

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Curso de Especialização em Matemática

Utilização do geogebra na modelagem matemática: uma análise e proposta de ensino de funções quadráticas para o 9º ano do ensino fundamental

por

Donizeth Henrique Aleluia Vieira

Goiânia
2023



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: **Donizeth Henrique Aleluia Vieira**

Matrícula: **20211011160036**

Título do Trabalho: **Utilização do GeoGebra na modelagem matemática: uma análise e proposta de ensino de funções quadráticas para o 9º ano do ensino fundamental**

Autorização - Marque uma das opções

1. (**X**) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia

Local

_____, 03 /05/2023.
Data

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Donizeth Henrique Aleluia Vieira

Utilização do geogebra na modelagem matemática: uma análise e proposta de ensino de funções quadráticas para o 9º ano do ensino fundamental

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação lato sensu em Matemática - Departamento de Áreas Acadêmicas II - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Márcio Dias de Lima

Goiânia

2023

V673u Vieira, Donizeth Henrique Aleluia.

Utilização do geogebra na modelagem matemática: uma análise e proposta de ensino de funções quadráticas para o 9º ano do ensino fundamental / Donizeth Henrique Aleluia Vieira. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023.
61 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Dias de Lima

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Especialização em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Matemática - ensino. 2. GeoGebra. 3. Aprendizagem significativa. I. Lima, Márcio Dias de (orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 510.7

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva CRB1/ 2.740
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

Utilização do geogebra na modelagem matemática: uma análise e proposta de ensino de funções quadráticas para o 9º ano do ensino fundamental

por

Donizeth Henrique Aleluia Vieira

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Márcio Dias de Lima

Monografia defendida e aprovada, em 03 de maio de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Márcio Dias de Lima (Presidente da Banca/ IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Me. Rogério da Silva Cavalcante (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Me. Ricardo da Silva Santos (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- **Rogério da Silva Cavalcante, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 03/05/2023 16:26:27.
- **Ricardo da Silva Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 03/05/2023 16:25:15.
- **Marcio Dias de Lima, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 03/05/2023 16:24:13.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 19/04/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 399868
Código de Autenticação: bddf87d16f



Agradecimentos

Quero agradecer a todos que me apoiaram. Primeiramente a todos os professores do curso de especialização em Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Goiás Campus Goiânia pela paciência e empenho no ensino de cada disciplina e em todos os momentos de nossa especialização, nos proporcionando momentos de grandes aprendizados e ampliação do conhecimento matemático. Agradeço também a nossa coordenadora Karoline Victor Fernandes, que nunca mediu esforços para nos ajudar nesta jornada.

Agradeço especialmente ao grande professor, amigo e orientador Dr. Márcio Dias de Lima, que desde a primeira disciplina que ministrou à nossa turma sempre me apoiou, ajudou e ensinou incansavelmente. O senhor é o exemplo de professor que quero ser.

Também não poderia me esquecer de uma grande amiga e companheira nesta jornada, Ilda Pavret, que mesmo distante foi uma grande companheira nesta batalha, principalmente nos estudos mais complexos.

Agradeço à Deus por sempre cuidar de mim e estar comigo e a minha família que sempre esteve ao meu lado, apoiando e incentivando a cada desafio.

Agradeço ao meu filho e companheiro João Henrique que sempre procurou estar ao meu lado, brincando perto de mim enquanto eu estudava só pra ficar junto. Você veio pra me tornar um homem mais guerreiro e me dar forças acima de minhas capacidades em qualquer momento de batalha e/ou conquista.

E a você minha esposa Patricia Correa Junqueira que desde que te conheci tem sido minha luz, minha inspiração e motivação. Tudo que sou hoje devo a você que apareceu em minha vida para mudar o meu caminhar. Sem você não sei o que seria de mim. Obrigado por sempre me apoiar em qualquer momento, também por me suportar principalmente nos momentos de estresse e de batalhas. Você sempre será minha princesa.

De um modo geral, agradeço a todos os que até aqui me incentivaram emocional e profissionalmente.

Dedicatória

Dedico à minha esposa Patricia Correa Junqueira e ao meu filho João Henrique, que sempre estiveram ao meu lado e são minha inspiração para todas as conquistas que já consegui. Também dedico a toda minha família, especialmente a minha mãe Dirce “in memorian” e ao meu pai Donizete “in memorian”, que me ensinaram o caminho certo de amor e dedicação.

Resumo

O ensino da matemática exige do professor a capacidade de explicar conceitos e ideias concretas e abstratas. Atualmente, proporcionar o entendimento de conteúdos algébricos tem se tornado um grande desafio. Nesta pesquisa, analisamos um caminho para a desmistificação de um conteúdo que grande parte dos estudantes consideram complexo. A partir da teoria da aprendizagem significativa, mostraremos uma possibilidade de realização da modelagem matemática ao ensinar funções quadráticas para turmas de nono ano do Ensino Fundamental. Tendo como ferramenta o *software* GeoGebra, que pode possibilitar ao estudante a visualização do conteúdo proposto, levando ele a construir o conhecimento de maneira dinâmica. Apresentaremos importantes conceitos teóricos como embasamento da pesquisa. Analisaremos trabalhos que foram realizados de maneira empírica com o tema proposto. Esses, serão explanados e no final será mostrada uma proposta de ensino de funções quadráticas que utiliza a modelagem matemática e o *software* GeoGebra buscando proporcionar uma aprendizagem significativa.

Palavras-chaves: Aprendizagem significativa, Modelagem Matemática, GeoGebra, Ensino de Matemática.

Abstract

The teaching of mathematics requires the teacher to be able to explain concrete and abstract concepts and ideas. Currently, providing an understanding of algebraic content has become a major challenge. In this research, we analyzed a way to demystify content that most students consider complex. Based on the theory of meaningful learning, we will show the possibility of carrying out mathematical modeling when teaching quadratic equations to 9th-grade classes in Elementary School. Using the GeoGebra software as a tool can enable the student to visualize the proposed content, leading him to build knowledge dynamically. We will present important theoretical concepts as a basis for the research. We will analyze works that were carried out empirically with the proposed theme. These will be explained and, in the end, a proposal for teaching quadratic equations that uses mathematical modeling and GeoGebra software will be shown, seeking to provide meaningful learning.

Keywords: Significant Learning; Mathematical Modeling; GeoGebra; Mathematics Teaching.

Sumário

Introdução	6
1 Embasamento Teórico	9
1.1 Aprendizagem Significativa	9
1.2 Modelagem Matemática	10
1.3 Tecnologias na Educação	12
1.4 O software GeoGebra	13
2 Metodologia	16
2.1 Metodologia da pesquisa	16
3 Análise de Pesquisas Envolvendo Metodologias Ativas no Ensino de Funções	20
3.1 Importantes pesquisas empíricas analisadas	22
3.1.1 Uma aplicação utilizando a modelagem e o GeoGebra	22
3.1.2 Aplicação utilizando o aplicativo GeoGebra <i>Graphing Calculator</i> no celular	25
3.1.3 Aulas teóricas versus aulas laboratório de informática com uso do GeoGebra no estudo de Máximos e Mínimos de uma função .	29
4 Proposta de aula para o ensino de Funções Quadráticas	33
4.1 Proposta de aula para o ensino de Funções Quadráticas com modelagem Matemática	33
4.2 Criando uma conta no GeoGebra	34
4.3 Os quatro exercícios propostos	37

	11
4.3.1 O problema da empresa de chocolate	37
4.3.2 O problema do lucro de uma empresa	39
4.3.3 O problema da VAN	40
4.3.4 O problema do lucro de uma empresa de transporte	42
Considerações Finais	45
5 Considerações finais	45
A Planos de Aula 1	51
B Planos de Aula 2	54
C Plano de aula 3	56
D Planos de Aula 4	59

Introdução

A teoria da aprendizagem significativa foi criada por David Paul Ausubel e tem sido utilizada por diversos professores e pesquisadores devido a aplicabilidade de seus conceitos no processo de ensino e aprendizagem. Ausubel é um nome de grande respeito devido a suas contribuições na educação. Nasceu na cidade de Nova York nos Estados Unidos, filho de uma família judia e pobre de imigrantes da Europa, criou sua teoria motivado pela insatisfação que tivera com a educação que recebeu na infância. A aprendizagem significativa de Ausubel, que segundo Rozal et al. (2017) “é aquela em que novos conhecimentos adquirem significados através da interação com conhecimentos especificamente relevantes”, pode ser bem relacionada nos tempos hodiernos com o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) em sala de aula, considerando a relevância dessas na vida diária do estudante, bem como seu conhecimento adquirido ao utilizar computadores e celulares em seu dia a dia.

Pensando no ensino de matemática, uma preocupação pode surgir na prática docente se os conteúdos ensinados no ensino fundamental correrem o risco de perder seu significado pelo simples fato do estudante não ter a capacidade de relacionar o que está sendo estudado com seus conhecimentos adquiridos até então. Por isto, a modelagem matemática aparece como uma possibilidade de proporcionar ao estudante a identificação da importância do que se está sendo estudado para sua vida diária. Podemos pensar na modelagem matemática como uma possibilidade de proporcionar uma aprendizagem significativa. Mas para isto será importante comparar os pontos comuns de suas definições e procurar relacioná-los para realizar essa verificação.

Sabendo da facilidade e do interesse da maioria dos estudantes no uso das tecnologias, o professor de matemática tem como opção utilizar softwares como Grafequation,

MATLAB, Winplot, Gnuplot, Gnu Octave, GeoGebra, entre outros que são importantes no processo de ensino e aprendizagem. BARBOSA (2012) afirma que softwares como esses no ensino de matemática pode levar os alunos de meros espectadores a atores do próprio aprendizado, uma vez que a partir do uso desses recursos, o estudante pode conjecturar, e manipular o conhecimento estudado. Para ele “a partir desse processo, menos passivo que a aula exclusivamente expositiva, há um potencial maior para o aluno adquirir uma compreensão melhor de determinados conceitos”. (BARBOSA, 2012, p.40)

Dos vários *softwares* utilizados no ensino de matemática destaca-se o GeoGebra, pois além de ser um *software* livre facilmente pode-se encontrar materiais que auxiliem a professores e alunos no uso dessa ferramenta. O GeoGebra é composto por uma janela algébrica, uma geométrica e a visualização em 3D, proporcionando com isto a construção e rápida visualização de figuras planas e espaciais após inserir a função desejada. Nesta perspectiva podemos pensar no GeoGebra como um bom recurso para realizar a modelagem matemática e contribuir para que conteúdos complexos possam ser visualizados.

A pergunta que norteia a presente pesquisa é: como a utilização do software GeoGebra como instrumento para a modelagem matemática no ensino de Funções em uma turma de nono ano do Ensino Fundamental, pode auxiliar em uma aprendizagem significativa?

Objetivos:

Geral

Analisar metodologias que utilizam o Software GeoGebra como ferramenta para a modelagem Matemática com a finalidade de realizar uma aprendizagem significativa. Para isto procuramos alcançar os seguintes objetivos específicos:

Específicos:

- Analisar metodologias de ensino já utilizadas na Matemática no estudo de funções quadráticas no nono ano do Ensino Fundamental;

- Verificar a importância da aprendizagem significativa no processo de ensino de matemática;
- Verificar como o GeoGebra tem contribuído no ensino de funções quadráticas;
- Elaborar uma proposta de ensino utilizando-se do Software GeoGebra na modelagem Matemática, a partir de uma aprendizagem significativa.

Capítulo 1

Embasamento Teórico

1.1 Aprendizagem Significativa

A teoria de David Paul Ausubel classifica a aprendizagem significativa como o processo de modificação do conhecimento. Mesmo depois de mais de cinquenta anos do início de sua construção, a sua teoria é utilizada e estudada por diversos docentes e pode ser considerada moderna, pois sua aplicabilidade no ensino e aprendizagem utiliza-se de processos psicológicos envolvidos na retenção do conhecimento no momento da aprendizagem, objetivando a criação de novos significados no conhecimento proposto.

Souza (2021, pg. 244), define que “o processo por meio do qual uma nova informação interage com conceitos ou proposições já estabelecidas na estrutura cognitiva do aprendiz é chamado de aprendizagem significativa”. Basicamente a aprendizagem significativa destaca a importância dos conhecimentos cognitivos do estudante na construção do conhecimento científico. Esses conhecimentos, sendo bem identificados, são moldados de maneira que o estudante relacione o que se está aprendendo com as informações presentes em sua mente.

Borssoi e Almeida (2015) destaca os três pilares da ocorrência da aprendizagem significativa. O primeiro deles é a utilização de um material adequado que seja, segundo o autor, potencialmente significativo nas atividades de ensino. O segundo pilar trata dos chamados subsunçores, que são os conhecimentos prévios pré-existentes na estrutura cognitiva do aluno. Finalmente, o terceiro pilar trata da pré-disposição do

estudante para aprender significativamente. Pelizzari et al. (2002) falando do terceiro pilar, define que se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrariamente e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. Neto (2006) classifica que a aprendizagem significativa está diretamente relacionada com a experiência afetiva que o estudante tem no ato educativo, e essa experiência é positiva quando o aprendiz consegue compreender o que se está proposto, mas pode ser negativa se esse não sente que está aprendendo o novo conhecimento.

Na próxima seção poderemos identificar a relação existente entre aprendizagem significativa e modelagem matemática. A partir do que foi apresentado será possível pontuar que ambas são conceituadas em um mesmo direcionamento. Muitos pesquisadores procuram relacionar ambas na tentativa de construir metodologias de ensino que possam desmistificar conceitos matemáticos complexos e até incompreensíveis por parte de alguns estudantes.

1.2 Modelagem Matemática

Souza (2021, pg. 242) define a modelagem matemática como a possibilidade de organizar situações didáticas a partir de problemas cotidianos do estudante que lhe causem interesse, considerando seus conhecimentos anteriores, objetivando promover articulação entre a construção e aplicação de conceitos dentro e fora da matemática. Desse modo tem-se a oportunidade de despertar o interesse do aluno no conteúdo proposto, para que seja construído um pensamento crítico e reflexivo diante do que foi aprendido, nessa perspectiva, além de proporcionar uma aprendizagem significativa para o aluno, a modelagem objetiva a preparação desse para utilizar-se dos métodos matemáticos em situações problemas de seu cotidiano. Consequentemente, quando esse se deparar com desafios futuros no processo de ensino e aprendizagem, poderá recorrer a esta maneira de associação do real com o abstrato quando for necessário.

A modelagem matemática contrapõe-se ao método de ensino tradicional pois nesse os conceitos abstratos são expostos oralmente e seguidos de exemplos e exercícios de fixação. Já na modelagem o estudante é desafiado a indagar, investigar e comparar o que lhe é proposto com situações reais. Biembengut e Hein (2014) elenca algumas vantagens de se utilizar esse método. Para ele a modelagem matemática pode: aproximar

a matemática das outras áreas do conhecimento; mostrar a importância da matemática na formação do aluno; despertar o interesse pela matemática; melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos; desenvolver habilidades para resolver problemas; e estimular a criatividade.

Nesse processo de aprendizagem os trabalhos são direcionados a serem feitos com o princípio de problematização e investigação, dessa maneira o professor deixa de ser o centro do processo de ensino e aprendizagem e passa a atuar como um mediador, uma ponte entre os alunos e o objeto de conhecimento.

A função do professor é levar o estudante a transformar um tema abrangente em uma questão clara, precisa e que tenha solução, com isso o discente se capacita a construir argumentos matemáticos para a solução de problemas formulados.

O método tradicional de ensino procura levar o estudante a entender as regras matemáticas sistematicamente como elas são, o desafio é relacioná-la com o conhecimento cognitivo do estudante através do caráter significativo das atividades de modelagem, objetivando sempre que a compreensão dos conteúdos alcance a curva do interesse real por parte do aluno. Segundo Souza (2021) a aprendizagem significativa e a modelagem matemática aparecem como ferramentas para valorizar o processo de ensino e aprendizagem em educação matemática.

Ramunno (2019) classifica que a modelagem matemática pode ser descrita em cinco fases:

- A primeira é a problematização; nela o aluno se depara somente com um problema e nenhuma solução. segunda fase, a de interação, são colocadas as informações necessárias para a definição do problema.
- A matematização é a terceira, nela são formuladas hipóteses, identificados padrões e variáveis.
- Chamada de fórmula de resolução, a quarta fase é a de construção de um modelo matemático para representar a situação e posteriormente procurar uma solução matemática do problema proposto.
- A quinta e última fase é a de interpretação e validação, nesse momento o estudante poderá apresentar a solução fazendo uma análise crítica do caminho percorrido.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental define que o componente curricular de Matemática deve garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas. Dentre elas destacaremos a 5^o competência que define:

[...] Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados [...] (BRASIL, 2018, p. 267)

Essa competência mostra que as tecnologias na educação aparecem como ferramenta para a modelagem matemática e a aprendizagem significativa.

1.3 Tecnologias na Educação

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2006, p. 87), afirmam que “não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual”.

O documento acrescenta a importância de se inserir essas tecnologias no contexto escolar para que o estudante compreenda e domine essa relação biunívoca entre matemática e tecnologia, tendo “a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática” (BRASIL, 2006, p. 87).

Os softwares de Matemática são caracterizados por apresentarem recursos que ajudam o aluno a ter um pensamento matemático, segundo os PCNEM (BRASIL, 2006, p. 88), nestes programas os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, resolvem problemas, e “com a geometria dinâmica também se pode fazer a modelagem geométrica”. Essa ação é caracterizada por aproximar mais o aluno da realidade quando se trata de movimento, proporção ou comparação de uma figura abstrata com um objeto real.

Diante da atual revolução tecnológica é importante que o professor tenha uma visão crítica de como fazer desta revolução um marco positivo no processo de ensino e aprendizagem, no entanto nenhuma tecnologia é mais importante do que o ser humano que a criou. Falando das contribuições de Álvaro Vieira Pinto na tecnologia da educação, Silva (2013, p. 847) define que “o investimento deve ser no humano e não na obra”. Diante dessa verdade, o professor de Matemática dos dias atuais deve procurar

recursos tecnológicos que levem o aluno a construir o conhecimento matemático. Silva ainda acrescenta que “a nova tecnologia tem que se relacionar à antiga, mesmo que, evidentemente, venha ocorrer entre ambas um salto evolutivo”. Assim, as definições, propriedades e conceitos matemáticos devem ser relacionadas com o recurso tecnológico, proporcionando com isto, a autonomia do estudante. Para Santos (2013) “dentre os entes tecnológicos o mais relevante hoje sem dúvida é o computador”. Pois o redirecionamento dos componentes curriculares para que esse possa se reconhecer e se orientar no mundo do conhecimento é o grande desafio para o ensino da Matemática no Ensino Fundamental e Médio.

Considerando que o acesso ao computador tem aumentado significativamente nas escolas bem como no cotidiano dos alunos, fazer dele uma ferramenta de estudo pode motivar o estudante. Pois ele proporciona ao aprendiz a possibilidade de ser o construtor do conhecimento utilizando o software adequado para este fim.

Moran (2007) elenca algumas etapas importantes na implantação de tecnologias na educação. A primeira é definir quais tecnologias são adequadas para cada instituição. Dessa forma é importante considerar o uso de software livre refletindo sobre o grau de sofisticação para cada momento do ensino. Nessa perspectiva, o GeoGebra se apresenta como a ferramenta para o ensino de matemática.

1.4 O software GeoGebra

O software GeoGebra é um programa livre e pode ser baixado gratuitamente direto do seu site geogebra.org (HOHENWARTER, 2023). Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado nas escolas, e desde que foi disponibilizado tem sido uma ferramenta de ensino dinâmica utilizada em diversos países do mundo. Inúmeras pesquisas acadêmicas são realizadas a cada ano sobre as funcionalidades deste recurso, bem como suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem.

Como por exemplo Rocha et al. (2019) que fala sobre a utilização de softwares no Ensino de Matemática para Ensino Fundamental e Médio ou Junior et al. (2018) que explana o uso do referido software como modelagem matemática no ensino de funções. A partir dessas e de outras pesquisas diversas propostas de ensino podem ser colocadas em ação em salas de aula. Além das pesquisas sobre o software também se encontram

disponíveis vídeos tutoriais na internet, diversos livros e materiais de apoio para o professor.

Com todas essas possibilidades, torna-se importante pesquisar quais os métodos aplicados no uso deste recurso no ensino de matemática, procurando fazer uma relação entre as metodologias e os resultados da utilização em aulas realizadas com esses recursos tecnológicos. Santos (2013) afirma que;

[...] além das contribuições cognitivas e motivacionais, sua utilização pode favorecer a individualização da aprendizagem e também desenvolver a autonomia dos educandos. Porém, apenas a ferramenta não será suficiente para a aprendizagem, os professores devem estar capacitados e dispostos a usá-la. Na maioria das vezes, inserir esta tecnologia em suas aulas é um desafio para grande parte dos professores[...] (SANTOS, 2013, p. 10)

Uma metodologia de ensino com o referido software tem o objetivo de apoiar professores que estejam dispostos a inserir esse recurso em seu planejamento. Proporcionar a autonomia do aluno não é uma tarefa fácil, uma vez que a aula de matemática carrega um estereótipo de que o professor é dono do conhecimento e o estudante depende dele para compreender o que está sendo ensinado. Com a fácil acessibilidade ao conhecimento nos dias atuais, pode-se afirmar que usar como recurso o GeoGebra no planejamento de uma aula é um caminho possível, composto de diversas possibilidades. Pois, como foi dito anteriormente, uma grande quantidade de material de apoio gratuito está disponibilizada.

Silva (2018) trata da aprendizagem significativa, a partir do conceito de David Paul Ausubel. Essa aprendizagem é dividida em três tipos: a cognitivo, a afetiva e a psicomotora. Nesta perspectiva, as novas ideias não devem ocorrer com qualquer conhecimento prévio, mas sim com algo especificamente relevante para o aluno. Um dos objetivos de utilizar uma tecnologia no ensino de matemática está relacionado com essa ideia, considerando que cada dia mais as tecnologias fazem parte da construção do conhecimento cognitivo e psicomotor do aprendiz, este recurso pode ser usado com a finalidade de potencializar a construção dos conceitos matemáticos.

Com esta ferramenta de ensino o aluno poderá fazer uma interação entre seus conhecimentos tecnológicos prévios, adquiridos em seu contexto social, com os novos conhecimentos matemáticos. Mas para isto, segundo Silva (2018, p. 30), “o material didático desenvolvido deve ser, antes de tudo, potencialmente significativo para o aluno”.

Por isso um dos objetivos específicos desse estudo é desenvolver uma pesquisa que possa contribuir como apoio utilizando o software GeoGebra para o ensino de funções no 9º ano do Ensino Fundamental.

Dividiremos este trabalho em quatro principais partes. Na primeira será apresentada uma fundamentação teórica analisando os pilares desta pesquisa, ou seja, aprendizagem significativa de David Paul Ausubel, modelagem matemática, tecnologias na educação e utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem. No segundo capítulo apresenta a metodologia utilizada, na terceira parte será feito um levantamento das possibilidades de modelagem matemática através do software GeoGebra no ensino de Funções.

Para isto consideraremos as cinco etapas do desenvolvimento do trabalho de Modelagem matemática relacionadas por Souza (2021), que são: 1) Escolha do tema; 2) Pesquisa Exploratória; 3) Levantamento dos Problemas; 4) Resolução dos problemas e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema; e por fim 5) Análise crítica da solução. A quarta parte será constituída de uma proposta de ensino de Funções para o 9º ano do Ensino Fundamental, nessa parte procuraremos mostrar uma forma prática da utilização do GeoGebra como ferramenta para a modelagem matemática em uma aprendizagem significativa.

Capítulo 2

Metodologia

Nesta pesquisa, apresentamos uma metodologia dinâmica de ensino de funções para o nono ano do Ensino Fundamental. Para isso, basearemos na teoria de David Paul Ausubel sobre aprendizagem significativa para a modelagem matemática, utilizando o software GeoGebra como recurso didático para desmistificar conceitos complexos e/ou abstratos, com o objetivo de levar o discente a ser capaz de matematizar uma situação problema, não somente no ambiente escolar, mas também, em seu cotidiano.

A presente pesquisa será bibliográfica, de cunho qualitativo. Segundo Lakatos e MARCONI (2001, Pg. 158) “A pesquisa bibliográfica é um apanhado geral sobre os principais trabalhos já realizados, revestidos de importância, por serem capazes de fornecer dados atuais e relevantes relacionados com o tema”. Devido ao tempo de pesquisa não será possível aplicar os métodos propostos empiricamente. Porém, procuraremos construir uma pesquisa que possa ser utilizada no ensino de matemática e também por pesquisadores que procuram estudar o tema proposto.

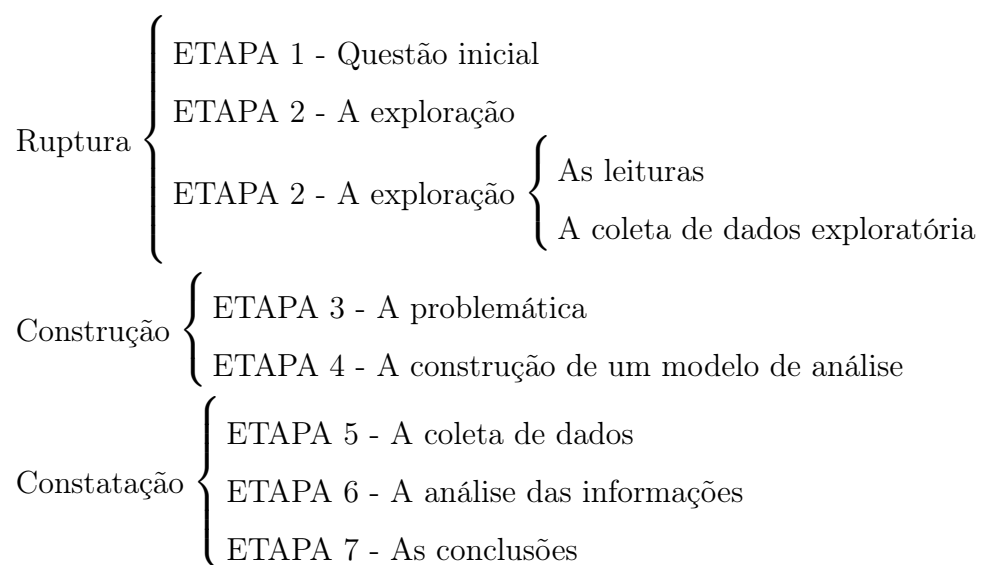
2.1 Metodologia da pesquisa

Gerhardt e Silveira (2009) definem os três importantes eixos da pesquisa, a primeira delas é a ruptura, que é basicamente o abandono das armadilhas contidas em nossa bagagem teórica, pois uma grande parte de nossas ideias se inspira em aparências imediatas ou partidárias. A construção é o segundo eixo, para ela a ruptura só acontece quando construímos um sistema organizado capaz de expressar a lógica que

o pesquisador suponha ser a base do objeto de estudo. Finalmente a constatação é o terceiro eixo, pois uma proposta só tem o status de pesquisa científica quando a partir dela, pode-se constatar as informações da realidade concreta.

Gerhardt e Silveira (2009) define as subdivisões destes três eixos, formando assim sete importantes etapas. Segundo a autora estas etapas estão assim definidas como: a exploração, a elaboração do problema, a construção de um modelo de análise, a coleta de dados, a análise das informações e as conclusões. Porém, é importante ressaltar que isto não quer dizer que uma etapa é completamente concluída e outra iniciada. Assim, sempre que necessário, ao se desenvolver uma etapa, é importante voltar na, ou nas, etapas anteriores pois as mesmas estão em interação constante, procurando, com isto, realizar uma pesquisa coerente e completa.

Utilizaremos o esquema a seguir para explicar estas etapas bem como seu funcionamento:



Esquema 1: Etapas da pesquisa científica Baseado na estrutura proposta por QUIVY & CAMPENHOUDT, 1995 apud (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p.47).

No primeiro capítulo da presente pesquisa, fizemos um levantamento bibliográfico sobre a aprendizagem significativa, modelagem matemática, as tecnologias na educação e sobre o software GeoGebra. Nesse momento procuramos fazer as leituras de importantes artigos e livros com a finalidade de explorar e relacionar cada item supracitado. Afim de obedecer aos critérios de escolhas citados por Gerhardt e Silveira (2009, p. 49), que são: evitar um grande número de textos, escolher primeiramente textos de síntese

e em seguida procurar textos que não mostrem apenas dados, mas que tenham análise e interpretação. Procurando sempre artigos que tenham com abordagem e enfoque diferentes sobre o tema em locais de busca de informações como bibliotecas virtuais de universidades, base de dados da CAPs entre outros meios disponíveis na web.

Feito o levantamento de textos, iniciamos as respectivas leituras dos mesmos, sendo feito resumos que focaram na ideia central de cada artigo, nas principais definições em cada texto sobre os temas desejados, observando e analisando as diferentes opiniões e os pontos mais importantes de cada artigo, objetivando sempre ampliar o conhecimento sobre o assunto e caso julgassem importante acrescentar novos temas. Em seguida foi iniciada a escrita e organização de ideias, procurando fazê-lo com o melhor e mais coerente embasamento teórico possível.

A segunda parte da pesquisa, chamada por Gerhardt e Silveira (2009) de “a problemática”, que segundo a autora é uma forma de se interrogar os objetos estudados, será uma parte flutuante em todo este trabalho, e apesar de ser retomada em todos os capítulos, será melhor explorada nos próximos capítulos quando procuraremos interrogar e explorar os objetos estudados.

A construção do modelo de análise será feita com a elaboração de uma aplicação de modelagem matemática. Utilizaremos quatro questões extraídas de dois importantes meios de avaliações nacionais, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que serão sugeridas como proposta de ensino. Essas, poderão ser resolvidas utilizando-se de modelos teóricos relacionados às equações matemáticas, para que o conteúdo estudado ao ser relacionado com uma situação real possa sair da abstração para a realidade, fazendo uso do software GeoGebra para melhor compreensão. Procurando mostrar ao estudante a aplicabilidade dos conceitos estudados em sala de aula.

Devido ao fato de nossa pesquisa ser uma análise bibliográfica seguida de uma proposta de ação pedagógica, a quinta parte, que é a coleta de dados, não será feita empiricamente. Sendo assim, nesta parte faremos uma adaptação e, ao invés de coletarmos dados experimentais em uma pesquisa prática de campo, iremos analisar trabalhos já realizados juntamente com seus respectivos dados levantados para fortalecimento e direcionamento da proposta didática de uma metodologia de ensino utilizando o software GeoGebra, que é um dos objetivos específicos desta pesquisa. Com isto, a sexta etapa

que é a análise das informações também será adaptada, pois será feita uma análise comparativa entre os dados esperados dessa pesquisa com os já encontrados em outras. Elaboraremos uma proposta que sirva de subsídio no ensino de funções quadráticas, afim de proporcionar resultados significativos na aprendizagem do conteúdo. Iremos adaptar o problema levantado, bem como os métodos matemáticos para a solução do mesmo, para que este seja resolvido com a utilização do software dinâmico referido.

Neste caso não se trata de fazer grandes descobertas, mas sim de contribuir com novas perspectivas teóricas. Para isto procuraremos elaborar uma sugestão objetiva que possa auxiliar o docente mesmo que este não tenha tanto tempo para pesquisar, ou seja, explicando a metodologia sugerida como se fosse uma receita de bolo para que possa ser entendida e executada facilmente e possa ser colocada em prática em diferentes ambientes estudantis.

Uma outra ferramenta que poderá ser utilizada nesse momento será criada no site do GeoGebra.org. Nessa plataforma o professor poderá criar um perfil e adicionar os alunos que desejarem participar dessa aula dinâmica, pois no referido ambiente, o professor pode passar atividades online e deixar que os estudantes criem e/ou resolvam o que se pede. Isto possibilita ao professor o acompanhamento no desenvolvimento da atividade sugerida e ao aluno a possibilidade de estudar no ambiente escolar e fora dele, dependendo das condições oferecidas, e até mesmo que estas atividades sejam realizadas em momentos de tranquilidade e maior concentração que pode ser a própria casa do aluno. Caracterizando uma etapa da metodologia ativa.

Capítulo 3

Análise de Pesquisas Envolvendo Metodologias Ativas no Ensino de Funções

Os nascidos depois da internet são classificados por Pereira et al. (2018) como nativos digitais. Segundo Pereira et al. (2018, p. 57) “nos tempos atuais de muitas informações quando a escola não proíbe o aluno de utilizar recursos eletrônicos na sala de aula, pode haver todo tipo de comportamento”. Para ela, mesmo pelo fato de terem facilidades com tecnologias, esses alunos tem pouco interesse em aulas digitais. Por isto se torna interessante para o professor buscar metodologias ativas para o ensino. Pereira et al. (2018) também define Metodologias Ativas (MA) como “forma de trabalho dos processos educacionais que envolvem mudança de paradigma”. Nessa perspectiva, como o aluno é responsável pelo aprendizado, cabe a ele buscar esse conhecimento e não esperar que o professor dê a ele de “mãos beijadas”. Nas metodologias ativas o estudante é desafiado a correr atrás do conhecimento, proporcionando-lhe a possibilidade de se tornar independente. Com isto ele pode modelar situações problemas de seu cotidiano e aplicar os cinco passos do método da problematização versus solução citados no primeiro capítulo. Enquanto isso, o professor deve executar o que define Pereira et al. (2018, p. 58), ou seja, “responsabilizar o aluno pelo seu aprendizado, valorizando as opiniões dos estudantes incentivando-os a buscar soluções por meio de pesquisa autônoma”.

Apesar de ser uma metodologia de grande aceitação e aprovação por diversos autores, nem sempre estas metodologias ativas funcionam. Na maioria das vezes este insucesso está relacionado com o cognitivo. Pereira et al. (2018) define que alguns alunos não se motivam pela falta do domínio e até pelo fato de não ter aprendido conceitos anteriores sobre um determinado assunto que é base para a construção do novo conhecimento ou até mesmo deste não ter sido bem conceituado em momentos anteriores, o que proporciona ao estudante uma certa rejeição do novo conhecimento. Outro fator levantado por Pereira et al. (2018) são os problemas de saúde que são fatores contribuinte para a falta de desenvolvimento estudantil.

Observando essa problemática em nossa prática docente, podemos acrescentar também a ausência de saúde emocional, pude notar em minha experiência profissional que no retorno das aulas presenciais, pelo menos na rede pública, uma parte significativa dos estudantes tem sido afetados de maneira considerável. Em algumas unidades escolares se tornou comum entre os estudantes crises de ansiedade, depressão, problemas familiares, bullying, entre outros. Diante disto, tornou-se essencial que o docente seja reflexivo ao observar resultados negativos ou até mesmo apatia e desinteresse dos estudantes.

Nesse capítulo procuraremos mostrar algumas metodologias dinâmicas utilizadas por pesquisadores que buscaram, através de pesquisas qualitativas, mostrar o software como uma metodologia ativa capaz de proporcionar a modelagem matemática em seus experimentos docentes. Em alguns dos artigos ou dissertações analisadas percebemos que os autores procuravam levar o estudante a matematizar uma situação problema, ou seja, a partir de um problema real o discente era desafiado a buscar métodos matemáticos utilizando: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema proposto; e análise crítica da solução.

Pereira et al. (2018) afirma que o professor deve trabalhar de forma democrática observando sempre os resultados dos alunos e cobrando para que produzam, deixando sempre claro quais suas intenções e mostrando as informações necessárias para melhor compreensão do conteúdo ensinado. Assim, se torna importante que o professor não dê respostas prontas de maneira alguma, mas sim conduza e desafie o estudante a buscar os caminhos certos, evitando com isto a acomodação desse.

Como nosso foco é a modelagem matemática por meio de funções, todas as pesquisas analisadas foram relacionadas a esta temática. De maneira alguma estamos afirmando que este é o único meio de proporcionar a modelagem matemática. É importante deixar claro que a possibilidade de modelagem percorre quase todos os conteúdos estudados na educação básica, desta forma a presente pesquisa poderá também servir de base para outros estudos de modelagem em diversas áreas da matemática e da ciência.

3.1 Importantes pesquisas empíricas analisadas

3.1.1 Uma aplicação utilizando a modelagem e o GeoGebra

Junior et al. (2018) inicia seu estudo enfatizando que em sua trajetória docente pode observar uma importância significativa nos softwares dinâmicos na prática pedagógica. Para ele, pesquisas que auxiliem o professor na utilização desses recursos são importantes para a busca por melhores resultados no processo de ensino e aprendizagem. Junior et al. (2018) destaca a importância da comparação de metodologias ativas como as tradicionais para se analisar as diferenças entre ambas. Isto não quer dizer que a metodologia tradicional, como já dito no capítulo anterior, deve ser abandonada, mas que os resultados positivos de ambos os métodos devem ser considerados e utilizados para melhor compreensão dos conteúdos.

A metodologia utilizada por Junior et al. (2018) foi dividida em três partes importantes. Na primeira delas é feito um levantamento histórico no estudo de funções. Mostrando como o ensino foi evoluindo no decorrer dos anos e afirmam que “demoraram-se vários séculos até que de fato conseguiu-se conceitos aceitáveis” (JUNIOR et al., 2018, p.31). Ao analisar essa parte percebemos que as metodologias de ensino foram, com a prática docente, se aperfeiçoando no decorrer da história da educação. Na segunda parte dessa pesquisa Junior et al. (2018) mostra as definições de funções. Diferentemente de nossa pesquisa, onde pretendemos analisar somente funções polinomiais de segundo grau, o autor abrange para uma grande quantidade de funções. Além de funções de primeiro e segundo grau o autor também analisa as funções modulares, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e seus respectivos gráficos. Ao enfatizar a importância da modelagem matemática no estudo de funções o autor afirma que

elas são aplicadas em todas as ciências como por exemplo na Física, na Química e na Biologia.

Na última parte o autor faz uma proposta de oito aplicações de funções usando a modelagem matemática e o GeoGebra. A importância da matematização é bem esclarecida quando ele define:

A “matematização” é a etapa mais complexa dentre todas. É uma etapa crucial do modelo matemático. Nesta etapa se traduz o problema para a linguagem matemática. Nesta fase, o modelador deve ter paciência, fazer uso de toda linguagem matemática que possui, ser criativo e, além disso, fazer uso de toda a sua experiência acumulada afim de que possa “matematizar” a situação-problema proposta. Estes são pontos imprescindíveis na construção deste processo. (JUNIOR, 2018, p. 111)

As aplicações tiveram as seguintes temáticas; a modelagem em problemas relacionados a produção de lixo, a soma de múltiplos de 2, um problema de função afim sobre os gastos em um táxi, um exercício sobre os gastos em um parque de diversões e outro sobre o deslocamento de uma formiguinha (ambos aplicados simultaneamente), o lançamento de um projétil, dois exercícios criados pelo autor, e por último uma função aplicando o controle deslizante em diversas funções.

Dessas etapas destacaremos duas aplicações empíricas. Na primeira, relacionada a modelagem do índice da produção de lixo utilizando o conceito de função afim, o autor escolhe turmas de 6º e 9º ano. Um dos critérios que chama a atenção é a necessidade de uma preparação, antes da aplicação dos exercícios propostos, lembrando e redefinindo alguns conceitos prévios necessários para o estudo de funções.

Devido a necessidade observou-se que as turmas de nonos anos, que são beneficiadas por um maior tempo de estudo, mostraram melhores resultados, justificando a importância de uma conceituação de qualidade ano após ano na vida estudantil do discente.

Para melhor aplicabilidade da pesquisa foi exigido um maior comprometimento dos estudantes, sendo que um dos critérios de participação na pesquisa foi o baixo índice de faltas dos alunos participantes.

Como consequência deste projeto observou-se que 88% dos alunos acertaram as questões sugeridas posteriormente. Também, um gradativo aumento nas notas bimestrais e a diminuição das faltas foram pontos positivos relatados pelo autor.

A segunda aplicação a se destacar é aplicação de exercício sobre os gastos em um parque de diversões e outro sobre o deslocamento de uma formiguinha que foram feitas simultaneamente. O primeiro, exercício o do parque de diversões apresenta o seguinte enunciado:

Um parque de diversões cobra R\$ 10,00 reais a entrada e R\$ 4,00 reais para andar em cada brinquedo. Luiza tem R\$ 50,00.

- a) Em quantos brinquedos no máximo ela consegue brincar no parque?*
- b) Se ela andasse em três brinquedos, quanto gastaria?*
- c) Gastando R\$ 50,00 ela andou em quantos brinquedos?*
- d) É possível generalizar, ou seja, criar uma relação entre o preço pago (y) com a quantidade de brinquedos (x)?*
- e) É possível sistematizar essas informações em um gráfico.*

O segundo exercício proposto, o do deslocamento da formiguinha, apresenta o seguinte enunciado:

Uma formiguinha se move sobre uma régua em linha reta na direção crescente dos centímetros com velocidade constante de 2 cm por segundo. Supondo que, quando começamos a observar a formiga, ela se encontra a 4 cm da origem.

- a) Nessas condições, organize os dados da tabela abaixo:*

Tempo (Segundos)	Posição (em cm)
0	...
1	...
2	...
3	...
5	...
10	...
x	...

Tabela 3.1: Tabela tempo posição Fonte: (JUNIOR, 2018, p. 119)

- b) Crie uma lei de formação da movimentação da formiga.*
- c) Construa um gráfico mostrando a movimentação da formiga.*

Essa experiência foi feita com 25 alunos de uma turma de primeiro ano do ensino médio. Dentre esses, 15 foram selecionados para utilizar o software GeoGebra para resolver as situações problemas e 10 aplicaram os métodos tradicionais, porém, notou-se que nestas e nas demais aplicações a ausência dos resultados encontrados com a aplicação, o que seria muito produtivo considerando que a metodologia de divisão dos estudantes para aplicação foi muito interessante.

Dois fatores foram importantes e podem ser agregados em nossa proposta no próximo capítulo. Um deles é a comparação entre a construção do gráfico de uma função utilizando-se do método mais utilizado em sala de aula, que é a aplicação de valores a uma dada função, com a construção do seu respectivo gráfico no caderno e posteriormente, com a criação do gráfico no GeoGebra para comparação.

Diferente do método tradicional, quando aplicamos uma determinada função no software esse já mostra o seu gráfico podendo, através da opção de inserir a malha quadriculada, observar os valores de x no eixo das abscissas e de $f(x)$, que são os valores de y , nas ordenadas, o outro fator que se pode julgar de extrema importância na referida pesquisa é a aplicação do Controle Deslizante, que é uma função do GeoGebra que permite a modificação dos valores desejados.

Por exemplo, quando colocamos um Controle Deslizante com um determinado intervalo para os valores deslizados é possível observar o comportamento do gráfico neste determinado intervalo, possibilitando ao estudante comparar o comportamento da função, tanto para os reais quanto em uma parte específica da reta, e segundo o autor “essa variação de valores facilita a interpretação gráfica que, se fosse realizado pelo método tradicional, não seria possível uma observação com tal clareza” (JUNIOR, 2018, p. 36).

3.1.2 Aplicação utilizando o aplicativo GeoGebra *Graphing Calculator* no celular

Silva e Pinto (2019), ao pesquisarem sobre as funções quadráticas e o uso de tecnologias moveis no ensino médio também trouxeram interessantes contribuições. Ao fazerem uma pesquisa que analisa o estudo das funções e suas características, deram ênfase ao trabalho realizado por pares de alunos na sala de aula para verificar se essa cooperação entre os sujeitos influenciaria na aprendizagem do conteúdo proposto. Os

autores defendem que essa cooperação pode, numa discussão em grupo sobre determinado assunto matemático, ser exercida pela troca de ideias e pensamentos dos estudantes. Considerando o constante crescimento das tecnologias moveis entre os estudantes nos tempos hodiernos, os autores também trouxeram uma possibilidade consideravelmente importante para o uso de tecnologias na educação. Trata-se do uso do software GeoGebra no celular, uma vez que a versão para androide também é gratuita e oferece diversas possibilidades na execução de atividades.

Na perspectiva da pesquisa realizada, os autores procuraram explorar a valorização da autonomia e do senso crítico dos estudantes. Entendendo que o estudante deve ser protagonista no processo de ensino e aprendizagem no espaço da sala de aula. O GeoGebra “é atualmente um software amplamente utilizado por pesquisadores da Educação Matemática em diversas partes do mundo com o objetivo de criar e executar estratégias para qualificar o ensino de conteúdos matemáticos” (SILVA; PINTO, 2019, p. 110). A pesquisa em questão foi realizada considerando a valorização de ações autônomas para favorecerem o senso crítico dos estudantes.

Os enunciados das atividades propostas não foram citadas na pesquisa. Elas foram criadas com base no estudo das funções, utilizando-se das definições na modelagem em situações problemas, através de um aplicativo que pode ser baixado em qualquer celular chamado GeoGebra Graphing Calculator, que dispõe de uma interface para esboçar gráficos, objetivando provocar as reflexões dos estudantes sobre como responder a situações problemas utilizando-se de métodos matemáticos e de recursos como o software supracitado.

A escola campo de pesquisa utilizada dispunha de um laboratório de informática com 20 computadores e internet disponível, porém, ao observarem que o mesmo era sempre utilizado e que isto seria um problema para a pesquisa em questão, foi necessário pensar em uma alternativa para execução da sequência das atividades. Aqui temos uma reflexão sobre situações parecidas que podem aparecer na utilização do software no ensino de matemática, pois uma parte significativa das escolas públicas não gozam de um ambiente exclusivo para tecnologias com computadores para o processo de ensino e aprendizagem.

Para isto, foram propostas quatro atividades específicas que puderam ser realizadas com os recursos disponíveis; uma sobre variação dos parâmetros, outra sobre zeros

da função e duas atividades que trabalhavam pontos de máximos e mínimos de uma função.

No início da primeira atividade (variação dos parâmetros), foi disponibilizado aos estudantes um manual de orientações de como utilizar o aplicativo GeoGebra Graphing Calculator. Instruções que foram úteis e aplicáveis para toda a pesquisa. É importante salientar que esse tipo de instrução se encaixa no começo de diversas propostas de aula com o recurso de softwares, de forma que sejam aplicáveis às atividades. Posteriormente foi feita a definição dos parâmetros a , b e c e do papel de cada um no gráfico considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como na pesquisa de Junior (2018), analisada anteriormente, a ferramenta controle deslizante teve um papel importante na visualização da importância de cada parâmetro em todas as questões aplicadas.

A etapa seguinte também foi iniciada com as definições necessárias sobre os zeros da função. Nela procurou-se fazer as relações de ida e de volta no conteúdo proposto, ou seja, dada a função exigiu que os estudantes encontrassem os zeros ao aplicar as funções no software para verificar o gráfico e seus pontos de intersecção no eixo das abscissas e dado o gráfico exigiu que fosse encontrado os zeros sem efetuar os cálculos. Nas últimas questões dessa etapa foi proposto que os estudantes explorassem a relação entre as duas questões.

A última parte (pontos de máximo e mínimo), foi composta por seis questões que exploraram a simetria da parábola. Aqui observou-se que foi possível, através do aplicativo, que o estudante veja as coordenadas que formam os pontos de máximo ou mínimo em uma parábola, sem o uso das fórmulas algébricas para esta finalidade. Isso não quer dizer que este mecanismo seja descartado, mas sim que ao utilizar o recurso visual antes de mostrar a fórmula, possivelmente o estudante terá melhor compreensão do que se é pedido. Em uma das questões foi discutido que em um ponto de máximo ou mínimo pode-se existir infinitas parábolas.

Segundo os relatos de Silva e Pinto (2019, p. 110), no experimento em questão percebeu-se a partir da primeira questão, uma participação significativa e um interesse de tal maneira que rapidamente todos pareciam saber utilizar o GeoGebra Graphing Calculator, e isto foi demonstrado no empenho de cada um nas discussões sobre os parâmetros das equações propostas.

A cooperação entre os estudantes também proporcionou maiores discussões bem

como melhores observações do comportamento dos parâmetros, um exemplo observado foi o papel do parâmetro b na movimentação no eixo y . Pois no aplicativo fica bem mais fácil essa observação pois nele é possível realizar a modificação de cada parâmetro e observar o que acontece com o gráfico instantaneamente, também foi observado que à medida que o aplicativo era explorado as conversas sobre o conteúdo, intermediadas pela professora aplicadora, se tornavam melhor embasadas com melhores argumentações e conceituação do conteúdo. “A mediação da professora durante a aula na condução das atividades oportunizou aos estudantes desenvolver confiança própria” (SILVA; PINTO, 2019, p. 18).

Mesmo com o uso de termos comuns durante as aulas, foi observado que a comunicação entre os estudantes mostrou que eles estavam compreendendo o conteúdo. Utilizando termos como “para cima” e “para baixo”, os estudantes puderam observar a mudança da concavidade da parábola no aplicativo somente com a modificação do sinal do parâmetro a . Da mesma forma, ao modificar o parâmetro c , eles puderam visualizar a modificação vertical da parábola. Percebeu-se que o grupo de estudantes conseguiu aplicar os conhecimentos adquiridos do início ao fim nas atividades, pois o aplicativo possibilita a visualização da modificação no gráfico no instante em que a função é modificada.

Outro fator percorrido pelos autores foi a inserção de tecnologias da educação nos livros didáticos. Observou-se que alguns livros de matemática aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) apresentam, além de sugestões de softwares, um “passo a passo” para aplicação em sala de aula.

Na pesquisa analisada concluiu-se que a atividade realizada em conjunto oportunizou aos estudantes o surgimento de diálogos que os conduziu a elaboração de argumentos sobre o que se estudou. Outra observação foi que ao darem movimento aos conceitos estáticos apresentado no livro didático, utilizando o aplicativo GeoGebra Graphing Calculator, oportunizou aos estudantes conduzir o processo da própria aprendizagem.

Notamos que muitos fatores na pesquisa supracitada podem ser aproveitados na prática escolar. Esse foi um dos motivos que motivaram a análise desta pesquisa, pois ao verificar a proposta e os resultados adquiridos pode-se inferir fatores como: utilização do GeoGebra Graphing Calculator, trabalho cooperativo entre os estudantes, ensino

que equações quadráticas com o uso do aplicativo, desafio aos estudantes para serem agentes na construção do próprio conhecimento, como ações que podem contribuir significativamente no processo de ensino e aprendizagem de matemática, entre outros.

3.1.3 Aulas teóricas versus aulas laboratório de informática com uso do GeoGebra no estudo de Máximos e Mínimos de uma função

Outro trabalho analisado foi feito por Ribeiro (2017). A pesquisa em questão foi realizada em uma Escola Estadual em Manaus, com duas turmas de primeiro ano do Ensino Médio e teve por motivação do pesquisador as dificuldades encontradas no trabalho docente e o baixo rendimento em avaliações externas como, por exemplo, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e as Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBMEP). Tendo como foco da pesquisa situações-problemas em várias áreas do conhecimento que podem ser resolvidas através do conhecimento dos pontos de máximos e mínimos de uma função.

A pesquisa em questão foi de cunho qualitativo sendo dividida em três etapas. Na primeira etapa foi realizada a apresentação do conteúdo de maneira convencional em sala de aula, mostrando as definições de funções quadráticas e de pontos de máximos e mínimos e a resolução de alguns exemplos. Posteriormente realizou-se uma atividade diagnóstica com a finalidade de verificar o conhecimento dos estudantes a respeito do que foi aprendido.

No segundo momento o pesquisador levou os estudantes para o laboratório de informática para apresentação do software GeoGebra bem como sua importância no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo proposto, neste momento os mesmos exercícios resolvidos em sala de aula foram mostrados no software e os alunos resolveram mais duas situações-problemas. No último momento da pesquisa foi realizada uma nova avaliação para verificação do que foi aprendido e comparar com a avaliação diagnóstica da primeira etapa.

Um fator que chamou a atenção foi a inserção, no momento da aula realizada em sala, de exercícios de cunho interdisciplinar. Os temas escolhidos pelo pesquisador, pertencentes as áreas de Economia (lucros e perdas) e Esporte (o alcance de uma bola chutada em uma partida de futebol), podem ser considerados interessantes para

uma proposta de modelagem matemática. Nesse momento foram mostrados aos alunos dois gráficos feitos no quadro branco e destacados alguns dos pontos importantes das funções, que são os pontos de máximos e suas raízes. Na atividade diagnóstica realizada ao final desta etapa observou-se que, em média, 40% dos estudantes não conseguiram alcançar metade da pontuação máxima na atividade.

No segundo momento, realizado no laboratório, os estudantes foram separados em grupos. Uma observação feita, e que chama atenção em uma parte significativa de escolas, foi a quantidade baixa de computadores para a realização das atividades. Dessa forma não foi possível realizar a aula com todos os estudantes juntos, sendo necessário a divisão da aula em dois momentos. Diante disto Ribeiro (2017, p. 14) destaca que “isto confirma a necessidade de planejamento antes de qualquer atividade fora de sala de aula”, uma vez que, considerando uma aula de aproximadamente cinquenta minutos, são necessários dois tempos ou duas aulas para aplicação da atividade proposta.

As questões a seguir foram utilizadas na aula para que os estudantes pudessem resolvê-las e construir os respectivos gráficos.

Situação-Problema 1: *O lucro (ou prejuízo) L de uma pequena empresa é calculada pela diferença entre a receita (R) e o custo (C). Nessa empresa, a receita e o custo são dados, respectivamente, pelas funções $R(x) = 180x - x^2$ e $C(x) = 30x + 1200$, em reais, em que x representa a quantidade vendida mensalmente de determinados itens.*

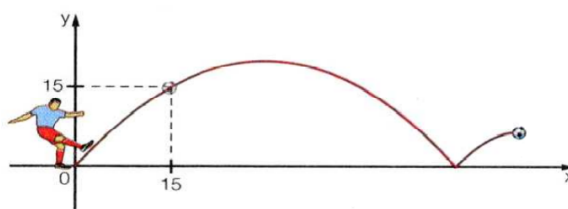
- (i) *Determine a função lucro (L).*
- (ii) *Quantos itens devem ser vendidos nessa empresa para que o lucro seja máximo?*
- (iii) *Qual é o lucro máximo dessa empresa, em reais?*

Os estudantes construíram e analisaram os gráficos utilizando o software GeoGebra após realizarem a função lucro, que foi adquirida após a subtração da função receita pela função custo, isso os levou a perceber que a visualização do gráfico só poderia ser possível se dividissem a equação resultado por 100. A resolução do item b) foi possível ao calcular o valor de x do vértice, onde o resultado esperado seria 75, possibilitando com isto a solução do item c), que é obtida substituindo x por 75 na função lucro.

Situação-Problema 2: *Em uma partida de futebol, ao ser chutada por um jogador, a bola descreveu, até tocar ao solo, uma trajetória definida pela função, $y =$*

$\frac{3}{4}x - \frac{1}{45}x^2$ em que y corresponde a altura da bola em relação ao solo após ter percorrido uma distância x . Observando o esquema e considerando as medidas x e y em metros, qual a distância que essa bola percorreu até tocar o solo pela 1ª vez? A Figura 3.1 exemplifica o referido problema.

Figura 3.1: Imagem representando o alcance do chute de uma bola



Fonte: (RIBEIRO, 2017) apud (SOUZA, , p. 127)

O autor não discutiu os resultados obtidos neste segundo exercício, mas concluiu essa segunda etapa afirmando que nos dois exercícios os estudantes demonstraram maior interesse devido ao uso do software, encontrando maior facilidade para descobrir os valores de máximos e mínimos em ambas as situações-problema propostas.

Na última etapa, onde foi feita uma avaliação diagnóstica para verificação da evolução na aprendizagem do conteúdo, observou-se uma evolução. Em comparação com a primeira avaliação diagnóstica, onde pelo menos 40 % dos estudantes não acertaram nem a metade das atividades, observou-se um que em média 88% dos alunos apresentaram absorção do conteúdo proposto. O autor coloca como principal fator para esta evolução a possibilidade de visualização da situação-problema proporcionada pelo software GeoGebra.

Na pesquisa analisada pudemos observar alguns fatores importantes para uma proposta de ensino, destaca-se o paralelo feito entre a apresentação do conteúdo exposto tradicionalmente e no laboratório de informática utilizando o software dinâmico. Esta junção, apesar de não ter sido citada pelo autor, também pode ter influenciado para a melhora apresentada no desempenho dos estudantes.

Outro ponto interessante foi a utilização de problemas do cotidiano que possibilitam a modelagem matemática no ensino de funções quadráticas onde se apresentou a importância dos estudos e aplicações de máximos e mínimos em uma situação real. Por último destaca-se a realização de avaliações diagnósticas, mecanismo bem aplicado

para verificação de aprendizagem, que também pode ser considerado como instrumento para reflexão do professor no processo de ensino e aprendizagem.

As três pesquisas analisadas nesse capítulo mostraram importantes possibilidades de se aprimorar uma aula com o uso do software GeoGebra. Elas foram escolhidas por apresentarem uma melhor dinâmica em sua realização bem como uma melhor aproximação com a presente pesquisa.

No próximo capítulo apresentaremos uma proposta de ensino de matemática com a utilização do GeoGebra procurando sempre utilizar a modelagem matemática para que o estudante possa compreender a importância da matemática no cotidiano.

Capítulo 4

Proposta de aula para o ensino de Funções Quadráticas

4.1 Proposta de aula para o ensino de Funções Quadráticas com modelagem Matemática

Realizar a modelagem matemática pode parecer um grande desafio aos estudantes de séries iniciais de escolas públicas, para executar esta proposta desafiadora é importante que o docente possa refletir sobre a realidade do estudante e também fazer uma leitura do mundo à sua volta, este fator é importante para que a aula possa fluir de maneira atrativa, de forma que o conteúdo ensinado possa ser desmistificado e bem compreendido pelo aluno.

No presente capítulo procuraremos oferecer uma proposta de ensino de funções de segundo grau para uma turma de nono ano do ensino fundamental. Seguindo os três pilares citados no primeiro capítulo que são: utilizar o material adequado, rever o subsunçores que são os conhecimentos prévios para a aprendizagem e finalmente usaremos o software GeoGebra para influenciar na pré-disposição do estudante para aprendizagem.

Quatro questões extraídas de dois importantes meios de avaliação da educação serão nosso objeto de proposta de estudo. Duas questões foram escolhidas dentre as questões de Matemática e suas Tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio

(ENEM) e duas do banco de dados da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), estes meios de avaliação foram escolhidos por entendermos a importância e contribuição destas avaliações nos futuros estudos dos alunos, de maneira que o sucesso nestas avaliações possam proporcionar aos discentes importantes oportunidades no seu futuro.

As quatro questões exigirão do estudante um dos principais objetos de estudos desta pesquisa, que é a modelagem matemática, esta proposta procura levar o estudante a ler as referidas situações problema, transcrevê-las em linguagem matemática, resolver o problema e dar uma resposta ao que se está procurando.

Supondo que escrever uma situação problema em linguagem matemática não seja um desafio fácil para uma parte (talvez uma grande parte) dos alunos, utilizaremos o recurso tecnológico como auxílio na solução dos referidos problemas.

4.2 Criando uma conta no GeoGebra

Procurando atender aos objetivos desta pesquisa, faremos uso do software GeoGebra buscando proporcionar uma aprendizagem significativa. Ele também será importante para que o estudante possa chegar a conclusões de forma intuitiva ao visualizar e analisar os gráficos das funções propostas nos exercícios.

Os subsunçores necessários ao aluno para esta aplicação são estudados nas séries anteriores ao nono ano. Para esta aula é importante que o aluno tenha conhecimento sobre: funções de primeiro e segundo grau; plano cartesiano; coordenadas no ponto; e de soma, subtração, multiplicação de funções e monômios. O conceito de pontos de máximos e mínimos de uma função adquiridos através da fórmula não serão necessários neste momento, pois pretendemos levar o estudante a intuir este conceito de maneira que ele mesmo possa visualizar a existência destes conceitos ao observar o comportamento do gráfico no GeoGebra.

Uma ferramenta que pode ser utilizada é a plataforma do GeoGebra online. Uma vez que nela o professor pode abrir uma conta e convidar estudantes para participarem das atividades de maneira remota. Assim, o aluno terá a possibilidade de estudar na escola, em um laboratório de informática, ou em casa no momento extra classe podendo fazer e refazer quantas vezes precisar para que o conhecimento seja construído

de maneira a respeitar o tempo de aprendizagem de cada indivíduo.

Para isto o professor precisara acessar a página do GeoGebra na web (HOHENWARTER, 2023), ou digitar no Google “geogebra.org”. Ao abrir a página, clicando na palavra “Perfil” que fica do lado esquerdo, aparecerá a oportunidade de fazer o login com a conta GeoGebra.

Figura 4.1: Página inicial do site geogebra.org

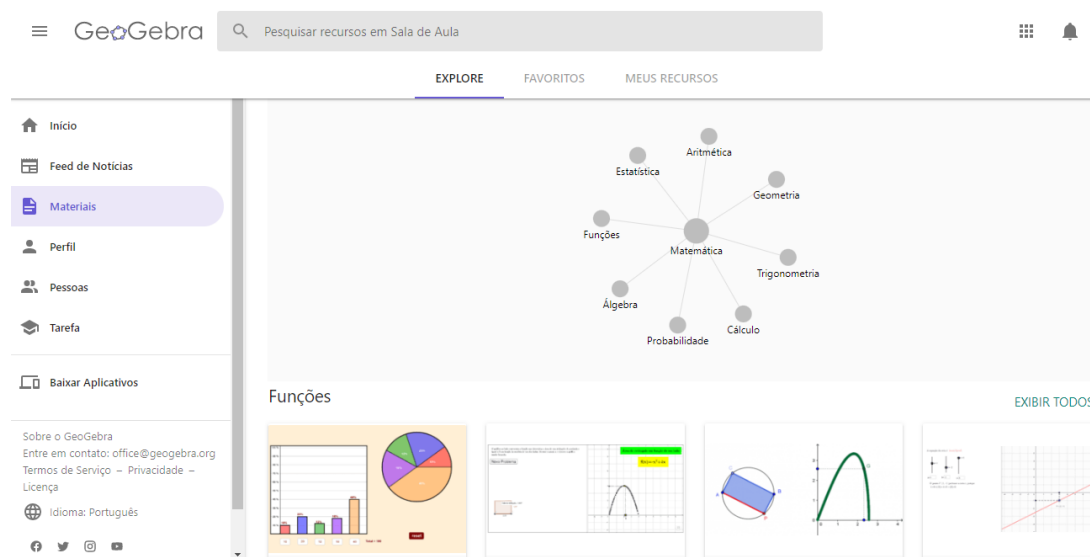


Fonte: <https://www.geogebra.org/>

Caso ainda não tenha uma conta basta criar uma nova conta ou utilizar uma de suas contas já existentes na plataforma Google. Outra opção é criando a conta pelo Facebook, facilitando o compartilhamento de conteúdos e a procura por alunos, caso esses estejam em seus contatos. Feito isto, será enviado para o email um link de ativação onde será necessário o cadastramento do professor. Depois de cadastrado, grupos de participantes podem ser criados e as atividades já podem ser inseridas.

Algumas opções de atividades prontas estão disponíveis na opção a esquerda “Materiais Didáticos” e podem ser utilizadas no planejamento de outras aulas. Uma vez que todas as atividades criadas na plataforma podem ser utilizadas livremente. A opção de criar atividades é oferecida e através desta ferramenta pode-se compartilhar atividades criadas no programa GeoGebra no computador pessoal para que os estudantes resolvam aos exercícios propostos.

Figura 4.2: Opções de materiais didáticos prontos para uso livre em geogebra.org



Fonte: <https://www.geogebra.org/materials>

Lembrando que as atividades compartilhadas estarão disponíveis para o estudante exatamente da maneira que foi criada no computador ou notebook.

Uma das grandes vantagens desse recurso é que ao criar uma nova atividade o professor poderá limitá-la da maneira que achar melhor. Pois ao editar a atividade algumas opções de configuração são oferecidas. Como por exemplo, a criação de um material que fique disponível somente para visualização por parte do estudante, ou um que possa ser editado e enviado proporcionando a possibilidade da construção e visualização do conhecimento proposto. Nessa segunda opção o professor terá a possibilidade de visualizar o que cada aluno fez separadamente podendo usar este recurso como instrumento avaliativo, caso queira.

Após criar a atividade o professor poderá compartilhá-la da maneira que achar melhor, pois o link pode ser compartilhado com um grupo formado na página pelo *Facebook*, *Twitter*, plataforma *Classroom*, via *Email*, e em qualquer meio tecnológico que se possa compartilhar o link gerado, mas o ideal é que os estudantes criem uma conta na plataforma e comece a seguir o professor, podendo com isto visualizar outros trabalhos criados e compartilhados por diversos professores que tem conta no GeoGebra.

4.3 Os quatro exercícios propostos

Os estudos de máximos e mínimos de uma função de segundo grau, bem como suas fórmulas correspondentes, geralmente são mais aprofundados no Ensino Médio. Mas estas atividades terão um importante objetivo de proporcionar ao aluno a possibilidade de construir este conhecimento intuitivamente, ou seja, através da manipulação e/ou modificação da função ele poderá perceber o comportamento da parábola. Isto poderá ser possível com a visualização do gráfico da função quadrática e suas coordenadas.

As duas primeiras questões a seguir, exigirão que o aluno possa identificar o ponto máximo das respectivas funções quadráticas. Na terceira, o professor poderá desafiar o estudante a modelar a função a partir de uma situação problema proposta. A última questão exigirá que seja feita a modelagem matemática e, encontrada a função desejada, a mesma deverá ser colocada no GeoGebra para verificação do máximo faturamento de uma empresa.

Em todas as situações o professor poderá propor aulas em ambientes como: laboratório de informática, sala de aula com o uso do GeoGebra Graphing Calculator (no próprio celular), em uma aula remota ou até mesmo em como atividade que possa ser realizada em casa.

4.3.1 O problema da empresa de chocolate

A primeira situação problema foi extraída do Exame Nacional do Ensino Médio aplicado de maneira digital no ano de 2020. Trata-se da questão 172, que tem o seguinte enunciado:

Exercício 1 - *Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:*

- *Barra I* : R\$ 2,00;
- *Barra II* : R\$ 3,50;
- *Barra III* : R\$ 4,00;

- BarraIV : R\$ 7,00;
- BarraV : R\$ 8,00.

Analizando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x + 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate.

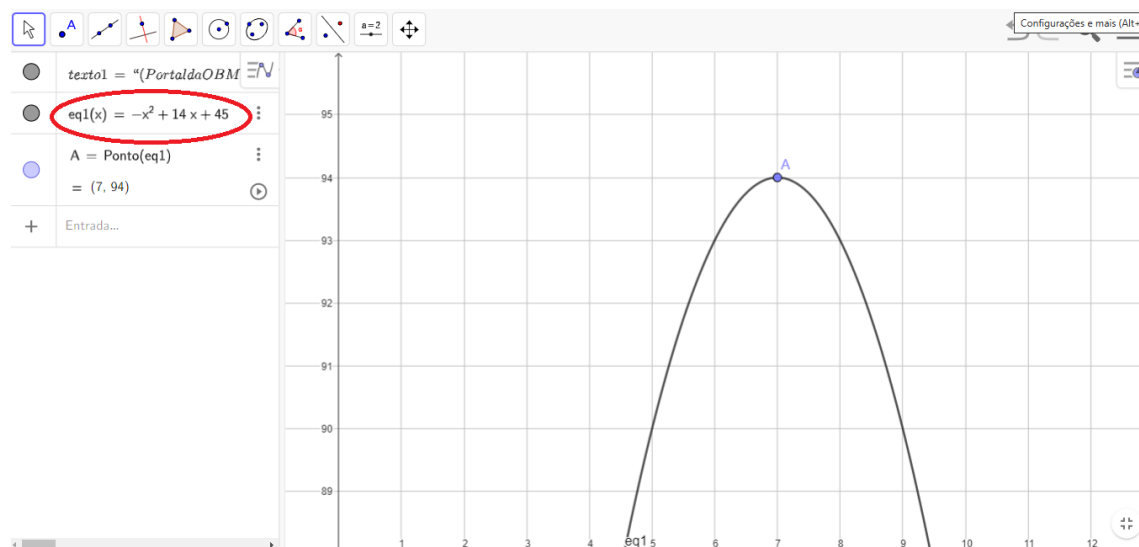
A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro. Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da qual barra de chocolate?

Aplicando a fórmula que determina o ponto de máximo e mínimo de uma função de segundo grau facilmente se descobre que a opção ideal é a produção da barra IV. Ou seja;

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{2(-1)} = 7$$

Ao aplicarmos essa questão como atividade no GeoGebra o estudante poderá compreender que o gráfico da função ficará com a concavidade voltada para baixo, sugerindo que esta função tem um ponto de máximo como podemos ver na Figura 4.3.

Figura 4.3: Solução do problema da empresa de chocolate



Fonte: <https://www.geogebra.org/classroom/emdbdwph>

Observa-se com a malha no software, uma opção oferecida nas configurações, pode-se visualizar as coordenadas do ponto mais alto na curva da parábola, sugerindo com isto que os valores das abscissas vão apresentar a solução do problema que é o ponto de maior lucro da venda de chocolate expressado pela função $L(x) = -x^2 + 14x + 45$.

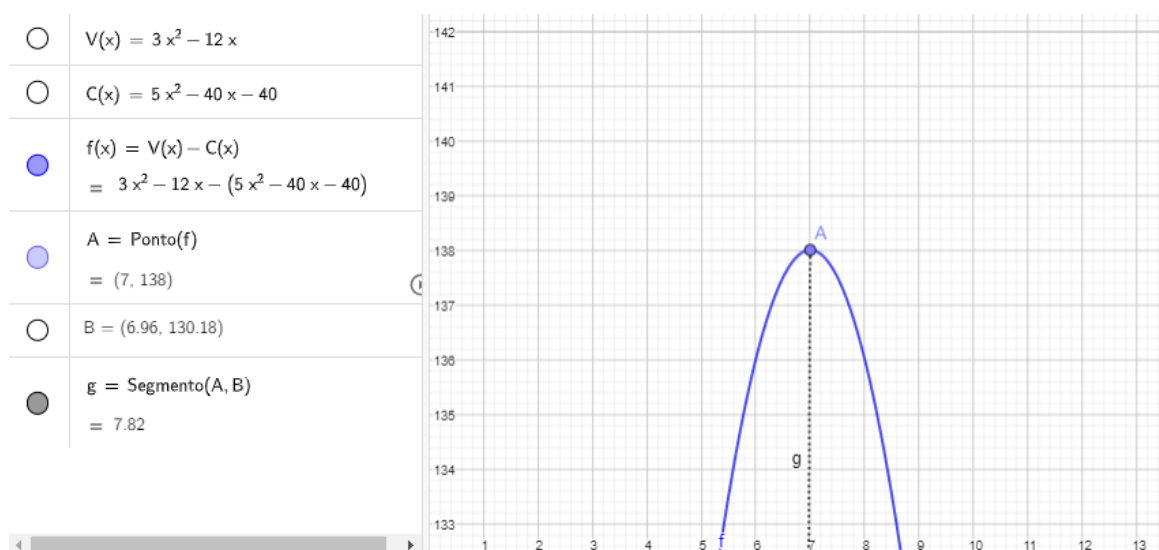
4.3.2 O problema do lucro de uma empresa

Outro interessante problema a ser trabalhado objetivando proporcionar a construção do conceito de máximos e mínimos pode ser encontrado no portal das Olimpíadas Brasileiras de Matemática (o Portal da OBMEP). Trata-se do seguinte problema:

Exercício 2 - Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal de produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Qual é o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo?

Nesse problema é exigido um pouco mais de interpretação por parte do estudante, pois nele o aluno precisa encontrar a função lucro realizando a subtração da função venda pela função custo. Esta primeira parte poderá ser feita no caderno ou na plataforma na opção entrada, como podemos ver na Figura 4.4.

Figura 4.4: Solução esperada do problema do lucro de uma empresa



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/aegvdmpf>

Observe que ao inserir a função $V(x)$ e $C(x)$ é possível visualizar o gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 28x + 40$, subtraindo $V(x)$ por $C(x)$. Nas duas questões propostas até aqui podemos observar que o software facilita a compreensão e visualização das coordenadas do ponto de maior quantidade de vendas de lotes.

4.3.3 O problema da VAN

A questão que será proposta nessa sessão é uma questão na qual exige-se uma maior dedicação em interpretação. Para resolvê-la não será necessário o uso do software, ela exigirá muito de modelagem matemática. Podendo ser trabalhada pelo professor como exemplo ou desafio. Recomendamos que ao trabalhar essa situação problema o docente dê ênfase à importância de se matematizar um problema afim de encontrar a solução desejada.

Tem-se uma situação em que o estudante precisará escrever o problema matematicamente para resolver o que se pede. Trata da questão 165 da prova cinza do ENEM do ano de 2015 para Pessoas Privadas de Liberdade (ENEM, 2015) ou sob medida socioeducativa que inclua privação da liberdade (ENEM – PPL), que tem o seguinte enunciado:

Exercício 3 - *Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil*

é a van, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral.

O dono de uma van, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão até a capital de seu estado R\$ 60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da van, cada passageiro pagará mais R\$ 2,00 por lugar vago. Sendo x o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado $V(x)$, em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é:

(i) $V(x) = 902x$

(ii) $V(x) = 930x$

(iii) $V(x) = 900 + 30x$

(iv) $V(x) = 60x + 30x$

(v) $V(x) = 900 - 30x - 3x^2$

Nesse problema podemos nos atentar para a importância da interpretação. Para se resolver essa questão é necessário montar a equação de segundo grau, e para isto deve-se interpretar que a variável “ x ” corresponde ao número de lugares vagos, enquanto que a quantidade de lugares ocupados deve ser expresso por $15 - x$.

O valor pago pelos lugares ocupados está diretamente ligado à quantidade de lugares vagos pela função que vamos chamar de $V_1(x)$, ou seja:

$$V_1(x) = 60(15 - x)$$

E o valor pago pelos lugares vagos será de R\$ 2,00 multiplicado por x , que é o número de lugares vagos, vezes a quantidade de passageiros que é $V_1(x)$. Assim teremos:

$$V_2(x) = 2x(15 - x)$$

Enfim, para se encontrar a função correspondente a desejada, basta somar as funções $V_1(x)$ e $V_2(x)$ e obteremos a função desejada:

$$V_1(x) + V_2(x) = 60(15 - x) + 2x(15 - x)$$

$$V_1(x) + V_2(x) = 900 - 60x + 30x - 2x^2$$

$$V_1(x) + V_2(x) = 900 - 30x - 2x^2$$

Que corresponde a alternativa (v) das opções de resposta.

4.3.4 O problema do lucro de uma empresa de transporte

Mais um exemplo de modelagem matemática também é proposto pelo portal da OBMEP. Como no tópico anterior, esse problema também exigirá que o estudante possa matematizar uma situação problema para resolvê-la com os métodos matemáticos. Nesse caso o aluno poderá encontrar a função desejada no caderno e recorrer ao software para verificar o ponto de máximo faturamento da empresa. A questão tem o seguinte enunciado:

Exercício 4 - *A empresa SKY transporta 2400 passageiros por mês da cidade de Acrolândia a Bienvenuto. A passagem custa 20 reais e a empresa deseja aumentar seu preço. No entanto, o departamento de pesquisa estima que a cada 1 real de aumento no preço da passagem, 20 passageiros deixarão de viajar pela empresa. Neste caso, qual é o preço da passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento da SKY?*

Para resolver a esse problema, primeiramente vamos supor que o aumento da passagem seja x . Assim podemos entender que a quantidade de passageiros que deixará de viajar pode ser transformada na função $f_1(x)$ que é a subtração da quantidade atual de passageiros que viajam pela empresa por 20 vezes o aumento de preço, ou seja:

$$f_1(x) = 2400 - 20x$$

Também teremos que considerar que o novo valor da passagem será a soma do

preço atual com a quantidade acrescentada que corresponde a incógnita “ x ”. Com isto teremos uma nova função que chamaremos de $f_2(x)$, representada por:

$$f_2(x) = 20 + x$$

Finalmente poderemos encontrar uma função $F(x)$ que será o produto de $f_1(x)$ por $f_2(x)$. Assim, $F(x)$ é:

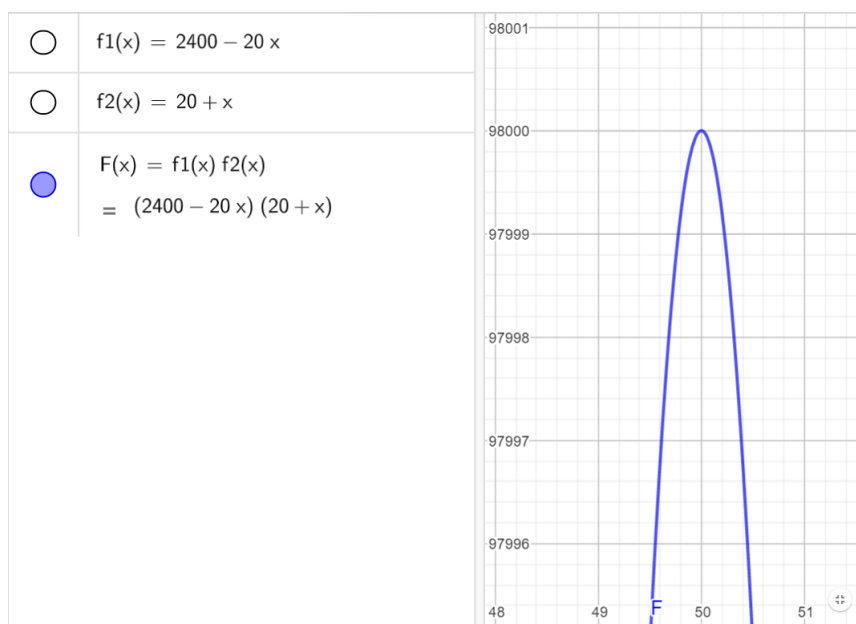
$$F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

$$F(x) = (2400 - 20x) \cdot (20 + x)$$

$$F(x) = -20x^2 + 2000x + 4800$$

Encontrada a função $F(x)$ podemos escrevê-la no software para resolver ao que se pede, ou seja, encontrar o preço da passagem que irá maximizar o faturamento da empresa como podemos ver na Figura 4.5.

Figura 4.5: Solução esperada do problema do lucro da empresa SKY



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/yknfcz86>

Da mesma forma que foi mostrado em exemplos anteriores, esse caso pode ser resolvido utilizando-se da fórmula de ponto de máximo de uma função de segundo grau. Assim, chegaria-se a conclusão que o faturamento máximo é:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-2000}{2(-20)} = 50,$$

ou seja, a passagem deverá custar $20 + 50 = 70$ reais. Aqui, mais uma vez podemos tentar levar o aluno a construção deste conhecimento de forma intuitiva.

As atividades proposta nesse capítulo podem ser realizadas da maneira que melhor se encaixar no planejamento do professor. Dessa forma o professor fica a vontade para determinar esta flexibilidade do uso dos exercícios no planejamento. O objetivo principal a ser alcançado com essa proposta é levar o discente a transformar um tema abrangente em uma situação mais clara, precisa e que tenha solução com os métodos matemáticos. Também deve levar o aluno a aprimorar conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente e leva-lo a fazer uso destes em situações e desafios do dia-a-dia.

Capítulo 5

Considerações finais

Diante das constantes modificações tecnológicas no cotidiano do estudante, torna-se importante que o professor busque metodologias que mostrem a ele a importância do que se está sendo ensinado para a sua vida, principalmente em uma era de elevado número de informações acessíveis em aparelhos de celular que tenha internet e está acessível a uma parte significativa dos estudantes, o que torna imprescindível que ele seja bem orientado e conheça recursos que lhe dêem subsídios para resolver problemas do dia a dia.

Ao realizar o embasamento teórico percebemos que a aprendizagem em um momento de aula passa a ser significativa quando o aluno consegue compreender e desenvolver o que se é proposto. Para isso, torna-se importante que o professor seja reflexivo diante da grande possibilidade de metodologias que foram desenvolvidas no decorrer da história da educação e que proporcionaram sucesso no processo de ensino. Uma das importantes conclusões que chegamos ao realizar essa pesquisa é que as metodologias ativas, quando bem aplicadas, podem proporcionar uma aprendizagem significativa, especialmente, quando consideramos os desafios no ensino de matemática.

Outro ponto importante que foi observado no momento da análise de metodologias ativas em pesquisas realizadas foram as TICs, quando bem aplicadas, podem proporcionar a desmistificação de conhecimentos abstratos em matemática, nos estudos do 9º ano do ensino fundamental e de outras séries. Isso se deve, possivelmente pelo fato de que ao avançar nos anos letivos, o discente passa a estudar a álgebra de

maneira mais abstrata. Para isto, consideramos em nossa pesquisa o sucesso no uso do software GeoGebra em diversos países do mundo para ensinar matemática e concluímos que esse recurso é uma possibilidade que auxilia a modelagem matemática de maneira significativa, devido ao fato de proporcionar a visualização do que, em outros momentos do ensino, exigia muita imaginação do estudante como, por exemplo, a modificação de uma parábola ao alterar o parâmetro c de uma equação de segundo grau.

Para responder à pergunta que norteou essa pesquisa, procuramos abandonar as armadilhas contidas em nossa base teórica, ou seja, ficar preso a conceitos já existentes sobre os assuntos propostos, com a finalidade de ampliar o conhecimento com a pesquisa, sem estar limitado ao que já se sabia sobre os assuntos. Consideramos que as pesquisas e leituras de outros trabalhos sobre o tema trouxeram novas perspectivas e ideias para a elaboração da proposta de aula realizada no último capítulo. Por isso, concluímos que a utilização do GeoGebra se torna um instrumento para a modelagem matemática e pode auxiliar em uma aprendizagem significativa para estudantes do nono ano do Ensino Fundamental, quando é realizada respeitando conceitos prévios do estudante para a construção dos novos e oferecendo recursos de visualização dos conhecimentos em equações de segundo grau. Isto se dá a partir da seleção de exercícios desafiadores que levem o estudante a buscar métodos matemáticos para transformar um problema proposto em linguagem matemática e resolvê-lo utilizando conceitos algebricamente corretos.

No primeiro capítulo dessa pesquisa mostramos a importância da aprendizagem significativa no processo de ensino e no terceiro a aplicabilidade dela no processo ensino de matemática. Também no terceiro capítulo apresentamos algumas metodologias dinâmicas de ensino já utilizadas na matemática do nono ano do Ensino Fundamental e esse fator ajudou a mostrar um pouco de como o GeoGebra tem contribuído no ensino de Funções, também trouxe novas ideias para a construção da proposta de ensino do quarto capítulo. Conseguimos realizar o último objetivo específico no capítulo 4 ao propor uma metodologia de aula utilizando-se do software GeoGebra na modelagem matemática a partir de uma aprendizagem dinâmica e significativa.

Esperamos que esta pesquisa possa contribuir para outros trabalhos a serem realizados e também que ela seja uma ferramenta para docentes que procuram realizar uma aula dinâmica. Como não conseguimos realizar a parte empírica dessa proposta,

procurarei dar continuidade aos estudos e futuramente fazer a parte empírica desse trabalho em um mestrado com maior tempo para realização da pesquisa de campo.

Referências

BARBOSA, T. H. d. N. **Octave: uma proposta para o ensino de funções**. 2012. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2012.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. ; 4^a reimpressão. **São Paulo: Contexto**, 2014.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. D. Percepções sobre o uso da tecnologia para a aprendizagem significativa de alunos envolvidos com atividades de modelagem matemática. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, v. 10, n. 2, p. 36–45, 2015.

BRASIL. Secretaria de educação média e tecnológica. pcns+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>, 2006.

BRASIL. Base nacional comum curricular: Ensino fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

ENEM. **Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. 2015. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/2015_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD15.pdf>, Acesso em: 15 de abril de 2023.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. [S.l.]: Plageder, 2009.

HOHENWARTER, M. **www.geogebra.org**. 2023. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>, Acesso em: 05 de janeiro de 2023.

JUNIOR, A. W. d. S. Uso do software geogebra e modelagem matemática no ensino de funções. Universidade Federal de Goiás, 2018.

JUNIOR, A. W. d. S. et al. Uso do software geogebra e modelagem matemática no ensino de funções. Universidade Federal de Goiás, 2018.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. d. A. M. d. Do trabalho científico. **São Paulo: Atlas**, 2001.

MORAN, J. M. **A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá**. [S.l.]: Papirus Editora, 2007.

NETO, J. A. d. S. P. Teoria da aprendizagem significativa de david ausubel: perguntas e respostas. **Série-Estudos-Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação da UCDB**, 2006.

PELIZZARI, A.; KRIEGL, M. d. L.; BARON, M. P.; FINCK, N. T. L.; DOROCINSKI, S. I. Teoria da aprendizagem significativa segundo ausubel. **revista PEC**, v. 2, n. 1, p. 37–42, 2002.

PEREIRA, A. S.; SHITSUKA, D. M.; PARREIRA, F. J.; SHITSUKA, R. Metodologia da pesquisa científica. Brasil, 2018.

RAMUNNO, R. **O uso da modelagem matemática no ensino de funções: uma abordagem dinâmica e variacional**. 2019. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.

RIBEIRO, J. d. C. Aplicação do geogebra no ensino aprendizagem de máximos e mínimos da função quadrática na 1^a série do ensino médio. Universidade do Estado do Amazonas, 2017.

ROCHA, P. S. R.; RAMOS, C. V.; BRASIL, T. A. A utilização de softwares no ensino de matemática para ensino fundamental e médio. In: SBC. **Anais do IV Congresso sobre Tecnologias na Educação**. [S.l.], 2019. p. 40–49.

ROZAL, E. F.; SOUZA, E. S. R. de; SANTOS, N. T. dos. Aprendizagem em matemática, aprendizagem significativa e neurociência na educação dialogando aproximações teóricas. **REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 5, n. 1, p. 143–163, 2017.

SANTOS, M. G. M. d. Aplicações do geogebra no ensino de geometria analítica. 2013.

SILVA, G. C. Tecnologia, educação e tecnocentrismo: as contribuições de álvaro vieira pinto. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, SciELO Brasil, v. 94, p. 839–857, 2013.

SILVA, N. C. d. Geometria analítica: ensino e aprendizagem de tópicos elementares com apoio de malha quadriculada, geogebra e geoplano. 2018.

SILVA, R. S. d.; PINTO, S. d. R. Funções quadráticas e tecnologias móveis: ações cooperativas em um experimento no ensino médio. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**. Góndola, Ens Aprend Cienc. 14. Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2019. Vol. 14, n. 1 (Ene.-Jun. 2019), p. 108-125, 2019.

SOUZA, J. Novo olhar: matemática. são paulo. editora ftd, 2013.

SOUZA, J. S. S. de. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma relação subjacente. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 241–247, 2021.

APÊNDICES

Apêndice A

Planos de Aula 1

Ementa

Funções Quadráticas; Ponto de Máximos e Mínimos, Gráfico de uma Função Quadrática; Modelagem Matemática.

Objetivos

- Reconhecer, identificar e compreender o ponto de máximo da função dada a partir da visualização do gráfico;
- Compreender o comportamento da função dada utilizando-se do software GeoGebra.

Recursos utilizados

Software GeoGebra no laboratório de informática ou GeoGebra Graphing Calculator no celular.

Subsunçores

- Monômios;
- Polinômios;

- Funções.

Metodologia

Aula dinâmica, contando com a participação dos discentes e a manipulação do software GeoGebra ou GeoGebra *Graphing Calculator* como ferramenta facilitadora do processo de aprendizado.

Procedimentos

Se a atividade for online, orientar o estudante a abrir o link da atividade preparada pelo docente no geogebra.com e fazer a leitura do enunciado do exercício 1 sobre “O problema da empresa de chocolate” para identificar o que se está sendo pedido.

***Exercício 1** - Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:*

- Barra I : R\$ 2, 00;
- Barra II : R\$ 3, 50;
- Barra III : R\$ 4, 00;
- Barra IV : R\$ 7, 00;
- Barra V : R\$ 8, 00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x + 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate. A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro. Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da qual barra de chocolate? Dada a função quadrática $L(x) = x^2 + 14x + 45$, o professor mostra os subsunçores necessários para o estudo de funções revisando o que são monômios e polinômios na estrutura da

função quadrática $L(x)$.

Orienta os estudantes a copiarem a função no GeoGebra (caso esteja utilizando o celular no GeoGebra *Graphing Calculator* proceder da mesma maneira). Posteriormente o estudante deverá identificar a concavidade da função (se está para cima ou para baixo) e em seguida localizar, utilizando a malha quadriculada, o ponto mais alto da curva como ponto de máximo que é o maior lucro que poderá ser alcançado pela empresa, bem como a alternativa que corresponde ao preço da barra de chocolate que alcançará maior lucro.

Finalizar a aula com uma discussão entre os estudantes sobre os assuntos tratados.

Apêndice B

Planos de Aula 2

Ementa

Operações entre funções; Funções Quadráticas; Ponto de Máximos e Mínimos, Gráfico de uma Função Quadrática; Modelagem Matemática.

Objetivos

- Encontrar a função lucro a partir da diferença entre as funções venda e custo dadas no exercício proposto;
- Reconhecer, identificar e compreender o ponto de máximo da função lucro a partir da visualização do gráfico;
- Compreender o comportamento da função dada utilizando-se do software GeoGebra.

Recursos utilizados

Software GeoGebra no laboratório de informática ou GeoGebra *Graphing Calculator* no celular.

Subsunçores

- Monômios;
- Polinômios;
- Funções;
- Soma de funções.

Metodologia

Aula dinâmica, contando com a participação dos discentes e a manipulação do software GeoGebra ou GeoGebra *Graphing Calculator* como ferramenta facilitadora do processo de aprendizado.

Procedimentos

Se a atividade for online, orientar o estudante a abrir o link da atividade preparada pelo docente no [geogebra.com](https://www.geogebra.com) e fazer a leitura do enunciado do exercício 2 sobre “O problema do lucro de uma empresa” para identificar o que se está sendo pedido.

Exercício 2 - Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal de produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Qual é o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo?

Orienta os estudantes a realizar a subtração das funções no caderno ou no próprio GeoGebra (caso esteja utilizando o celular no GeoGebra *Graphing Calculator* proceder da mesma maneira). Posteriormente o estudante deverá identificar a concavidade da função lucro encontrada (se está para cima ou para baixo) e depois localizar, utilizando a malha quadriculada, o ponto mais alto da curva como ponto de máximo que é o maior lucro que poderá ser alcançado pela indústria com a venda dos lotes do produto. Finalizar a aula com uma discussão entre os estudantes sobre os assuntos tratados.

Apêndice C

Plano de aula 3

Ementa

Soma de polinômios; Funções Quadráticas; Modelagem Matemática

Objetivos

- Realizar a modelagem matemática considerando “x” como a variável correspondente a quantidade de lugares vagos.
- Descobrir as duas funções $V_1(x)$ e $V_2(x)$ que serão somadas para formar a função $V(x)$.

Recursos utilizados

Quadro ou material impresso ou recursos digitais para leitura do enunciado; caderno e lápis.

Subsúnciores

- Monômios;
- Polinômios;
- Funções;

- Soma de funções.

Metodologia

Aula expositiva, contando com a participação dos discentes para solução do problema proposto.

Procedimentos

A partir da leitura do enunciado do exercício 3, “o problema da VAN” o estudante deverá identificar a variável “x” como a quantidade de lugares vagos.

Exercício 3 - *Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a van, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral.*

O dono de uma van, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão até a capital de seu estado R\$ 60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da van, cada passageiro pagará mais R\$ 2,00 por lugar vago. Sendo x o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado $V(x)$, em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é:

(i) $V(x) = 902x$

(ii) $V(x) = 930x$

(iii) $V(x) = 900 + 30x$

(iv) $V(x) = 60x + 30x$

(v) $V(x) = 900 - 30x - 3x^2$

Posteriormente realizar a modelagem matemática extraindo do enunciado as funções $V_1(x)$ e $V_2(x)$, que correspondem respectivamente ao valor pago pelos lugares ocupados, que está diretamente ligado à quantidade de lugares vagos; e o valor pago pelos lugares vagos, que é o número de lugares vagos vezes a quantidade de passageiros. Encontradas as funções $V_1(x)$ e $V_2(x)$, basta realizar a soma entre as duas para

descobrir a função desejada. Finalizar a aula com uma discussão entre os estudantes sobre os assuntos tratados.

Apêndice D

Planos de Aula 4

Ementa

Funções Quadráticas; Ponto de Máximos e Mínimos, Gráfico de uma Função Quadrática; Modelagem Matemática.

Objetivos

- Realizar a modelagem matemática considerando “x” como a variável correspondente ao aumento da passagem;
- Descobrir as duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ que serão multiplicadas para formar a função $F(x)$;
- Realizar corretamente a multiplicação entre as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$;
- Reconhecer, identificar e compreender o ponto de máximo da função que corresponde ao preço da passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento da empresa SKY;
- Compreender o comportamento da função dada utilizando-se do software GeoGebra.

Recursos utilizados

Software GeoGebra no laboratório de informática ou GeoGebra *Graphing Calculator* no celular.

Subsunçores

- Monômios;
- Polinômios;
- Funções;
- Multiplicação de funções.

Metodologia

Aula dinâmica, contando com a participação dos discentes e a manipulação do software GeoGebra ou GeoGebra *Graphing Calculator* como ferramenta facilitadora do processo de aprendizado.

Procedimentos

No exercício 3, “O problema do lucro de uma empresa de transporte”, o estudante deverá identificar a variável “x” como o valor do aumento da passagem, a partir da leitura do enunciado a seguir:

Exercício 4 - *A empresa SKY transporta 2400 passageiros por mês da cidade de Acrolândia a Bienvenuto. A passagem custa 20 reais e a empresa deseja aumentar seu preço. No entanto, o departamento de pesquisa estima que a cada 1 real de aumento no preço da passagem, 20 passageiros deixarão de viajar pela empresa. Neste caso, qual é o preço da passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento da SKY?*

Em seguida, identificar as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sendo: $f_1(x)$ a subtração da quantidade atual de passageiros que viajam pela empresa por 20 vezes o aumento de preço, e $f_2(x)$ que é o novo valor da passagem e será a soma do preço atual com a quantidade acrescentada que corresponde a incógnita “x”. Encontrada a função

$F(x) = 20x^2 + 2000x + 4800$, o aluno deverá utilizar o software GeoGebra ou o GeoGebra *Graphing Calculator* no celular, afim de visualizar a parábola com concavidade voltada para baixo e em seguida, com o auxílio da malha quadriculada, identificar o ponto máximo da função encontrada que corresponde ao máximo valor do aumento da passagem para gerar o maior lucro possível. Caso queira, o professor poderá motivar o aluno a dividir a função por 20 para facilitar a visualização. Finalmente, somar o valor do aumento com o antigo valor para saber qual será o novo preço da passagem.

Finalizar a aula com uma discussão entre os estudantes sobre os assuntos tratados.