence a P e não é divisível por nenhum primo, como vimos, temos uma contradição. Logo, o conjunto P dos números primos é infinito. $\square$

Os números maiores que 1 não listados são todos os primos menores que ou igual a n , pois se não fossem teriam um fator primo menor que sua raiz e consequentemente menor que $\sqrt{n}$ e assim seria um dos listados (chegando a uma contradição).

Por exemplo, se tomamos $n = 50$, temos $\sqrt{50} \approx 7,1$. Os primos menores que 7,1 são 2, 3, 5 e 7. Agora listamos todos os seus múltiplos,

				4	6	8	9	10
			12	14	15	16	18	20
21	22	24	25	26	27	28	30	
32	33	34	35	36	38	39	40	
	42	44	45	46	48	49	50	

Logo, os números primos menores que 50 são,

	2	3	5	7
11	13	17	19	
		23	29	
		31	37	
	41	43	47	

Observe que, embora trabalhoso, o Crivo de Eratóstenes permite responder se o próprio número n é primo.

Teste de primalidade de Miller-Rabin

O teste de primalidade de Miller-Rabin é um algoritmo probabilístico amplamente utilizado para verificar se um número é primo ou composto. Ele é baseado no Teorema de Miller-Rabin, que fornece critérios que permitem identificar números compostos com alta probabilidade.

Se n é um número primo maior que 2 então necessariamente $n - 1$ é composto. Logo, $n - 1$ pode ser escrito como $2^r d$, desde que $n - 1$ é par. Seja r o maior valor inteiro possível tal que $n - 1 = 2^r d$. Neste

caso, d é necessariamente ímpar.

Teorema 3.3 (Teorema de Miller-Rabin). *Seja $n > 2$ um número primo. Seja a um inteiro aleatório escolhido no intervalo $[2, n - 2]$. Então, pelo menos uma das seguintes condições é verdadeira:*

- i) $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.
- ii) $a^{2^j \cdot d} \equiv -1 \pmod{n}$ para algum valor de j no intervalo $[0, r - 1]$.

Decorre do Teorema de Miller-Rabin que se n é inteiro positivo maior do que 2 tal que existe $a \in [2, n - 2]$ que não satisfazendo as i) e ii) então n não é primo. O número a nestas condições é chamado de testemunha contra a primalidade de n .

Por outro lado, para cada inteiro positivo $a \in [2, n - 2]$ que satisfaz o Teorema de Miller-Rabin, a probabilidade de que o número n seja primo aumenta. Portanto, para números pequenos o Teorema de Miller-Rabin permite uma verificação eficaz para primalidade de um número. Para números muito grandes, é necessário escolhermos muitos valores de a para fazer o teste da primalidade, contudo em alguns casos é o método mais indicado, em razão da facilidade das contas.

1. Escreva $n - 1$ como $2^r d$, onde r é o maior valor inteiro possível e d é ímpar.
2. Escolha k inteiros aleatórios a no intervalo $[2, n - 2]$;
3. Calcule x satisfazendo $a^d \equiv x \pmod{n}$ e y satisfazendo $a^{2^j d} \equiv y \pmod{n}$ $x, y \in \{1, 2, \dots, a^d - 1\}$;
4. Se para todo a escolhido uma das duas sentenças ocorrem $x \equiv 1 \pmod{n}$ ou $y \equiv -1 \pmod{n}$, então aumenta a chance de a ser primo.
5. Se para ao menos um número a escolhido não tivermos $x = 1$ ou $y = -1$ como solução, n não é primo.

Exemplo 3.4 (Exemplos do teste de primalidade de Miller-Rabin:). Testar o número 13 para primalidade com 3 iterações:

Escolha 3 inteiros aleatórios entre 2 e 11: $a = \{2, 7, 9\}$.

Escreva 12 como $2^2 \cdot 3$. Neste caso, $d = 3$ e $r \in \{0, 1\}$.

i) $a = 2$:

Calcule $x = (2^3 \pmod{13})$, temos $x = 8$. Como 8 não é congruente a 1 módulo 13 precisamos fazer,

$$2^{2 \cdot 2 \cdot 3} \equiv y \pmod{13}.$$

Temos $y = 12 \equiv -1 \pmod{13}$. Logo, $a = 2$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Miller-Rabin.

ii) $a = 7$:

Calcule $x = (7^3 \pmod{13})$. Temos $x = 5$

$$7^{2 \cdot 2 \cdot 3} \equiv y \pmod{13}.$$

Temos $y = 12 \equiv -1 \pmod{13}$. Logo, $a = 7$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Miller-Rabin.

iii) $a = 9$:

Calcule $x = (9^3 \bmod 13)$. Temos $x = 1$. Logo, $a = 9$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Miller-Rabin.

Portanto, o algoritmo de Miller-Rabin estabelece que provavelmente 13 é primo.

Lembrando que o teste de Miller-Rabin é probabilístico, ou seja, ele pode retornar um falso positivo (indicando que um número composto é primo) com uma pequena probabilidade. No entanto, para valores de " k " suficientemente altos, a precisão do teste pode ser extremamente alta.

4 Função Zeta de Riemann

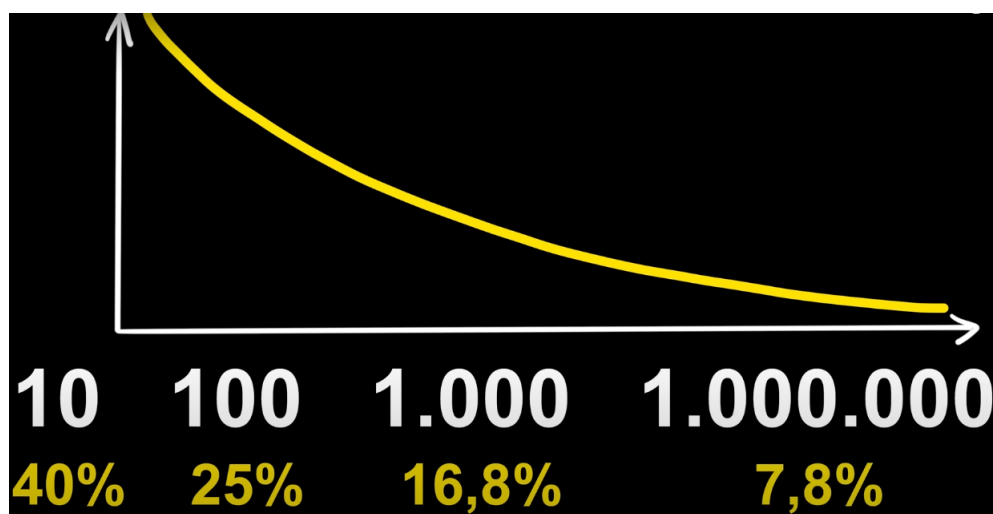
4.1 Função contadora de primos

A função $\pi(x)$, conhecida como função contadora de primos, é uma função matemática que retorna o número de números primos menores ou iguais a um determinado valor x . Em outras palavras, $\pi(x)$ conta quantos primos existem no intervalo de 1 até x . Na seção anterior vimos que $\pi(50) = 15$.

A função $\pi(x)$ é uma das funções mais importantes no estudo dos números primos e tem aplicações em várias áreas da matemática. Ela está intimamente relacionada à distribuição dos números primos e possui propriedades interessantes, como o famoso Teorema dos Números Primos, que estabelece que a função $\pi(x)$ se aproxima de $x/\ln(x)$ quando x tende ao infinito.

A Tabela abaixo contém valores de $\pi(x)$ e $x/\ln(x)$ para alguns valores de x .

π	$\pi(x)$	$x/\ln(x)$	$\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$	$\frac{\pi(x)}{x}$
10	4	4,3	0,93	0,4
10^2	25	21,7	1,15	0,2500
10^3	168	144,8	1,16	0,168
10^4	1229	1,086	1,13	0,1229
10^5	9592	8,686	1,10	0,0959
10^6	78498	72,382	1,08	0,0785
10^7	664579	620,420	1,07	0,0664
10^8	5761455	5428,681	1,06	0,0576
10^9	50847534	48254,942	1,05	0,0508
10^{10}	455052511	434294,482	1,048	0,0455



Através da análise da tabela e do gráfico, notamos que apesar da infinitude dos números primos, eles

se tornam cada vez mais distantes à medida que avançamos pelos números inteiros. Além disso, por meio da observação de tabelas semelhantes, Gauss e Legendre foram levados a conjecturar o teorema a seguir, o qual posteriormente foi comprovado por Hadamard e de la Vallée Poussin.

Teorema 4.1. *Dado $x > 0 \in \mathbb{R}$, temos que $\pi(x)$ aproxima assintoticamente $\frac{x}{\ln x}$, isto é,*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (4.1)$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$.

4.2 Função Zeta de Riemann

A função zeta de Riemann é uma função matemática importante na teoria dos números e na análise complexa. Ela é definida como a soma infinita dos inversos das potências dos números naturais elevados a um número complexo s

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (4.2)$$

A função zeta de Riemann é geralmente considerada em números complexos s com parte real maior que 1, mas pode ser definida para uma função analítica no plano complexo com um pólo simples em $s = 1$. Além disso, a função zeta de Riemann tem zeros não triviais que estão localizados em uma linha vertical que passa por $Re(n) = 1/2$, em que dado $n = a + bi$ temos $Re(n) = a$ e $Im(n) = b$.

A função zeta de Riemann é importante porque ela está relacionada à distribuição dos números primos. Especificamente, a hipótese de Riemann afirma que todos os zeros não triviais da função zeta de Riemann têm parte real igual a $1/2$, e isso está intimamente ligado à distribuição dos números primos. De fato, a hipótese de Riemann é considerada um dos problemas mais importantes e desafiadores da matemática.

A função zeta de Riemann também tem muitas outras propriedades interessantes e é amplamente estudada em diversas áreas da matemática, incluindo análise complexa, teoria dos números, teoria das funções L , teoria das formas modulares, entre outras.

A primeira vez que essa função foi vista foi no trabalho de Leonhard Euler, estudando sobre a distribuição dos números primos observou que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \quad (4.3)$$

é divergente, onde p_n denota o n -ésimo número primo. Tornando-se mais uma prova de que existem infinitos números primos. A prova de Euler se baseou na identidade

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots) = \prod (1 + p^{-s})^{-1} \quad (4.4)$$

em que o produto perpassa todos os números primos. Euler pode observar que ela convergia quando $s \neq 1$, devido a isso ele concentrou seus estudos apenas nos números reais. Riemann centralizou seus estudos desta

série no plano complexo ($s \in \mathbb{C}$), ele pode verificar que mesmo no plano complexo a função não está definida para $Re(s) = 1$.

Pietro Mengoli¹ (1626-1686), matemático italiano, publicou em 1650 um tratado matemático no qual ele investigou as somas das séries. O tratado de Mengoli, intitulado “Diversarum reflectionum mathematicarum et physicarum liber” (Livro de Diversas Especulações Matemáticas e Físicas), abordou diversos recursos matemáticos, incluindo séries infinitas.

Em seu tratado, Mengoli estudou várias séries numéricas e examinou suas propriedades. Ele explorou questões relacionadas à convergência e divergência de séries, investigou critérios para determinar a soma de algumas séries e discutiu diferentes técnicas de manipulação de séries.

Em seu tratado publicado em 1650 foi realizado um estudo das somas das séries.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \dots = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \dots$$

A fórmula que expressa a soma das potências inversas dos números naturais só é convergente e possui um valor calculável quando o valor de x excede 1, essa série é conhecida como série harmônica generalizada. A análise dessa série foi realizada por Leonhard Euler, que determinou o resultado para diferentes valores, incluindo x igual a 2.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (4.5)$$

Uma série harmônica generalizada é convergente para todos os valores de x que pertencem ao intervalo aberto $(1, +\infty)$, e essa convergência é absoluta dentro desse mesmo intervalo. Como resultado, a soma dessa série define uma função, conhecida como a função Zeta de Riemann, representada por ζ . Essa função é definida de forma mais precisa da seguinte maneira

$$\zeta : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

Riemann estudou esta função com a intenção de expandir o domínio e imagem ao plano complexo.

¹Pietro Mengoli (Bolonha, 1626 — 1686) foi um matemático e clérigo italiano. Foi aluno de Bonaventura Cavalieri na Universidade de Bolonha, onde o sucedeu, em 1647, permanecendo como professor por 39 anos. Em 1647 formulou o Problema de Basileia, resolvido em 1735 por Leonhard Euler.

4.3 Zeros da função Zeta

O domínio da função Zeta de Riemann é o conjunto de números complexos onde uma função é definida. A função Zeta de Riemann é definida para valores complexos s com parte real maior que 1, ou seja, o domínio da função é dado por:

$$D_\zeta = \{Re(s) \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$$

Fora desse domínio, a função pode não estar definida ou pode ter propriedades diferentes. A função Zeta de Riemann é um objeto fundamental na teoria dos números e tem propriedades notáveis relacionadas aos zeros não triviais localizados no plano complexo.

O domínio pode ser dividido em três regiões:

$$\text{Região I: } \Omega_1 = \{s \in D_\zeta : \Re(s) > 1\}$$

$$\text{Região II: } \Omega_2 = \{s \in D_\zeta : 0 \leq \Re(s) \leq 1\}$$

$$\text{Região III: } \Omega_3 = \{s \in D_\zeta : \Re(s) < 0\}$$

Os zeros da função Zeta podem ser classificados em: zeros triviais e não-triviais. Os zeros triviais da função Zeta de Riemann são os zeros que ocorrem na parte real da função quando a parte imaginária do argumento é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a função Zeta de Riemann se cruza com o eixo real do plano complexo. Os zeros triviais da função Zeta de Riemann ocorrem em números inteiros negativos. Mais especificamente, os zeros triviais ocorrem quando $s = -2, -4, -6, \dots$, onde $s \in \mathbb{C}$ é um número complexo. Esses zeros são chamados de “triviais” porque são relativamente fáceis de calcular e já eram conhecidos antes das descobertas mais importantes relacionadas à conjectura de Riemann.

Por outro lado, os zeros não triviais da função Zeta de Riemann são aqueles que ocorrem na parte crítica do plano complexo (parte real entre 0 e 1). O estudo dos zeros não triviais é de grande importância na teoria dos números e está intimamente relacionado à hipótese de Riemann. A parte crítica da função Zeta de Riemann ocorre quando a parte real a está preservada entre 0 e 1, ou seja, $0 < a < 1$. Os zeros não triviais são os pontos complexos $s = a + bi$ onde a função Zeta de Riemann se anula, exceto pelos zeros triviais já mencionados.

Agora que já compreendemos o que são os zeros triviais e não triviais, podemos regressar a análise das regiões do domínio da função Zeta. Não existem raízes na Região I, em consequência da sua estrutura original que pode ser escrita como o produtório de termos positivos e maiores que zero.

A Região II foi nomeada por Riemann como “faixa crítica” (é uma faixa vertical no plano complexo que está diretamente relacionada aos zeros não triviais da função) onde está a “linha crítica” (é uma linha reta no plano complexo que passa pelo ponto $Re(s) = 1/2$):

$$L_c = \left\{ s \in D_\zeta : \Re(s) = \frac{1}{2} \right\} \subset \Omega_2 \quad (4.6)$$

Região III só existem zeros triviais, que são os inteiros pares negativos $s = \{-2, -4, -6, \dots\}$.

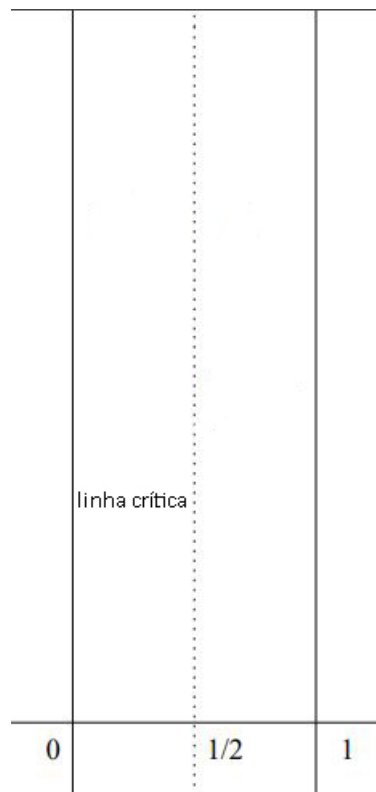
5 Hipótese de Riemann

Teorema 5.1. *Todas as raízes não triviais da função Zeta estão sobre a linha crítica.*

$$\begin{aligned}\zeta : \Omega_3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto \zeta(s)\end{aligned}$$

onde $\Omega_3 = \{s \in D_\zeta : 0 < \Re(s) < 1\}$. Para todo $s \in \Omega_3$,

$$\zeta(s) = 0 \Rightarrow \Re(s) = \frac{1}{2}.$$



A Hipótese de Riemann é uma das questões mais intrigantes e complexas da matemática. Foi formulada no século XIX pelo matemático e está relacionada ao comportamento dos números primos. Essa hipótese desafia os matemáticos há mais de 150 anos e fica sem uma demonstração ou refutação definitiva.

A Hipótese de Riemann está conectada à distribuição dos números primos ao longo da reta dos números complexos. Os números primos são os blocos de construção fundamentais da matemática, mas sua distribuição não segue um padrão regular.

Embora tenham sido realizados avanços avançados na compreensão da Hipótese de Riemann, incluindo a verificação para os primeiros 10.000.000.000.000 de soluções de zeros da função zeta, ainda não foi encontrada uma prova que demonstre sua validade ou invalidez. A hipótese tem aplicações em muitos ramos

da matemática, como a teoria dos números, a análise complexa e a física teórica.

A busca por avanços que possam auxiliar numa eventual demonstração da Hipótese de Riemann tem sido um dos maiores desafios para os matemáticos e continua sendo uma área de pesquisa ativa. Está relacionada a vários problemas importantes na matemática. Alguns desses problemas incluem:

Distribuição dos números primos: A hipótese de Riemann tem arquitetura profunda na distribuição dos números primos. Ela fornece uma estimativa mais precisa sobre como os números primos estão espaçados entre si, especificamente através da função de chamada de contagem primos. A verificação da hipótese de Riemann ajudaria a entender melhor a distribuição dos números primos e resolver questões relacionadas.

Teoria dos números: A hipótese de Riemann está intimamente ligada à teoria dos números. A resolução dessa conjectura abriria caminho para compreender as propriedades fundamentais dos números, como a frequência de ocorrência dos primos e a distribuição dos números inteiros.

Criptografia e segurança: A hipótese de Riemann tem fundamento para criptografia e segurança de dados. Algoritmos criptográficos, como RSA, dependem da dificuldade de fatorar números grandes. A validação da hipótese de Riemann poderia ter impacto na segurança desses algoritmos, uma vez que poderia fornecer novos insights sobre a distribuição dos fatores primos.

Física teórica: Curiosamente, a hipótese de Riemann também está relacionada à física teórica, em particular à teoria das cordas. Certas formulações da teoria das cordas usam a função zeta de Riemann em sua estrutura matemática. A validação da hipótese de Riemann nesse contexto poderia ter codificação para a compreensão e a formulação das teorias físicas fundamentais.

Análise matemática: A resolução da hipótese de Riemann teria uma profunda experiência na análise matemática. Isso poderia levar a novas técnicas e resultados na teoria analítica dos números, análise complexa e outras áreas da matemática relacionadas.

5.1 Solução apresentada por Michael Atiyah

Em 2018, o matemático Michael Atiyah¹ vencedor de importantes prêmios na matemática, tendo ganhado a medalha Fields e o prêmio Abel, apresentou uma palestra intitulada “O Último Teorema” no Heidelberg Laureate Forum, onde afirmou ter encontrado uma prova para a Hipótese de Riemann. Essa declaração gerou grande interesse e especulação dentro da comunidade matemática.

No entanto, é importante ressaltar que a afirmação de Atiyah não foi acompanhada de uma divulgação formal da prova e, desde então, não foram apresentados detalhes matemáticos suficientes para que outros especialistas possam avaliar e validar sua alegação. Como resultado, a validação da suposta solução da Hipótese de Riemann por Atiyah ainda não foi estabelecida.

A solução da Hipótese de Riemann é um problema extremamente complexo e desafiador, que tem desafiado os matemáticos há mais de um século. Requer um entendimento profundo da teoria dos números e da análise complexa, e várias abordagens e técnicas matemáticas foram desenvolvidas ao longo dos anos na tentativa de resolver esse problema.

¹Michael Francis Atiyah, (Hampstead, Londres, 22 de abril de 1929 — 11 de janeiro de 2019), foi um matemático britânico de origem libanesa, considerado um dos expoentes da geometria do século XX.

No caso específico da declaração de Atiyah, muitos matemáticos expressam ceticismo em relação à sua alegação, argumentando que é necessário um escrutínio rigoroso e uma revisão por pares antes que uma solução tão importante possa ser aceita. Até o momento, a comunidade de matemática aguardava uma apresentação completa e detalhada da suposta prova de Atiyah para que pudesse ser aprendida e avaliada pelos especialistas da área.

É importante lembrar que a matemática é um campo no qual a validação rigorosa e a revisão por pares são essenciais. A afirmação de ter resolvido um problema tão importante como a Hipótese de Riemann requer uma apresentação completa e convincente da prova, seguida por uma avaliação e confirmação independente por parte dos matemáticos especializados na área.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos brevemente a trajetória de vida Bernhard Riemann e suas contribuições acadêmicas na matemática. Na geometria teve um papel fundamental, suas ideias revolucionaram o campo e se estabeleceram como bases para o desenvolvimento de geometrias não euclidianas e a compreensão da geometria diferencial. Na análise complexa as contribuições de Riemann foram inovadoras e tiveram um impacto significativo no campo. Seu trabalho estabeleceu as bases para o estudo das funções complexas, das superfícies de Riemann e da relação entre a análise complexa e outros ramos da matemática. Além da formulação da Hipótese de Riemann uma das conjecturas mais importantes e desafiadoras da teoria dos números.

Ao decorrer do trabalho dissertamos sobre o Clay Mathematics Institute uma organização sem fins lucrativos fundada em 1998 com o objetivo de promover a matemática e incentivar a pesquisa em áreas desafiadoras. Uma das iniciativas mais conhecidas do CMI é o “Problemas do Milênio”, uma lista de sete problemas matemáticos não resolvidos que foram considerados tão importantes e difíceis que o instituto oferece uma recompensa de um milhão de dólares para qualquer pessoa que conseguisse resolver um desses problemas. E ao longo do trabalho esclarecemos sobre todos os 7 problemas do milênio, expondo toda a história por trás desses problemas e os apresentando de forma mais equilibrada possível, visando traduzir os principais pontos que poderiam gerar dificuldades na compreensão dos problemas.

Sendo uns dos focos do trabalho a Hipótese de Riemann, se fez necessário uma parte dedicada aos números primos, pois uma melhor compreensão tornaria mais fácil a interpretação sobre a função Zeta, que é parte fundamental da Hipótese.

Referências Bibliográficas

AGUILERA-NAVARRO, M. C. K. et al. A função zeta de riemann. *RECEN-Revista Ciências Exatas e Naturais*, v. 1, n. 1, p. 23–47, 1999.

GONÇALVES, A. Introdução à álgebra. Impa, 1979.

HILBERT, D. *Hilbert's problems*. 1900.

JAFFE, A. M. The millennium grand challenge in mathematics. *Notices of the AMS*, v. 53, n. 6, p. 652–660, 2006.

MAGALHÃES, L. T. Análise complexa em uma variável e aplicações. *IST, Fevereiro de*, 2004.

MENEZES, S. V. L. R. de; AVILA, J. A. J. A hipótese de riemann: os zeros de uma região retangular complexa. 2015.

MOREIRA, C. A.; AVILA, J. A. J. *A Hipótese de Riemann: uma Perspectiva Generosa*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, SBM/PROFMAT/UFSJ, 2015.

PESSOA, L. V. Introdução a análise complexa. *IST, Maio de*, 2008.

PIZZANI, L. et al. A arte da pesquisa bibliográfica na busca do conhecimento. *RDBCI: Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação*, v. 10, n. 2, p. 53–66, 2012.

SANTOS, J. C. A hipótese de riemann—150 anos. *Desenvolvido pela Faculdade de Ciência da Universidade do Porto (FCUP). Página pessoal. Apresenta conteúdo com o seu currículo. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/Acesso em>*, v. 27, 2011.

A Os 23 problemas de Hilbert

David Hilbert¹, um matemático alemão, apresentou uma lista de 23 problemas na Conferência Internacional de Matemáticos em 1900, conhecida como "Problemas de Hilbert". Esses problemas foram formulados para guiar o desenvolvimento da matemática no século XX, abrangendo várias áreas da disciplina. Alguns dos problemas foram resolvidos, enquanto outros permanecem em aberto.

Continuidade das soluções de diferenças lineares: Hilbert perguntou se todas as soluções de diferenças lineares com coeficientes polinomiais têm propriedades analíticas. Esse problema foi parcialmente resolvido por Gösta Mittag-Leffler² e Émile Picard³.

Teoria dos números: Hilbert considerou várias questões sobre a teoria dos números, a existência de soluções inteiras para certas equações diofantinas e a prescrição dos critérios de irracionalidade para constantes matemáticas importantes.

Axiomatização da matemática: Hilbert estava interessado em estabelecer uma base sólida para a matemática através de sistemas axiomáticos. Ele observou a pesquisa sobre a consistência e completude dos sistemas axiomáticos, bem como a extensão dos métodos de prova formais.

Geometria: Hilbert formulou problemas relacionados à geometria, como a axiomatização da geometria euclidiana, a investigação da concordância dos axiomas da geometria e a análise das propriedades dos poliedros.

Teoria das reflexões: Hilbert questionou a possibilidade de desenvolver métodos gerais para resolver polinomiais latentes, além de investigar as propriedades dos sistemas de coexistência simultâneas.

Esses são apenas alguns exemplos dos problemas propostos por Hilbert. Embora alguns tenham sido resolvidos ao longo do tempo, muitos ainda persistem e são objeto de pesquisa ativa na matemática atual. Os Problemas de Hilbert tiveram um papel significativo no avanço da matemática e continuam a inspirar o pesquisador a explorar novas direções e resolver questões fundamentais.

A.1 Provar a hipótese do continuum (HC) de Cantor

A Hipótese do Continuo (HC) afirma que não existe um conjunto infinito cujo cardinal seja afastado maior do que o dos números naturais (contáveis) e perdido menor do que o dos números reais (incontável). Em outras palavras, não existe um conjunto cujo cardinal seja igual ao "próximo" cardinal após o conjunto dos números naturais.

¹David Hilbert (Königsberg, 23 de janeiro de 1862 — Göttingen, 14 de fevereiro de 1943) foi um matemático alemão. Foi eleito membro estrangeiro da Royal Society em 1928. David Hilbert é um dos mais notáveis matemáticos, e os tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da matemática atual.

²Magnus Gösta Mittag-Leffler (Estocolmo, 16 de março de 1846 — Djursholm, 7 de julho de 1927) foi um matemático sueco. Sua área de atuação foi principalmente a análise matemática.

³Charles Émile Picard (Paris, 24 de julho de 1856 — Paris, 11 de dezembro de 1941) foi um matemático francês. Picard fez significativas contribuições nas áreas de equações diferenciais e variáveis complexas.

Essa hipótese foi formulada por Georg Cantor⁴ no final do século XIX enquanto ele explorava a teoria dos conjuntos e investigava as propriedades do infinito. O cantor mostrou que o conjunto dos números racionais é contável, ou seja, tem o mesmo cardinal dos números naturais. Ele conjecturou então que não existe um conjunto cujo cardinal seja maior que o dos números naturais e menor que o dos números reais.

A Hipótese do Continuo é um dos problemas fundamentais da teoria dos conjuntos e foi incluída por Hilbert em sua lista de problemas a fim de estimular a pesquisa nessa área. No entanto, em 1963, o matemático Paul Cohen ⁵experimentou que a Hipótese do Continuo é independente dos axiomas da teoria dos conjuntos conhecidos como "Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha"(ZFC). Isso significa que a hipótese não pode ser provada nem refutada dentro desse sistema axiomático. Portanto, a questão da Hipótese do Continuo permanece em aberto e continua sendo objeto de pesquisa ativa.

A.2 Demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética

No segundo problema de Hilbert, David Hilbert estudou a investigação da coerência dos axiomas da aritmética, com o objetivo de estabelecer uma base sólida para a matemática. A aritmética é o ramo da matemática que estuda as propriedades e as operações dos números.

A consistência dos axiomas da aritmética significa que não é possível deduzir uma igualdade ou uma afirmação falsa a partir desses axiomas. Em outras palavras, a aritmética não pode ser usada para provar uma afirmação que seja logicamente contraditória ou que seja falsa.

No entanto, o problema de demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética é extremamente desafiador. Em 1931, o matemático austríaco Kurt Gödel ⁶ provou o chamado "Teorema da Incompletude", que estabelece limitações fundamentais para qualquer sistema formal que seja suficientemente poderoso para expressar a aritmética.

Gödel mostrou que, dentro de um sistema formal suficientemente poderoso, é impossível provar a sua própria consistência. Em outras palavras, qualquer sistema capaz de expressar a aritmética não pode provar que é consistente usando apenas os seus próprios axiomas.

Portanto, a demonstração da compatibilidade dos axiomas da aritmética requer métodos e técnicas adicionais, além dos próprios axiomas da aritmética. Isso geralmente envolve o uso de técnicas de lógica matemática e teoria dos conjuntos, como a teoria dos modelos.

Embora a consistência dos axiomas da aritmética não possa ser provada dentro do próprio sistema, é possível estabelecer a consistência em relação a sistemas mais abrangentes ou a teorias mais poderosas. No entanto, isso geralmente requer uma introdução de axiomas adicionais ou a utilização de métodos não diretamente relacionados à aritmética.

⁴Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (São Petersburgo, 3 de março de 1845 – Halle, 6 de janeiro de 1918) foi um matemático alemão nascido no Império Russo. Conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos

⁵Paul Joseph Cohen (Long Branch, 2 de abril de 1934 — Stanford, 23 de março de 2007) foi um matemático estadunidense. É mais conhecido pela sua prova da independência entre a hipótese do continuum e o axioma da escolha da teoria de conjuntos de Zermelo–Fraenkel, a forma de axioma mais aceita da teoria dos conjuntos. Esta demonstração valeu-lhe a Medalha Fields, em 1966.

⁶Kurt Friedrich Gödel (Brünn, 28 de abril de 1906 — Princeton, 14 de janeiro de 1978) foi um filósofo, matemático e lógico austríaco, naturalizado norte-americano. Considerado, um dos mais importantes lógicos da história.

Em resumo, o problema de demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética é um desafio profundo que tem uma sintaxe fundamental para a matemática. O resultado de Gödel estabelece a possibilidade de resolver completamente esse problema usando apenas os recursos da própria aritmética.

A.3 Pode-se provar que dois tetraedros têm o mesmo volume (sob certas condições)?

O terceiro problema de Hilbert, proposto por David Hilbert em 1900, está relacionado à prova de que, se dois poliedros têm o mesmo volume, então eles são de fato congruentes, ou seja, têm formas indiferentes. Conforme explicou Hilbert:

Em duas cartas a Gerling, Gauss mostrou-se preocupado que alguns teoremas da geometria dos sólidos dependiam do método da exaustão, ou, na nomenclatura moderna, no axioma da continuidade (ou no axioma de Arquimedes). Gauss menciona, em particular, o teorema demonstrado por Euclides, que duas pirâmides de mesma altura estão para si como suas bases. O problema análogo para a geometria plana foi resolvido. Gerling também teve sucesso ao provar a igualdade de volume para poliedros simétricos, dividindo-os em partes congruentes. Apesar disto, parece ser provável que uma prova genética deste teorema de Euclides seja impossível. Isto seria resolvido ao se exibir dois tetraedros de mesma base e mesma altura, mas que não possam ser quebrados em tetraedros congruentes, e que não possam ser combinados com tetraedros congruentes para formar poliedros que possam, estes, serem quebrados em tetraedros congruentes.

A ideia por trás do terceiro problema de Hilbert é estabelecer a conexão entre a geometria dos poliedros e suas propriedades volumétricas. A pergunta específica é se é possível determinar a congruência de dois poliedros apenas com base em seus volumes, sem a necessidade de considerar outras propriedades, como ângulos e comprimentos de arestas.

Max Dehn⁷, um aluno de Hilbert, solucionou essa questão em 1902 (ou entre 1900 e 1901). A prova envolveu a criação de um novo elemento invariante, chamado de “invariante de Dehn”, que leva em consideração os ângulos entre as faces e as medidas das arestas do poliedro.

Esse invariante, δ , não sofre alterações durante a transformação e recomposição do poliedro. No entanto, quando comparamos um tetraedro regular e um cubo com o mesmo volume, obtemos valores diferentes para o invariante de Dehn.

A.4 Construir todos os espaços métricos em que as linhas são geodésicas

Dentro do campo da matemática, o quarto problema proposto por Hilbert, abordava uma questão central no âmbito da geometria. Em uma alternativa ao enunciado original, buscava-se determinar quais geometrias poderiam se aproximar mais da geometria Euclidiana quando os axiomas de ordenação e incidência

⁷Max Wilhelm Dehn (Hamburgo, 13 de novembro de 1878 — Black Mountain, 27 de junho de 1952) foi um matemático alemão e aluno de David Hilbert. Conhecido por seus trabalhos sobre geometria, topologia e teoria geométrica de grupos.

eram prescrições, os axiomas de congruência eram enfraquecidos e o postulado das paralelas era omitido. A solução para esse problema foi apresentada por Georg Hamel⁸.

Para entender melhor, um espaço métrico é um conjunto com uma função de distância que mede a distância entre dois pontos. No contexto deste problema, estamos interessados em espaços métricos nos quais as geodésicas são representadas por linhas retas. Em outras palavras, queremos encontrar todos os espaços nos quais as trajetórias mais curtas entre pontos siga uma linha reta.

Resolver esse problema envolve determinar todas as possíveis estruturas métricas em que as linhas retas são geodésicas. Isso implica considerar diferentes propriedades e características dos espaços métricos, como a curvatura, a topologia e as restrições impostas pelos axiomas geométricos.

Até o momento, não existe uma solução completa para o quarto problema de Hilbert. No entanto, foram estudos contemporâneos na teoria da geometria diferencial, especialmente no campo da geometria riemanniana, que investiga espaços métricos com curvatura variável. Esses estudos têm contribuído para a compreensão dos espaços métricos nos quais as linhas são geodésicas.

Embora algumas soluções tenham sido satisfatórias para o problema, incluindo uma proposta de Rouben V. Ambartzumian⁹, o enunciado original de Hilbert tem sido considerado impreciso para permitir uma resposta conclusiva.

Apesar de existirem abordagens para resolver o problema, o proposto original enunciado por Hilbert é considerado vagamente formulado, o que torna difícil obter uma resposta definitiva.

A.5 Todo grupo contínuo é automaticamente um grupo diferencial?

O quinto problema proposto por Hilbert inicialmente parecia ter uma resposta negativa, no entanto, com algumas modificações e refinamentos, tornou-se viável fornecer uma resposta afirmativa. Como afirmado por Andrew Gleason¹⁰:

Muitos matemáticos não estão cientes de que o problema, como proposto por Hilbert, não é o problema que vem sendo chamado de quinto problema de Hilbert. Foi mostrado bem cedo que o que ele estava propondo às pessoas era falso. Ele perguntou se a ação de um grupo localmente euclidiano sobre uma superfície era sempre analítica, o que é falso... É preciso mudar a questão consideravelmente para chegar à pergunta que ele estava interessado em saber se era verdade. Eu acho que isto é interessante. É também parte de como a teoria matemática se desenvolve. As pessoas tem ideias sobre como as coisas devem ser, e propõem isto como questões a serem trabalhadas, mas depois isto não se mostra válido.

O quinto problema de Hilbert está relacionado à estrutura dos grupos contínuos e a questão de se todo grupo contínuo é automaticamente um grupo diferencial.

⁸Georg Karl Wilhelm Hamel (Düren, 12 de setembro de 1877 — Landshut, 4 de outubro de 1954) foi um matemático alemão com interesse em mecânica, fundações da matemática e análise complexa.

⁹Rouben V. Ambarzumjan, Ielabuga, 28 de outubro de 1941) é um matemático soviético-armeniano.

¹⁰(Fresno, 4 de novembro de 1921 — Cambridge (Massachusetts), 17 de outubro de 2008) foi um matemático estadunidense.

Um grupo contínuo é um conjunto com uma operação binária que apresentou certas propriedades de associatividade, identidade e inversos, e também possui uma topologia em que a operação é contínua. Um grupo diferencial, por outro lado, é um grupo que possui uma estrutura adicional de variedade diferenciável, onde a operação é suave.

A questão de se todo grupo contínuo é automaticamente um grupo diferencial é um problema complexo que envolve o estudo das propriedades topológicas e diferenciáveis dos grupos. A resposta a essa pergunta não é trivial e depende das características específicas do grupo em consideração.

De fato, existem exemplos de grupos contínuos compatíveis que não podem ser dotados de uma estrutura diferencial com a operação do grupo. Esses são chamados de grupos contínuos que não são grupos diferenciáveis. Portanto, nem todo grupo contínuo é automaticamente um grupo diferencial.

No entanto, existem resultados importantes na teoria dos grupos que estabelecem condições em que um grupo contínuo pode ser dotado de uma estrutura diferencial. Por exemplo, o teorema de Lie afirma que um grupo de Lie, que é um grupo contínuo com uma estrutura suave, pode sempre ser dotado de uma estrutura diferencial compatível com a operação do grupo.

Em resumo, embora nem todo grupo contínuo compatível seja automaticamente um grupo diferencial, existem condições específicas, como a estrutura de grupo de Lie, que garantem a existência de uma estrutura diferencial com a operação do grupo. O quinto problema de Hilbert levanta a questão da relação entre grupos contínuos e grupos diferenciáveis, e seu estudo contribui para o desenvolvimento da teoria dos grupos e da geometria diferencial.

A.6 Transformar toda a Física em axiomas

O sexto problema de Hilbert, refere-se à tentativa de estabelecer um conjunto de axiomas abrangentes que possam fundamentar e descrever todos os aspectos da física. O objetivo é transformar a física em uma estrutura axiomática consistente, semelhante à matemática, onde todas as teorias físicas podem ser deduzidas a partir de um conjunto de axiomas fundamentais.

No entanto, a ideia de transformar toda a física em axiomas enfrenta desafios enfrentados. A física é uma ciência empírica que lida com fenômenos observáveis e complexos, e muitas de suas teorias são incorporadas em princípios experimentais e leis empíricas. Diferentemente da matemática, a física lida com a descrição do mundo natural, que está sujeita a reflexões e limitação experimentais.

Apesar dos esforços para buscar uma teoria unificada que abra todos os fenômenos físicos, como a teoria do tudo (Theory of Everything), ainda não foi alcançada uma formulação completa e satisfatória que converta toda a física em um conjunto de axiomas consistentes. Se fossemos montar então axiomas unificados (física e matemática) teríamos que anular algumas verdades matemáticas ou algumas verdades físicas.

A.7 b é transcendente para $a \neq 0, 1$ algébrico e b irracional algébrico?

(ex: $2^{\sqrt{2}}$)

Este problema trata da natureza irracional e transcendental de alguns números. Duas questões específicas são feitas:

I - Em um triângulo isósceles, se a razão entre o ângulo da base e o ângulo do vértice é um número algébrico irracional, então a razão entre a base e o lado será transcendente?

II - a^b é sempre transcendente, quando $a \notin \{0, 1\}$

A resposta positiva à segunda questão foi fornecida por Alexander Gelfond¹¹ em 1934, e posteriormente aprimorada por Theodor Schneider¹² em 1935. Esse avanço é conhecido como o teorema de Gelfond ou o teorema de Gelfond-Schneider.

A.8 A Hipótese de Riemann e a Conjectura de Goldbach

O oitavo problema de Hilbert, relaciona-se à Hipótese de Riemann e à Conjectura de Goldbach.

A Hipótese de Riemann é uma das questões mais notáveis na teoria dos números. Ela foi formulada por Bernhard Riemann em 1859 e está relacionada à distribuição dos números primos. A hipótese afirma que todos os zeros não triviais da função zeta de Riemann têm parte real igual a $1/2$. Embora muitos resultados tenham sido obtidos sobre a distribuição dos números primos, a Hipótese de Riemann permanece um dos grandes enigmas não resolvidos na matemática.

A Conjectura de Goldbach, por sua vez, é uma proposta feita pelo matemático prussiano Christian Goldbach no século XVIII. Ela afirma que todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos. Embora essa conjectura tenha sido verificada para números até valores extraordinariamente altos, ela ainda não foi provada de maneira geral e permanece como um problema aberto na teoria dos números.

O oitavo problema de Hilbert visa explorar a conexão entre a Hipótese de Riemann, relacionada à distribuição dos números primos, e a Conjectura de Goldbach, relacionada à soma de números primos para formar números pares. Até o momento, nenhum resultado conclusivo foi alcançado em relação a essa conexão, e ambas as questões permanecem como desafios em aberto na teoria dos números.

O estudo e a investigação desses problemas contribuíram significativamente para o avanço do conhecimento matemático, estimulando pesquisas contínuas e o desenvolvimento de novas técnicas e abordagens para lidar com a distribuição dos números primos e soma de números primos para formar números pares.

¹¹Alexander Osipovich Gelfond (São Petersburgo, 24 de outubro de 1906 — 7 de novembro de 1968) foi um matemático soviético.

¹²Theodor Schneider (Frankfurt am Main, 7 de maio de 1911 — Freiburg im Breisgau, 31 de outubro de 1988) foi um matemático alemão. É conhecido por ter formulado e provado o teorema de Gelfond-Schneider.

A.9 Achar a lei de reciprocidade mais geral em todo campo de número algébrico

O nono problema de Hilbert, apresentado por David Hilbert em 1900, refere-se à busca pela lei de reciprocidade mais geral em todo campo de número algébrico.

A lei de reciprocidade é um conceito fundamental na teoria dos números e descreve as relações entre resíduos quadráticos e cúbicos. Existem várias leis de reciprocidade conhecidas, como a lei de reciprocidade quadrática de Euler e a lei de reciprocidade cúbica de Gauss. Essas leis estabelecem padrões sobre os resíduos de números inteiros quando elevadas a determinadas potências.

No entanto, o nono problema de Hilbert propõe a busca por uma lei de reciprocidade mais abrangente, que seja válida para todos os campos de números algébricos. Um campo de número algébrico é uma extensão do campo dos números racionais que contém todas as raízes de polinômios com coeficientes racionais.

Encontrar uma lei de reciprocidade geral para todos os campos de números algébricos é um desafio complexo e ainda não foi totalmente resolvido. A questão envolve a compreensão profunda das propriedades dos campos de números algébricos e o desenvolvimento de técnicas e abordagens matemáticas avançadas.

Embora não exista uma resposta definitiva para o problema de Hilbert, o estudo e a pesquisa nessa área têm contribuído para avanços significativos na teoria dos números e na compreensão das leis de reciprocidade em campos específicos. Além disso, esses esforços têm impulsionado a descoberta de relações entre diferentes campos de números e o desenvolvimento de novas técnicas em álgebra e teoria dos números.

A.10 Encontrar um algoritmo que determine se uma equação diofantina tem solução

O décimo problema de Hilbert, trata da busca por um algoritmo que determina se uma decisão diofantina tem solução. A busca por um algoritmo que resolvesse esse problema foi uma questão importante na teoria dos números e na computabilidade. Um algoritmo é um procedimento passo a passo que pode ser executado por um computador para resolver um determinado problema. A declaração consiste no seguinte:

Descrever, em um número finito de operações, se uma dada equação diofantina tem raiz(es) inteira(s)

No entanto, em 1970, o matemático Yuri Matiyasevich¹³ demonstrou que não existe um algoritmo geral para determinar se uma instrução diofantina tem solução. Esse resultado, conhecido como o teorema de Matiyasevich, estabelece que a decisão diofantina é um problema indecidível, ou seja, não há um algoritmo que possa fornecer uma resposta em todos os casos.

Essa descoberta teve profundas implicações na teoria dos números e na teoria da computação. Ela mostra que existem problemas matemáticos que são intratáveis, ou seja, não podem ser resolvidos de maneira

¹³Yuri Vladimirovich Matiyasevich (São Petersburgo, 2 de março de 1947) é um matemático e cientista da computação russo. É conhecido por sua solução negativa do décimo problema de Hilbert.

algorítmica em todos os casos.

Apesar da impossibilidade de um algoritmo geral para a decisão diofantina, ainda é possível tratar diofantinas específicas e soluções usando técnicas específicas da teoria dos números. Além disso, o estudo do décimo problema de Hilbert impulsionou o desenvolvimento de outras áreas da matemática, como a teoria da computabilidade e a teoria dos modelos, que investigam a natureza dos problemas indecidíveis e suas propriedades.

A.11 Formas quadráticas com quaisquer coeficientes numéricos algébricos

Uma expressão polinomial de grau dois, como $(a^2) + (2ab) + (b^2)$, é conhecida como uma forma quadrática, com coordenadores inteiros em que cada termo tem incógnitas elevados a um grau total de 2. O número 9 pode ser expresso usando números inteiros nessa forma quadrática mencionada, atribuindo o valor 1 para a e 2 para b . No entanto, o número 8 não pode ser representado por meio de inteiros nessa forma quadrática. É importante notar que diferentes formas quadráticas podem representar conjuntos idênticos de números inteiros. O objetivo proposto por Hilbert era desenvolver um método de classificação para determinar se duas formas quadráticas representam o mesmo conjunto de números. Embora algum progresso tenha sido feito nesse sentido, a questão permanece sem uma resolução definitiva até o momento.

A.12 Estender o Teorema de Kronecker-Weber para os corpos não abelianos.

O décimo segundo problema de Hilbert, diz respeito à extensão do Teorema de Kronecker-Weber para os corpos não abelianos.

Trata-se da generalização do teorema de Kronecker-Weber para extensões abelianas dos números racionais em relação a qualquer corpo numérico subjacente. Em outras palavras, busca-se encontrar as simbólicas raízes da unidade, como números complexos que representam valores específicos da função exponencial. A condição é que tais números sejam capazes de gerar uma ampla família de corpos numéricos futuros, que se assemelham aos corpos ciclotômicos e seus subcorpos.

A teoria clássica da multiplicação complexa, frequentemente chamada de "Jugendtraum de Kronecker", realiza essa tarefa para o caso de corpos quadráticos imaginários, por meio do uso de funções modulares e elípticas selecionadas com base em uma rede de períodos específicos relacionados ao corpo em questão. Atualmente não está resolvido.

A.13 Demonstrar a impossibilidade de resolver equações de sétimo grau através de funções de somente duas variáveis

A questão inicialmente apresentada consistia em provar que uma equação genérica do sétimo grau, isto é, $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ não pode ser resolvida com a ajuda de funções contínuas de uma variável. A resolução da questão foi alcançada por Andrei Kolmogorov¹⁴ e Vladimir Arnold¹⁵, em 1957, os quais verificam uma versão ainda mais abrangente da proposição, a saber:

Seja f uma função contínua em várias variáveis. Então f pode ser escrita através de uma composição finita de funções contínuas de uma única variável e a operação binária de adição.

$f(x, y) = x \cdot y$ pode ser escrita como $f(x, y) = \exp(\log x + \log y)$

$f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$ pode ser escrita como $f(x, y, z) = \exp(\exp(\log y + \log \log x) + (-\log z))$

No entanto, se forem restrições propostas no problema forem mais rigorosas para algo além da continuidade simples das funções, a questão permanecerá sem uma solução definitiva.

A.14 Provar o carácter finito de certos sistemas completos de funções

A inspiração para o 14º problema de Hilbert surgiu de uma pesquisa anterior que ele conduziu, expondo que estruturas algébricas denominadas anéis surgindo de uma maneira específica de estruturas mais complexas, devem ser geradas de forma finita, ou seja, podem ser descritas apenas um número limitado de elementos fundamentais. Hilbert questionou se o mesmo princípio se aplicava a uma classe mais ampla de anel. Em 1958, Masayoshi Nagata¹⁶ resolveu a questão encontrando um contra-exemplo

A.15 Desenvolver bases sólidas para o cálculo enumerativo de Schubert

Hilbert propôs aos matemáticos que estabelecessem uma fundamentação sólida para o cálculo enumerativo de Schubert, um ramo da matemática que aborda questões de contagem na geometria. Os estudiosos progrediram consideravelmente na tarefa, embora a resolução completa do problema ainda esteja pendente, se considera como um problema resolvido de forma parcial. Dividindo a questão, como agora ela seria conhecida, em cálculo de Schubert e geometria enumerativa, o primeiro é fundamentado nas bases da topologia de Grassmanianos, e da teoria da interseção.

¹⁴Andrei Nikolaevich Kolmogorov (Tambov, 25 de abril de 1903 — Moscou, 20 de outubro de 1987) foi um matemático soviético, que fez contribuições significativas em teoria das probabilidades, topologia, lógica intuicionista, turbulência, mecânica clássica, Teoria Algorítmica da Informação e análise de algoritmos.

¹⁵Vladimir Igorevich Arnold (Odessa, 12 de junho de 1937 — Paris, 3 de junho de 2010) foi um matemático russo.

¹⁶Aichi, 9 de fevereiro de 1927 – Quioto, 27 de agosto de 2008) foi um matemático japonês, conhecido por seu trabalho sobre álgebra comutativa e geometria algébrica. Foi professor da Universidade de Quioto.

A.16 Topologia de curvas e superfícies algébricas

Uma expressão na forma $ax + by = c$ representa uma reta, enquanto uma aprovação com termos quadráticos corresponde a uma seção cônica de natureza variada - parábola, elipse ou hipérbole. Hilbert buscou uma teoria mais abrangente para descrever as formas que os polinômios de grau mais elevado poderiam adquirir. Até o momento, a questão permanece sem solução, inclusive para polinômios de grau relativamente baixo, como oito.

A.17 Topologia de curvas e superfícies algébricas

Este desafio envolve a demonstração de que, se uma expressão polinomial com números reais sempre produz resultados maiores ou iguais a zero, então essa expressão pode ser decomposta em uma soma de quadrados de funções racionais. A resolução desse problema foi alcançada por Émil Artin¹⁷ e Otto Schreier¹⁸, os quais elaboraram a teoria dos corpos formalmente reais como meio de verificar a conjectura.

A.18 Construir um espaço euclidiano com poliedros congruentes

Hilbert solicitava a construção de espaço a partir de poliedros congruentes. Diante disso, ele foi dividido em três partes, no entanto, apenas uma delas foi resolvida, permanecendo, assim, em aberto

A.19 As soluções dos problemas regulares no calculado das variações são sempre necessariamente analíticas?

A área do cálculo de variações se concentra na otimização de certas categorias de funções como funcionais. Nos seus problemas 19 e 20, Hilbert questionou se determinadas classes de problemas no calculado de variações possuem soluções (problema 20) e, se sim, se essas soluções são notavelmente suaves (problema 19).

A.20 Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um determinado grupo monodrômico

Esse problema é amplamente reconhecido como o problema de Riemann e Hilbert. O problema original está enunciado abaixo:

Prova da existencia de equações diferenciais lineares com um grupo monodrômico prescrito Na teoria das equações lineares diferenciais com uma variável independente z , eu gostaria de indicar um importante problema sobre o qual, muito provavelmente, o próprio Bernhard Riemann pode

¹⁷Emil Artin (Viena, 3 de março de 1898 — Hamburgo, 20 de dezembro de 1962) foi um matemático austríaco

¹⁸Otto Schreier (Viena, 3 de março de 1901 — Hamburgo, 2 de junho de 1929) foi um matemático austríaco.

ter pensado. O problema é o seguinte: Para mostrar que sempre existe uma equação diferencial linear da classe Fuchsian, com dados pontos singulares e grupo de monodromia. O problema requer a produção de n funções da variável z , regular através do plano complexo z , exceto nos pontos singulares dados; nesses pontos as funções podem se tornar infinitas de apenas ordem finita, e quando z descreve circuitos sobre esses pontos as funções devem sofrer a substituição linear prescrita. A existência de tais equações diferenciais lineares foi mostrada ser provável pela contagem de constantes, porém a prova rigorosa foi obtida apenas para o caso particular no qual as equações das substituições dadas tiverem todas as raízes com unidade de magnitude absoluta. Ludwig Schlesinger foi o autor dessa prova, baseado na teoria de Henri Poincaré das Funções Fuchsianas zeta. A teoria das equações diferenciais lineares teria, evidentemente, uma apresentação mais completa se o problema aqui apresentado pudesse ser apresentado por um método perfeitamente geral.

A.21 Uniformizar as curvas analíticas através de funções automorfas

O problema de Hilbert indaga se toda curva algébrica ou analítica pode ser escrito em termos de funções de valor único. A questão foi resolvida no caso unidimensional e continua sendo investigada em situações mais complexas.

A.22 Desenvolver um método geral de resolução no cálculo de variações

O último dos desafios propostos por Hilbert, o vigésimo terceiro problema, Em contraste com os outros 22 problemas, o vigésimo terceiro não se trata tanto de um problema específico, mas sim de um estímulo ao avanço do fluxo de análises de variações. Com algumas observações introdutórias criticando a segurança de progresso que havia sido feito durante o final do século XIX. A declaração original sobre o último problema de Hilbert:

Até agora, eu mencionei geralmente problemas o mais definidos e especiais quanto possível... No entanto, eu gostaria de fechar com um problema genérico, nomeado com a indicação de um ramo de matemáticos repetidamente mencionados nessa palestra, que, apesar do considerável avanço nos últimos tempos dados por Weierstrass, não recebe o a apreciação geral que, em minha opinião, é merecida, o cálculo das variações.