

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

CURVAS NO PLANO COMPLEXO

LARA DE QUEIROZ RAMOS

**GOIÂNIA - GOIÁS
2023**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Lara de Queiroz Ramos

Matrícula: 20211011160311

Título do Trabalho: Curvas no Plano Complexo

Autorização - Marque uma das opções

1. (x) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais incluídos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

_____, Goiânia _____, 19/06/2023.
Local Data

Lara de Queiroz Ramos

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

LARA DE QUEIROZ RAMOS

CURVAS NO PLANO COMPLEXO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Corpo Docente do Curso de Especialização
em Matemática do Instituto Federal de Goiás
- IFG/Goiânia, como requisito parcial para
obtenção do Certificado de Especialista em
Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Professora Dr(a). Karoline Victor Fernandes

GOIÂNIA - GOIÁS
2023

R175c

Ramos, Lara de Queiroz.

Curvas no plano complexo / Lara de Queiroz Ramos. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023.
51 f.: il.

Orientadora: Prof. Dra. Karoline Victor Fernandes.

Monografia (Especialização) – Curso de Especialização em Matemática, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Geometria diferencial - curvas. 2. Números complexos. I. Fernandes, Karoline Victor (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 516.36

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

Curvas no Plano Complexo

por

Lara de Queiroz Ramos

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes

Monografia defendida e aprovada, em 07 de junho de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes (Presidente da Banca/ IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Jolivê Mendes de Santana Filho (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Karoline Victor Fernandes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 07/06/2023 15:26:14.
- Jolive Mendes de Santana Filho, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 07/06/2023 15:25:35.
- Jose Eder Salvador de Vasconcelos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 07/06/2023 15:22:02.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 31/05/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 413943

Código de Autenticação: aedc7416c2



Dedicatória

Dedico ao meu maravilhoso pai, Absai Leite Ramos. Que infelizmente não está mais aqui entre nós, mas que segue vivo em meu coração. A ele dedico toda a minha vida e todas as minhas conquistas, a ele que tinha o maior orgulho e enchia a boca sempre para falar de min. Eu só tenho que agradecer a Deus pelos anos que me permitiu estar ao lado deste homem, com este coração puro e verdadeiro.

Agradecimentos

A Deus faço meu primeiro agradecimento, aquele que me concedeu a vida, que sempre me abraçou e me deu forças para conquistar meus objetivos. Agradeço a minha família, apoiadores e incentivadores ativos em minha vida. Vocês são todo meu alicerce e sem vocês eu não seria nada. Tudo que sou hoje devo a vocês por todo amor e dedicação que tens por mim. Agradeço a todos meus amigos, que agregam em minha vida. A minha orientadora Professora Dra. Karoline Victor Fernandes, por todo apoio e ajuda na elaboração dese trabalho, obrigada por não ter desistido de mim e me ajudado tanto na elaboração do mesmo.

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de mostrar alguns resultados de geometria diferencial das curvas. Abordamos alguns tópicos importantes das curvas planas: a parametrização, a reta tangente em pontos específicos da curva, a condição de regularidade de uma curva, o comprimento de arco de uma curva em parametrização arbitrária, a reparametrização por comprimento de arco e o conceito mais importante da geometria diferencial, o de curvatura. Identificando o conjunto dos números complexos como plano $\mathbb{R}^2$, apresentamos a definição de curva parametrizada no plano complexo, alguns exemplos e uma expressão para o cálculo da curvatura.

Palavras-chave: Curva ; Números complexos; Curva parametrizada, Curvatura.

Abstract

This work aims to show some results of differential geometry of the curves. We approach some important aspects of plane curves: parameterization, the tangent line at specific points of the curve, the regularity condition of a curve, the arc length of a curve in arbitrary parameterization, reparameterization by arc length and the most important concept of Differential geometry, curvature. Identifying the set of complex numbers as a plane $\mathbb{R}^2$, we present the definition of a parameterized curve in the complex plane, some examples and an expression for calculating the curvature

Keywords: Curve ; Complex numbers; Parametrized curve, Curvature.

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	1
1.1 Cálculo Vetorial no Espaço Euclidiano	1
1.2 Cálculo Diferencial no Espaço Euclidiano	4
1.3 Números e variáveis complexos	6
1.3.1 Representações vetorial e polar	7
1.3.2 Fórmula de Euler	8
1.4 Álgebra de números complexos	9
1.4.1 Fórmula de Moivre	11
1.5 Funções de uma variável complexa	11
2 Curvas Planas	13
2.1 Curvas Contínuas	13
2.2 Curvas suaves, vetor tangente e reta tangente.	18
2.3 Reparametrização e comprimento de arco	20
2.4 Campo de vetores tangentes e normais	25
2.5 Curvatura e equações de Frenet	27
3 Curvas no plano complexo	31
Conclusão	37
Referência Bibliográficas	38

Introdução

O estudo das curvas teve suma importância no desenvolvimento da Matemática. O matemático e historiador da matemática Enrico Giusti assim as define:

“Objetos matemáticos por excelência, as curvas desempenham, no imaginários matemático, o delicado papel de uma região de fronteira onde desembocam atividades diferentes e, as vezes, contrapostas. Essas remetem ao desenho, ao projeto, ao construir, mas juntas simbolizam o gesto e a beleza; ao mesmo tempo, objetos da imaginação e instrumentos da técnica. ([Giusti e Conti 1999])”

Desde a origem da geometria os matemáticos não pouparam esforços para estudá-las, classificá-las, medi-las e traçá-las.

As curvas ocupam um papel de destaque pois são essenciais à modelagem e a descrição de inúmeros fenômenos matemáticos. Vários cientistas, dentre eles Galileu Galilei (1564–1642) contribuíram para o desenvolvimento da matemática e física, ajudando a compreender fenômenos da natureza e eliminando crenças empíricas disseminadas na época. Baseado na abordagem de Galileu, ao tratar os problemas do mundo físico através da matemática, temos o filósofo e matemático René Descartes (1596 – 1650), que através de seu método analítico de pensar nos problemas, possibilitou o surgimento da ciência moderna, mais precisamente de uma base analítica dos objetos matemáticos de interesse. Além de Descartes, outro matemático de grande relevância foi Pierre de Fermat (1601– 1665), que através do estudo dos lugares geométricos contribuiu, concomitantemente com Descartes, para o surgimento deste campo do saber com bases para a concepção da Geometria Analítica. Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727) descobriram os algoritmos do cálculo infinitesimal, os quais permitiram o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais, fazendo com que durante o século XVIII até o século XIX, se desenvolvesse os fundamentos da teoria de curvas e superfícies através do Cálculo Diferencial Integral. A partir dos trabalhos de Decartes, as curvas passaram a ser vistas como lugares geométricos descritos por equações algébricas, com o advento do cálculo infinitesimal e da geometria diferencial esse processo foi amadurecido.(Veja [Boyer e Merzbach 2019])

Para este trabalho o ponto de vista da geometria diferencial é o que nos interessa, nesse contexto uma curva é completamente caracterizada por suas propriedades geométricas (Veja [Carmo 2010], [Tenenblat 2008] e [Alencar, Santos e Neto 2020]). No Capítulo 1 trataremos conceitos fundamentais do cálculo vetorial e do cálculo diferencial de funções de uma ou mais variáveis, dando ênfase às propriedades de produto escalar, vetorial e os conceitos básicos de cálculo diferencial no espaço euclidiano, apresentaremos também o conceito de números e

variáveis complexos, as representações vetorial e polar e a álgebra de números complexos, além disso apresentaremos a fórmula de Euler e a fórmula de Moivre. No Capítulo 2, mostraremos a parametrização de algumas curvas planas, a sua regularidade, o vetor tangente, a mudança de parâmetro, comprimento de arco para parametrizar e reparametrizar as curvas planas e a curvatura. O conhecimento do comportamento de uma função complexa $f(z)$ para todos os valores complexos de z nos fornece uma visão mais completa de suas propriedades do que o conhecimento para somente os valores reais de z (veja [Ablowitz, Fokas e Fokas 2003], [Neto 1996] e [Silva et al. 1974]), por isso, no Capítulo 3, abordando as curvas no plano complexo e aplicando os conteúdos estudados nos capítulos anteriores para definir e calcular a curvatura de funções complexas.

1

Preliminares

1.1 Cálculo Vetorial no Espaço Euclidiano

Dados dois pontos quaisquer $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ no $\mathbb{R}^3$, o segmento orientado de P_1 a P_2 é chamado vetor e o comprimento desse segmento é denominado módulo do vetor.

Assim sendo, para cada vetor existente, podemos determinar seu módulo, direção e sentido. Se v é o vetor dado pelo segmento de P_1 a P_2 , então as componentes de v são $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Dois vetores são iguais se possuem o mesmo módulo, direção e sentido, ou seja, se, e somente se tiverem as mesmas componentes. Dizemos que um vetor é nulo se todas suas componentes são nulas, o vetor nulo será denotado por $O = (0, 0, 0)$.

Definimos a soma de dois vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ como sendo o vetor de componentes $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Se λ é uma constante real, então definimos o produto λv_1 pelo vetor de componentes $\lambda v_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

A soma de vetores satisfaz

- i) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
- ii) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.
- iii) $0 + v_1 = v_1$.
- iv) $v_1 + (-v_1) = 0$.

onde v_1, v_2 e v_3 são vetores e $-v_1 = -(v_1) = (-x_1, -y_1, -z_1)$.

Se λ_1 e λ_2 são números reais, então o produto de um vetor por um escalar satisfaz

- i) $\lambda_1(\lambda_2 v_1) = (\lambda_1 \lambda_2) v_1$.
- ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) v_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_1$.
- iii) $\lambda_1(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2$.
- iv) $1 v_1 = v_1$.

Neste caso, dizemos que $\mathbb{R}^3$ com as operações definidas é um espaço vetorial real. Qualquer conjunto com duas operações satisfazendo essas oito propriedades é um espaço vetorial real, para mais detalhes veja [Lages 2009].

Podemos calcular o módulo de um vetor da seguinte maneira:

Seja $v = (x, y, z)$ um vetor, seu módulo é dado por $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Se $|v| = 1$, dizemos que esse vetor é unitário.

Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, são ditos linearmente dependentes se existirem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, nem todos nulos, tais que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ serão linearmente independentes se para qualquer combinação linear desses vetores na forma

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0,$$

tivermos $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exemplo 1.1. Os vetores $\alpha_1 = (2, 4, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)$ e $\alpha_3 = (2, 6, 4)$ são linearmente dependentes, pois $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$.

Exemplo 1.2. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são linearmente independentes.

Todo vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser expresso de forma única como combinação linear de $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ da seguinte forma:

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Definição 1.3. Definimos o produto interno ou produto escalar de dois vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pelo número real dado por

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Assim, podemos afirmar que $\langle v, v \rangle = |v|^2$ qualquer que seja o vetor v . Podemos verificar facilmente que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$.
- 2) $\langle \lambda v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda v_2 \rangle = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle$.
- 3) $\langle v_1, v_2 + v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle$.
- 4) $\langle v_1, v_1 \rangle \geq 0$.
- 5) $\langle v_1, v_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$.

onde v_1 , v_2 e v_3 são vetores de $\mathbb{R}^3$ e λ é um número real.

Sejam os vetores $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, o ângulo θ entre v_1 e v_2 é a solução da equação $\langle v_1, v_2 \rangle = |v_1||v_2|\cos\theta$, satisfazendo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Dois vetores são ortogonais se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, ou seja, se $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$ ou o ângulo θ entre eles é igual a $\frac{\pi}{2}$.

Definição 1.4. Uma base ortonormal é aquela formada por vetores unitários e dois a dois ortogonais. Por exemplo, a base canônica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ é formada por vetores ortonormais.

Considere as bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, $\{t_1, t_2, t_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$, e escreva

$$w_1 = a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + a_{31}t_3,$$

$$w_2 = a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + a_{32}t_3,$$

$$w_3 = a_{13}t_1 + a_{23}t_2 + a_{33}t_3.$$

Dizemos que as bases $\{t_1, t_2, t_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ têm a mesma orientação se o determinante de mudança de base é positivo, ou seja,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Caso contrário, as bases têm orientação oposta. Quando temos duas bases ortonormais, o determinante da mudança de base é igual a ± 1 .

Definição 1.5. Dados os vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, o produto vetorial entre eles é denotado por $v_1 \times v_2$, e forma o vetor de componentes

$$v_1 \times v_2 = (y_1z_2 - y_2z_1, -x_1z_2 + x_2z_1, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Um produto vetorial satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $|v_1 \times v_2| = |v_1||v_2|\sin\theta$, sendo θ o ângulo formado entre os vetores v_1 e v_2 .
- 2) $\langle v_1 \times v_2, v_1 \rangle = \langle v_1 \times v_2, v_2 \rangle = 0$.
- 3) $v_1 \times v_2 = 0$, se, e somente se, v_1 e v_2 são linearmente dependentes.
- 4) $v_1 \times v_2 = -(v_2 \times v_1)$.
- 5) $v_1 \times (v_2 + v_3) = v_1 \times v_2 + v_1 \times v_3$.
- 6) $(\lambda v_1) \times v_2 = \lambda(v_1 \times v_2)$.
- 7) $v_1 \times (v_2 \times v_3) = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3$.

sendo v_1, v_2 e v_3 vetores e λ um número real.

De maneira geral $v_1 \times (v_2 \times v_3) \neq (v_1 \times v_2) \times v_3$, ou seja, o produto vetorial não é associativo. Da propriedade 1) segue que $|v_1 \times v_2|$ é a área de um paralelogramo determinado por v_1 e v_2 .

Definição 1.6. Dados os vetores v_1, v_2 e v_3 de componentes $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$, o número real $\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle$ é denominado Produto Misto de v_1, v_2 e v_3 , e é representado da seguinte maneira:

$$\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Pelas propriedades de determinantes, temos que,

$$\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \times v_1 \rangle = \langle v_3, v_1 \times v_2 \rangle = -\langle v_3, v_2 \times v_1 \rangle = -\langle v_2, v_1 \times v_3 \rangle = -\langle v_1, v_3 \times v_2 \rangle.$$

Em particular,

$$\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle.$$

Além disso, $\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = 0$ se, e somente se, v_1, v_2 e v_3 são linearmente dependentes.

Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal então $\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \pm 1$.

1.2 Cálculo Diferencial no Espaço Euclidiano

Uma função vetorial α de um subconjunto X de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$, denotada por $\alpha : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma correspondência em que, para cada $p \in X$ associa-se $\alpha(p) \in \mathbb{R}^3$.

Considere a função vetorial $\alpha : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ela pode ser representada por:

$$\alpha(p) = (x(p), y(p), z(p)),$$

onde as funções reais $x, y, z : X \rightarrow \mathbb{R}$ são denominadas funções coordenadas de α .

Consideraremos daqui por diante o intervalo aberto X de $\mathbb{R}$ para as funções vetoriais. Seja f uma função real, onde α e β são funções vetoriais em X , portanto as funções $\alpha + \beta$, $f\alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \times \beta$ são definidas para todo $p \in X$ como,

$$1) (\alpha + \beta)(p) = \alpha(p) + \beta(p).$$

$$2) (f\alpha)(p) = f(p)\alpha(p).$$

$$3) \langle \alpha, \beta \rangle(p) = \langle \alpha(p), \beta(p) \rangle.$$

$$4) (\alpha \times \beta)(p) = \alpha(p) \times \beta(p).$$

Definição 1.7. Seja a função $\alpha : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, X um intervalo de $\mathbb{R}$ e o ponto $p_0 \in X$. Dizemos que α é diferenciável em p_0 se existir, $\alpha'(p_0)$ dado por

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\alpha(p) - \alpha(p_0)}{p - p_0} = \left(\lim_{p \rightarrow p_0} \frac{x(p) - x(p_0)}{p - p_0}, \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{y(p) - y(p_0)}{p - p_0}, \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{z(p) - z(p_0)}{p - p_0} \right);$$

ou seja, $\alpha(p) = (x(p), y(p), z(p))$ é diferenciável em p_0 se, e somente se, as funções coordenadas de α forem diferenciáveis em p_0 . Assim, $\alpha'(p_0) = (x'(p_0), y'(p_0), z'(p_0))$.

Dizemos que α é diferenciável se α é diferenciável em todo ponto $p \in X$.

Definição 1.8. A função $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ em que para todo $p \in X$ associa um $\alpha'(p)$ será uma função vetorial chamada de derivada de primeira ordem de α . Se $\alpha'(p)$ também for diferenciável, teremos então $\alpha''(p)$, que definiremos como derivada de segunda ordem.

Quando uma função vetorial tem derivadas, de todas as ordens, contínuas essa função será de classe C^∞ .

Se α e β são funções diferenciáveis em X e f é uma função real diferenciável em X , então $\alpha + \beta$, $f\alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \times \beta$ são diferenciáveis.

Definição 1.9. Uma função ou aplicação F de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, denotada por $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma correspondência que, para cada $p \in A$, associa um único ponto $F(p) \in \mathbb{R}^m$. Uma tal função pode ser representada por

$$F(p) = (F_1(p), F_2(p), \dots, F_m(p)),$$

ou, considerando $p = (x_1, \dots, x_n)$,

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)).$$

As funções $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ são ditas funções coordenadas de F .

Dadas duas funções $F, G : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir as funções $F + G$, fG , $\langle F, G \rangle$ e $F \times G$, (essa última para $m = 3$), de forma análoga às das funções vetoriais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$.

Uma função F diferenciável de classe C^k (resp. C^∞), que tem uma função inversa F^{-1} também é diferenciável de classe C^k (resp. C^∞), é denominada um difeomorfismo de classe C^k (resp. C^∞).

Dizemos que uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear se, para todo par de pontos p e q em $\mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$F(p + q) = F(p) + F(q),$$

e

$$F(\lambda p) = \lambda F(p).$$

Para concluir esta secção iremos enunciar um resultado de fundamental importância no Cálculo Diferencial, o Teorema da Função Inversa.

Teorema 1.10. *Seja $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável de classe C^k (resp. C^∞) e $p_0 \in A$ tal que dF_{p_0} é injetora. Então, existe uma vizinhança U de p_0 , contida em A , tal que $F(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e a restrição de F a U é um difeomorfismo de classe C^k (resp. C^∞), de U sobre $F(U)$.*

Como $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear, então as seguintes condições são equivalentes:

- a) dF_{p_0} é injetora.
- b) Se $dF_{p_0}(w) = 0$, então $w = 0$.
- c) A matriz jacobiana de F em p_0 tem posto n .
- d) O jacobiano de F em p_0 é não-nulo.

Outro resultado importante, obtido em consequência do teorema anterior, é o Teorema da Função Implícita.

Teorema 1.11. *Sejam $F : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável de classe C^k (resp. C^∞) e $F_1, \dots, F_n$ as funções coordenadas de F . Denotaremos por $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m)$ e $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ os pontos de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^{n+m}$, respectivamente. Fixados $(a, b) \in A$ e $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(a, b) = c$, se a matriz determinada por $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a, b)$, $i, j = 1, \dots, n$ tem posto n , ou seja, determinante não-nulo, então existe uma vizinhança U de b em $\mathbb{R}^m$ e uma função $G : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciável de ordem C^k (resp. C^∞), tal que $G(b) = a$ e $F(G(y), y) = c$ para todo $y \in U$.*

1.3 Números e variáveis complexos

O sistema numérico em uso atualmente é o resultado de um desenvolvimento gradual na matemática que se iniciou na Idade Antiga. Os números naturais $0, 1, 2, 3, \dots$ foram utilizados inicialmente para a contagem. O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$ e diz-se que um dado número natural n pertence a $\mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Os inteiros negativos e o conceito do zero foram então introduzidos para permitir soluções de equações tais como $x + 3 = 2$. Assim criou-se o conjunto dos números inteiros $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

Para obtermos solução das equações tais como $bx = a$, para todos os inteiros a e b , sendo b diferente de 0, foram introduzidos os números racionais. Representa-se o conjunto dos números racionais por $\mathbb{Q} = \{x \mid x = p/q, \text{ com } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$. Percebe-se que $\mathbb{Q}$ contém $\mathbb{Z}$.

Os números irracionais foram introduzidos quando descobriu-se que números tais como a solução da equação $x^2 - 2 = 0$ ($x = \pm\sqrt{2}$) ou a razão entre o perímetro de uma circunferência de raio unitário e o seu diâmetro ($\pi = 3,14159265359\dots$), não podem ser expressos por números racionais. O conjunto dos irracionais é representado por $\mathbb{I}$. Sendo os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ completamente distintos.

A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais forma o conjunto dos números reais, representada pelo símbolo $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$). Algumas disciplinas, como por exemplo cálculo diferencial, apresentam seus teoremas e resultados considerando somente números pertencentes ao conjunto $\mathbb{R}$. Contudo, este conjunto ainda continua incompleto para aplicação em álgebra e para a análise matemática. Os números complexos foram descobertos na Idade Média, ao pesquisar-se as raízes de certas equações quadráticas, como:

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-1}.$$

Leonhard Paul Euler (1707-1783), em 1777, introduziu o símbolo

$$i = \sqrt{-1}.$$

Na tese de doutorado de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1799, ele forneceu aos números complexos a agora expressão algébrica $z = x + iy$, bem como a sua representação geométrica (vetorial) e, com isso, ajudou a desvendar parte de seu mistério. A tendência deste século tem sido definir os números complexos como símbolos abstratos sujeitos a certas regras formais de manipulação.

O número $\sqrt{-1}$ não possui representação possível dentro do conjunto de números reais, ele foi chamado de imaginário puro e atribui a ele o símbolo $i = \sqrt{-1}$. Além disso, definiu-se um conjunto mais amplo de números, denominado o conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, sendo um conjunto mais amplo de números, que contém todos os números complexos e o conjunto dos reais como um sub-conjunto.

Um número complexo é um par ordenado de dois números reais x e y , sendo assim o número complexo z pode ser representado de, pelo menos duas formas:

$$z = (x, y) \text{ ou } z = x + iy,$$

sendo a última representação a mais usual. É importante observar que, $x + iy \neq y + ix$. Pode-se deduzir uma propriedade imediata do número i observando-se que $i^2 = i \cdot i = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$, $i^5 = i \cdot i^4 = i$, Da mesma forma,

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i,$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1,$$

$$i^{-3} = \frac{-1}{i} = i.$$

$$i^{-4} = 1 \dots$$

Resultando

$$i^{\pm 2n} = (-1)^n \tag{1.1}$$

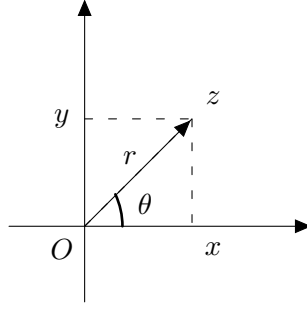
e

$$i^{\pm(2n+1)} = \pm(-1)^n i, \tag{1.2}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

1.3.1 Representações vetorial e polar

A representação gráfica de uma variável complexa é empregada em diversas situações. Traçando x (a parte real de z) como a abscissa e y (a parte imaginária de z) como a ordenada, obtém o plano de Argand ilustrado na figura abaixo.



Na álgebra linear é usado o conceito de vetor posição r como elemento do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Assim, pode-se representar o vetor r fazendo-se uso da base canônica $\{e_1, e_2\}$:

$$r = xe_1 + ye_2,$$

sendo x a componente de r na direção definida por e_1 e y a componente de r ao longo de e_2 . Da mesma forma, pode-se interpretar o número complexo $z = x + iy$ como um vetor, sendo x a componente ao longo do eixo real e y a componente ao longo do eixo imaginário. Assim os números complexos satisfazem as regras de adição de vetores e de multiplicação por escalar. Observando a figura acima, relações simples de trigonometria mostram que

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta,$$

sendo $r \in \mathbb{R}$ ($0 \leq r < \infty$) denominado módulo de z e $\theta \in \mathbb{R}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) chamado de argumento de z . Portanto,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (1.3)$$

onde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.4)$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{y}{x} \right). \quad (1.5)$$

1.3.2 Fórmula de Euler

Uma representação equivalente a representação algébrica de z dada por (1.3) é a chamada representação polar:

$$z = re^{i\theta}. \quad (1.6)$$

Apartir das séries de McLaurin:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

e

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e das potências (1.1) e (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

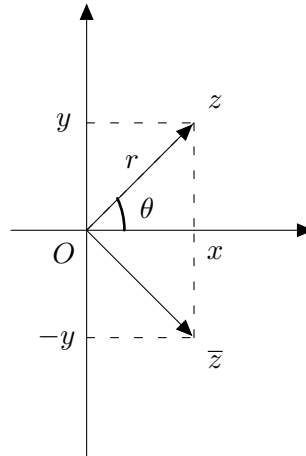
ou seja,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \quad (1.7)$$

Esta é a conhecida Fórmula de Euler.

1.4 Álgebra de números complexos

Sendo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ um número complexo qualquer, o complexo conjugado de z , representado por $\bar{z}$ é definido por $\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$. Na figura abaixo pode-se observar a representação vetorial de $\bar{z}$.



O número $|z| \in \mathbb{R}$ tal que

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

é chamado módulo de z . O número $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$, dado por

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

é chamado argumento de z .

As operações algébricas seguintes são definidas para dois números $z_1 = a + ib = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = c + id = r_2 e^{i\theta_2}$ quaisquer, tais que $\{z_1, z_2\} \in \mathbb{C}$. Os números $\{r_1, r_2\} \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, os módulos de z_1 e z_2 e $\{\theta_1, \theta_2\} \in \mathbb{R}$ são os respectivos argumentos.

1. **Identidade:** Se $z_1 = z_2$, então $Re z_1 = Re z_2$ e $Im z_1 = Im z_2$; ou, de forma equivalente, $r_1 = r_2$ e $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.
2. **Adição:** $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)i$.
3. **Subtração:** $z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + (b - d)i$.
4. **Conjugação complexa de adição:** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
5. **Multiplicação por real:** $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha.z_1 = \alpha(a + ib) = \alpha a + i\alpha b.$$

6. **Multiplicação de complexos:**

$$z_1.z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

ou, em termos da forma polar,

$$z_1.z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (1.8)$$

7. **Divisão de complexos:**

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

ou

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Ou em termos da forma polar,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

8. **Conjugação complexa de produto:** $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.

O valor absoluto de z ainda possui outras propriedades. Sendo $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ números complexos, então

1. $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| |z_2| \cdots |z_n|$.
2. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, desde que $z_2 \neq 0$.
3. $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.
4. $|z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Números complexos $z = re^{i\theta}$ com $r = 1$ possuem $|z| = 1$ e são denominados unimodulares. Pode-se imaginar estes números situados ao longo da circunferência de raio unitário sobre o plano complexo. Pontos especiais nesta circunferência são:

1. $\theta = 0. z = e^{i0} = 1$.
2. $\theta = \pi/2. z = e^{i\pi/2} = i$.
3. $\theta = \pi. z = e^{-i\pi} = -1$.
4. $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2} \quad z = e^{\frac{i3\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$

1.4.1 Fórmula de Moivre

Sejam $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2e^{i\theta_2}$ dois números complexos. Então o produto de ambos é:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

Generalizando este resultado para n números complexos $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, obtém-se

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdots z_n &= r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)} \\ &= r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]. \end{aligned}$$

Agora, se $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, onde se escreve $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Resulta então

$$z^n = r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)], \quad (1.9)$$

a qual é a fórmula para a n -ésima potência ($n > 0$) de z . Cancelando os termos r^n em ambos os lados da equação acima, resulta a Fórmula de Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \quad (1.10)$$

1.5 Funções de uma variável complexa

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto de números complexos $z = x + iy$. Uma função f , definida em D é uma operação que atribui a cada $z \in D$ um outro número complexo $w \in \text{Im}f$, onde $\text{Im}f \subseteq \mathbb{C}$. O número w é denominado o valor de f em z , isto é,

$$w = f(z).$$

O conjunto D é denominado o domínio de definição de f e o conjunto $\text{Im}f$ é denominado a imagem de f . O domínio de definição e a lei de formação são necessários para que a função seja bem definida. Quando o domínio não é especificado, deve-se supor que o maior conjunto possível é tomado. Sendo assim se é mencionado simplesmente a função $f(z) = \frac{1}{z}$, o domínio é subentendido como o conjunto de todos os pontos não nulos no plano complexo.

Existem dois tipos básicos de função:

Funções unívocas. Uma função é denominada unívoca em D se a cada valor de z corresponde um único valor de w .

Funções plurívocas. Uma função é denominada plurívoca em D se a um determinado valor de z corresponde mais de um valor de w . Uma função plurívoca pode ser considerada como uma coleção de funções unívocas, onde cada membro desta coleção é chamado de ramo da função plurívoca. É usual tomar-se um membro em particular da coleção como o ramo principal da função plurívoca e o valor da função correspondente a este ramo é denominado valor principal.

Exemplo 1.12. Considere as seguintes funções:

1. $w = z^2$ é uma função unívoca ou simplesmente função.

2. $w = \sqrt{z}$ é função plurívoca, pois a cada valor de z corresponde dois valores de w . Assim, se $z = re^{i\theta}$, então $\sqrt{z} = w_k = \sqrt{r}e^{i(\theta+2k\pi)/2}$, onde $k = 0, 1$. Para $k = 0$ temos o ramo principal $w_0 = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$. para $k = 1$ temos o segundo ramo $w_1 = \sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{i\pi} = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}$.

2

Curvas Planas

Intuitivamente curvas são subconjuntos do plano com “dimensão igual a 1” por exemplo o gráfico de funções de uma variável real, de forma mais precisa. Uma curva é uma deformação contínua de um intervalo ou ainda a trajetória de um deslocamento de uma partícula.

2.1 Curvas Contínuas

A ideia intuitiva de que uma curva $\mathcal{C}$ deve descrever a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano pode ser facilmente formalizada e nos oferecer informações sobre como o ponto percorre o conjunto $\mathcal{C}$, o sentido que o ponto anda sobre $\mathcal{C}$, permite definir sua velocidade, aceleração, etc,

Definição 2.1. Uma curva contínua no plano $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A aplicação α , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é contínua, se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Definição 2.2. O conjunto imagem $\mathcal{C}$ da aplicação α , dado por

$$\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)); t \in I\}$$

é chamado de traço de α .

Com a definição de curva contínua, estudamos todo o movimento da partícula e não apenas o conjunto $\mathcal{C}$. Assim α é dita uma parametrização de $\mathcal{C}$ e denominamos t o parâmetro da curva α .

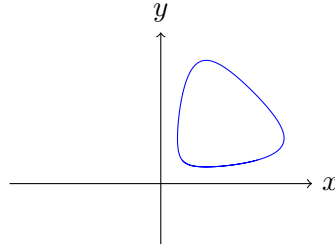
Definição 2.3. Se a aplicação α está definida num intervalo $I = [a, b]$, tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$, dizendo que α é uma curva fechada.

Definição 2.4. Uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita periódica se existe um número real $l > 0$ tal que

$$\alpha(t + l) = \alpha(t) \tag{2.1}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor valor l_0 para o qual a equação (2.1) se verifica é chamado de período de α .

Exemplo 2.5. Uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (e^{sent}, e^{cost})$, é uma curva periódica.



Definição 2.6. Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita simples se a aplicação α for injetiva. Quando temos que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$, dizemos que α possui um ponto duplo ou múltiplo em t_1 e t_2 .

Definição 2.7. Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita fechada e simples se $\alpha(a) = \alpha(b)$ e para quaisquer $t, s \in [a, b]$ tais que $t \neq s$, temos $\alpha(t) \neq \alpha(s)$, isto é, se o único ponto duplo de α ocorre nos seus pontos inicial e final. Uma curva α fechada e simples é denominada curva de Jordan.

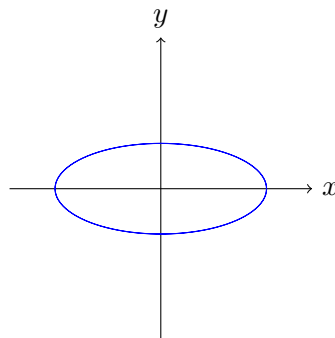
Apresentaremos agora alguns exemplos de curvas contínuas.

Exemplo 2.8. (Elipse). A elipse de focos P_1 e P_2 é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja soma das distâncias aos pontos P_1 e P_2 é uma constante. Se escolhermos o sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^2$ de modo que $P_1 = (-c, 0)$ e $P_2 = (c, 0)$, com $c > 0$, então a elipse é descrita por uma equação da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com a, b números reais positivos. Seja $(x, y) \neq (0, 0)$ e considere t o ângulo que o vetor com ponto inicial na origem e ponto final (x, y) faz com o eixo x positivo. Agora podemos parametrizar a elipse pelo traço da curva

$$\alpha(t) = (acost, bsent), \quad a, b > 0.$$



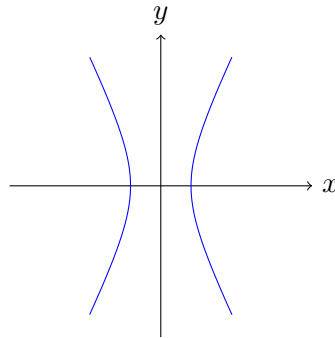
A elipse intersecta os eixos coordenados nos pontos $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ e $B' = (0, -b)$. Os segmentos AA' e BB' são chamados de eixos da elipse.

Exemplo 2.9. (Hipérbole). A hipérbole de focos P_1 e P_2 é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja diferença das distâncias aos pontos P_1 e P_2 é, em valor absoluto, uma constante. Se escolhermos

o sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^2$, tal que $P_1 = (-c, 0)$ e $P_2 = (c, 0)$ com $c > 0$, então a hipérbole é descrita por uma equação do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde a e b são números reais e positivos.



Consideremos as funções cosseno hipérbolico e seno hipérbolico dadas, respectivamente, por

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

e

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Neste caso, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ e podemos parametrizar o ramo direito da hipérbole pelo traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (a \cosh t, b \sinh t).$$

Exemplo 2.10. (Gráfico) Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O conjunto

$$G = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

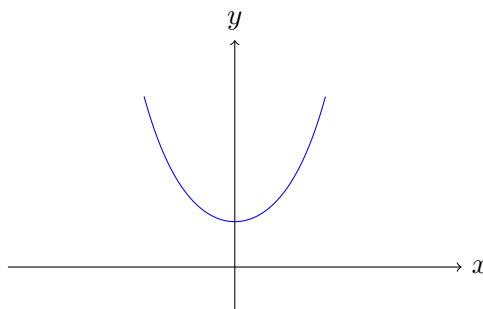
é chamado de gráfico de f . É claro que G pode ser, naturalmente, parametrizado pela curva contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (t, f(t)).$$

Por exemplo, se consideramos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(t) = \frac{a}{2}(e^{t/a} + e^{-t/a}) = a \cosh(t/a),$$

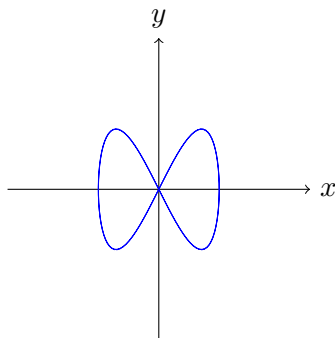
onde a é uma constante positiva, obtemos que o gráfico de f ou, equivalentemente, o traço de α descreve uma catenária.



Ela é a curva obtida quando uma corda de peso uniforme é presa em dois pontos, e essa corda é deixada sob a ação da força gravitacional. Além disso, possui outros interesses geométricos, como no estudo de superfícies minimizantes de área.

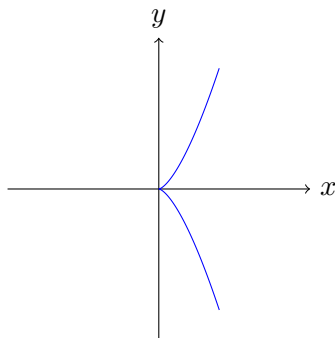
Exemplo 2.11. (Lemniscata) A lemniscata é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$. Podemos parametrizar a lemniscata pelo traço da curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin 2t).$$



Exemplo 2.12. (Parábola de Neill) A parábola de Neill é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^3 - y^2 = 0$. Assim podemos parametrizar a parábola de Neill pelo traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

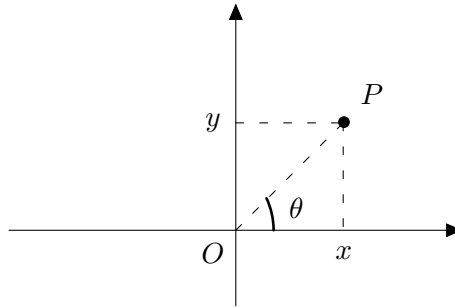
$$\alpha(t) = (t^2, t^3).$$



Definição 2.13. Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ e (x, y) as coordenadas cartesianas de P . Sejam

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e θ o ângulo que o vetor (x, y) (isto é, o vetor com origem em O e ponto final em P) faz com eixo x. As quantidades r e θ são as coordenadas polares de P e, nesse sistema de coordenadas, o ponto P pode ser representada por $P = (r, \theta)$.



Podemos relacionar as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas de um ponto $P \in \mathbb{R}^2 - \{O\}$ usando as relações a seguir: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e, reciprocamente,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

onde, na expressão de θ , usamos a primeira relação para os pontos $P = (x, y)$ tais que $x \neq 0$ e a segunda para os pontos $P = (x, y)$ tais que $y \neq 0$.

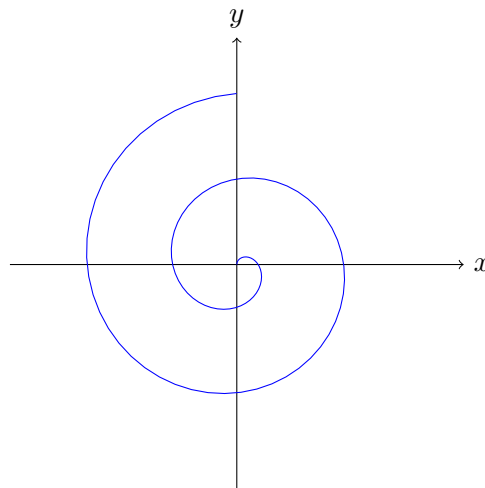
Observação 2.14. Para cada $P \in \mathbb{R}^2 - \{O\}$, sempre existem r e θ tais que P pode ser representado da forma $P = (r, \theta)$, entretanto, ao contrário do que acontece com as coordenadas cartesianas, tal representação não é única. Com efeito, o mesmo ponto P pode ser representado por $(r, \theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Se restringirmos θ ao intervalo $[0, 2\pi)$, então a representação é única. Por outro lado, a origem pode ser representado da forma $(0, \theta)$, onde $\theta \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.15. (Espiral de Arquimedes). A espiral de Arquimedes é o conjunto de pontos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$x \operatorname{tag}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = y, \quad a > 0.$$

Observamos que, em coordenadas polares, sua equação é dada por

$$r = a\theta, \quad a > 0.$$



Logo, podemos também descrever a espiral de Arquimedes como sendo o traço da curva $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (at \cos t, at \sin t)$$

2.2 Curvas suaves, vetor tangente e reta tangente.

Nesta seção, estudaremos localmente uma curva α no plano, isto é, fixado t_0 , estudaremos como se comporta $\alpha(t)$ para valores de t próximo de t_0 . Para este estudo, o ideal seria que pudéssemos ter uma reta que fosse uma boa aproximação para essa curva numa vizinhança de um ponto sobre a curva. No entanto, somente com a definição de curvas contínuas, isso nem sempre é possível. Assim, será necessário introduzir o seguinte conceito :

Definição 2.16. Uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é dita uma curva de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, se cada função coordenada $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^r$. Se cada função coordenada é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$, isto é, x e y possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto de I , então dizemos que α é uma curva suave.

Observação 2.17. Quando não houver prejuízo do entendimento, iremos nos referir às curvas de classe $\mathcal{C}^r$ simplesmente como curvas parametrizadas.

Observação 2.18. Todos os exemplos da seção anterior são suaves no seu intervalo de definição. A demonstração da suavidade naqueles exemplos é elementar, visto que as funções coordenadas são claramente de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemplo 2.19. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (t, |t|)$, não é uma curva parametrizada suave. De fato a função y , definida por $y(t) = |t|$, não é diferenciável em $t = 0$. A restrição de α , a qualquer intervalo que não contém o ponto $t=0$, é, porém uma curva parametrizada.

Exemplo 2.20. Para cada $r \geq 1$, a aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t^{r+1}), & \text{se } t \geq 0; \\ (t, -t^{r+1}), & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

é uma curva parametrizada de classe $\mathcal{C}^r$, mas não é de classe $\mathcal{C}^{r+1}$.

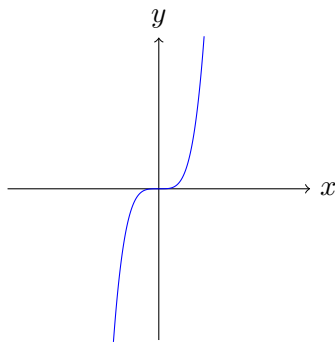


Gráfico para $r = 3$

Definição 2.21. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor tangente (ou vetor velocidade) de α em $t_0 \in I$ é dado por:

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)). \quad (2.3)$$

Definição 2.22. A velocidade escalar de α em $t_0 \in I$ é dada pelo módulo do vetor velocidade $\alpha'(t_0)$, isto é,

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$$

Figura 2.1: Velocidade

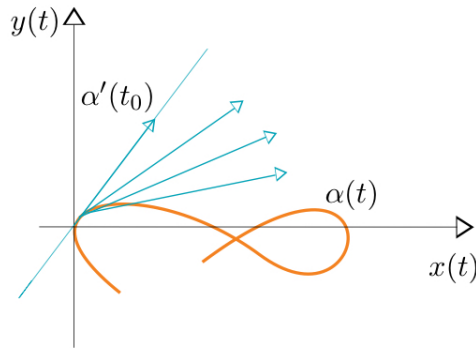


Imagem retirada do livro [Alencar, Santos e Neto 2020]

Quando $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, tal vetor aponta na direção tangente à curva α passando pelo ponto $\alpha(t_0)$, e essa reta é a reta limite das retas secantes à curva α passando por $\alpha(t_0)$ e por $\alpha(t)$, quando fazemos t tender a t_0 .

Definição 2.23. Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t_0 \in I$, se $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ ou, equivalente, se $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$. A curva α é regular em I , se α for regular para todo $t \in I$. Se $\|\alpha'(t_0)\| = 0$, dizemos que α é singular em t_0 e $\alpha(t_0)$ é chamada uma cúspide de α .

Observação 2.24. No texto, sempre que nos referirmos a curvas parametrizadas e regulares estaremos assumindo que a curva é pelo menos, de classes $\mathcal{C}^1$. Como afirmamos, se α for uma curva regular, o vetor $\alpha'(t)$ aponta para a direção tangente á curva α no ponto $\alpha(t)$, e podemos, portanto, introduzir a seguinte definição:

Definição 2.25. A reta tangente à curva α em $\alpha(t)$ é a aplicação $r_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$r_t(u) = \alpha(t) + u\alpha'(t).$$

Veremos mais adiante que a reta $r_{t_0}(u)$ é a melhor aproximação linear de α em t_0 . Intuitivamente, o traço de uma curva regular é suave, sem “bicos”, exceto por possíveis pontos de autointerseção. Localmente, porém, α não tem autointerseção, como mostra o resultado seguinte.

Proposição 2.26. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e regular e $t_0 \in I$. Então existe $\epsilon > 0$, tal que α é injetiva no intervalo $I_0 = \{t \in I; |t - t_0| < \epsilon\}$.*

Demonstração. Como $\alpha'(t_0) \neq (0,0)$, temos que $x'(t_0) \neq 0$ ou $y'(t_0) \neq 0$. Vamos supor que $x'(t_0) \neq 0$. Logo, visto que x' é uma função contínua, existe $\epsilon > 0$, tal que $x'(t) \neq 0$, para todo $t \in I_0$. Nesse caso, x é estritamente monótona e, portanto, injetiva. Isso implica que $\alpha|_{I_0}$ é injetiva. A prova é análoga no caso em que $y'(t_0) \neq 0$. $\square$

Exemplo 2.27. A curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, f(t))$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$, é uma curva regular cujo traço é o gráfico de f . De fato, $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0), \forall t \in I$.

No Exemplo (2.27) vimos que o gráfico de uma função de classe $\mathcal{C}^1$ pode ser parametrizada como uma curva regular. A seguir, provaremos que, localmente, toda curva regular pode ser vista como o gráfico de uma função.

Proposição 2.28. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e regular em $t_0 \in I$. Então existe $\delta > 0$ tal que, restrito ao intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, o traço de α coincide com o traço de uma curva β da forma $\beta(t) = (t, f(t))$ ou $\beta(t) = (f(t), t)$, para uma função diferenciável $f : J \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja α dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Como α é regular em $t = t_0$, temos que:

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \in (0,0).$$

Vamos supor que $x'(t_0) \neq 0$. Nesse caso, pelo teorema da função inversa, existe um intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tal, que a função x é um difeomorfismo, isto é uma função diferenciável com inversa diferenciável sobre $J = x((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$.

Seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = \alpha(x^{-1}(t))$. Temos, portanto, que β é uma curva diferenciável e

$$\beta(t) = (x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t))) = (t, f(t)),$$

onde f , dada por $f(t) = y(x^{-1}(t))$, é uma função diferenciável. A prova, no caso em que $y'(t_0) \neq 0$, é análoga, e, nesse caso, obtemos que o traço de α coincide localmente em $\alpha(t_0)$ com o traço de uma curva da forma $\beta(t) = (f(t), t)$. $\square$

2.3 Reparametrização e comprimento de arco

Definição 2.29. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada de classe $\mathcal{C}^r, r \geq 1$, e seja $h : J \rightarrow I$ uma função de classe $\mathcal{C}^r$. A curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)),$$

também de classe $\mathcal{C}^r$, é dita uma reparametrização de α .

Pela regra da cadeia

$$\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t).$$

A velocidade escalar de β é dada por

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| \|h'(t)\|.$$

Vamos considerar apenas reparametrizações onde a função h é estritamente monótona. Nesse caso, $h'(t) \neq 0$, e, portanto, se α for uma curva regular em I , sua reparametrização $\beta = \alpha \circ h$ também será regular em J .

Definição 2.30. Se h é uma função sobrejetiva e estritamente crescente, dizemos que a reparametrização $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização positiva ou própria, ou que preserva a orientação de α . No caso em que h é estritamente decrescente, denominamos β a reparametrização negativa ou que reverte a orientação de α .

Exemplo 2.31. As curvas regulares $\alpha(r) = (r, e^r)$, $r \in \mathbb{R}$ e $\beta(t) = (\ln t, t)$, $t \in (0, \infty)$, têm o mesmo traço. De fato, considerando a função $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t) = \ln t$, temos que $h'(t) = \frac{1}{t} > 0 \ \forall \ t \in (0, +\infty)$ e

$$\alpha \circ h(t) = \alpha(\ln t) = (\ln t, e^{\ln t}) = (\ln t, t) = \beta(t).$$

Em muitas situações sobre estudo das curvas é útil entendermos o comprimento de seu traço.

Definição 2.32. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, de classe $\mathcal{C}^1$, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. A função $L_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi,$$

$t_0 \in I$, é denominada função comprimento de arco.

Como $\|\alpha'(t)\|$ é uma função contínua, a função L_α é de classe $\mathcal{C}^1$ e, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|.$$

Observe que, se α for regular em I , então a função L_α é monótona crescente.

Definição 2.33. Para $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in I$, chamamos comprimento de arco de α entre os pontos t_1 e t_2 ao número

$$L(\alpha_{[t_1, t_2]}) = L_\alpha(t_2) - L_\alpha(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Note que a definição da função comprimento de arco não depende da escolha do ponto $t_0 \in I$. De fato, se, dado $\tilde{t}_0 \in I$, definirmos

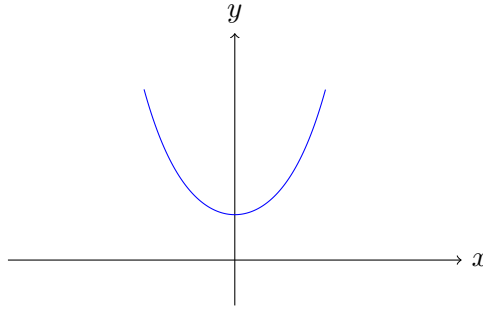
$$\tilde{L}_\alpha(t) = \int_{\tilde{t}_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi,$$

então

$$L_\alpha(t) - \tilde{L}_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi - \int_{\tilde{t}_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Logo concluímos que a função comprimento de arco de α está determinada de forma única, a menos de uma constante.

Exemplo 2.34. O comprimento de arco da catenária $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$,



entre $t = a$ e $t = b$ é

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt = \int_a^b (\cosh t) dt = \sinh t \Big|_a^b = \sinh b - \sinh a.$$

A seguir, demonstraremos que a função comprimento de arco de uma curva regular é invariante por reparametrizações positivas.

Proposição 2.35. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Se β é uma reparametrização positiva de α , então $L_\alpha = L_\beta$.*

Demonstração. Seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização da curva α , isto é, existe uma função $h : J \rightarrow I$ diferenciável e sobrejetiva tal que

$$\beta(t) = \alpha(h(t)).$$

Logo,

$$L_\beta(t) = \int_{t_0}^t \|\beta'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \|\alpha'(h(\xi))\| h'(\xi) d\xi.$$

Agora, integrando por substituição, vemos que

$$L_\beta(t) = \int_{h(t_0)}^{h(t)} \|\alpha'(u)\| du = L_\alpha(h(t)).$$

□

Definição 2.36. Dizemos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se o parâmetro t é, a menos de constante, igual a $L_\alpha(t)$, isto é,

$$L_\alpha(t) = t + C$$

Proposição 2.37. Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$.

Demonstração. Observe que se, $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$, então

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t d\xi = t - t_0,$$

e, portanto, α está parametrizada pelo comprimento de arco. Reciprocamente, se $L_\alpha(t) = t + C$, obtemos que $\|\alpha'(t)\| = L'_\alpha(t) = 1$, para todo $t \in I$. $\square$

Observação 2.38. Se $I = [a, b]$, então o comprimento de α , $L(\alpha)$, existe e

$$L(\alpha) = L_\alpha(b) - L_\alpha(a).$$

Dizemos que uma curva poligonal $P = \overline{P_0P_1} \cup \dots \cup \overline{P_{n-1}P_n}$ está inscrita em uma curva α de traço $\mathcal{C}$, se $P \cap \mathcal{C} = \{P_0, \dots, P_n\}$. É possível provar, usando as ideias do cálculo diferencial, que L é dado por

$$L(\alpha) = \sup\{L(P); P \text{ uma curva poligonal inscrita em } \alpha, \text{ ligando } \alpha(a) \text{ e } \alpha(b)\}.$$

Exemplo 2.39. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^2$, e seja $V_0 = B - A$. A reta que passa por A e B pode ser parametrizada por $\alpha(t) = A + tV_0$, $t \in \mathbb{R}$. Para $t_0 = 0$, temos

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_0^t \|V_0\| d\xi = \|B - A\| t.$$

Em particular, o segmento de reta que liga A e B tem comprimento $L(\alpha|_{[0,1]}) = \|B - A\|$

Exemplo 2.40. Considere o círculo de raio R parametrizado por $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t)$. Visto que $\|\alpha'(t)\| = R$, temos $L_\alpha(t) = Rt$, tomando $t_0 = 0$. Em particular, se considerarmos $\alpha|_{[0,2\pi]}$, o comprimento de α é $2\pi R$. Se damos k voltas em torno da origem, isto é, se tomamos $\alpha|_{[0,2k\pi]}$, temos que o comprimento de α é $2k\pi R$.

Teorema 2.41. Toda curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r ($r \geq 1$) pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. De forma mais precisa, fixado $t_0 \in J$, existe uma bijeção $h : J \rightarrow I$ de classe C^r definida em um intervalo J sobre I , com $0 \in J$ e $h(0) = t_0$, de modo que a curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$, satisfaz $\|\beta'(s)\| = 1$.

Demonstração. Visto que α é regular, a função comprimento de arco, satisfaz

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| > 0.$$

Logo L_α é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Devido à continuidade de L_α , temos ainda que $L_\alpha(I)$ é um intervalo J . Concluimos então que L_α possui inversa diferenciável $h : J \rightarrow I$. Como $L_\alpha(t_0) = 0$, $0 \in J$ e $h(0) = t_0$, vamos provar que β , definida por $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$, está parametrizada pelo comprimento de arco. Com efeito, visto que $h = L_\alpha^{-1}$,

$$h'(s) = \frac{1}{L'_\alpha(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}.$$

Como pela regra da cadeia,

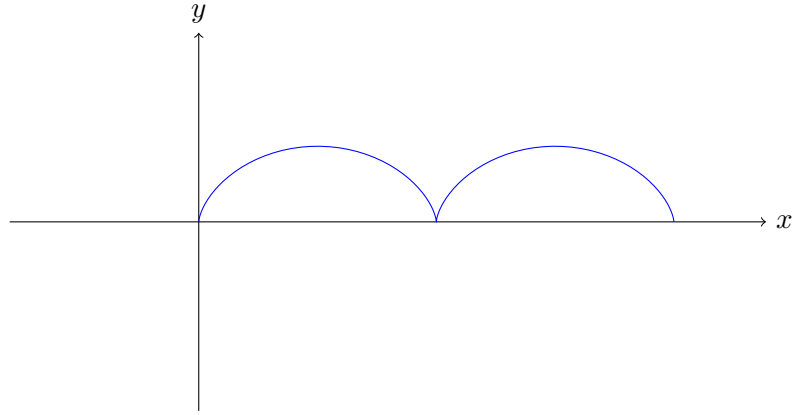
$$\beta'(s) = [\alpha \circ h(s)]' = \alpha'(h(s))h'(s),$$

Temos, portanto,

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \|h'(s)\| = 1.$$

□

Exemplo 2.42. Uma reparametrização da cicloide



$$\alpha(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \operatorname{cos} t)), \quad 0 < t < 2\pi \text{ e } a > 0$$

é por comprimento de arco é dada por $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, onde

$$h(s) = 2\operatorname{arccos}\left(\frac{4a - s}{4a}\right). \quad (2.4)$$

De fato,

$$\alpha'(t) = (a(1 - \operatorname{cos} t), a\operatorname{sen} t)$$

e

$$\|\alpha'(t)\|^2 = a^2(1 - 2\operatorname{cos} t + \operatorname{cos}^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 2a^2(1 - \operatorname{cos} t),$$

onde

$$1 - \operatorname{cos} t = 1 - \operatorname{cos}^2\left(\frac{t}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Além disso

$$\int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = 2a \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi = 4a \left(-\operatorname{cos}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) \Big|_0^t = 4a \left[-\operatorname{cos}\left(\frac{t}{2}\right) + 1\right]$$

Portanto a função comprimento de arco é dada por

$$s(t) = 4a \left[-\operatorname{cos}\left(\frac{t}{2}\right) + 1\right],$$

calculando a função inversa de $s(t)$ obtemos (2.4).

2.4 Campo de vetores tangentes e normais

Intuitivamente, um campo de vetores X ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor com origem em $\alpha(t)$.

Definição 2.43. Um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^r$ ($r \geq 1$) ao longo de α é uma aplicação $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^r$. Geometricamente, o campo de vetores X é dado, em cada ponto $\alpha(t)$, pelo vetor de extremidades $\alpha(t)$ e $X(t)$.

Exemplo 2.44. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é uma curva regular de classe $\mathcal{C}^r$ ($r \geq 1$), então $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ que cada $t \in I$ associa o vetor α' com origem em $\alpha(t)$ e ponto final em $\alpha'(t)$. Esse campo de vetores é chamado de campo tangente a α .

Exemplo 2.45. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é uma curva regular de classe $\mathcal{C}^r$ ($r \geq 1$), então $n : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $n(t) = (-y'(t), x'(t))$ é um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ que a cada $t \in I$ associa o vetor $n(t)$ com origem em $\alpha(t)$ e ponto final em $n(t)$. Visto que

$$\langle \alpha'(t), n(t) \rangle = -x'(t)y'(t) + y'(t)x'(t) = 0$$

esse campo de vetores é chamado de campo normal a α .

Dados dois campos de vetores X e Y de classe $\mathcal{C}^r$ ao longo de α e uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^r$, podemos definir os campos $X + Y$ e fX por

$$(X + Y)(t) = X(t) + Y(t), \quad (fX)(t) = f(t)X(t),$$

que também serão campos de classe $\mathcal{C}^r$ ao longo de α . Se $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ é um campo de classe $\mathcal{C}^r$ ($r \geq 1$), definimos a derivada de X por

$$X'(t) = (X'_1(t), X'_2(t)).$$

Nesse caso, o campo X' é um campo de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ ao longo de α . As seguintes relações são facilmente verificadas:

$$(X + Y)'(t) = X'(t) + Y'(t),$$

$$(fX)'(t) = f'(t)X(t) + f(t)X'(t),$$

e

$$\langle X, Y \rangle'(t) = \langle X'(t), Y(t) \rangle + \langle X(t), Y'(t) \rangle.$$

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 2.46. Se X, Y são campos diferenciáveis e $\langle X, Y \rangle$ é constante, então

$$\langle X'(t), Y(t) \rangle = -\langle X(t), Y'(t) \rangle \quad (2.5)$$

Demonstração. Derivando a equação $\langle X, Y \rangle = \text{constante}$, obtemos

$$0 = \langle X, Y \rangle'(t) = \langle X'(t), Y(t) \rangle + \langle X(t), Y'(t) \rangle,$$

o que conclui a prova. □

Corolário 2.47. Se $\|X\|$ é constante então $X'(t)$ é perpendicular a $X(t)$, para todo $t \in I$, isto é,

$$\langle X(t), X'(t) \rangle = 0 \quad (2.6)$$

Definição 2.48. Seja α uma curva parametrizada de classe $\mathcal{C}^r (r \geq 1)$ e regular, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O campo de vetores $T : I \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, definido por

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (x'(t), y'(t)),$$

é um campo de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ ao longo de α , chamando campo tangente unitário ou indicatriz tangente. Cada um dos vetores $T(t)$ é chamado de vetor tangente unitário à curva α em $t \in I$.

Definição 2.49. Seja α uma curva parametrizada de classe $\mathcal{C}^r (r \geq 1)$ e regular, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O campo de vetores $N : I \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, definido por

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (-y'(t), x'(t)),$$

é um campo de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ ao longo de α , chamado campo normal unitário ou indicatriz normal. Cada um dos vetores $N(t)$ é chamado de vetor normal unitário à curva α em $t \in I$.

Observação 2.50. Para todo $t \in I$,

$$\langle T(t), N(t) \rangle = \frac{-x'(t)y'(t) + y'(t)x'(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 0$$

isto é, N é perpendicular a T .

Observação 2.51. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então, por hipótese, $\alpha'(s) \neq 0$. Isso implica que os campos $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ estão bem definidos e são dados, respectivamente, por $T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ e $N(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Observação 2.52. O campo N é definido ao longo de α de tal forma que, para cada $s \in I$, $\{T, N\}$ seja uma base positiva de $\mathbb{R}^2$, isto é, existe uma rotação que leva $(1, 0)$ em T e $(0, 1)$ em N . Observe que os vetores $N(t)$ podem ser vistos como pontos pertencentes ao círculo centrado da origem e raio 1. Assim temos a seguinte definição:

Definição 2.53. O conjunto imagem $N(I) \subset \mathbb{S}^1$ do campo de vetores normais $N : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ é denominado a imagem normal de Gauss de α no círculo $\mathbb{S}^1$. O campo de vetores normal $N : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ também é conhecida como a aplicação normal de Gauss de α no círculo $\mathbb{S}^1$.

Observação 2.54. A ideia de associar uma curva regular α ao movimento circular do vetor tangente unitário T ou, equivalentemente, do vetor unitário normal N é devida a C.F. Gauss, no início da geometria diferencial. Essa ideia tem um papel fundamental na teoria das curvas planas diferenciáveis.

2.5 Curvatura e equações de Frenet

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe $\mathcal{C}^r$ ($r \geq 2$) e parametrizada pelo comprimento de arco. Visto que $\|T\| = 1$, temos, pelo corolário (2.47), que $T'(s)$ é perpendicular a $T(s)$. Como T e N geram o espaço $\mathbb{R}^2$, temos que, para cada $s \in I$, $T'(s)$ é paralelo a $N(s)$. Isso significa que existe uma função $k: I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$T'(s) = k(s)N(s), s \in I \quad (2.7)$$

Definição 2.55. A função $k: I \rightarrow \mathbb{R}$, e definida pela equação (2.7), é chamada curvatura de α em $s \in I$.

Observe que a curvatura $k(s)$ é dada por

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle N'(s), T(s) \rangle.$$

Observação 2.56. Se α é uma curva de classe $\mathcal{C}^r$, ($r \geq 2$), então $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^{r-2}$. Geometricamente, visto que $\|T(s)\| = 1$ e $|k(s)| = \|T'(s)\|$, a função curvatura é uma medida da variação da direção de T e, portanto, da mudança de direção da reta tangente a α em $\alpha(s)$. A curvatura então é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta. De fato, o próximo resultado caracteriza as retas como as curvas cuja curvatura é identicamente nula.

Proposição 2.57. A curvatura de uma curva regular α é identicamente nula, se, e somente se, o traço de α está contido em uma reta.

Demonstração. Suponha que $k(s) \equiv 0$. Como $0 = |k(s)| = \|T'(s)\|$, temos que $T'(s) = (0, 0)$. Como T está definida em um intervalo I , concluímos que $T(s)$ é um vetor constante V_0 . Isso implica que

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s T(\xi) d\xi = \alpha(s_0) + V_0(s - s_0).$$

Portanto o traço de α está contido na reta que passa por $\alpha(s_0)$ e é paralelo ao vetor V_0 . Reciprocamente, se o traço de α está contido em uma reta e α está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$\alpha(s) = P_0 + sV_0, \|V_0\| = 1.$$

Logo, $T(s) = V_0$ e, portanto, $T'(s) = (0, 0)$. Assim concluímos que $k(s) = 0$. □

Agora vamos estudar a variação do campo N . Como $\|N(s)\| = 1$, obtemos que $N'(s)$ é perpendicular a $N(s)$, portanto, paralelo a $T(s)$. Observe que a equação (2.7) implica que $x'' = -k(s)y'(s)$, $y'' = k(s)x'(s)$. Assim,

$$N'(s) = (-y''(s), x''(s)) = -k(s)(x'(s), y'(s)) = -k(s)T(s). \quad (2.8)$$

Combinando as equações (2.7) e (2.8), temos a definição:

Definição 2.58. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Os campos tangentes T e normal N satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s), \\ N'(s) = -k(s)T(s). \end{cases} \quad (2.9)$$

As equações desse sistema são denominados Equações de Frenet da curva α .

Definição 2.59. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial $\{T(s), N(s)\}$ é chamado referencial de Frenet de α .

Vamos definir a curvatura de uma curva regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Como vimos no Teorema 2.41, toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Definição 2.60. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e regular e seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização pelo comprimento de arco de α . Definimos a curvatura de α em $t \in I$ como a curvatura de β no ponto $s \in J$ que corresponde ao ponto $t \in I$.

O próximo resultado expressará a curvatura de uma curva regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco.

Teorema 2.61. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então a curvatura de α em $t \in I$ é dada pela expressão*

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \quad (2.10)$$

Demonstração. Consideremos $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização positiva de α pelo comprimento de arco. Se escrevemos $\beta(s(t)) = \alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$, então,

$$(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) = \frac{d\beta}{ds} s'(t)$$

e

$$(x''(t), y''(t)) = \alpha''(t) = \frac{d^2\beta}{ds^2} [s'(t)]^2 + \frac{d\beta}{ds} s''(t). \quad (2.11)$$

visto que

$$k(s(t)) = \left\langle \frac{d^2\beta}{ds^2}, N(s(t)) \right\rangle, \quad (2.12)$$

temos usando (2.11)

$$\langle \alpha''(t), N(s(t)) \rangle = \|\alpha'(t)\|^2 \left\langle \frac{d^2\beta}{ds^2}, N(s(t)) \right\rangle + s''(t) \langle T(s(t)), N(s(t)) \rangle$$

Como T e N são ortonormais, usando (2.12), temos

$$k(t) = \frac{\langle \alpha''(t), N(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}. \quad (2.13)$$

visto que

$$N(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}(-y'(t), x'(t)),$$

obtemos

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\langle (x''(t), y''(t)), (-y'(t), x'(t)) \rangle}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

□

A função curvatura de uma curva α é invariante por translação e invariante por rotação no plano, isto é, a função curvatura é invariante por um movimento rígido de α .

Proposição 2.62. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, e $k_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função curvatura da curva α*

1. *Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação traslação do plano segundo vetor (a, b) , isto é, $T(x, y) = (x + a, y + b)$, então k_α é invariante por T ;*
2. *Se $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação rotação de um ângulo θ ou seja,*

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta),$$

então k_θ é invariante por R_θ .

Demonstração. Usando (2.10)

1. Temos que a função curvatura da curva $T \circ \alpha$, definida por $T(\alpha(t)) = (x(t) + a, y(t) + b)$, é $k_{T \circ \alpha}(t) = k_\alpha(t)$.
2. Vemos que a função curvatura da curva $R_\theta \circ \alpha$, dada por

$$R_\theta(\alpha(t)) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(t) \cos \theta - y(t) \sin \theta, y(t) \cos \theta + x(t) \sin \theta),$$

é

$$k_{R_\theta \circ \alpha}(t) = \frac{\tilde{x}'(t)\tilde{y}''(t) - \tilde{x}''(t)\tilde{y}'(t)}{((\tilde{x}'(t))^2 + (\tilde{y}'(t))^2)^{3/2}} = k_\alpha(t),$$

visto que

$$\tilde{x}'(t) = x'(t) \cos \theta - y'(t) \sin \theta,$$

$$\tilde{y}'(t) = y'(t) \cos \theta + x'(t) \sin \theta.$$

$$\tilde{x}''(t) = x''(t) \cos \theta - y''(t) \sin \theta,$$

e

$$\tilde{y}''(t) = y''(t) \cos \theta + x''(t) \sin \theta.$$

□

Proposição 2.63. *Seja $r = r(\theta)$ uma curva regular, definida por uma equação polar. Então sua curvatura $k(\theta)$ é dada por*

$$k(\theta) = \frac{(r(\theta))^2 + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)}{((r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2)^{3/2}}. \quad (2.15)$$

Demonstração. Seja

$$\alpha(\theta) = r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) = (x(\theta), y(\theta))$$

a equação paramétrica da curva dada por $r = r(\theta)$.

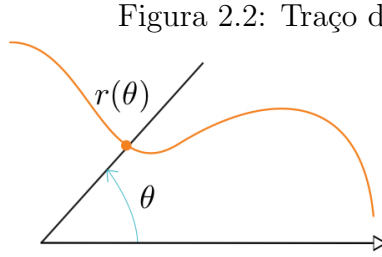


Figura 2.2: Traço de α

Imagem retirada do livro [Alencar, Santos e Neto 2020]

Logo,

$$\alpha'(\theta) = (x', y') = r'(\cos \theta, \sin \theta) + r(-\sin \theta, \cos \theta), \text{ e, conseqüentemente,}$$

$$\begin{aligned} \alpha''(\theta) &= (x'', y'') \\ &= r''(\cos \theta, \sin \theta) + r'(-\sin \theta, \cos \theta) + r'(-\sin \theta, \cos \theta) + r(-\cos \theta, -\sin \theta) \\ &= (r'' - r)(\cos \theta, \sin \theta) + 2r'(-\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

Portanto, substituindo os valores de x' , y' , x'' , y'' na equação (2.10), obtemos a expressão desejada. $\square$

Exemplo 2.64.

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{2a\sqrt{1 - \cos t}} \\ \int \sqrt{1 - \cos t} dt; \cos t &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ \int \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt &= 0 < t < 2\pi \rightarrow 0 < \frac{t}{2} < \pi \rightarrow \sin \frac{t}{2} > 0 \\ \int \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt &= \sqrt{2} \int \sin\left(\frac{t}{2}\right) = -2\sqrt{2}\cos \frac{t}{2} \\ s(t) &= \int_{t_0}^t \sqrt{1 - \cos t} dt = -2\sqrt{2}\cos \frac{t}{2} \Big|_{t_0}^t \end{aligned}$$

3

Curvas no plano complexo

Os pontos do plano $\mathbb{R}^2$ podem ser representados pelo par ordenado (x, y) em coordenadas cartesianas ou ainda por um par (r, θ) em coordenadas polares. Vimos na seção (1.3) que o conjunto dos números complexos

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\},$$

também pode ser identificado com o plano $\mathbb{R}^2$ mediante a seguinte aplicação: fixe um ponto O e uma semirreta l com origem O . Considerando o sistema cartesiano dado por: a origem é o ponto O , a semirreta l corresponde ao eixo x positivo e o eixo y positivo é obtido por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ da semirreta l , no sentido anti-horário. Associaremos um ponto de coordenadas (x, y) a cada número complexo $z = x + iy$.

Definição 3.1. Uma curva parametrizada cujo traço está contido em $\mathbb{C}$ é uma aplicação $z : I \rightarrow \mathbb{C}$ definida no intervalo I e tomando valores em $\mathbb{C}$, dada por

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

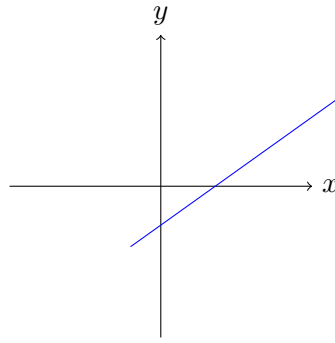
onde $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais. O traço da curva z é o conjunto imagem $z(I) \subset \mathbb{C}$.

A curva z é contínua, se as funções x e y são funções contínuas em I . Além disso, se x e y são funções n -vezes diferenciáveis em I , temos que z é n -vezes diferenciável em I e

$$z^{(k)}(t) = x^{(k)}(t) + iy^{(k)}(t).$$

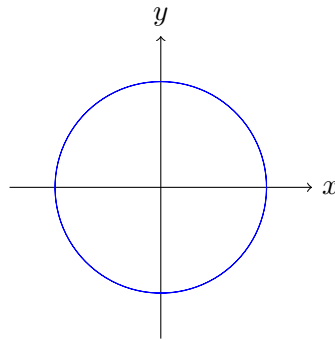
O vetor velocidade da curva z em $t \in I$ é $z'(t)$. A velocidade escalar é dada pelo módulo $|z'(t)|$ de $z'(t)$. Em analogia com a definição de curvas no plano, dizemos que z é regular se $|z'(t)| \neq 0$, para todo $t \in I$, e que z está parametrizada pelo comprimento de arco, se $|z'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.

Exemplo 3.2. (Reta) Seja $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação dada por $z(t) = z_0 + tw$, com $z_0, w \in \mathbb{C}$ e $w \neq 0$.



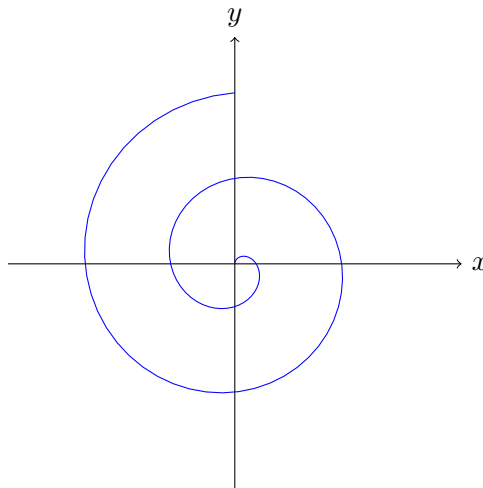
A curva z é regular e seu traço é uma reta.

Exemplo 3.3. (Circunferência) Seja $z : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação definida por $z(t) = re^{it}$, onde $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.



A curva z é regular e seu traço é um círculo de raio r e centro na origem.

Exemplo 3.4. (Espiral de Arquimedes) Seja $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação dado por $z(t) = ate^{it}$, onde $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$.



A curva z é regular e seu traço é denominado espiral de Arquimedes.

Considerando $z : I \rightarrow \mathbb{C}$ como uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Definimos os campos tangente e normal, T e N , respectivamente, por

$$T(t) = z'(t),$$

$$N(t) = iz'(t) = iT(t).$$

Identificando T e N como vetores de $\mathbb{R}^2$, teremos que $\{T, N\}$ é uma base ortogonal positiva de $\mathbb{R}^2$, uma vez que N é obtido pela rotação de T por um ângulo $\frac{\pi}{2}$, no sentido anti-horário. Uma reta tangente à curva z em $t \in I$ é a reta que passa por $z(t)$ e é paralela a $z'(t)$. Essa reta é o traço da curva $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$w(s) = z(t) + sz'(t).$$

A reta normal à curva z em $t \in I$ é a reta que passa por $z(t)$ e é paralela a $iz'(t)$. Essa reta é o traço da curva $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$w(s) = z(t) + isz'(t).$$

Como $T(t)$ é um número complexo unitário, sua derivada $T'(t)$ é ortogonal a $T(t)$, isto é, existe uma função real $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$T'(t) = k(t)N(t) = ik(t)T(t). \quad (3.1)$$

A função k é chamada curvatura de z . Assim a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$z''(t) = ik(t)z'(t),$$

que é a equação de Frenet de z .

Sendo z uma curva regular, que não está necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco, o campo tangente de T é dado por $T(t) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$, e, portanto, vale um resultado, que é equivalente à equação de Frenet de z .

Proposição 3.5. *Seja $z : I \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva regular. Então*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{|z'|} \right) = ik(t)z'(t).$$

Demonstração. É uma consequência direta da equação de Frenet para uma reparametrização de z , pelo comprimento de arco. $\square$

Para obtermos uma expressão para k , em função de $z(t)$, vamos lembrar que, se $r = x + iy$ e $w = u + iv$, então

$$r\bar{w} = xu + yv + i(yu - xv).$$

Como $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, podemos definir o produto escalar real entre r e w por

$$\langle r, w \rangle = \operatorname{Re}(r\bar{w}).$$

É claro que $\langle r, iw \rangle = \operatorname{Im}(r\bar{w})$ e $\langle r, iw \rangle = -\langle ir, w \rangle$. Podemos agora calcular a função curvatura de z .

Proposição 3.6. *Seja $z : I \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva regular. Então a curvatura de z é dada por*

$$\frac{\operatorname{Im}(z'(t)\bar{z}''(t))}{|z'(t)|^3}, \quad (3.2)$$

Demonstração. Considere T o campo tangente de z , que é dado por $T(t) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$. Usando a Proposição 3.5,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{z'(t)}{|z'(t)|} \right) = ik(t)z'(t) = k(t) |z'(t)| N(t). \quad (3.3)$$

Visto que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{z'(t)}{|z'(t)|} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \right) z'(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t),$$

temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \right) z'(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t) = k(t) |z'(t)| N(t).$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \right) |z'(t)| T(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t) = k(t) |z'(t)| N(t). \quad (3.4)$$

Fazemos o produto interno de ambos os membros da equação por $N(t)$ e usando o fato de que $T(t)$ e $N(t)$ são ortonormais, obtemos

$$k(t) = \frac{1}{|z'(t)|^2} \langle z''(t), N(t) \rangle. \quad (3.5)$$

Observe que $N(t) = i \frac{z'(t)}{|z'(t)|^2}$. Portanto a equação (3.4) implica que

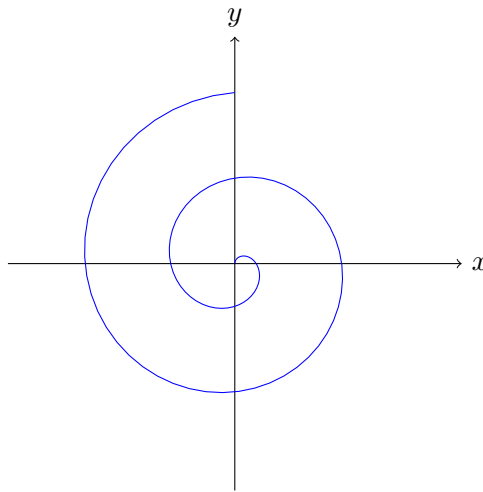
$$k(t) = \frac{1}{|z'(t)|^2} \left\langle z''(t), i \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \right\rangle = \frac{1}{|z'(t)|^3} \langle z''(t), iz'(t) \rangle.$$

Como $\langle z''(t), iz'(t) \rangle = \text{Im}(z''(t) \overline{z'(t)}) = -\text{Im}(\overline{z''(t)} z'(t))$, obtemos que

$$k(t) = -\frac{\text{Im}(\overline{z''(t)} z'(t))}{|z'(t)|^3},$$

o que conclui a prova da proposição. □

Exemplo 3.7. A curva $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $z(t) = ate^{it}$, onde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, é a espiral de Arquimedes



e têm curvatura dada por

$$k(t) = \frac{2+t^2}{a(1+t^2)^{3/2}}. \quad (3.6)$$

Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem de z obtemos:

$$z' = a(1e^{it} + te^{it}i) = ae^{it}(1+it)$$

e

$$z'' = ae^{it}(2i-t).$$

Observe que

$$z'\overline{z''} = -a^2 e^{it} \overline{e^{it}} (1+it)(t+2i) = -a^2 [-t + i(2+t^2)],$$

substituindo

$$-Im(z'\overline{z''}) = a^2(2+t^2)$$

e

$$|z'|^3 = a^3(\sqrt{1+t^2})^3$$

em (3.2)

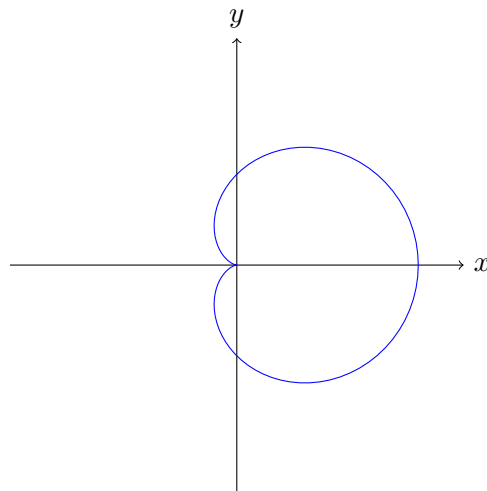
$$K(t) = \frac{a^2(2+t^2)}{a^3(1+t^2)^{3/2}} = \frac{(2+t^2)}{a(1+t^2)^{3/2}}$$

obtemos(3.6).

Exemplo 3.8. Seja $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = ((1 + \cos t) \cos t, (1 + \cos t) \sin t).$$

O traço dessa curva é denominado cardeóide.



1. O traço de α pode ser descrito pela equação $z(t) = (1 + \cos t)e^{it}$.
2. A curvatura de α é dada por

$$k(t) = \frac{3}{2\sqrt{2+2\cos t}}. \quad (3.7)$$

Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem, obtemos

$$z' = (-sent)e^{it} + (1 + cost)e^{it}i = e^{it}[(-sent) + (1 + cost)i]$$

e

$$z'' = e^{it}i[(-sent) + (1 + cost)i] + e^{it}[(-cost) + (-sent)i] = e^{it}[(-1 - 2cost) - 2(sent)i].$$

Além disso

$$|z'| = |e^{it}| \sqrt{sen^2t + 1 + 2cost + cos^2t} = \sqrt{2 + 2cost}$$

e

$$\overline{z''} = \overline{e^{it}}[(-1 - 2cost) + (2sent)i],$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} z' \overline{z''} &= e^{it} \overline{e^{it}} [(-sent)(-1 - 2cost) + (-sent)(2sent)i + \\ &+ (1 + cost)(-1 - 2cost)i + (1 + cost)2sent] \end{aligned}$$

e

$$-Im z' \overline{z''} = 2sen^2t + 1 + 2cost + cost + 2cos^2t = 3 + 3cost.$$

Utilizando (3.2)

$$K(t) = \frac{3(1 + cost)}{(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{1 + cost})^3} = \frac{3}{2\sqrt{2 + 2cost}}$$

e obtemos (3.7).

Conclusão

A parametrização de curvas planas tornou-se um método de grande importância para o desenvolvimento da matemática, pela impossibilidade de expressar algumas curvas em forma de uma função de uma única variável. Neste caso, precisamos de outra variável chamada de parâmetro, que nos auxilia em uma melhor explicação das curvas. Através desse trabalho pude estudar os conceitos fundamentais de cálculo vetorial e cálculo diferencial de funções de uma ou várias variáveis, além disso observei a importância das curvas e alguns aspectos que a envolvem: parametrização, regularidade, comprimento de arco, vetor tangente, vetor normal e curvatura. Utilizando esses conceitos pude compreender a definição de curva parametrizada no plano complexo, e considerar para essas curvas definições análogas às apresentadas para curvas planas, deste modo foi possível apresentar exemplos e demonstrar uma expressão para o cálculo da curvatura. As informações contidas neste trabalho, foram baseadas em obras de grandes autores da Geometria Diferencial, em especial na obra Geometria Diferencial das Curvas no $\mathbb{R}^2$ ([Alencar, Santos e Neto 2020]).

Referências Bibliográficas

- [Ablowitz, Fokas e Fokas 2003]ABLOWITZ, M. J.; FOKAS, A. S.; FOKAS, A. S. *Complex variables: introduction and applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- [Alencar, Santos e Neto 2020]ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. Geometria diferencial de curvas em $\mathbf{R}^2$. *SBM, Rio de Janeiro*, 2020.
- [Boyer e Merzbach 2019]BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- [Carmo 2010]CARMO, M. P. D. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [Giusti e Conti 1999]GIUSTI, H.; CONTI, F. *La Geometria delle curve*. [S.l.]: Diagonale, 1999.
- [Lages 2009]LAGES, E. Algebra linear. *IMPA, Rio de Janeiro*, 2009.
- [Neto 1996]NETO, A. L. Funções de uma variável complexa. *Rio de Janeiro: SBM*, 1996.
- [Silva et al. 1974]SILVA, A. P. S. da et al. Funções de uma variável complexa. 1974.
- [Tenenblat 2008]TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. [S.l.]: Editora Blucher, 2008.