

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE
GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**INFINITOS, PARADOXOS E LIMITE: UMA JORNADA NA HISTÓRIA
DA MATEMÁTICA**

MARIA DO CARMO LINHARES DE CARVALHIO

GOIÂNIA

2023

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC – Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Maria do Carmo Linhares de Carvalho

Matrícula: 20181010940245

Título do Trabalho: INFINITOS, PARADOXOS E LIMITE: UMA JORNADA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais incluídos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 31 / 05 / 2023.



MARIA DO CARMO LINHARES DE CARVALHO

**INFINITOS, PARADOXOS E LIMITE: UMA JORNADA NA HISTÓRIA
DA MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Goiás – IFG -
Câmpus Goiânia, como requisito parcial para
obtenção do título de Licenciado em
Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Aline Mota de Mesquita Assis

GOIÂNIA

2023

C331i	Carvalho, Maria do Carmo Linhares da. Infinitos, paradoxos e limite: uma jornada na História da Matemática / Maria do Carmo Linhares de Carvalho. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023. 68 f.: il. Orientadora: Prof. Dr. Aline Mota de Mesquita Assis TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. 1. Matemática – história - paradoxos. 2. Matemática – infinitos - limite. 3. Cálculo diferencial. I. Assis, Aline Mota de Mesquita (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título. CDD 510
-------	--

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
 Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

INFINITOS, PARADOXOS E LIMITE: UMA JORNADA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

por

MARIA DO CARMO LINHARES DE CARVALHO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Dr^a. Aline Mota de Mesquita Assis

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 12 de junho de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof^a. Dr^a. Aline Mota de Mesquita Assis (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Me. Rogério da Silva Cavalcante (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Me. João Batista de Paula Abreu (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Rogerio da Silva Cavalcante, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/06/2023 15:59:54.
- Joao Batista de Paula Abreu, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/06/2023 15:58:31.
- Aline Mota de Mesquita Assis, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/06/2023 15:57:41.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 29/05/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 413153
Código de Autenticação: 26e00ea5a3



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Rua 75, nº 46, Centro, GOIÂNIA / GO, CEP 74055-110
(62) 3227-2805 (ramal: 2805)

DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho à **vida**, em todas as suas manifestações, nuances e dégradés, que nos presenteia com uma “infinitude” de maravilhas, nos brinda com diferentes “paradoxos”, e nos oferece “limites” para compreendê-la.*

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer à minha querida filha Poliana pelo seu apoio e paciência durante todo o processo de elaboração desta tarefa. Sua prontidão para ouvir minhas ideias, preocupações e histórias intermináveis de infinitos, paradoxos e limites foi de um valor inestimável. Sua disposição em dialogar sobre a História da Matemática e compartilhar seu conhecimento mesmo em outra área contribuiu muito para o desenvolvimento deste trabalho. E de novo muito obrigada pelas suas contribuições e conhecimento, e sua capacidade de está sempre disponível para ajudar foi essencial para mim nesse projeto.

À minha orientadora, sou grata pelo sua orientação, apoio e expertise ao longo deste processo. Agradeço por compartilhar seu tempo e conhecimento comigo, e buscar sempre a excelência.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo principal compreender a evolução dos conceitos de infinitos, paradoxos e limites ao longo da História da Matemática, bem como explorar a relação intrínseca entre eles. Para alcançar esse objetivo, realizou-se uma análise das evoluções ocorridas ao longo da história por meio de pesquisa bibliográfica, visando demonstrar como o conhecimento através das histórias contribui para uma melhor compreensão do cálculo diferencial. O estudo teve início na antiguidade, onde os infinitos geraram diversos paradoxos que causaram desconforto entre os gregos. Em seguida, investigou-se o período do renascimento, em que a igreja católica influenciou a concepção do infinito, restando o desenvolvimento da matemática em séculos. Por fim, chegou-se à modernidade, em que o estudo do infinito foi ampliado com a teoria de Cantor e outros matemáticos do século XIX. Paralelamente, foram abordados os paradoxos relacionados aos infinitos, apresentando exemplos como os paradoxos de Zenão, o Paradoxo de Galileu e os paradoxos de Cantor e Russel. Da mesma forma, foi realizado um estudo sobre os limites, buscando mostrar a correspondência entre a ideia do infinito atual e o conceito de limite. Foram explorados métodos como a exaustão de Arquimedes e o método dos máximos e mínimos de Fermat, culminando na descoberta do cálculo diferencial por Newton e Leibniz. Por fim, foram discutidos os conceitos atuais de limite, apresentando as contribuições de Weierstrass e Cauchy. Através desse percurso histórico, buscou-se aprofundar a compreensão dos conceitos de infinitos, paradoxos e limites, ressaltando sua importância para o estudo do cálculo diferencial na atualidade.

Palavras-chave: história da matemática; infinitos; paradoxos e limites

ABSTRACT

This course conclusion work has as main objective to understand the evolution of the concepts of infinities, paradoxes and limits throughout the History of Mathematics, as well as to explore the intrinsic relationship between them. To achieve this objective, an analysis of the evolutions that occurred throughout history was carried out through bibliographical research, aiming to demonstrate how knowledge through stories contributes to a better understanding of differential calculus. The study began in antiquity, where the infinite generated several paradoxes that caused discomfort among the Greeks. Then, the period of the renaissance was investigated, in which the catholic church influenced the conception of the infinite, curbing the development of mathematics in centuries. Finally, modernity arrived, in which the study of infinity was expanded with the theory of Cantor and other mathematicians of the 19th century. At the same time, the paradoxes related to the infinities were addressed, presenting examples such as Zeno's paradoxes, Galileo's Paradox and Cantor's and Russel's paradoxes. Likewise, a study on limits was carried out, seeking to show the correspondence between the idea of the current infinite and the concept of limit. Methods such as Archimedes' exhaustion and Fermat's maximum and minimum method were explored, culminating in the discovery of differential calculus by Newton and Leibniz. Finally, the current limit concepts were discussed, presenting the contributions of Weierstrass and Cauchy. Through this historical path, we sought to deepen the understanding of the concepts of infinities, paradoxes and limits, emphasizing their importance for the study of differential calculus today.

Keywords: history of mathematics; infinite; paradoxes and limits

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação Geométrica dos Números Racionais	18
Figura 2 – Paradoxo do Professor.....	34
Figura 3 – Paradoxo da Dicotomia.....	36
Figura 4 – Paradoxo de Aquiles	38
Figura 5 – Posição relativa das filas 1.....	40
Figura 6 – Posição relativa das filas 2	40
Figura 7 - Roda de Aristóteles	42
Figura 8 – Roda de Aristóteles animada.....	42
Figura 9 – Paradoxo da Roda resolvido por Galileu.....	43
Figura 10 – Relação dos números naturais e seus quadrados	45
Figura 11 - Figura inicial e as iterações da construção do Fractal.....	52
Figura 12 - Conjunto de Cantor.....	53
Figura 13 – Princípio da Exaustão.....	54
Figura 14 – Curva polinomial.....	57
Figura 15 – Curva polinomial com reta cortando a curva dois pontos.....	58
Figura 16 – Curva polinomial com reta cortando-a próxima ao máximo.....	58
Figura 17 – Representação gráfica de limite.....	62

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 UMA CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DOS CONCEITOS DE INFINITOS E INFINITESIMAIS.....	12
2.1 CONCEITOS E ALGUMAS CONSIDERAÇÕES.....	12
2.2 INFINITOS NA IDADE ANTIGA	15
2.3 INFINITOS NA IDADE MÉDIA	19
2.4 INFINITOS NO RENASCIMENTO	21
2.5 INFINITOS NOS TEMPOS PÓS-RENASCIMENTO	24
2.6 INFINITO POTENCIAL E INFINITO ATUAL	30
3 PARADOXOS	32
3.1 PARADOXO – CONCEITUAÇÃO E CONCEPÇÕES.....	32
3.2 PARADOXO 1 – DA DICOTOMIA.....	35
3.3 PARADOXO 2 – DE AQUILES	36
3.4 PARADOXO 3 – DO ESTÁDIO.....	39
3.5 PARADOXO 4 – RODA DE ARISTÓTELES	40
3.6 PARADOXO 5 – DE GALILEU.....	43
3.7 PARADOXO 6 – DE CANTOR.....	45
3.8 PARADOXO 7 – DE RUSSELL	46
4 A HISTÓRIA DO CONCEITOS DE LIMITE COMO REFLEXO DA HISTÓRIA DOS INFINITOS.....	49
4.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	49
4.2 MÉTODO DA EXAUSTÃO.....	53
4.3 MÉTODO DOS MÁXIMOS E MÍNIMOS.....	55
4.4 CÁLCULO DE NEWTON E LEIBNIZ	58
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
REFERÊNCIAS.....	66

1 INTRODUÇÃO

A proposta deste trabalho é mostrar uma visão da trajetória histórica dos conceitos dos infinitos, paradoxos e limites, a importância destes para a Matemática, como foram essenciais na construção da teoria do cálculo diferencial que por sua vez se fundamenta na definição matemática de limite, indispensável para a solução das equações diferenciais.

Serão abordadas as diversas histórias dos paradoxos, mostrando que os paradoxos são consequências quase diretas dos infinitos e que também tiveram grande importância no desenvolvimento da História da Matemática

Além disso o trabalho vai estudar os conceitos de limites, tendo como início as histórias dos infinitos e dos paradoxos e posteriormente introduzir a cronologia dos conceitos de limite baseados na História da Matemática.

Por fim, buscará fazer um relato abrangente, embora sintético, de como o conceito formal de limite se tornará indubitavelmente necessário para a resolução de vários problemas relacionados ao cálculo diferencial. Também serão abordados os conceitos de limite estudados nos livros didáticos atuais.

A metodologia deste trabalho será a pesquisa de natureza qualitativa, e bibliográfica. A problemática que move este estudo é investigar como o conhecimento da história dos infinitos, paradoxos e limites favorece uma melhor apropriação do cálculo diferencial.

Nossa hipótese é de que esse conhecimento é de substancial importância para a formação não só dos futuros matemáticos, mas também dos físicos, engenheiros e todos aqueles que utilizam o cálculo diferencial.

2 UMA CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DOS CONCEITOS DE INFINITOS E INFINITESIMAIS

*Que não seja imortal posto que é chama,
mas que seja infinito enquanto dure.
(Vinicius de Moraes)*

Neste capítulo vamos discorrer sobre as diversas formas de Infinitos que perpassaram na História da Matemática, vamos tecer considerações sobre o desenvolvimento dos conceitos dos infinitos e faremos uma peregrinação ao longo dos séculos, ou até mesmos dos milênios, na História da Humanidade com foco para o desenvolvimento da Matemática, onde o cerne do estudo será a história dos Infinitos e dos Infinitesimais.

Devemos deixar claro que este trabalho tratará do infinito como conceito matemático, apesar de algumas vezes termos sido seduzidos em mostrarmos outras facetas do Infinito. Assim sendo, este capítulo pretende mostrar a importância dos infinitos e infinitesimais dentro da história da Matemática, suas relevâncias e desdobramentos.

2.1 CONCEITOS E ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Desde a mais tenra infância esbarramos com a noção de Infinito, no momento que, ainda crianças olhamos ao céu numa noite clara, sem nuvens e de numerosas estrelas e nos dispomos a contá-las, imediatamente vem o pressentimento de que o número de estrelas não tem fim. São tantas que chegam a ser incontáveis ou seriam infinitas?

A noção dos infinitos sempre esteve impregnada no campo da Matemática desde os tempos mais primórdios e se veste inclusive de uma áurea filosófica, sobrenatural, misteriosa e onipresente, na verdade trata-se de um conceito que até hoje nos fascina, atrai e julgamos enigmático.

Abaixo, podemos perceber algumas questões sobre o infinito:

Pensar no infinito não como uma figura de linguagem, mas como algo relacionado com a realidade, não é simples e nos leva a conclusões muitas vezes inaceitáveis e a outras que nos causam complexidade, pois pensar no infinito é pensar no incomensurável dentro de um corpo de conhecimento que se baseia na capacidade de medir (MORRIS, 1998, p. 9).

Também existe uma tendência em confundir uma quantidade muito grande de elementos com o infinito. Stewart (2019), traz um texto de Arquimedes, um dos maiores gênios da matemática antiga, que em uma carta ao rei Gelão da Sicília, mostra a diferença entre Infinito e uma quantidade muito grande:

Há alguns, rei Gelão, que pensam que o número de grãos de areia é infinito em sua imensidão [...] mas eu tentarei lhe mostrar [...] que, dos números nomeados por mim e dados no trabalho que enviei a Zeuxipo, alguns excedem não só o número da massa de areia igual em magnitude à Terra preenchida, mas também o número da massa igual em magnitude ao Universo (STEWART, 2019, p.21).

Continuando e complementando: “Aqui Arquimedes está promovendo seu novo sistema para nomear grandes números combatendo o uso errado comum do termo ‘infinito’ para denotar ‘muito grande’. Ele tem um sentido claro da distinção.” (STEWART, 2019, p. 21). Nessa carta, chamada *O Contador de Areia*, Arquimedes tentou estimar o número de grãos de areia que caberiam no Universo conhecido na época e ele chegou a uma conclusão surpreendente: esses números não eram infinitos, mas finitos e nomeáveis. Arquimedes foi o primeiro a mostrar que o infinito não é apenas uma ideia abstrata, mas algo que pode ser aproximado e comparado com números finitos.

O infinito é um conceito que fascina e desafia a humanidade desde os tempos antigos. Muitos filósofos, matemáticos e cientistas tentaram compreender e definir o que é o infinito, mas encontraram dificuldades e paradoxos. A história do infinito não é apenas uma história da matemática, mas uma história do desenvolvimento do pensamento lógico e da capacidade de abstração. Ao longo da história, o infinito passou por diversas concepções, desde a ideia de algo ilimitado e inatingível, até a noção de conjuntos infinitos e de diferentes tipos de infinito. O infinito é um tema complexo e controverso, que ainda hoje suscita debates e reflexões.

Para Mora (1978, p. 150) o conceito filosófico de infinito pode ser visto sob diversas perspectivas:

O conceito de infinito pode ser entendido de várias maneiras: 1) o infinito é algo indefinido, por carecer de fim, limite ou termo. 2) o infinito não é definido nem indefinido, porque em relação a ele carece de sentido toda a referência a um fim, limite ou termo. 3) O infinito é algo negativo e incompleto. 4) O infinito é algo positivo e completo. 5) O infinito é algo meramente potencial: está sendo, mas não é. 6) O infinito é algo atual e inteiramente dado.

Já, segundo a língua portuguesa, a palavra infinito pode ser um adjetivo ou um substantivo masculino, sendo conceituado da seguinte forma:

Adjetivo: Sem fim; que não se pode terminar, finalizar; eterno. Que não possui limites, delimitações; infindo: o céu é infinito. Muito grande; imenso, gigante: tinha mágoas infinitas. Que não se consegue contar, mensurar; imensurável: amor infinito. Que não teve princípio nem há de ter fim. Substantivo masculino: Aquilo que não se pode demarcar: o infinito é inalcançável. [Matemática] Grandeza que não se consegue calcular, medir. [Religião] Designação atribuída a Deus, ao que o entendimento humano não consegue alcançar (INFINITO, 2020).

Em várias situações o homem vê-se com a necessidade de compreender e conceituar o infinito, em atribuir a essa palavra um significado que lhe seja plausível a depender da sua perspectiva de mundo ou da área do conhecimento em que está inserido.

Não sendo bastante o conceito de infinitamente grande, na Matemática tem-se também o conceito do infinitamente pequeno e, junto com eles, questões como: O que se pode dizer dos infinitamente pequenos? O conceito de infinitamente pequeno está relacionado ao de infinitesimal, que é uma grandeza tão pequena que não pode ser medida ou comparada com outras grandezas finitas. Esta outra caracterização de infinitos, que se tem desde os primórdios dos tempos, conduz à percepção de que os elementos podem ser infinitamente divididos, de onde surgem os infinitesimais, os quais, por muito tempo, não foram aceitos por todos os matemáticos e físicos, pois envolvem paradoxos e inconsistências lógicas, por exemplo: Como pode uma linha ser formada por segmentos infinitamente pequenos?

Essas questões são desafiadoras e estimulantes para a Matemática e a Física, e mostram que o conceito de infinitamente pequeno não é tão simples quanto parece. Ele requer uma abordagem rigorosa e criativa, que leve em conta as limitações e as possibilidades dos diferentes modelos teóricos. Assim, o

infinitamente pequeno foi e é um tema fascinante e relevante para o avanço do conhecimento científico.

Filosoficamente, infinitesimal é conceituado como

Uma grandeza que pode vir a ser menor que qualquer grandeza determinável, ou, em termos menos apropriados, uma grande tendente a zero. Este conceito foi conhecido pelos gregos, que o empregaram com frequência; é pressuposto nas argumentações de Zenão de Eléia contra o movimento [...] e foi claramente expresso por Anaxágoras, que disse: "Com relação ao pequeno, não há mínimo, mas há sempre um menor, porque o que existe não pode ser anulado" (ABBGNANO, 2007, p. 562).

Já de acordo com a língua portuguesa, infinitesimal pode ser entendido como "Adjetivo: Extremamente pequeno. [Matemática] Diz-se das grandezas infinitamente pequenas, ou consideradas como somas de acréscimos sucessivos infinitamente pequenos" (INFINITESIMAL, 2020).

E os infinitesimais ou os extremamente pequenos provocaram e provocam tanto ou mais desconforto que o infinitamente grande. O conceito de infinitesimal também gerou muitas controvérsias, pois seus paradoxos desafiavam a lógica e a intuição. A história do infinitesimal é, portanto, uma história de descobertas, inovações, conflitos e superações, que mostra como a matemática se desenvolveu ao longo do tempo e como ela se relaciona com outras áreas do conhecimento. Para compreendermos melhor essas relações, faz-se necessário apreender a história do desenvolvimento desse conceito, que será apresentada a seguir.

2.2 INFINITOS NA IDADE ANTIGA

A idade antiga se inicia por volta de 3500 a.C. quando o homem desenvolveu a primeira forma escrita e acaba no ano de 476 d.C., no final do império romano. Segundo Boyer (1974), o tempo e a história são contínuos, não têm emendas, mas quando são feitas divisões fica mais conveniente e mais fácil para nós humanos entendermos a história. Para uma melhor compreensão do conceito de infinito, toma-se por ponto a antiguidade grega, uma vez que a Grécia, na idade antiga, é considerada o berço da Matemática, pois foi lá onde se deu o início do seu

desenvolvimento, levando-se em conta os seus postulados, princípios básicos e de ordenamento. Também lá se deu o desenvolvimento da teoria dos números com a Escola Pitagórica, que referenciava e idealizava os números, além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, ademais era ainda uma irmandade unida por ritos secretos e cerimônias, pode-se dizer uma seita. O pitagorismo fazia dos números a essência de seus estudos, tudo pode ser explicado com a existência dos números inteiros, suas razões ou proporções. Os gregos também usavam a álgebra geométrica em processos para efetuar operações algébricas, assim como para a explicação dos teoremas.

Eves (2011, p. 98) explica mais claramente:

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico.

Ainda de acordo com Eves (2011), os gregos antigos faziam distinção entre a logística e a teoria dos números (a aritmética) que era a prática de calcular com os números e usavam a geometria algébrica para elaborar seus cálculos. Semelhantemente, Boyer (1974, p. 91) ressalta que:

Na Grécia antiga fazia-se uma clara distinção não só entre teoria e aplicação como entre computação de rotina e o estudo teórico das propriedades dos números. Àquela que os matemáticos gregos, ao que se diz, olhavam como desprezo, era dado o nome de logística, enquanto que a aritmética, um respeitável assunto de investigação filosófica entendia-se considerar apenas esse último aspecto.

Todavia, há de se mencionar que os gregos já conheciam e usavam os infinitesimais através do método de exaustão¹, muito usado para calcular áreas e volumes, se acredita ter sido descoberto por Eudoxo de Cnido² e, segundo Boyer (1974), foi criado para fugir dos infinitos, infinitesimais e seus assombros, este

¹ Método da exaustão- creditado a Eudoxo (c. 370 a.C.). “O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base e a proposição: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.” (EVES, 2011, p.419).

² Eudoxo de Cnido - 408-355? a.C., “discípulo de Platão e tornou-se o mais célebre matemático e astrônomo de seu tempo.” (BOYER, 1974, p.66)

método foi muito usado por Arquimedes³ para calcular áreas e volumes, bem como para provar suas descobertas.

Para prosseguir na história dos infinitesimais, faz-se necessário percorrer a construção do conceito de número, a qual foi se estabelecendo de maneira gradual e morosa, provavelmente se deu por grupos, ou seja, não foi uma descoberta individual. De acordo com (EVES, 2011), O conceito de números e de contagem se desenvolveu antes dos registros históricos, e não se tem comprovação desses fenômenos então a hipótese que os números e a contagem se deram antes dos registros históricos estão no campo das hipóteses.

Como disse Eves (2011), não é difícil imaginar como se deu, e seria coerente pensar que a espécie humana mesmo nos tempos mais remotos já tinha algum senso numérico e também é bastante provável que a contagem se tenha dado pela correspondência biunívoca⁴. E para (EVES, 2011, p. 105): “Os números inteiros são abstrações que surgem do processo de contar coleções finitas de objetos. Mas as necessidades da vida diária requerem, além da contagem de objetos individuais, a medição de várias quantidades, como comprimento, peso e tempo.”

Retomando a (BOYER, 1974; EVES, 2011), os números racionais incluem os números inteiros, os decimais exatos e as dízimas periódicas. Os números racionais definidos como um conjunto de números formado por todos os elementos que podem ser escritos sob forma de fração, como sendo: $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$ e p e q números inteiros. Podem ser representados geometricamente em uma reta numérica horizontal, onde cada ponto corresponde a um número racional, como na Figura 1.

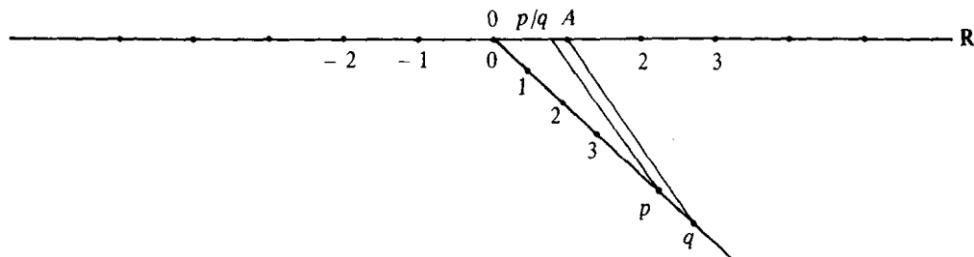
Os gregos antigos conheciam apenas os números inteiros e as frações, que são casos particulares dos números racionais. Eles não tinham uma noção clara de números irracionais, que são aqueles que não podem ser escritos na forma de fração, como a raiz quadrada de 2 ou o número pi. Os gregos se depararam com esses números ao tentar resolver problemas geométricos, como a quadratura do círculo ou a duplicação do cubo, mas não conseguiram desenvolver uma teoria

³ Arquimedes –” natural da cidade grega de Siracusa, situada na ilha da Sicília, figura entre os maiores matemáticos de todos os tempos e certamente foi o maior da Antiguidade. Nasceu por volta de 287 a.C. e morreu durante o saque de Siracusa em 212 a.C.” (EVES, 2011, p. 192).

⁴ Correspondência biunívoca - tal que a um termo de um corresponda um, e apenas um, do outro, e que a cada relação de ordem entre os elementos de um corresponda idêntica relação entre os elementos correspondentes do outro. (ABBAGNANO, 2007)

consistente sobre eles. Foi somente no século XVI que os matemáticos começaram a estudar os números irracionais de forma mais sistemática e rigorosa.

Figura 1 – Representação Geométrica dos Números Racionais



Fonte: Fonte: Reis & Silva (1996 p. 8)

Entretanto existem números que não podem ser representados pela fração $\frac{p}{q}$, estes números são chamados de irracionais, o que significa que não são racionais. A descoberta da existência de números irracionais ou incomensuráveis foi um grande golpe para a filosofia dos pitagóricos, haja vista que a filosofia pitagórica se baseava na teoria de que tudo na vida advinha dos números inteiros, isto os fazia desenvolver um estudo profundo das propriedades destes números, para os Pitagóricos “Tudo é número”. (BOYER, 1974; EVES, 2011)

Segundo Eves (2011), deve ter sido um choque descobrir que há pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional. Essa descoberta foi uma das grandes realizações dos pitagóricos. Em particular os pitagóricos provaram que não há nenhum número racional ao qual corresponda a razão entre a hipotenusa e o cateto de um triângulo retângulo cujos catetos têm a mesma medida. Um exemplo de número irracional é a de *raiz quadrada de dois*, os pitagóricos também estudaram os números figurados, os números perfeitos e a harmonia das esferas. Eles acreditavam que os números eram a essência de todas as coisas e que o universo era regido por leis matemáticas.

Boyer (1992, p. 3) faz a seguinte observação:

Foi um choque para a comunidade matemática grega tomar conhecimento de que há coisas como segmentos de reta incomensuráveis e que a ocorrência dessa situação, é espantosamente comum [...] A descoberta da

incomensurabilidade confrontou os matemáticos diretamente com um processo infinito.

Para os pitagóricos todas as grandezas poderiam ser associadas a um número inteiro, ou a uma razão entre dois números inteiros. Os gregos tinham uma visão “atomista⁵” dos números e as grandezas incomensuráveis, números irracionais, são grandezas contínuas, segundo o pensamento atomista grego, o universo era constituído de partículas indivisíveis, denominadas átomos e essa visão fez gerar muitos paradoxos que os atomistas não puderam explicar.

Eves (2011, p. 673) relata:

Como a teoria pitagórica das grandezas se baseava na crença intuitiva de que todas as grandezas da mesma espécie deveriam ser comensuráveis, a descoberta de segmentos incomensuráveis provocou grandes transtornos. Por exemplo, toda a teoria pitagórica das proporções, com todas as suas consequências, teria que ser jogada fora por infundada. A superação dessa crise não foi fácil nem rápida.

A falha em representar uma grandeza incomensurável teve uma repercussão muito grande para a comunidade matemática grega, bem como no seu posterior desenvolvimento. Os gregos então, a partir dali, ficaram com “horror” aos infinitos, principalmente aos infinitesimais e isso teve importantes consequências na história da matemática (BROLEZZI, 1996). Juntando-se a isso teve a queda do império romano, as invasões bárbaras e, conseqüentemente, a hegemonia grega, com sua geometria praticamente desaparecendo nos séculos seguintes.

2.3 INFINITOS NA IDADE MÉDIA

A Idade Média foi um período de aproximadamente mil anos da história ocidental, costuma-se afirmar que seu início foi a partir da queda do império romano em 476 d.C. e seu término foi a tomada de Constantinopla em 1453.

A questão da natureza infinita ou finita do universo foi muito debatida pelos sábios medievais e, de maneira geral, os filósofos da idade média seguiam as teorias de Aristóteles. E os infinitos como foram vistos? Uma das primeiras ideias de

⁵ Atomista - a teoria atomística de Demócrito (410 a.C.), segundo a qual uma grandeza é formada por um número muito grande de partes atômicas indivisíveis – (ZUMPANO, 2013)

universos infinitos está associada a Giodorno Bruno (1548-1600), filósofo, monge italiano, um dos sábios mais afamados de sua época, não tinha medo de expor suas ideias contrárias aos dogmas da igreja católica. Foi preso em 1591 por heresia, julgado e condenado, sendo queimado vivo em 1600 (MORRIS, 1998).

Sua teoria defendia que o universo era infinito tanto no tempo como no espaço, além de não ter limites, era eterno, e muito mais, pois também sustentava que não existia uma única terra nem um único mundo. Morris (1998, p.36) disse que: “Segundo Bruno, Deus não tivera escolha senão criar um universo infinito. Qualquer outra coisa representaria um uso apenas parcial de seu poder infinito”. Não é difícil imaginar que essas ideias eram por demais perturbadoras para a igreja católica do século XVI e era tempo da inquisição e, sendo assim, Bruno foi uma das vítimas do infinito e pagou com a própria vida.

Eves (2011) afirma que durante este período a produção intelectual foi muito baixa, o ensino praticamente desapareceu, e ainda diz que a Europa medieval desenvolveu o sistema de feudalismo, onde a maior parte da população era composta de servos ou camponeses pobres que tinham o dever de pagar pelo uso da terra com parte de sua colheita, enquanto os senhores eram vassalos de reis ou do Sacro Império Romano. Nesse período, o desenvolvimento da Matemática atingiu níveis muito baixos, uma vez que havia grande repressão às ideias científicas e inovadoras por parte da Igreja Católica, a qual fazia feroz oposição alegando que essas ideias eram heresias. Strogatz (2022, p. 110) exemplifica tal fato relatando o que aconteceu com Copérnico e Giordano Bruno:

[...] o astrônomo polonês Nicolau Copérnico finalmente permitiu a publicação de sua radical teoria de que a Terra se movia em torno do Sol. Para fazê-lo, esperou até estar na iminência de morrer (morreu no momento em que o livro estava sendo publicado), pois temia que o fato de ter retirado o mundo do centro da criação divina enfurecesse a Igreja. Tinha razão em sentir medo. [...] O matemático, filósofo e cosmólogo Giordano Bruno, que propôs, entre outras heresias, que o universo era infinitamente grande e abrigava infinitos mundos, foi julgado pela Inquisição e queimado em Roma no ano 1600.

Morris (1998) confirma a ideia acima com relação a ação da Igreja Católica frente às teorias científicas que se opunha aos seus dogmas, quando afirma que durante a Idade Média, a ideia de um universo finito tomou-se parte da doutrina da

Igreja por força da crescente ascendência de Aristóteles. Assim, quando Giordano Bruno desenvolveu sua doutrina sobre a pluralidade dos mundos, a ideia foi julgada herética.

Ainda confirmando a ideia de que na idade média o desenvolvimento da matemática foi muito reduzido, (BOYER, 1974) afirma que o espírito matemático se apagou, enquanto os homens discutiam menos a teoria da matemática e mais o caminho da salvação.

Faz-se necessário recordar que no século XIV teve a peste negra, que dizimou quase um terço da população da Europa, a guerra dos 100 anos e ainda outras guerras menores que fizeram com que ocorresse uma diminuição na produção agrícola e, como consequência, a fome assolou a Europa, estando, assim, o desenvolvimento da matemática ainda mais comprometido nesse período da história.

2.4 INFINITOS NO RENASCIMENTO

Nos séculos XIV a XV a civilização europeia medieval inicia um período de crescimento no comércio, nas artes e nos saberes, nesse contexto, a matemática também se desenvolveu e enfrentou alguns desafios, como o de lidar com os conceitos de infinito e infinitésimo. Esses conceitos se referem, respectivamente, a quantidades infinitamente grandes e infinitamente pequenas, que não podem ser pensadas ou medidas de forma precisa. A origem desses conceitos remonta à matemática grega e gerou uma crise no pensamento da matemática só foi superado depois de muitos séculos.

Após quase um milênio a Europa voltou florescer para a luz da ciência, da matemática e das inovações. Galileu Galilei foi um dos responsáveis por esse renascimento. Segundo Eves (2011), Galileu Galilei nasceu na cidade de Pisa, Itália, no dia 15 de fevereiro de 1564. Aos 17 anos de idade foi encaminhado pelos pais à universidade de Pisa para estudar medicina, solicitou da família (e conseguiu) permissão para abandonar a medicina e dedicar-se a ciência e a matemática, campos para os quais possuía forte talento natural. Aos 25 anos de idade Galileu foi

indicado professor de matemática da Universidade de Pisa. Foi considerado herege por publicar um livro em que sustentava a teoria de Copérnico. Galileu foi citado a comparecer perante a Inquisição, foi condenado à prisão domiciliar, pelo resto da vida. Morreu cego, na cidade de Florença, no dia 08 de janeiro de 1642 no mesmo ano em que nasceu Isaac Newton.

Galileu vislumbrou o infinito atual, quando, na prisão domiciliar, escreveu um tratado chamado *Diálogos sobre duas novas ciências*, de 1638, onde ele levanta uma questão básica – um tanto paradoxal – sobre o infinito, que um conjunto infinito pode ser igual ao conjunto de sua parte (no final deste capítulo descreveremos mais sobre o infinito atual e suas implicações para a lógica e a geometria). Amadei (2005, p. 30) comenta o tratado de Galileu da seguinte maneira:

Galileu estabelece uma correspondência biunívoca entre todos os números inteiros e todos seus quadrados, e diz: “devemos concluir que existem tantos quadrados quantos são os números”. Demonstra assim que um conjunto infinito, o conjunto de todos os inteiros é igual “em número” ao conjunto de todos os quadrados dos números inteiros, sendo esse por sua vez um subconjunto próprio do conjunto dos números inteiros.

Assim, Galileu, nesse trabalho, abordou a relação biunívoca (se antecipando ao matemático Cantor) existente nos conjuntos infinitos, deste modo ele captou a ideia de conjuntos equipotenciais, que são conjuntos com a mesma cardinalidade, mas ficou muito espantado e surpreendido com o comportamento excêntrico dos infinitos e, talvez por crença ou medo, se recusou a acreditar nesse desempenho. Portanto, ele verificou, acertadamente, que no conjunto infinito o todo não é maior que a parte, mas não concluiu nenhum dos vários atributos dos conjuntos infinitos.

Em seu trabalho, Brito (2016, p. 1) explicou que no século XIX o infinito atual foi definido como uma coleção infinita, ou seja, que um conjunto infinito pode ter o mesmo tamanho de uma parte própria dele mesmo e isso foi para Galileu um paradoxo e como bem observou Cindra (2012, p. 1)

Galileu Galilei, com toda a sua perspicácia, voltou a comentar sobre os paradoxos do infinito, [...] Se todas estas sequências são infinitas, parecia a Galileu que poderia pensar na existência de um infinito maior que outro, mas ele concluiu que talvez o conceito de algo maior ou algo menor, válido para as coleções finitas, não seria aplicável às coleções constituídas de infinitos elementos.

Boyer (1974) confirma esse entendimento quando diz que naquele momento Galileu estava se deparando com a propriedade de conjunto infinito que diz que uma parte dele (do conjunto) pode ser igual ao seu todo. “Galileu concluiu erroneamente que: [...] não se pode dizer que um número infinito é maior que outro número infinito ou mesmo que um número infinito é maior que um número finito.” (BOYER, 1974, p. 241). E ainda,

Galileu concluiu que infinito e indivisibilidade são em sua própria natureza incompreensíveis para nós e piorou ainda mais a situação ao observar que os atributos “maior”, “menor” e “igual” não fazem nenhum sentido quando utilizados para comparar quantidades infinitas. (ZUMPANO, acessado em 2023)

Segundo Boyer (1974), no renascimento houve outra figura de grande importância para a história dos infinitos: trata-se de Boaventura Cavalieri (1598 - 1647) o qual retoma o velho conceito dos indivisíveis da antiga Grécia. Cavalieri foi aluno de Galileu, era integrante da ordem religiosa chamada jesuados, (sim, isso mesmo jesuados e não jesuítas), viveu em Roma e Milão até tornar-se professor em Bolonha, escreveu sobre muitos aspectos da matemática, geometria, trigonometria, óptica e outros.

Cavalieri nunca disse exatamente o que era um indivisível e seus métodos foram extremamente criticados por seus contemporâneos. Ele não conseguiu explicar como um corpo de tamanho finito podia ser formado por um número infinito de elementos e por vezes definiu sua inovação como um mero procedimento pragmático que permitia evitar o uso de métodos matemáticos mais complicados. Mas, embora não pudesse dar nenhuma explicação clara do que era que estava fazendo, deu um dos primeiros passos em direção ao conceito de infinitésimo. (MORRIS, 1998, p. 49)

Apesar das críticas, seu método se tornou uma ferramenta poderosa para o cálculo de áreas e volumes, pois, de acordo com Eves (2011, p. 428), “o método dos indivisíveis, ou outros equivalentes a ele, foram usados por Torricelli, Fermat, Pascal, Saint-Vincent, Barrow e outros. Uma vez que o princípio de Cavalieri simplificava grandemente as fórmulas e os cálculos para se obter áreas e volumes de sólidos.”

2.5 INFINITOS NOS TEMPOS PÓS-RENASCIMENTO

Neste tópico, vamos discutir como os conceitos de infinito evoluíram após o renascimento, período em que houve um grande avanço nas ciências e nas artes. Em vez de usar a periodização da história geral da humanidade para organizar os fatos relacionados aos infinitos, optamos pelo termo "pós-renascimento", pois este estudo sobre infinitos termina com a formulação da teoria do limite. Essa teoria, do século XIX, permitiu tratar rigorosamente os problemas envolvendo infinitésimos e infinitos. Antes disso, porém, muitos outros pensadores contribuíram para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e da análise matemática, explorando as ideias de infinito de maneiras diferentes e criativas.

Tal qual foi usado no tópico anterior o desenvolvimento da história dos infinitos será contada através dos grandes matemáticos que se em seus estudos se depararam com o infinito, assim nas próximas apresentações serão evidenciadas várias figuras importantes na História da Matemática em especial na história do desenvolvimento dos conceitos de infinitos

Pierre de Fermat (1607 - 1665), filho de um comerciante de couro e recebeu sua educação inicial em casa. Como advogado humilde e discreto, reservou o melhor de seu tempo de lazer à matemática. Dentre as variadas contribuições de Fermat à matemática, a mais importante é a fundação da moderna teoria dos números.

René Descartes, (1596-1650), filósofo, físico e matemático francês, nasceu perto de Tours em 1596, aos oito anos de idade foi enviado a uma escola jesuíta em La Fleche. Foi o criador do pensamento cartesiano, sistema filosófico que deu origem à Filosofia Moderna. (EVES, 2011).

Fermat e René Descarte foram responsáveis pela criação da geometria analítica e o uso das coordenadas e, com isso, a geometria clássica foi eclipsada. Boyer (1992) afirma que Fermat foi responsável por desenvolver o método para resolver problemas de máximos e mínimos de uma função e descobriu um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada, também lhe é atribuída a invenção do processo de diferenciação.

John Wallis (1616-1703), nasceu em 1616, em Ashford Kent, Inglaterra, foi um dos matemáticos mais capazes e originais de seu tempo. Foi um escritor produtivo e original em muitos campos e, segundo consta, um dos primeiros a criar um sistema de ensino para surdos-mudos. Foi professor de geometria de Oxford de 1649 até sua morte em 1703. Fez uso sistemático das séries em análise, contribuindo muito nesse campo para abrir caminho para seu grande contemporâneo Isaac Newton. Foi um dos fundadores da Royal Society e publicou *Aritmética do Infinito* que usava os infinitesimais para calcular as áreas das parábolas e hipérbolas. De acordo com Morris (1998), seu trabalho foi intensamente estudado por Newton e o símbolo do infinito utilizado na atualidade foi criado por ele.

O símbolo matemático ∞ representa, é claro, a infinidade. É a imagem de uma curva matemática chamada lemniscata e foi usado pela primeira vez para simbolizar a infinidade em 1656, em *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis. O uso se difundiu rapidamente e hoje o símbolo é universalmente usado por cientistas e matemáticos. (MORRIS, 1998, p. 138)

Isaac Newton⁶ se baseou no cálculo das variações dos infinitamente pequenos, usado na sua teoria da física mecânica. Por sua vez, Leibniz⁷ contribuiu para o Cálculo Diferencial através da geometria algébrica e instaurou o uso os elementos infinitesimais com uma notação bem diferente de Newton, a notação (dx e dy) para as diferenciais, símbolos que até hoje são usados no Cálculo Diferencial, sua abordagem foi distinta da de Newton, e as suas contribuições (de Leibniz), voltadas para uso dos infinitesimais. Hoje é reconhecido que ambos separadamente, um na Inglaterra outro na Alemanha inventaram o Cálculo Infinitesimal. (BOYER, 1974; EVES, 2011; MORRIS, 1998).

Conforme Boyer (1974, p. 291):

Sabe-se que na mais popular apresentação feita por Newton de seus métodos infinitesimais ele considerou x e y como quantidades que fluem, ou fluentes de que as quantidades p e q (acima) eram os fluxos ou taxas de variação; quando redigiu essa Visão do cálculo por volta de 1671 ele substituiu p e q por letras ponteadas.

⁶ Isaac Newton- (1642 – 1727) nasceu em Londres, no ano de 1642, e viveu até o ano de 1727. Cientista, químico, físico, mecânico e matemático, trabalhou na elaboração do cálculo infinitesimal. Durante sua trajetória, ele descobriu várias leis da física, entre elas, a lei da gravidade

⁷ Gottfried Leibniz (1646-1716) foi um filósofo e matemático alemão. Estudioso do cálculo integral e do cálculo binário, que seria futuramente importante para o estabelecimento dos programas de computadores

Boyer (1974) afirma que tanto Leibniz quanto Newton chegaram à mesma conclusão sobre a teoria do cálculo diferencial, embora em momentos diferentes. Newton já havia chegado a ela vários anos antes, enquanto Leibniz alcançou essa conclusão por volta de 1676, e primeira exposição formal do cálculo diferencial foi publicada por Leibniz em 1684. Por outro lado, as três versões do cálculo de Newton, escritas entre 1669 e 1676, permaneceram na forma de manuscrito e só foram publicadas em 1736.

O método do cálculo infinitesimal, uma ferramenta matemática que permite estudar limites, derivadas, integrais e séries infinitas. Leibniz e Newton desenvolveram o cálculo de forma independente, mas com abordagens diferentes. Leibniz se concentrou no problema da tangente e viu o cálculo como uma explicação metafísica da mudança. Newton se interessou pelo cálculo como parte de suas investigações em física e geometria. Ele viu o cálculo como a descrição científica da geração de movimento e grandezas. A questão da prioridade entre os dois matemáticos gerou uma grande controvérsia intelectual, que começou a se intensificar em 1699 e explodiu em 1711. Leibniz publicou seu trabalho primeiro, mas os partidários de Newton o acusaram de plagiar as ideias não publicadas de Newton. Leibniz morreu em 1716, depois que seu patrono, o Eleitor Georg Ludwig de Hanover, se tornou o Rei George I da Grã-Bretanha em 1714. O consenso moderno é que os dois homens desenvolveram suas ideias independentemente.

Semelhantemente, Eves (2011, p. 443) afirma que:

Leibniz tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton.

Sem dúvida alguma Newton e Leibniz foram os descobridores do Cálculo Diferencial que se utiliza das manipulações de equações infinitas e fez enorme sucesso pelas respostas que obtiveram, é importante reconhecer que, na época, havia imperfeições e paradoxos na utilização desses métodos, devido à falta de uma explicação completa e consistente sobre as operações com os infinitesimais e a ausência de uma definição clara do conceito de limite.

Zumpano (2023, p. 4) enfatiza a revolução que eles causaram na Matemática:

(...) durante três séculos, (XVI, XVII e XVIII) o método dedutivo grego foi atropelado, ou seja, a racionalidade grega foi atropelada. Newton e Leibniz oficializaram esse atropelo com a teoria dos infinitesimais que culminou no Teorema Fundamental do Cálculo, a grande ferramenta para calcular áreas, volumes e resolver equações diferenciais (fundamentais para se obter previsibilidade e determinismo, baseiam-se na segunda lei de Newton e na noção de velocidade instantânea.)

Depois que as teorias de Newton e Leibniz foram divulgadas, surgiram muitas críticas da sociedade matemática sobre o assunto (AMADEI, 2005), porque tanto na teoria de Newton quanto na de Leibniz vários pontos ficaram “soltos” e porque eles não souberam definir quem eram exatamente as quantidades infinitamente pequenas, somente quase um século depois puderam tornar-se rigorosas quando introduzidos os conceitos de limites. Vários matemáticos da época ficaram incomodados com a falta do rigor matemático para as manipulações dos elementos infinitesimais, uma vez que as regras de operações para essas quantidades pareciam incompletas e contraditórias.

Jean Le Rond D'Alembert foi abandonado nos degraus da igreja St. Jean Baptiste de Rond e lá recolhido por um casal humilde, um vidraceiro e sua mulher que o criaram como filho. O sobrenome D'Alembert foi adotado por razões desconhecidas. Ele tinha instrução ampla em ciência, direito, medicina e matemática e colaborou na célebre *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts, et de métiers*⁸ (BOYER, 1974, p. 329). Foi um dos matemáticos que fazia críticas às equações diferenciais de Newton e Leibniz e escreveu um artigo para a *Encyclopédie* onde apresentou a definição de limite. Apesar de ser uma definição ainda incompleta, pode-se constatar o indício do conceito de limite para solucionar a questão dos infinitamente pequenos (BOYER, 1974).

Outro estudioso importante na história dos limites é Bernard Bolzano, que nasceu em Praga no ano de 1781. Filho de imigrante italiano, tornou-se padre e foi professor de religião na Universidade de Praga. Tinha forte inclinação para a lógica e a matemática. Foi um homem de cultura e língua alemãs e possuía um vasto conhecimento em várias áreas do saber. Faleceu em 1848 e pode ser considerado um precursor da aritmetização da análise. Zumpano (2023)

⁸ *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* foi uma das primeiras enciclopédias que existiu, tendo sido publicada na França no século XVIII, foi editada por Jean le Rond D'Alembert e Denis Diderot

Bernard Bolzano, foi um dos primeiros a falar livremente sobre o assunto sem os bloqueios existentes à época, esse grande matemático dedicou anos de sua vida a estudar os infinitos e seus paradoxos. Segundo Eves (2011) de acordo com Bolzano, em seu trabalho póstumo de 1850 intitulado "Paradoxien des Unendlichen" (Paradoxos do Infinito), ele (Bolzano) discutiu vários exemplos semelhantes ao paradoxo de Galileu sobre a correspondência biunívoca entre os inteiros positivos e seus quadrados. Ele também percebeu que o infinito do conjunto dos números reais é de um tipo diferente do infinito do conjunto dos inteiros. Nesse trabalho, Bolzano apresentou várias propriedades importantes dos conjuntos infinitos.

Bolzano, em seu livro Paradoxos do Infinito, defende que na Matemática existem duas definições para o infinito, infinito atual e infinito potencial, e afirma que os paradoxos do infinito se anulam quando se usa a linguagem certa:

[...] 2) o infinito existe *matematicamente* no modelo “atual” e não somente “potencial” (exemplo geométrico simples, uma reta infinita), que decorre um mesmo estatuto *lógico* para o finito e para o infinito; 3) esta atualidade se verifica tão bem nos exemplos de coisas não reais, como o espaço e o tempo, como nos domínios dos seres, Deus por certo, mas também às criaturas: “mesmo no domínio do real, nós encontramos por toda parte o infinito”. (AMADEI, 2005, p. 46)

Para chegar a essas conclusões, Bolzano estudou vários modelos de paradoxos semelhante aos de Galileu, constatando que havia diferentes tipos de infinitos, como por exemplo: o infinito dos números irracionais era de um tipo diferente do infinito dos números naturais (ZUMPARNO, 2023).

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, cujos pais eram dinamarqueses, nasceu em S. Petersburgo, Rússia, em 1845. Em 1856 sua família transferiu-se para Frankfurt, Alemanha. O pai de Cantor era um judeu convertido ao protestantismo e a mãe havia nascido na religião católica. O filho tomou-se de profundo interesse pela teologia medieval e seus argumentos intrincados sobre o contínuo e o infinito. Como consequência, abandonou a sugestão do pai de se preparar para a carreira de engenharia a fim de se concentrar em filosofia, física e matemática. Estudou em Zurique, Gottingen e Berlim (onde recebeu a influência de Weierstrass) e obteve o doutorado em 1867. (EVES, 2011, p.615)

Cantor foi grande estudioso do infinito e criou a Teoria dos Conjuntos para justificar o comportamento do infinito, causando grande interesse da comunidade

matemática por esse assunto, mas nem todos aceitaram sua teoria, muitos dos matemáticos da época queriam escapar dos infinitos e ali estava Cantor falando de conjuntos infinitos. Hoje, a teoria dos conjuntos permeia toda a matemática, sendo um de seus alicerces, visto que nela, Cantor desenvolveu vários conceitos e propriedades dos conjuntos infinitos, tais como, números transfinitos, números transcendentos, conjunto enumeráveis e conjuntos equipotentes, dentre outros.

Segundo Lannes (2009), Cantor desenvolveu a teoria dos números transfinitos e deduziu várias propriedades relacionadas à cardinalidade de conjuntos infinitos. Ele destacou o exemplo clássico da correspondência biunívoca entre os números racionais e os números naturais, bem como a demonstração de que os números reais não podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais. Cantor afirmou que o primeiro conjunto tem uma potência (cardinalidade) igual à dos números naturais, enquanto o segundo não possui. Ele observou que existem pelo menos dois tipos de infinito, classificados como "enumerável" (como é o caso dos números naturais) e "continuum" (os números reais).

Sobre a questão de *potência* de um conjunto, indicada por Lannes (2009), o próprio autor esclarece que "A potência é um conceito que estende para o caso infinito a ideia de número de elementos de um conjunto finito. Mais tarde definiu-se como cardinalidade de um conjunto a ideia que abrange os casos finito e infinito." (LANNES, 2009, p. 33).

Cantor descobriu diversos conjuntos de números diferentes com a mesma cardinalidade⁹, por exemplo: o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros quadrados são infinitos com a mesma potência, ou seja, com a mesma cardinalidade, isto quer dizer que eles são enumeráveis, isto porque é possível estabelecer uma relação biunívoca do conjunto dos números inteiros quadrados com o conjunto dos naturais. Ele também mostrou que existem infinitos de diferentes tamanhos (CINDRA, 2012).

Com Cantor, houve uma completa reformulação das noções de espaço e geometria de um espaço, bem como ocorreu uma reformulação das concepções de

⁹ Cardinalidade -Diz-se que dois conjuntos são equipotentes ou que tem a mesma cardinalidade se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre eles. (EVES, 2011, p. 762)

limite, função, continuidade, derivada e integral, reestruturando todo o campo da Análise Matemática (EVES, 2011).

2.6 INFINITO POTENCIAL E INFINITO ATUAL

Na Grécia antiga os matemáticos atomistas já tinham a noção dos conceitos de infinito potencial, aquele que não tem finitude, que nunca acaba, que sempre se pode acrescentar mais um e nunca se consegue chegar ao seu limite, que não tem fim nem existência física. Este infinito é visto como um processo que o número cresce infinitamente, assim sendo, no infinito potencial não há um número maior que outro, porque sempre terá mais um.

A ideia de infinito atual foi “percebida” por Galileu que tomou conhecimento da propriedade dos conjuntos infinitos, onde o todo pode ser igual à sua parte, mas se recusou a aceitar tal concepção, já Bolzano não teve medo de encarar os infinitos com suas complexidades em (EVES, 2011). Bolzano discutiu muitos exemplos análogos ao de Galileu referente à correspondência biunívoca entre conjuntos. Tem-se que a ideia de infinito atual é concebida como uma entidade completa e acabada em que “todos os seus elementos podem ser pensados num ato único, ou ainda, no infinito como objeto” (SENA, 2011, p. 13).

Desta forma, distinguir entre os tipos de infinitos é tarefa necessária e importante para a Matemática. Sena (2011, p. 13), concebe essa distinção da seguinte forma: “o infinito potencial consiste num processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos; o infinito atual não é um processo, é ele próprio um número.”

Cifluentes (2011, p.662) exemplifica o infinito potencial, e o infinito atual, como sendo:

o infinito potencial, ou infinito *em potência*, por exemplo, o infinito dos números naturais que em sua gênese indutiva, um após outro sem fim: 1,2, 3, 4, 5,...; e o infinito atual, ou infinito *em ato*, isto é, o infinito acabado, totalizado, captado ou apreendido como totalidade, por exemplo, o infinito do conjunto dos números naturais pensados simultaneamente: {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}. (CIFLUENTES, 2011, p. 662).

Veja que há uma sutil diferença nos exemplos dado pelo Cifluentes (2011), quando ele se refere a infinito potencial cita os números naturais sem estarem em um conjunto, os números podem adquirir qualquer potência em qualquer instante. E para a definição de infinito atual, os números são elementos de um conjunto, assim, pois, esse infinito tem uma nova forma, ele pode crescer até onde se queira e não indefinidamente como o outro.

Conclui-se, então, que o infinito atual é aquele que tem seu ciclo completo, é aquele que é tão pequeno ou tão grande quanto se queira, mas que ainda não é o infinito potencial. Depois da descoberta do cálculo diferencial por Newton e Leibniz, mesmo com indefinições e incorreções a problemática dos infinitos tomou novos rumos, então veio a teoria dos limites no século XIX e com ela os infinitos e infinitesimais foram parcialmente “domados”. No capítulo 4 será abordada a história dos limites na Matemática.

Complementando essa argumentação traz-se novamente Bolzano que num trabalho póstumo, de 1850, *Paradoxien des Unendlichen (Paradoxos do Infinito)*, mostrou muitas propriedades importantes dos conjuntos infinitos.

o infinito é um conceito também “objetual”, isto é, tão pouco vazio ou contraditório quanto aqueles de número inteiro, fração ou grandeza irracional, donde, pela primeira vez de maneira tão límpida, um mesmo estatuto *lógico* para o finito e para o infinito; 2) o infinito existe *matematicamente* no modelo “atual” e não somente “potencial” (exemplo geométrico simples, uma reta infinita), que decorre um mesmo estatuto *lógico* para o finito e para o infinito; (BOLZANO, 1850, apud AMADEI, 2005, p. 46)

Os paradoxos constituem parte significativa no desenvolvimento histórico do conceito de infinito e contribuem diretamente com a formação do conceito de limite, por isso, faz-se necessário compreendê-los melhor para, assim, conseguir apreender a história e a conceituação de infinito. Para tanto, o próximo capítulo será destinado à história dos paradoxos e suas constituições. Ressalta-se que os paradoxos são consequências diretas da existência dos infinitos abstratos e controverso e das diversas interpretações, concepções dos infinitos na matemática, que, com suas complexidades e sua incompletude de resoluções acabaram por trazer uma paralização no desenvolvimento da matemática por alguns séculos. Paradoxalmente, a busca pela resolução dos paradoxos trouxera descobertas nas teorias de fundamentação dos limites.

3 PARADOXOS

*Amor é fogo que arde sem se ver.
É ferida que dói, e não se sente;
É um contentamento descontente,
É dor que desatina sem doer.
(Luís Vaz de Camões)*

No capítulo anterior, foi exposto que a existência dos infinitos impactou grandemente a evolução da matemática. Isto ocorreu devido ao assombro gerado pelas características dos infinitos, que incluem: não ter começo e nem fim, serem cíclicos como um anel, e até eternos. Além disso, eles são incomensuráveis, indeterminados, ilimitados e podem trazer consigo os paradoxos com suas contradições e incoerências.

Neste capítulo serão abordados alguns paradoxos que estão intimamente relacionados ao conceito dos infinitos, a saber, sete deles: 1) paradoxo da dicotomia, 2) paradoxo de Aquiles, 3) paradoxo do estádio, 4) paradoxo da roda de Aristóteles, 5) paradoxo de Galileu, 6) paradoxo de Cantor, 7) paradoxo de Russel. Estes paradoxos abrangem várias épocas de nossa História, vai desde os gregos até o século XIX. Deve-se salientar que eles tiveram grande importância no avanço e desenvolvimento da matemática.

3.1 PARADOXO – CONCEITUAÇÃO E CONCEPÇÕES

Antes de entrarmos na história dos paradoxos na Matemática, apresentaremos a definição da palavra paradoxo:

Contradição ou oposição aparente: falo melhor quando emudeço. [Gramática] Junção de palavras com sentidos opostos que, usadas na mesma frase, têm o intuito de expressar ou causar uma contradição: "alegria triste" é um exemplo de paradoxo. Opinião contrária ao senso comum: sua vitória como presidente foi um paradoxo político. Ausência de nexos; falta de lógica: a vida é uma morte. Ideia bem fundamentada ou apresentada de forma coerente, mas que possui subentendidos contraditórios à sua própria estrutura. [Filosofia] Contradição que chega, em certos casos, a se opor às razões do pensamento humano ou nega o que a maioria tende a acreditar. Etimologia (origem da palavra **paradoxo**). A palavra paradoxo deriva do grego "parádoksos,os,on", que significa estranho; pelo latim "paradoxon,i". (PARADOXO, 2020)

Vejamos outra definição para paradoxo, abordando o lado filosófico, apresentada por (ABBGNANO, 2007, p. 742):

O que é contrário à 'opinião da maioria', ou seja, ao sistema de crenças comuns a que se fez referência, ou contrário a princípios considerados sólidos ou a proposições científicas. [...] foram chamados às vezes de Paradoxo as contradições oriundas do uso do procedimento reflexivo, na maioria das vezes chamadas de *antinomias*.

Com essas definições, vemos que os paradoxos são fenômenos presentes não apenas na matemática e na lógica, mas também em diversas outras áreas do conhecimento humano, como na filosofia, na linguística, na física, entre outras. Eles podem surgir quando há uma aparente contradição entre ideias, conceitos, fatos ou teorias. Na Figura 2, é possível observar exemplos de paradoxos que se relacionam com o comportamento humano.

Figura 2 – Paradoxo do Professor



Fonte: Araújo (2019)

Ao contrário do que pensa o senso comum, os Paradoxos foram na verdade de grande importância na Matemática, pois, mobilizou toda a comunidade para decifrá-lo e com isso surgiram novos caminhos e conhecimentos. O descobrimento de um paradoxo faz surgir os incompreensíveis e os inexplicáveis, que precisam ser

reconhecidos como tais para serem alcançados, decodificados, explicados e entendidos. Ao olharmos a História da Matemática vemos que, na busca da solução dos paradoxos, foi desenvolvida uma formalização nos conceitos, induzindo uma rigorosa construção da teoria da Matemática.

Tomando como referência as definições citadas acima podemos dizer que os paradoxos são caracterizados pela sua falta coerência com a estrutura lógica que forma a conexão de ideias e raciocínios, levando a inconsistências lógicas, resultados falsos e sem fundamentação. Segundo Amadei (2005, p. 10),

[...] a descoberta de um verdadeiro paradoxo, indica que a estrutura lógica que suporta o sistema de articulação de ideias ou raciocínios desse universo, não dá mais conta de transformar em razão a complexidade desse sistema. Todo paradoxo indica a existência de "indecidíveis": afirmações que não podem ser demonstradas e nem sequer negadas.

Desta forma, por serem "indecidíveis", os paradoxos são classificados de duas formas: em Paradoxos Verídicos, correspondendo àqueles que conduzem a conclusões verdadeiras, e em Paradoxos Falsídicos, que são os que apresentam conclusões falsas (DIAS, 2002).

Nas seções posteriores deste capítulo serão apresentados os paradoxos de Zenão: dicotomia, Aquiles e estádio, todos esses paradoxos classificados como falsídicos. Também será apresentado o paradoxo de Galileu, de Russell que são considerados paradoxos verídicos.

Estudando a história da Matemática constata-se que sempre houve espaço para os paradoxos, mas foram as ideias dos infinitesimalmente pequenos e dos infinitamente grande, discutidas no Capítulo 2, que geraram discordias e diferentes interpretações entre matemáticos e filósofos, vindo desses dois conceitos a origem de diversos paradoxos.

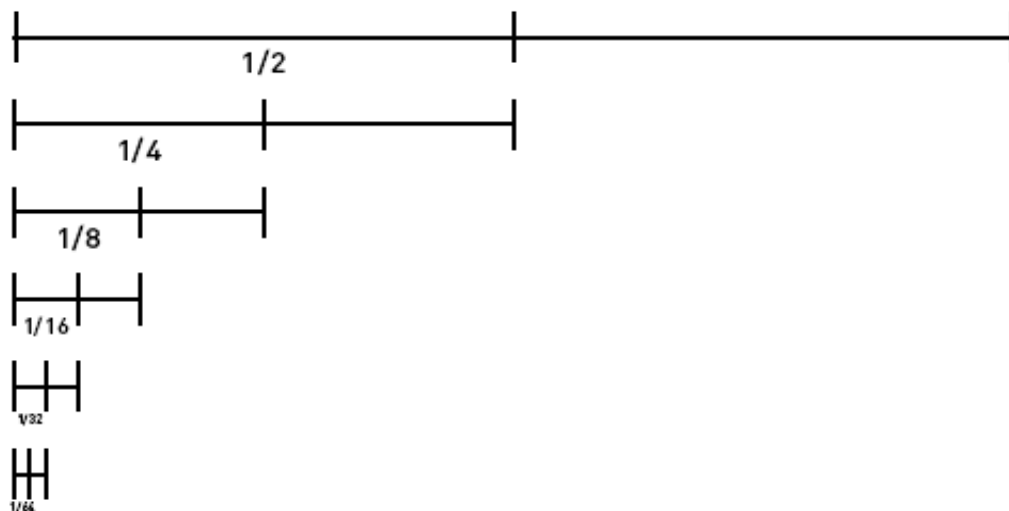
A seguir será apresentado sete paradoxos matemáticos com o olhar historiográfico sobre eles, apontando o que o gerou e buscando mostrar como o dilema foi resolvido. Os quatro primeiros são conhecidos como paradoxos de Zenão, estão relacionados ao infinito e são provenientes da Grécia antiga. Quanto aos demais paradoxos, o paradoxo de Galileu, de Cantor e de Russel, também conhecido como paradoxo do barbeiro, apareceram no século XVII e XVIII.

3.2 PARADOXO 1 – DA DICOTOMIA

Este paradoxo diz que para uma pessoa percorrer uma distância dada, antes deverá percorrer primeiro a primeira metade, mas antes de percorrer a primeira metade deverá percorrer o primeiro quarto e antes de percorrer o primeiro quarto, terá de percorrer o primeiro oitavo e assim por diante através de uma infinidade de subdivisões. O corredor terá que fazer infinitos movimentos no tempo finito. Mas é impossível exaurir uma opção infinita, logo é impossível começar o movimento (CINDRA, 2012).

Neste caso a sequência de movimentos seria uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{1}{2}$ e ficaria: $d/2$; $d/4$; $d/8$; $d/16$;... d/n . Na Figura 3 há uma representação geométrica para essa sequência.

Figura 3 – Paradoxo da Dicotomia



Fonte: Problemas Filosóficos (2013)

Para explicar esse paradoxo é necessário fazer uma pequena explicação sobre a corrente filosófica fundada por Parmênides e da qual Zenão era discípulo. Essa escola era contrária à escola Pitagórica cuja doutrina era “tudo é número”, “números formam o céu todo” e, também, o espaço e tempo podem ser pensados

como formados por pontos e instantes que podem ser divididos infinitamente, entretanto, eles se esqueceram que tanto o tempo como o espaço são “contínuos”. Já a escola de Parmênides de Eléia, tinha como artigo básico de fé “a unidade e permanência do ser, visão que contrastava com as ideias pitagóricas de multiplicidade e mudança.” (BOYER, 1974, p. 55). Fundamentado nesses pressupostos, Zenão criou vários paradoxos com o intuito de mostrar a inconsistência da teoria Pitagórica.

Voltando ao paradoxo da Dicotomia vemos que Zenão assumiu que o objeto teria que percorrer uma soma de infinitos segmentos formando uma progressão geométrica com razão $r = \frac{1}{2}$ e, supondo $d = 1$, assim, antes de poder percorrer uma linha inteira, um móvel deve, de início, cobrir a metade dessa linha, depois, a metade desta metade, e assim sucessivamente ao infinito.

Na realidade, o que acontece é que se têm aí a soma de uma progressão geométrica (P.G.), uma série infinita de movimentos, descrita como

$$(1/2) + (1/2)^2 + (1/2)^3 + (1/2)^4 + \dots,$$

cuja razão é $\frac{1}{2}$. Como sabe-se hoje, se uma série cuja razão satisfaz a condição: $|r| < 1$, é classificada como série *convergente* e, em uma série convergente, a soma de seus termos se aproximam de um *valor específico* que nesse caso é igual a um, ou seja, *igual a d*, o trecho total a ser percorrido.

Assim, conclui-se que o Paradoxo da Dicotomia, exposto por Zenão, deixa de ser paradoxo à luz da convergência de uma série real do Cálculo Diferencial.

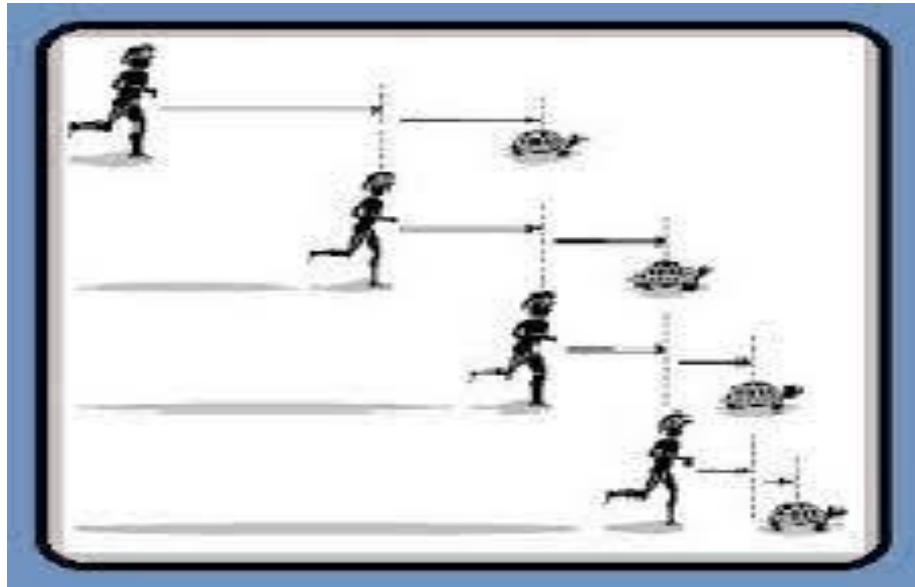
Ressalta-se que há de se supor que Zenão, na época, não tinha conhecimento da soma da série, nem do Cálculo Diferencial para concluir a veracidade do paradoxo (MONTEIRO; MONDINI, 2019).

3.3 PARADOXO 2 – DE AQUILES

O Paradoxo de Aquiles pode ser enunciado da seguinte forma: Aquiles como é um corredor mais rápido do que uma tartaruga lhe deu uma vantagem em um desafio de uma corrida, mas como ele lhe deu essa vantagem nunca será capaz de encontrar a tartaruga pois cada vez que Aquiles alcançar o ponto que a tartaruga

estava, ela já terá se movido mais à frente, tornando impossível Aquiles alcançá-la. A Figura 4 ilustra bem esse paradoxo.

Figura 4 – Paradoxo de Aquiles



Fonte: Recordando a Matemática (2014)

De acordo com Caetano Neto (2016), na história de Aquiles e a tartaruga, Aquiles é considerado mais veloz que a tartaruga, mas, ao deixar a tartaruga começar a corrida à sua frente em um ponto C entre A e B (Instante 0), ele nunca conseguirá alcançá-la, uma vez que a tartaruga estará sempre em um ponto à frente de onde Aquiles chegou no instante anterior. Esse paradoxo é conhecido como "Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga" e ilustra a ideia de que mesmo em situações em que é possível haver progressos infinitos, ainda assim pode haver pontos que nunca serão alcançados.

De acordo com Boyer (1974, p. 55), "A dicotomia e o Aquiles argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de divisibilidade indefinida do espaço e do tempo." A frase faz referência aos paradoxos da dicotomia e de Aquiles, que questionam a possibilidade do movimento contínuo, com a suposição de que o espaço e o tempo podem ser divididos indefinidamente, então não seria possível haver movimento real, pois sempre haveria uma distância ou um intervalo infinitesimal a ser percorrido antes de se chegar ao próximo ponto o que tornaria o movimento impossível.

Na corrida, Aquiles, dá uma vantagem à tartaruga, já que ele é mais rápido,

permitindo assim, que a tartaruga comece com uma certa distância à frente. A alegação é de que por mais rápido que Aquiles corra ou mais devagar que a tartaruga caminhe sempre haverá uma pequena distância que Aquiles deverá percorrer, desta forma Aquiles nunca alcançará a tartaruga, porque a tartaruga terá avançado um pouco mais.

Mas o senso comum sabe que Aquiles alcançará a tartaruga em algum tempo. Consequentemente, deveria haver alguma coisa errada com os pressupostos elaborados por Zenão. Entretanto, o que se está dizendo aqui é que Aquiles deverá efetuar uma série infinita de atos num período finito de tempo.

Strogatz (2022), fez uma simulação em que demonstra que Aquiles alcança a tartaruga através do Cálculo. Ele parte da suposição que a tartaruga começa 10 metros à frente. Aquiles corre a uma velocidade de 10 m/s e a tartaruga a 1 m/s, o que significa que Aquiles leva 1 segundo para correr 10m e a tartaruga corre 1m em 1 segundo. Continuando o raciocínio teremos uma série de tempo que Aquiles levaria para alcançar a tartaruga.

Então, para expressar os tempos de recuperação de Aquiles, ou seja: os tempos que Aquiles levaria para alcançar a tartaruga seria necessário somar a série infinita: $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots$

Simbolicamente, considerando a como sendo, a distância inicial entre Aquiles e a tartaruga, r com sendo a razão entre as distâncias percorridas por Aquiles e a Tartaruga e k como sendo o número de vezes que Aquiles precisa percorrer para alcançar a tartaruga, pode-se representar como sendo um somatório:

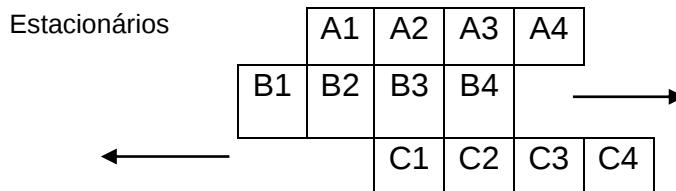
$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k = \frac{a}{(1-r)} = \frac{1}{(1-1/10)}, \quad \text{que resulta em } S = \frac{10}{9} s = 1,111\dots s$$

é o tempo que Aquiles leva para alcançar a tartaruga e ultrapassá-la. Isso mostra que “Embora Zenão estivesse certo ao afirmar que Aquiles tinha tarefas infinitas para completar, não há nada de paradoxal nisso. Como a matemática demonstra, ele pode realizá-las em uma quantidade finita de tempo.” (STROGATZ, 2022, p. 54). Isso significa que ele pode completar essas tarefas em uma quantidade finita de tempo e, eventualmente, ultrapassar a tartaruga.

3.4 PARADOXO 3 – DO ESTÁDIO OU DAS FILEIRAS EM MOVIMENTO

Boyer (1974) apresenta o enunciado do Paradoxo do estádio, no qual são considerados os corpos A1, A2, A3, A4, corpos de igual tamanho, *estacionários*, e os corpos B1, B2, B3, B4 tamanhos iguais aos do A, em movimento para a direita passando por A num intervalo de tempo. Sejam C1, C2, C3, C4 também do mesmo tamanho que os corpos A e B, e movendo-se uniformemente para a esquerda em relação a A, de modo que cada C passa por A num instante de tempo, os corpos da fileira B e da C estão com igual velocidades. Em um dado momento os corpos ocupam as seguintes posições relativas:

Figura 5 – Posição relativa das filas 1



Fonte: Adaptado pela autora com base em Boyer (1974, p. 56)

Então, passado um único instante, isto é, após uma subdivisão indivisível do tempo, as posições serão:

Figura 6 – Posição relativa das filas 2

A1	A2	A3	A4
B1	B2	B3	B4
C1	C2	C3	C4

Fonte: Adaptado pela autora com base em Boyer (1974, p. 56)

É claro que enquanto isso C1 terá avançado dois de B e, portanto, o instante decorrido foi dividido em duas partes iguais e, portanto, não pode ser o intervalo mínimo, pois podemos tomar o intervalo como uma nova unidade menor de tempo durante a qual C1 ultrapassa apenas um dos B.

De acordo com Monteiro (2008) quando dois corpos se cruzam em sentidos opostos com a mesma velocidade, a velocidade relativa entre eles é igual ao dobro da velocidade de cada um, exceto em situações de velocidades relativistas. Esse

fenômeno parece contradizer o senso comum, pois implica que o tempo que leva para uma fila passar por outra é o mesmo, independentemente de a fila estar em movimento ou não. O paradoxo desta situação, está em considerar que uma fila passaria por outra sempre no mesmo tempo, quer ela estivesse em movimento ou parada.

Assim, pode-se dizer que o paradoxo acima afirma que independente do corpo estar parado ou em movimento o tempo deveria ser sempre o mesmo. Mas a velocidade entre as fileiras B e C é uma velocidade relativa, uma vez que a velocidade depende do referencial utilizado e isso o paradoxo não levou em consideração.

O objetivo de Zenão neste paradoxo era mostrar que o espaço e o tempo não podem ser vistos como “entes” compostos de números de instantes e dimensões que podem ser divididos até sua unidade menor ou até o ponto indivisível. Isto é, o propósito seria atacar a visão atomista dos gregos que consideravam espaço e tempo como grandezas discretas.

Os paradoxos de Zenão são exemplos dos obstáculos gerados pelo entendimento do infinito na cronologia da matemática. “Tais paradoxos apontam para propriedades perturbadoras do infinito e para armadilhas que nos aguardam quando tentamos entender o sentido de processos ou fenômenos infinitos.” (AMADEI, 2005 p. 28).

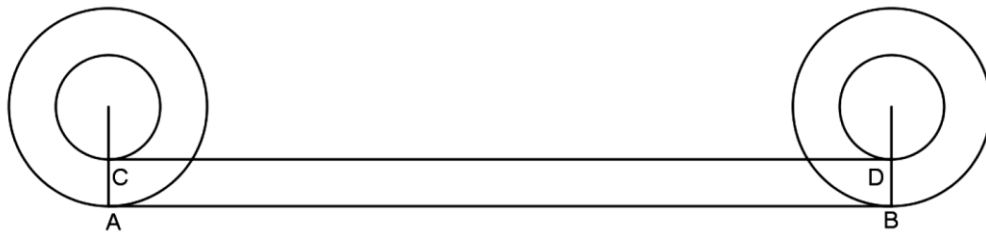
Monteiro (2008) afirma que na luta contra os atomistas Zenão propôs vários Paradoxos que confundiram os seus adversários e que só puderam ser respondidos em termos das modernas concepções matemáticas da teoria dos conjuntos infinitos.

3.5 PARADOXO 4 – RODA DE ARISTÓTELES

Eves (2011) apresenta este paradoxo conhecido como paradoxo de Galileu, porque foi discutido em seu livro *Discorsi* de 1638. O paradoxo consiste em supor que um círculo maior rola ao longo de uma linha reta de A até B, de forma que AB seja igual ao comprimento da circunferência do círculo maior, enquanto um círculo menor, circunscrito e preso ao maior, também faz uma revolução completa,

resultando em CD igual ao comprimento da circunferência do círculo menor. Consequentemente, os dois círculos possuem circunferências iguais, conforme apresentado nas Figuras 7 e 8.

Figura 7 - Roda de Aristóteles



Fonte: EVES, (2011, p. 373)

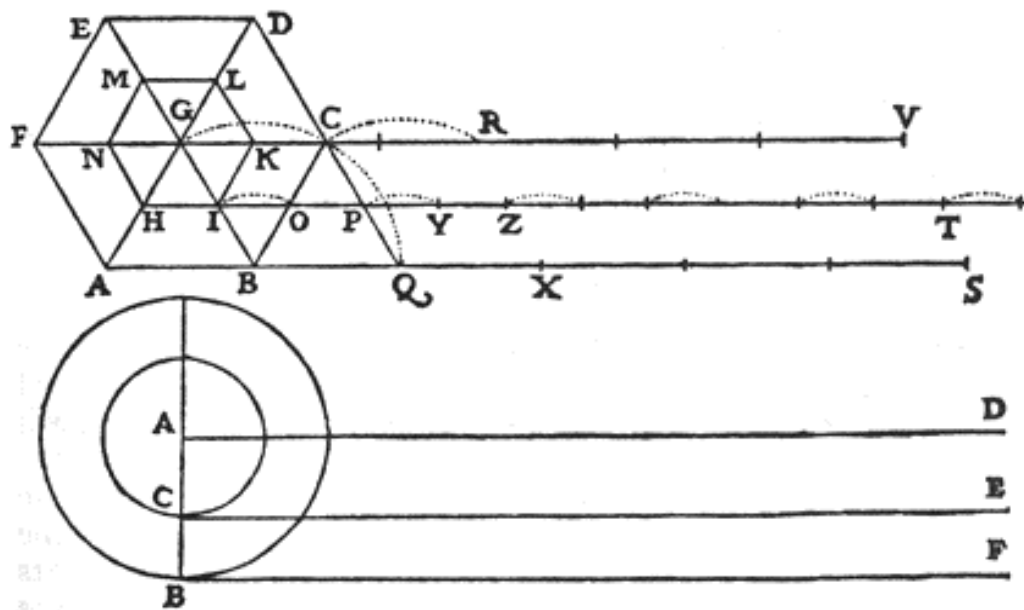
Figura 8 – Roda de Aristóteles animada



Fonte: Sophia of Nature (2015)

Sabe-se que Aristóteles já tinha conhecimento desse paradoxo e tentou resolvê-lo sem sucesso. Alguns séculos depois, Galileu também tentou encontrar a resposta e buscou inspiração nos gregos, usando a geometria como um caminho: imaginou um polígono inscrito na circunferência, mais especificamente, um par de hexágono e pôs os hexágonos para girarem, então ele percebeu que o hexágono interno não faz o mesmo “rastro” que o externo, o menor deixa alguns vazios com relação ao externo.

Figura 9 – Paradoxo da Roda resolvido por Galileu



Fonte: Point at infinity (2017)

Galileu concluiu que a linha traçada pela roda menor é composta por infinitos pontos intercalados com infinitos “vazios”, enquanto a linha traçada pela roda externa consiste apenas de pontos e não dos espaços vazios

De acordo com Mello (2002), a explicação mais simples para compreensão do paradoxo é que seria impossível girar a circunferência de ambos os círculos sobre AB e CD “simultaneamente sem escorregar”. Ele afirma que se o círculo maior girar sem escorregar sobre AB, então o círculo menor irá “patinar para a frente” sobre CD, enquanto se o círculo menor girar sem escorregar sobre CD, será o círculo maior que irá “patinar para trás” sobre AB.

Apesar das rodas diferentes fazerem trilhas diferentes pode-se observar um fato interessante: existe uma relação biunívoca entre os pontos do caminho da roda grande e os pontos da roda pequena, ou seja, o conjunto formado pelos pontos do caminho e o conjunto formado pelos pontos da circunferência da roda têm a mesma cardinalidade. Tal qual dois círculos concêntricos, eles têm comprimentos diferentes, mas contêm o mesmo número de pontos.

3.6 PARADOXO 5 – DE GALILEU

Galilei (1564-1642) filho de nobre empobrecido, nasceu em Pisa, Itália e desde cedo mostrou grande talento para a ciência e matemática. Começou estudando medicina aos 17 anos, mas depois conseguiu abandonar a medicina e dedicar-se à ciência e matemática. Aos 25 anos de idade foi professor de matemática na cidade de Pisa. Em 1591, após comprovar que a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo, contrariando as teorias de Aristóteles, Galileu teve de renunciar de sua posição de professor (EVES, 2011; BOYER, 1974).

Galileu inventou e construiu vários telescópios e com eles descobriu várias manchas no sol e as montanhas da lua, dentre outras coisas. Isso também foi em discordância com Aristóteles que garantia que o sol não tinha manchas, a terra era fixa, o sol que girava em torno dela e o homem é o centro do universo. Galileu também concordou com a teoria de Copérnico que a terra se movia em redor do sol e não o contrário. Por causa dessas suas ideias, já velho Galileu foi à inquisição e, sob tortura, teve que se retratar, não foi queimado na fogueira, como muitos outros (Giordano Bruno, por exemplo), mas passou seus últimos dez anos em sua própria casa em prisão domiciliar, teve também seu livro censurado no *Index*¹⁰ por mais de dois séculos (EVES, 2011; BOYER, 1974).

Galileu pode ser considerado mais como um físico do que um matemático, mesmo assim teve várias contribuições para a matemática e uma delas é quando mostra a relação biunívoca existente entre o conjunto dos inteiros e o conjunto dos quadrados perfeitos, conforme o trecho abaixo, onde Salviati, um homem sábio, bem-informado cientificamente, Sagredo é um leigo inteligente e Simplicius é um homem que acredita cegamente nas concepções de Aristóteles. Galileu adota o papel de Salviati.

Salviati. [...] Se eu disser que os números tomados na sua totalidade, incluindo os quadrados e os não quadrados, são mais numerosos do que os quadrados sozinhos, enunciarei uma proposição verdadeira, não é?

Simplicius. Certamente

Salviati. Em seguida, se eu perguntar agora quantos quadrados há, podemos responder, sem nos enganarmos, que há tantas quantas as raízes

¹⁰Index - Index Librorum Prohibitorum ou Index Expurgatorius, foi uma lista de publicações proibidas pela Igreja Católica, por serem consideradas heréticas.

quadradas correspondentes, atendendo a que todo o quadrado tem a sua raiz e toda a raiz o seu quadrado, que um quadrado não tem mais do que uma raiz, nem uma raiz mais do que um quadrado.

Simplício. Exatamente.

Salviati. Mas se eu perguntar quantas raízes há, não se pode negar que há tantas quantos os números, porque todo o número é a raiz de algum quadrado. Assim sendo, será, portanto, preciso dizer que há tantos números quadrados como números, uma vez que eles são tantos como as raízes e que as raízes representam o conjunto dos números. No entanto dizíamos de princípio que há mais números do que quadrados, já que a maior parte dos números não são quadrados. (...)

Sagredo. Então, qual a conclusão a tirar nestas condições?

Salviati. Aos meus olhos, a única conclusão possível é dizer que o conjunto dos números, dos quadrados, das raízes é infinito; que o total dos números quadrados não é inferior ao conjunto dos números, nem este superior àquele. E finalmente, que os atributos igual, maior e menor não tem sentido para quantidades infinitas, mas somente para quantidades finitas. (GALILEI, 1638, *apud* SAMPAIO 2008, p. 212).

A relação biunívoca que Galileu apresentou em seu diálogo pode ser representada conforme a Figura 10.

Figura 10 – Relação dos números naturais e seus quadrados

1	2	3	4	5	6	...
↑	↑	↑	↑	↑	↑	...
1	4	9	16	25	36	...

Fonte: Elaborado pela autora.

Isto quer dizer que deve existir o mesmo número cardinal (a mesma quantidade) nos dois conjuntos, pois os conjuntos estão em uma correspondência biunívoca e, assim, é possível dizer que há tantos quadrados quantos números naturais. Eves (2011) observa de imediato que o axioma V de Euclides que afirma que o todo é maior do que as partes, é insustentável quando se trata de números cardinais de conjuntos infinitos..

Aí está formado o paradoxo de Galileu e este, muito sabiamente, concluiu que os atributos maior, menor e igual, que são válidos para os conjuntos finitos, não são válidos para os conjuntos infinitos. Agindo assim Galileu preferiu não ir contra o axioma de Euclides, nem a teoria dominante de Aristóteles.

Este paradoxo somente foi resolvido com a teoria dos conjuntos de Cantor, aproximadamente dois séculos depois, quando Cantor, com sua teoria dos conjuntos, “descobriu” que os conjuntos infinitos não se comportam de maneira semelhante aos conjuntos dos finitos. E aí estava a chave da solução do paradoxo.

3.7 PARADOXO 6 – DE CANTOR

Na raiz deste paradoxo está também o uso irrestrito do princípio da abstração, o qual permite definir um conjunto a partir de uma propriedade comum aos seus elementos. Por exemplo, podemos formar o conjunto dos números pares a partir da propriedade de ser divisível por dois. O uso irrestrito desse princípio leva a paradoxos como o de Cantor, pois podemos tentar formar conjuntos que não são bem definidos ou que são contraditórios.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) nasceu em 3 de março de 1845, na cidade de São Petersburgo, Rússia. Sua família mudou-se para Frankfurt, na Alemanha em 1856. Começou a estudar matemática no Instituto Politécnico de Zurique, em 1862, mas logo se transferiu para a Universidade de Berlim, onde conheceu Weierstrass, que teve muita influência em Cantor. Em 1867 obteve o doutorado e foi professor na Universidade de Halle por muitos anos, de 1869 a 1905. Cantor desenvolveu uma série de trabalhos que revolucionou a matemática e os conceitos de infinitos e também levaram ao desenvolvimento da teoria dos Conjuntos. Seu trabalho despertou grande admiração entre os matemáticos, mas também provocou muitas controvérsias e oposição. Cantor faleceu em 1918, deixando uma das mais surpreendentes teorias da história da civilização. (CAMARGO, 2020, p. 12)

Um conjunto é uma coleção bem definida de objetos distintos, que podem ser de qualquer tipo: números, símbolos, pontos, linhas, formas, variáveis ou até outros conjuntos. Essa definição foi dada por Cantor em Ávila (2000, p.6) que usou as palavras: “Por conjunto entendemos qualquer coleção numa totalidade M de objetos distintos, produtos de nossa intuição ou pensamento”. Essa definição muito vaga e ampla levou aos paradoxos de Cantor e de Russell, que serão discutidos mais adiante.

Agora, para melhor entendimento, vamos utilizar um exemplo apresentado por Ávila (2000) para ilustrar esse paradoxo. Considere $M = \{a, b, c\}$, vamos formar o conjunto de todos os subconjuntos de M , chamado de conjunto das partes de M , denotado por $P(M)$, assim teremos: $P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Sabemos que a potência de um conjunto permite ordenar esse conjunto. Assim temos que M e $P(M)$ podem ser ordenados, então, $M < P(M)$.

O paradoxo de Cantor é um fenômeno que ocorre na teoria dos conjuntos, onde se considera que o número de elementos do conjunto das partes é maior do que o número de elementos do próprio conjunto. Esse paradoxo desafia a intuição comum de que um conjunto tem menos elementos do que seu conjunto de partes.

Ávila (2000) discute o paradoxo de Cantor, que surge quando consideramos a existência de um conjunto universal U que contém todos os conjuntos possíveis. O autor aponta que essa definição já traz problemas, uma vez que levaria à conclusão de que U é um elemento de si mesmo, o que é contraditório. Além disso, ao aplicarmos o teorema de Cantor a U , descobrimos que o conjunto das partes de U , representado por $P(U)$, tem uma potência maior do que U . Isso se opõe à ideia de que U seria o conjunto máximo em termos de abrangência. Assim, o autor conclui que não existe um conjunto universal U que contenha todos os conjuntos possíveis. Essa conclusão, consistente com a teoria dos conjuntos de Cantor, onde a potência de um conjunto é sempre menor do que a potência do conjunto das suas partes.

Ainda segundo o autor, podemos dizer que na raiz do paradoxo de Cantor está também o uso irrestrito do princípio da abstração, pois ele permite formar conjuntos que não têm sentido ou que geram contradições lógicas. E quando aplicado este princípio aos conjuntos infinitos surgem os paradoxos. Para evitar esses problemas, é preciso restringir o uso desse princípio e adotar axiomas mais rigorosos para a teoria dos conjuntos.

3.8 PARADOXO 7 – DE RUSSELL

Bertrand Arthur William Russell, filho de aristocratas, nasceu em Trelleck, País de Gales, em 1872. Ganhou uma bolsa de estudos pública no Trinity College, Cambridge, foi aluno de Whitehead e distinguiu-se em matemática e filosofia. Lecionou em várias universidades americanas, escreveu mais de 40 livros, de matemática, lógica, filosofia, sociologia e educação. Ganhou muitos prêmios, inclusive o Prêmio Nobel de Literatura em 1950. Seu comportamento sincero e destemido o fez entrar várias controvérsias. Foi desligado da Universidade de Cambridge na Primeira Guerra Mundial e preso por quatro meses por seus pontos

de vista pacifistas e por se opor ao alistamento militar. Na década de 1960, liderou movimentos pacifistas e também acabou preso, embora por pouco tempo. Faleceu em 1970, mentalmente lúcido e atento, aos 98 anos de idade (EVES, 2011).

Russell descobriu outro paradoxo baseado na definição de conjunto feita por Cantor, esse paradoxo ficou conhecido como paradoxo do conjunto de todos os conjuntos. Ele questionou: pode um conjunto ser elemento de si mesmo? Então imaginou dois conjuntos: o conjunto dos que não são membros de si mesmos e o conjunto dos que são membros de si mesmo. Para uma melhor compreensão desse paradoxo, consideremos M como sendo o conjunto de todos os conjuntos que são membros de si mesmo e N como sendo o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmo. A questão é: N é membro de si mesmo ou não?

Vejamos, se N é um membro de si mesmo então N pertence a M , consequentemente, N não pertence a N . Isso significa que N não é um membro de si mesmo, logo N não pertence a N , o que resulta que N não pertence a M . Um paradoxo!

Avila (2000, p. 6) traz essa ideia em termos mais simbólicos, veja:

Vamos considerar o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos, que denotaremos por M . Assim, de maneira simbólica e explícita. $M = \{X / X \notin X\}$. Pergunta: $M \in M$? Não, pois M seria um certo X tal que $X \in X$, donde, pela definição de M , $M \notin X$, isto é, $M \notin M$. Será então que $M \notin M$? Também não, pois M seria um certo X tal que $X \notin X$, donde, pela definição de M , $M \in X$, isto é, $M \in M$. Em resumo, $M \in M \Leftrightarrow M \notin M$. Estamos diante de um paradoxo, que surgiu da consideração do conjunto M de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos.

O paradoxo de Russell ficou muito famoso e pode ser descrito como paradoxo do barbeiro. Eves (2011) diz ter sido o próprio Russell que deu essa versão para ficar mais fácil a compreensão desse paradoxo, qual seja: uma cidade (digamos Sevilha) tem um único barbeiro. Esse barbeiro é do sexo masculino, é de Sevilha e reúne as duas condições seguintes: 1) Faz a barba a todos os homens de Sevilha que não fazem a barba a si próprios. 2) Só faz a barba dos homens que não fazem a barba a si próprios. Fará o barbeiro a barba a si próprio? Se fizer a barba a si próprio, pela condição 2) não pode fazer de barba a si próprio. Se não fizer a barba a si próprio, pela condição 1) faz a barba a si próprio.

Eves (2011, p. 676) afirma que: “a natureza circular dessa definição é evidente – a definição do barbeiro envolve os membros da cidade e o próprio

barbeiro é membro da cidade”. Um paradoxo circular acontece quando um conjunto faz referência ao próprio conjunto que está definido, para melhor esclarecer vejamos um exemplo na planilha Excel, se existe uma referência circular significa que a celular faz referência a ela mesma para resolver um cálculo criando um “loop” e com isso a o programa não consegue concluir os cálculos.

O conceito de conjunto, de acordo com o próprio Cantor, foi, inicialmente, pensado de modo livre, o que acabou levando a paradoxos. O aparecimento desses paradoxos abalou a teoria dos conjuntos, chamando a atenção de vários matemáticos para o fato de que algo estava errado e que precisava fazer alguma coisa, pois estava interferindo na lógica e confiabilidade da matemática. Então vários matemáticos se dedicaram a estudar questões lógicas relacionadas com a fundamentação da matemática (ÁVILA, 2000).

Neste capítulo, nós analisamos alguns dos paradoxos mais fascinantes que emergiram dos infinitos. Por exemplo, a teoria dos conjuntos se fundamenta na noção de coleções infinitas de objetos, mas isso pode levar a inconsistências lógicas. Esses paradoxos foram essenciais para o desenvolvimento da teoria dos conjuntos e estimularam a procura por axiomas mais rigorosos para a construção de conjuntos. Eles também podem ser úteis para identificar falhas na lógica ou em outras áreas da matemática. Com isso, encerramos este capítulo e no próximo vamos discutir o conceito de limite.

4 A HISTÓRIA DO CONCEITOS DE LIMITE COMO REFLEXO DA HISTÓRIA DOS INFINITOS

*(Dois caminhos se bifurcavam numa floresta, e eu. –
Eu escolhi o menos percorrido, E isso fez toda a diferença)
Roberto Frost*

Neste capítulo, será apresentado o desenvolvimento histórico dos conceitos de limite, mostrando a sua origem e a necessidade de sua criação. Também será abordada a relação entre limite e infinito. Além disso, serão discutidas as conexões entre o conceito de infinito atual e as definições de limite.

Durante o capítulo anterior, foi possível observar que os infinitos e os infinitesimais tiveram um grande impacto na história da matemática, gerando consequências significativas, incluindo a ocorrência de paradoxos que paralisaram a matemática por muitos anos. Como resultado, os matemáticos foram "obrigados" a descobrir uma forma de lidar com os infinitos, o que levou ao desenvolvimento do conceito de limite. Agora, abordaremos a trajetória do limite entre os infinitos e paradoxos e como essas conexões surgiram.

4.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Dentro de nossa pesquisa bibliográfica entendemos que o conceito do limite advém da necessidade que os matemáticos tiveram de estruturar o cálculo das derivadas usando os infinitesimais concebido por Newton e Leibniz, conforme apresentado na seção 2.5, de forma a não deixar indefinições, vazios, falta de ordenamento e lógica na definição do Cálculo Diferencial, uma vez que nem Newton nem Leibniz não souberam definir o que eram exatamente estas quantidades infinitamente pequenas.

O infinitesimal tem uma influência importante na definição de limite, como podemos ver na obra de (ABBGNAME, 2007, p. 614). Nesse livro, o autor apresenta o conceito de limite no dicionário de filosofia, afirmando que limite é:

Aristóteles distinguiu e enumerou perfeitamente os diferentes significados desse termo [...] que são os seguintes:

- 1- O último ponto de uma coisa, ou seja, o primeiro ponto além do qual não existe parte alguma da coisa e aquém do qual estão todas as partes dela. Hoje esse conceito é expresso dizendo-se que o L (símbolo para representar limite) é um ponto que não pode ser atingido; ou que é uma grandeza tal que a diferença entre ela e os elementos da série infinita a que pertence é ou permanece inferior a qualquer grandeza atribuível
- 2- A forma de uma grandeza ou de uma coisa que possui grandeza.

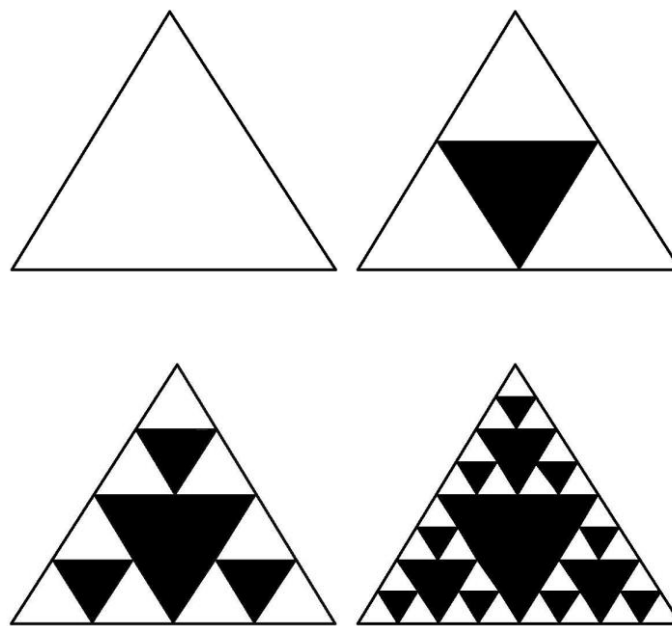
É possível notar que desde os tempos da antiguidade já se tinha a noção do “infinito atual”, uma entidade que se aproxima dos conceitos de limite. Este fato é evidente, especialmente ao considerar o método da exaustão de Arquimedes, mencionado na seção 2.2. do capítulo 2 deste trabalho. A ideia do infinitesimal presente nesse método se aproxima ao conceito de limite, e há uma interligação entre esses conceitos. Vale salientar que esse método será visto novamente na seção 4.2 deste capítulo.

Volta-se aqui a lembrar o conceito de infinito atual, que tem grande “ligação” com o conceito de limite, segundo Sena (2011), Galileu (1584-1642) e Bolzano (1781-1848) foram os precursores do conceito de infinito atual, que se refere à possibilidade de conceber o infinito como uma entidade completa e acabada, cujos elementos podem ser pensados num ato único. Essa concepção se contrapõe à de infinito potencial, que consiste num processo pelo qual um número ou uma grandeza cresce indefinidamente, sem nunca atingir um limite. Essa distinção é muito importante para a compreensão da natureza do infinito e de suas propriedades matemáticas.

Como nosso objetivo neste capítulo é mostrar as trajetórias percorridas pelo limite e fazer todas as ligações dele com o infinito, principalmente com o infinito atual trazemos aqui o conjunto de Cantor, também conhecido por poeira de Cantor, considerado um dos mais simples fractais. O conjunto de Cantor pode ser relacionado com o conceito de infinito atual. Uma das propriedades do conjunto de Cantor é que ele é construído de tal forma que, mesmo removendo um número infinito de seus elementos, ele continua infinito, ou seja, ele possui uma propriedade de autossimilaridade que se estende ao infinito. Isso sugere uma conexão com o conceito de infinito atual, que é uma entidade matemática que representa uma ideia de algo que se estende indefinidamente. Mas antes de continuar vejamos em Nunes

(2006, p.12, grifo nosso) as similitudes com os limites e infinitos: “A percepção de infinito está subjacente aos objetos fractais, pois estes são obtidos no limite de um processo de construção que se repete indefinidamente e como tal, temos necessidade de atribuir um limite [...]”. A figura 11 abaixo ilustra bem a definição de fractal.

Figura 11 - Figura inicial e as iterações da construção de Fractal



Fonte: NUNES, (2006, p.18)

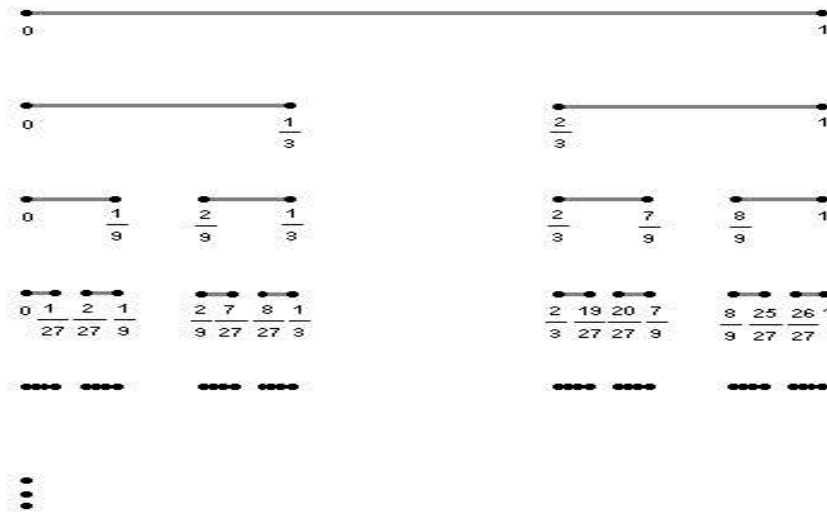
O conjunto de Cantor, é considerado o mais simples dos fractais, de acordo com BROLEZZI (1996, p. 33): “Este conjunto tem grande importância histórica e pode ser considerado o mais simples dos fractais.”

Agora vamos mostrar o conjunto de Cantor ou poeira de Cantor:

Tome um segmento de reta representado por um intervalo fechado de comprimento igual a uma unidade, digamos $[0,1]$. Divida este segmento em três partes iguais, em seguida retire a parte do meio, ou seja, o terço central, aberto, sobrarão dois segmentos fechados: $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Com as duas extremidades restantes faça o mesmo procedimento e assim por diante indefinidamente. Brolezzi (1996).

A Figura 12 ilustra esse fato.

Figura 12 – Conjunto de Cantor



Fonte: Nunes, (2006, p.17)

Ficamos, desta forma, com a união disjunta de dois intervalos fechados:

$I_1 = [0; 1/3] \cup [2/3; 1]$ de comprimento $1/3$; obtemos $I_2 = [0; 1/9] \cup [2/9; 3/9] \cup [6/9; 7/9] \cup [8/9; 1]$ com 4 intervalos congruentes de comprimento $1/9$ cada e levando este raciocínio a todos os intervalos (I_N) teremos o conjunto de Cantor definido por:

$$K = \bigcap_{N=0}^{\infty} I_N$$

É, portanto, o conjunto dos pontos que restam quando repetimos os passos onde se removem os intervalos até ao infinito. O conjunto de Cantor tem várias propriedades mas citaremos apenas que K é um conjunto não enumerável e compacto.

Portanto ao apresentar a poeira de Cantor e sua sequência matemática, buscou-se proporcionar uma experiência visual e conceitual que destaque a relação entre o conceito de limite, a noção do infinito atual e a estrutura dos fractais.

Na próxima seção, será abordado o método da exaustão, o qual possui fortes relações com as integrais no Cálculo diferencial. Ao explorar este método, é possível perceber que ele está intrinsicamente ligado aos conceitos de limites e infinitos. O método da exaustão permite a aproximação de uma grandeza complexa por meio de divisões sucessivas, de forma semelhante ao processo de integração. Portanto, ao compreendermos o método da exaustão, estaremos estabelecendo uma conexão direta entre o uso de infinitos e limites.

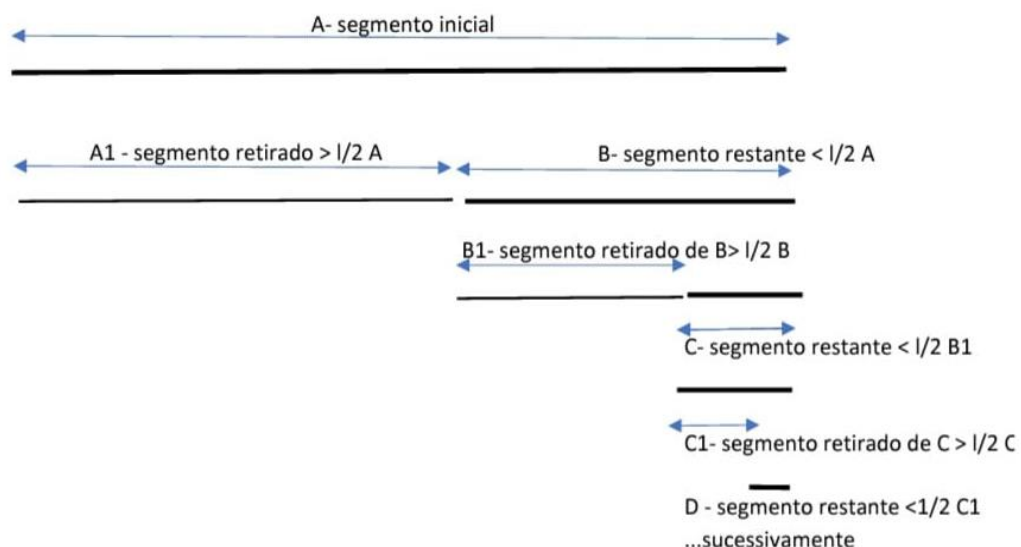
4.2 MÉTODO DA EXAUSTÃO

O método da exaustão, assim como a teoria do limite, é utilizado na Matemática para trabalhar com a concepção de infinito e tratar do infinitamente grande e do infinitamente pequeno ou infinitesimais. Muitos pensam que o método da exaustão foi formulado por Arquimedes, mas o próprio Arquimedes, que muito o utilizou, atribuiu sua criação à Eudoxo. O método foi idealizado para calcular áreas e volumes e baseava-se na proposição I do livro X de Euclides também chamado *princípio da Exaustão*. Boyer (1974, p. 67) o descreve da seguinte forma:

Se de uma grandeza qualquer, subtrairmos uma parte, não menor do que sua metade, e do resto novamente subtrai-se uma parte não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza da mesma espécie.

Para melhor explicar o que significa o princípio da exaustão, imagine que temos um segmento de reta, deste segmento tira-se um pedaço maior ou igual à metade, do segmento restante vamos tirar outro pedaço também maior ou igual à metade e assim se procede sucessivas vezes, então o que restar será um segmento de reta com grandeza desprezível.

Figura 13 – Princípio da Exaustão



Fonte: Elaborada pela Autora

A proposição mencionada na citação de Boyer que define o *Princípio da exaustão* e que é ilustrada na figura 12, pode ter formulação moderna: “Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza da mesma espécie, r uma razão, $\frac{1}{2} \leq r < 1$ então podemos achar um inteiro N , tal que: $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$. Isto é a propriedade da exaustão que equivale a dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} M(1-r)^n = 0$ ” (BOYER, 1974, p. 67).

Isto significa que formulação moderna da proposição da exaustão destaca que, dado um valor inicial M e uma razão r dentro do intervalo especificado, é possível encontrar um inteiro N de modo que, para qualquer inteiro n maior que N , o valor da expressão M multiplicado por $(1 - r)$ elevado à potência n seja menor que ε . Isso implica que, à medida que n se aproxima do infinito, o resultado dessa expressão se aproxima de zero. Essa propriedade da exaustão é fundamental na análise de limites e permite estabelecer relações entre quantidades e sua tendência ao infinito.

Com base nas contribuições de vários autores, incluindo Boyer, Eves, Caetano Neto, Amadei e outros estudados neste trabalho, podemos observar que o método da exaustão contém a essência da ideia de tornar algo tão pequeno quanto desejado ou de atribuir aproximações finitas em processos infinitos. Esse método possibilita transformar o infinito potencial em infinito atual, sem a necessidade dos conceitos de “épsilon e deltas” presentes no conceito de limite.

Em BROLEZZI (1996) é possível confirmar a similitude entre o método da exaustão e o conceito de limite:

A diferença entre o método de exaustão e o limite do Cálculo Diferencial e Integral reside apenas no fato de os gregos não realizarem essa passagem ao infinito, pois não tinham noção de um continuum aritmético. Mas o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do atual limite quanto no método de exaustão geométrico. Pode-se talvez dizer que a noção de limite tivesse sido vislumbrada pelos gregos, como se poderia inferir do fragmento de Aristóteles citado na epígrafe: “Minha teoria não tira nada às considerações dos matemáticos, ao suprimir o infinito que existiria em ato segundo o acréscimo infinito, que não se poderia recorrer: pois os matemáticos não necessitam realmente do infinito e não o utilizam; só necessitam de uma magnitude finita que escolhem tão grande quanto queiram.” (BROLEZZI, 1996, p. 26-27)

Isto é, a diferença entre o método de exaustão utilizado pelos antigos gregos

e o conceito de limite do Cálculo Diferencial e Integral está relacionada à falta de compreensão dos gregos em relação a um continuum aritmético, ou seja, eles não possuíam a noção de um conjunto contínuo e infinito de números. No entanto, apesar dessa diferença conceitual, a abordagem e o tipo de argumentação empregados tanto no atual conceito de limite quanto no método de exaustão geométrico são semelhantes. Ambos envolvem o processo de aproximação sucessiva e a análise do comportamento de grandezas em direção a um valor desejado, mesmo que os gregos não tenham realizado formalmente a passagem ao infinito como é feito no Cálculo moderno.

4.3 MÉTODO DOS MÁXIMOS E MÍNIMOS

Neste tópico, abordaremos o método dos máximos e mínimos que foi desenvolvido pelo matemático francês Pierre de Fermat, este método se relaciona com o conceito de limite, tema central deste quarto capítulo, que tem por objetivo mostrar a história dos limites desde os tempos mais antigos até os dias atuais. O método de Fermat, um dos precursores do conceito de limite na matemática moderna, é baseado na ideia de que, se uma função atinge um valor máximo ou mínimo em um ponto, sua inclinação (ou tangente) nesse ponto deve ser igual a zero. Discorreremos sobre essa técnica utilizada Fermat, mas antes será feita uma pequena biografia deste matemático.

Pierre de Fermat (1601-1665) foi um advogado e oficial do governo em Toulouse, mas também um estudioso e matemático amador que se interessava por diversos ramos da ciência, fez importantes contribuições para vários campos da matemática, incluindo a teoria dos números, geometria analítica e cálculo. Ele desenvolveu, entre outras coisas, a teoria dos números, a geometria analítica e o cálculo diferencial. Uma das suas contribuições mais notáveis foi o método dos máximos e mínimos, técnica que ele usou para estudar as propriedades das funções foi baseada na ideia de que se uma função alcançava um valor máximo ou mínimo em um ponto, sua inclinação (ou tangente) deveria ser zero nesse ponto. Fato importante para o desenvolvimento histórico de limite porque o método contribui para

a compreensão e aperfeiçoamento desse conceito de limite pois permitiu estudar o comportamento das funções em intervalos cada vez menores.

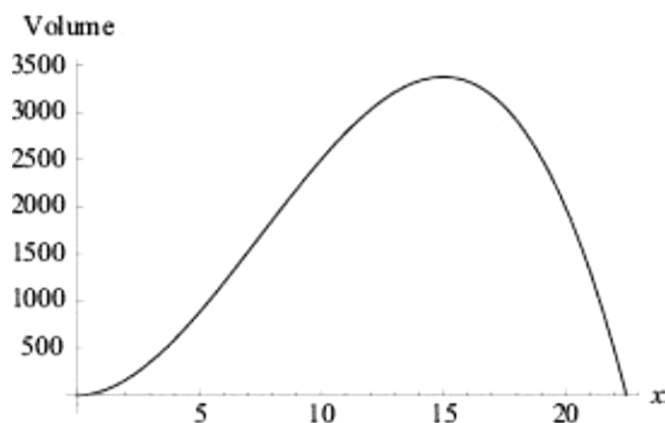
Boyer (1974) descreveu que Fermat desenvolveu um método engenhoso para encontrar pontos de máximos e de mínimos em curvas polinomiais da forma $y = f(x)$. E observou que, ao comparar o valor da função $f(x)$ em determinado ponto com o valor $f(x+E)$ em um ponto vizinho, em geral esses valores são bastantes diferentes. No entanto, em pontos críticos de uma curva suave, ou seja, em pontos de máximo ou de mínimo, a variação será quase imperceptível. Isso porque nesses pontos, a curva é mais “plana” e a variação da função é mínima. Continuando em BOYER (1974, p. 255) o processo dos máximos e mínimos de Fermat da seguinte forma:

[...] Portanto para achar os pontos de máximo de mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais chega a pseudo-equação de ser verdadeira equação; por isso Fermat, depois de dividir tudo por E fazia $E \rightarrow 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos máximo e mínimo do polinômio. Aqui em essência tem-se o processo hoje chamado de diferenciação pois o método de Fermat equivale a achar $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ e igualar a zero.

A abordagem de Fermat essencialmente corresponde ao processo atualmente conhecido como diferenciação. Ao considerar a expressão $(f(x+E) - f(x))/E$, onde E se aproxima de zero, ele analisou o comportamento dessa expressão à medida que E se torna cada vez menor, ou seja se aproxima de zero

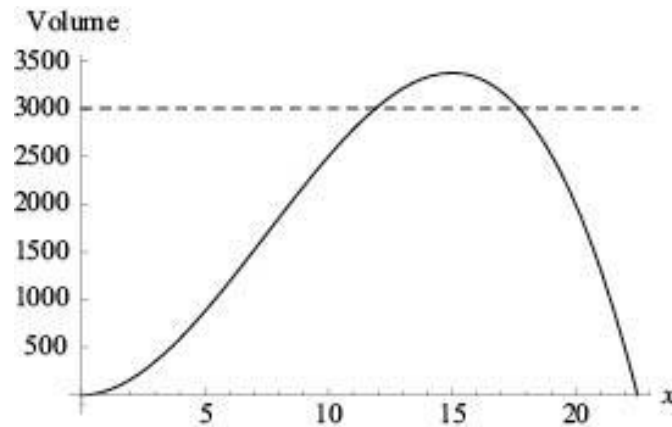
Através da Figura 14, pode-se ver uma ilustração do pensamento de Fermat para a construção do Método dos Máximos e mínimos.

Figura 14 – Curva polinomial



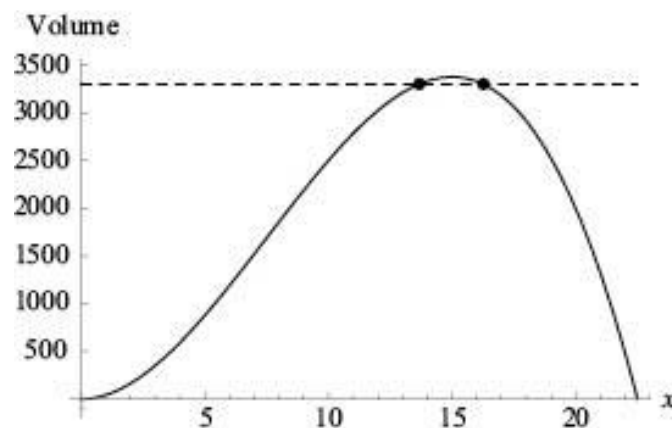
Fonte: STROGATZ (2022, p.162)

Figura 15 – Curva polinomial com reta cortando a curva dois pontos



Fonte: STROGATZ (2022, p.162)

Figura 16 – Curva polinomial com reta cortando-a próxima ao máximo



Fonte: STROGATZ (2022, p.162)

Fermat usou uma propriedade do ponto máximo: linhas horizontais abaixo do ponto de máximo cortam a curva em dois pontos ver figura 15, linhas acima do ponto de máximo não cortam a curva. Então Fermat imaginou que ocorrendo uma lenta elevação da linha horizontal abaixo do ponto de máximo (figura 15 e figura 16) à medida que a linha se desloca os pontos se aproximam um do outro. No máximo eles se encontram, daí pode-se dizer que definida essa constatação, o resto é álgebra, uma simples manipulação de símbolos e conforme citado por BOYER (1974, p.255): “Portanto para achar os pontos de máximo de mínimo Fermat

igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais”

Pode-se dizer que o método dos máximos e mínimos de Fermat é mais um exemplo de como a matemática evoluiu ao longo da história, buscando resolver problemas práticos e abstratos com rigor e criatividade. A obra de Fermat inspirou muitos outros matemáticos que vieram depois dele e contribuiu para o desenvolvimento da ciência moderna.

4.4 CÁLCULO DE NEWTON E LEIBNIZ

E agora seguindo a trajetória do conceito de limite, chega-se à criação do cálculo diferencial descoberta por Newton e Leibniz. Esses dois gênios desenvolveram uma nova linguagem matemática, baseada em derivadas e integrais, que permitiu resolver problemas complexos envolvendo variação e movimento. O cálculo diferencial se tornou uma das ferramentas mais poderosas e versáteis da matemática, com aplicações em diversas áreas do conhecimento. Newton e Leibniz inauguraram uma nova era no campo do cálculo e abriram novas possibilidades para o estudo e a compreensão dos limites.

Isaac Newton (1642- 1727) nasceu na aldeia de Woolshorpe, Inglaterra e ainda muito jovem já revelou grande habilidade para projetar engenhocas mecânicas, aos 18 anos ingressou em Cambridge, também mais ou menos nesta data ao ler o livro de Euclides interessou-se pela matemática, durante os anos de 1665 e 1666 a universidade foi fechada por causa da peste negra também conhecida como peste bubônica, foi uma pandemia devastadora que ocorreu entre os anos de 1665 à 1666, em Londres, causada pela bactéria transmitida pelas pulgas dos ratos. Segundo (BOYER, 1974) Newton foi para casa e durante esse tempo, teve um dos períodos mais produtivos de sua carreira, resultando em quatro de suas principais descobertas: o teorema binomial, o cálculo, a lei de gravitação e a natureza das cores. Essas contribuições o elevaram ao status de um dos maiores dos cientistas do mundo até os dias de hoje.

Gottfried Wilhlem Leibniz (1646 – 1716) nasceu em Leipzig, Alemanha, o

grande gênio do século XVII e rival de Newton na descoberta do cálculo. Inventou o seu cálculo entre os anos de 1673 e 1676, também usou pela primeira vez o símbolo de Integral como um S alongado ($\int$) oriundo da letra latina que significa *summa* (soma). Também deduziu muitas fórmulas da diferenciação que até hoje são utilizadas, Leibniz desenvolveu a notação diferencial para representar as variações infinitesimais nas quantidades de x e y . Ele usou uma forma de escrever derivadas usando os símbolos dx e dy . Essa forma era bem mais fácil e flexível do que a utilizada por Newton. Alguns exemplos: $d(xy) = x dy + y dx$; $d(x/y) = (y dx - x dy) / y^2$; $d(x^n) = (n x^{n-1}) dx$. (BOYER, 1974).

Nos meados do século XVII, Newton e Leibniz mudaram a história da Matemática ao descobrirem, separadamente, um na Inglaterra e o outro na Alemanha, e por diferentes caminhos, o Teorema Fundamental do Cálculo, que conecta integrais com derivadas. Tanto Newton como Leibniz podem ser considerados os primeiros a descobrirem essa ferramenta tão útil para calcular áreas, volumes e resolver equações diferenciais, dentre outras aplicações, que usam o conceito de limite.

BOYER (1992, p. 21) “Newton e Leibniz não foram os primeiros a descobrirem o método da diferenciação e integração, nem foram os primeiros a usarem as séries infinitas, mas eles reuniram dispositivos de aplicabilidade e métodos de alcance universal”.

Newton chegou muito perto da definição de limite quando em 1687, em *Philosophiae naturalis principia mathematica*, referiu-se a “Quantidades e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais”. (BOYER, 1974, p. 292), mas que não conseguiu alcançar plenamente o conceito de limite porque continuou insistindo em descrever como razão entre velocidades, mas o que se obtém, é um simples número real.

Cabe aqui ressaltar um fato importante da História da Matemática: de acordo com EVES (2011), o desenvolvimento do Cálculo se deu na ordem inversa de como se conhece e estuda hoje em dia: primeiro surgiu a ideia da integração que teve origem nos processos dos somatórios para se encontrar áreas, volumes e comprimentos, já a diferenciação, que apareceu mais tarde, foi resultado de

problemas de tangentes, curvas e questões de máximos e mínimos.

O cálculo infinitesimal não foi totalmente aceito, muitos matemáticos da época levantaram objeções quanto ao tratamento proposto ao infinitesimais que, em alguns casos, eram vagos e contraditórios. Segundo Eves (2011), o conceito de limite já havia sido formulado e o teorema fundamental da Cálculo demonstrado. No entanto, ainda era necessário desenvolver uma linguagem simbólica geral e um conjunto de regras formais para a análise, bem como revisar os fundamentos da disciplina de forma consistente e rigorosa. E continuando em Eves (2011), o cálculo foi criado por Newton e Leibniz, que se basearam em vários trabalhos anteriores, mas que tiveram que enfrentar problemas de rigor matemático. Esses problemas foram resolvidos posteriormente por Cauchy e outros analistas do século XIX, que reformularam os conceitos fundamentais do cálculo de forma mais precisa e consistente.

A sugestão de uma solução real para o estado imperfeito dos fundamentos da análise veio de D'Alembert (1717-1783), ao observar em 1754, que era necessária uma teoria dos limites bem consolidada; mas até 1821 não se verificou um desenvolvimento sólido dessa teoria. (EVES, 2011)

No decorrer da história nota-se vários matemáticos se empenhando em obter conceitos que levassem a uma estrutura melhor para o cálculo, mas somente no século XIX com Cauchy, houve um aperfeiçoamento conceitual.

De acordo com Eves (2011), deve-se a Cauchy grande parte da abordagem do cálculo presente nos atuais textos universitários, incluindo os conceitos fundamentais de limite e continuidade. Cauchy definiu a derivada de $y = f(x)$ em relação a x como o limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$, da razão: $\Delta y / \Delta x = (f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$. O conceito de limite é considerado essencial e indispensável para o desenvolvimento da análise, uma vez que a convergência e divergência de séries também dependem desse conceito. A abordagem rigorosa de Cauchy influenciou outros matemáticos a se unirem no esforço de purificar a análise de formalismos e intuicionismos.

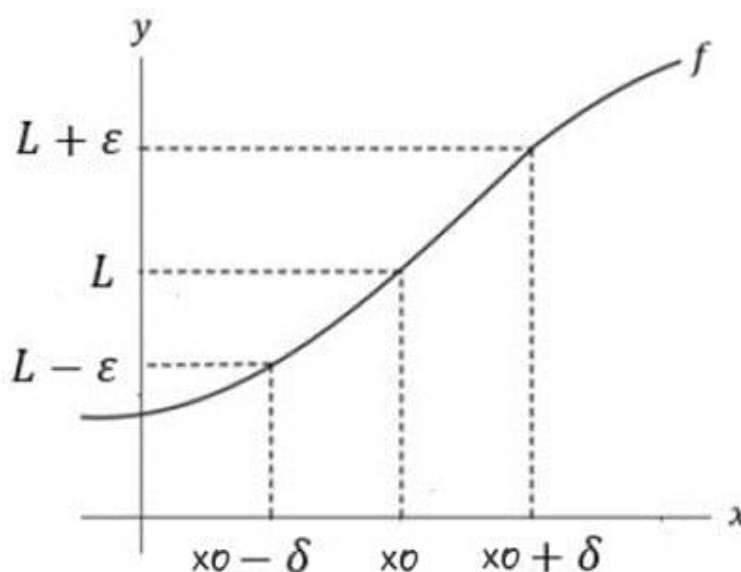
BOYER (1992) afirma que não seria certo deixar pensar que Cauchy era o único na época a desenvolver a fundamentação do cálculo, Bernhard Bolzano também tentou independentemente e chegou à mesma definição de função contínua. As noções do cálculo como foram apresentadas por Cauchy e Bolzano se aproximam muito da forma como hoje são utilizadas, no entanto mesmo com estas contribuições ainda restaram certas expressões que careciam de precisão

matemática. O conceito de limite, com todos os *épsilons* e *deltas*, que se conhece hoje, deve-se ao alemão Karl Weierstrass:

Segundo Ávila (2001), a definição de limite de Cauchy, embora correta, ainda era permeada pela noção espúria de movimento. No entanto, essa definição é agora substituída pela definição puramente numérica de Weierstrass. A definição de limite de Weierstrass estabelece que para uma função $f(x)$ ter limite L quando x tende a x_0 , significa que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica em $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ávila (2001) também sugere que, com essa nova definição numérica, a própria Geometria teria que buscar na Aritmética elementos mais seguros para sua fundamentação. Essa mudança indica uma tendência de utilizar conceitos matemáticos mais rigorosos e numéricos para estabelecer fundamentos sólidos em diferentes áreas da matemática, inclusive na Geometria

Figura 17 – Representação gráfica de limite



Fonte: Infoescola (acessada em 17/05/2023)

A seguir, serão exploradas algumas extensões do conceito de limite, mais especificamente os *limites infinitos*. No entanto será apresentada somente a definição sem a inclusão de provas ou demonstrações rigorosas. Todas as definições foram retiradas de Guidozzi (2001, p. 103)

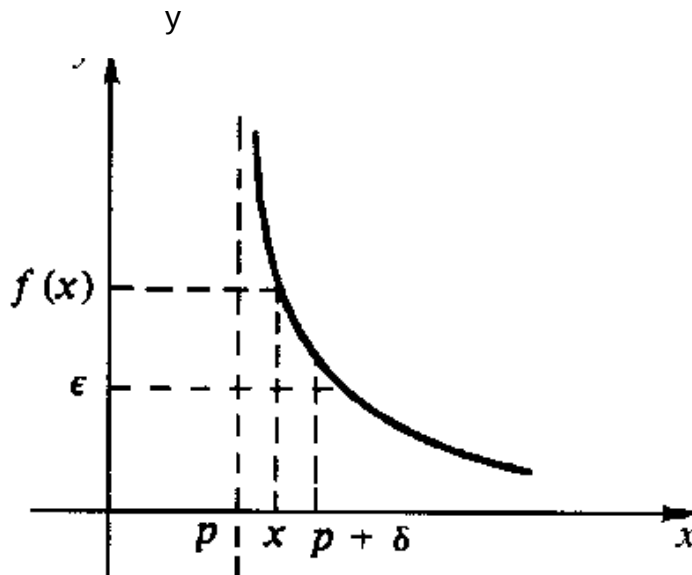
Definição 1. Suponhamos que existe a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que: } x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que: } x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

Definição 2. Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que exista b tal que $]p, b[\subset D_f$. Definimos:

c) $\lim_{x \rightarrow p+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } p+\delta < b, \text{ tal que: } p < x < p+\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$



E assim, depois de uma longa jornada que percorreu os infinitos e enfrentou paradoxos, transitou pelo método da exaustão nos tempos de Arquimedes e Eudoxo, passou pelo método dos mínimos e máximos de Fermat, até a criação do cálculo diferencial por Newton e Leibniz, chegamos ao conceito de limite. Ao longo desse percurso, também é importante ressaltar a contribuição da teoria dos conjuntos de Cantor, que proporcionou uma formulação mais conveniente do conceito de limite.

Foram necessários vários séculos para desvendar e aprofundar o limite, conforme o conhecemos atualmente. O conceito de limite é um dos mais importantes e fundamentais da matemática, especialmente do cálculo e da análise. Ele permite definir continuidade, derivada e a integral de uma função, entre outras aplicações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar a trajetória dos conceitos de infinitos, dos paradoxos e do conceito de limite ao longo da História da Matemática. Inicialmente, foram explorados os infinitos, desvendando suas múltiplas histórias e os consequentes paradoxos que surgiram como consequência direta da compreensão dessas grandezas ilimitadas. Foi mostrado como esses paradoxos desempenharam um papel significativo no desenvolvimento e evolução da Matemática ao longo dos séculos. Além disso, propusemos uma investigação do conceito de limite, mergulhando em sua cronologia e fundamentando-nos na rica história matemática.

Planejamos explorar de que maneira o conhecimento histórico dos infinitos, paradoxos e limites contribuiu para o desenvolvimento da teoria do cálculo diferencial, uma das áreas mais fundamentais e aplicadas da Matemática. Ao percorrer essa jornada histórica, buscamos não apenas verificar o panorama desses conceitos, mas também evidenciar as interconexões entre eles, destacando como influenciaram e moldaram o pensamento matemático ao longo do tempo.

O entendimento dos infinitos, a análise dos paradoxos e a compreensão dos limites não apenas ampliam nosso conhecimento histórico, mas também enriquecem nossa perspectiva e habilidades no estudo do cálculo diferencial, proporcionando uma base sólida e embasada para essa disciplina-chave. Portanto, quando propusemos explorar a história dos infinitos, paradoxos e limites, neste trabalho visamos uma compreensão mais ampla e profunda da Matemática, ressaltando a importância do cálculo diferencial.

No decorrer de nosso estudo, pudemos compreender a profunda influência da sociedade com suas crenças, costumes e cultura no estudo e interpretação dos conceitos de infinitos, paradoxos e limite. É interessante observar como diferentes períodos históricos foram marcados por visões contrastantes em relação a essas grandezas matemáticas. No contexto dos antigos gregos, conhecidos por sua excelência em geometria e seguidores da teoria pitagórica, surgiram desafios e polêmicas relacionadas aos infinitos. Essas questões problemáticas foram evitadas e não aprofundadas devido a uma certa resistência em lidar com elas.

Durante a Idade Média, a influência dominante da Igreja Católica, com seus dogmas, doutrinas e pregações, levou a uma interpretação do infinito como uma entidade atribuída a Deus, talvez até mesmo identificando-o com o próprio Deus. A inquisição e a perseguição aos hereges, infelizmente, obstruíram o desenvolvimento da ciência como um todo e por extensão a matemática. Foi apenas no período do Renascimento, uma época em que as ideias floresceram que houve um grande avanço na matemática, e aí o infinito começou a se manifestar novamente.

Matemáticos como Bolzano, Cavalieri, Newton, Leibniz, entre outros, trouxeram contribuições significativas para a compreensão dos infinitos. No entanto, foi nos séculos XIX e XX, com a teoria dos conjuntos de Cantor, que o infinito passou a ser visto de forma mais aberta, sem tanto preconceito e intolerância. As teorias e avanços matemáticos dessa época proporcionaram uma compreensão mais profunda e refinada do conceito de infinito, permitindo seu estudo de maneira mais ampla e sistemática. É notável como a visão e aceitação do infinito evoluíram ao longo da história, refletindo as transformações e a mentalidade da sociedade em diferentes momentos.

Esse raciocínio poderá ser estendido para os paradoxos e limites, uma vez que também são conceitos intrinsecamente ligados ao contexto histórico e às perspectivas sociais e culturais de cada época. Assim como os infinitos, os paradoxos e limites foram influenciados por diferentes visões e interpretações ao longo da história da matemática. Os paradoxos, por exemplo, são situações aparentemente contraditórias que desafiam a lógica e o senso comum. Eles surgiram em diferentes momentos e contextos, provocando questionamentos e desafiando os fundamentos matemáticos estabelecidos.

Pudemos compreender o quanto os limites, por sua vez, são fundamentais no cálculo e na análise matemática. Eles envolvem o estudo do comportamento de funções quando se aproxima de determinados valores ou tendências infinitas. A compreensão dos limites evoluiu ao longo do tempo, passando por diferentes abordagens e definições. Inicialmente, o conceito de limite não era formalizado e a compreensão era mais intuitiva.

Também foi possível notar a importância da compreensão dos limites, pois estes possibilitam a resolução de problemas complexos, como a determinação de taxas de variação, áreas sob curvas e comportamentos assintóticos. Além disso, os

limites fornecem a base para a definição rigorosa do cálculo diferencial e integral, permitindo a formulação precisa e o desenvolvimento de teorias matemáticas sólidas.

Essa reflexão nos levou a compreender a importância de considerar o contexto histórico e social ao investigar e interpretar conceitos matemáticos tão complexos e fundamentais como os infinitos, paradoxos e limites

Com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, os limites foram rigorosamente definidos e incorporados ao arcabouço matemático. Diante do exposto confirmamos nossa hipótese de que esse conhecimento é de substancial importância para a formação não só dos futuros matemáticos, mas também dos físicos, engenheiros e todos aqueles que utilizam o cálculo diferencial.

Assim sendo, este trabalho de pesquisa bibliográfica, não teve a pretensão de explorar todos os caminhos percorridos pelos infinitos, paradoxos e limites. No entanto, através deste estudo, foi possível vislumbrar a relação intrínseca que existe entre esses conceitos e compreender a sua importância para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial, especialmente no conceito de limite como é conhecido atualmente.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N.; **Dicionário de filosofia**; Tradução da 1ª edição brasileira Alfredo Bossi; revisão e tradução dos novos textos Ivone Castilho Benedetti; 5ª Edição; São Paulo; Martins Fontes, 2007.

AMADEI, F. L. **O infinito: um obstáculo no estudo da Matemática**, Dissertação de Mestrado em Educação Matemática orientador: Prof(a). Dr(a). Sonia Barbosa Camargo Igliorj; PUC/SP, São Paulo, 2005

AMORIN, L. I. F. **A (RE) Construção do Conceito de Limite do Cálculo para a Análise**: Um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Ouro Preto. Dissertação Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ARAÚJO, A. **Somos todos paradoxais, criativos e mutantes!** Marcondes Consultoria. Disponível em: <https://marcondesconsultoria.com/somos-todos-paradoxais-criativos-e-mutantes/>. Acesso em: 27 abr. 2023.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. 1ª edição, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 2001

ÁVILA, G. **Cantor e a teoria dos conjuntos**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 43. 2000. p. 6-14. Disponível em: [http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM 43/RPM43_02.PDF](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM%2043/RPM43_02.PDF). Acesso em março de 2023.

BOYER, C. B. **História da matemática**, Tradução Elza F. Gomide, São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BOYER, C. B. **Tópicos de História do Cálculo para uso em sala de aula**. Tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo, Atual Editora Ltda, 1992.

BRITO, S.V.S. **Contando o Infinito**: A natureza Paradoxal da Infinitude; Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia; Anais do 15º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia / - Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de História da Ciência: Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016

BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na História da Matemática e no ensino da Matemática**, tese Doutorado Educação pela Faculdade de Educação da USP, orientador: Professor Doutor Nilson José Machado, São Paulo, 1996.

CAETANO NETO, G. A. **Uma ideia sobre o conceito de limite ao longo da história da matemática**, 2016, 118 f.; Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, Orientadora: Profª Drª Mônica de Cássia Siqueira Martines, 2016

CAMARGO, B. A. Alves; **Explorando o infinito de Cantor e apresentando-o ao ensino médio**, dissertação (mestrado), Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Orientador Marcelo Reicher Soares, Bauru, 2020.

CIFUENTES, J. C. **O salto arquimediano**: um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático, *Scientiæ Zudia*, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 645-67, 2011

CINDRA, J. L. **Algumas considerações sobre o infinito** - Anais do 13º Seminário Nacional da História da Ciência e Tecnologia, São Paulo – USP – 03 a 06/09/2012

DIAS, C. M. C.– **São antinomias os paradoxos matemáticos?** *Tecnologia & Humanismo*, (revista) v. 16, n. 22/23, pgs 7 a 23 (2002)
<https://periodicos.utfpr.edu.br/rth/article/view/6329/3980>

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5ª Edição, Campinas, SP. Editora da Unicamp, 2011, 843p.

GOUVEIA, R. **Galileu Galilei**. Disponível em:
<https://www.todamateria.com.br/galileu-galilei/> Acessado em 05/05/2023

GUIDOZZI, H.L. **Um curso de cálculo** – Vol 1 - 5ª Edição, Rio de Janeiro, LTC-Livros Técnicos Integrados, 2001

HANSON C.L. **Point at infinity** disponível em:
pointatinfinityblog.wordpress.com/2016/04/07/aristotles-wheel-galileo-and-the-jesuits/

INFINITO, *In*: DICIO, Dicionário Online de Português. 7Graus, 2020. Disponível em:
 <<https://www.dicio.com.br/infinity/>>. Acesso em: 17 abr. 2023.

INFINITESIMAL. *In*: DICIO, Dicionário Online de Português. 7Graus, 2020. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/infinity/>>. Acesso em: 17 abr. 2023.

LANNES, W. **A incompletude além da Matemática**: impactos culturais do teorema Godel no século, Tese de Doutor - Universidade Federal de Minas Gerais, Orientação Prof. Dr. Mauro Lúcio Leitão Condé, Belo Horizonte, 2009.

LESSA, J. R. **Representação gráfica de Limite** disponível em:
<https://www.infoescola.com/matematica/limites/>

MACHADO, A.N. **Problemas Filosóficos** disponível em:
<http://problemasfilosoficos.blogspot.com/2013/04/paradoxo-da-dicotomia-zenao.html>

MARINHO. L. **Sophie of nature** disponível em:
<https://sophiaofnature.wordpress.com/2015/01/03/paradoxos-da-razao-parte-i/#more>

MELO, J. L. P. **Matemática**: Surpreenda-se com a roda de Aristóteles – Folha de São Paulo, 2002. <https://www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u10593.shtml>

MONTEIRO, G. L., MONDINI, F. **Paradoxos falsídicos**: os primeiros

enfrentamentos do conceito de infinito no contexto da ciência matemática. ACTIO, Curitiba, v. 4, n. 2, p. 30-47, mai./ago. 2019. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/actio>>. Acesso em: março 2023

MONTEIRO, M.C.S.T. **A evolução do conceito de limite**. (Dissertação Mestrado), Orientação Antônio José Pascoal, Universidade Portucalense, Portugal. 2008. Disponível no Repositório UPT, <http://hdl.handle.net/11328/545>.

MORA, J. F. **REFERENCIA: DICIONÁRIO DE FILOSOFIA**; Traduzido por Antônio José Massano e Manuel Palmerin; Editora: Publicações Dom Quixote, Lisboa, 1978

MORRIS, R. **Uma breve História do infinito**: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico, Tradução Maria Luiza X. de A. Borges; Jorge Zahar Editor Ltda., Rio de Janeiro, RJ, 1998. (Coleção Ciência & cultura)

NUNES, R.S. R.- **Geometria Fractal e Aplicações**, dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Porto, Porto/PT, 2006).

PARADOXO. *In*: DICIO, Dicionário Online de Português. 7Graus, 2020. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/infinito/>>. Acesso em: 15 mai. 2023.

REIS, G. L. e SILVA, T. T.- **Geometria Analítica**, 2ª edição, LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1996

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS RACIONAIS, site: Matemática na Web, 2023. disponível em: <<https://matematicanaweb.com.br/assuntos/conjunto-dos-numeros-rationais/representacao-geometrica-dos-numeros-rationais/>>. Acesso: 16 mai. 2023.

SENA, C.O.R. **Uma história sobre o infinito atual**; Monografia, Pós-graduação; Universidade Federal de Minas Gerais, Professor Orientador: Alberto Berly Sarmiento Vera; Belo Horizonte, 2011.

STEWART, I. **Desbravadores da matemática**: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot; Tradução George Schlesinger; 1.ed. – Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2019. [recurso eletrônico]

STROGATZ, S. **O poder do infinito** - tradução de Paulo Afonso. - 1. ed. - Rio de Janeiro:Ed. Sextante, 2022. [recurso eletrônico]

ZUMPARO, A. **Paradoxos do Infinito**. (17/04/2013) Disponível em: <https://www.yumpu.com/pt/document/read/12817998/paradoxos-do-infinitopdf-instituto-de-matematica-ufrgs>. Acessado em 22/03/2023.

VIVIAN, L.C. **Recordando a Matemática**, disponível em: <http://recordandomatematica.blogspot.com/2014/07/o-paradoxo-de-zenon.html>

ZUMPARO, A. **Os Limites da Matemática Clássica**. Ciência Hoje, pág77–79, 2001.