

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E O
MODELO FUNDAMENTAL DA EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA**

MARIA EDUARDA PEREIRA COSTA

**GOIÂNIA - GOIÁS
2023**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Maria Eduarda Pereira Costa

Matrícula: 20192010940046

Título do Trabalho: Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias e o Modelo Fundamental da Epidemiologia Matemática

Autorização - Marque uma das opções

1. (X) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

_____, Goiânia - GO, 16 / 06 / 2023.
Local Data

Maria Eduarda P. Costa

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

MARIA EDUARDA PEREIRA COSTA

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E O
MODELO FUNDAMENTAL DA EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás - IFG - Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Professor Dr. João Lopes Cardoso Filho

**GOIÂNIA - GOIÁS
2023**

C837s Costa, Maria Eduarda Pereira.
Sistemas de equações diferenciais ordinárias e o modelo fundamental da epidemiologia matemática / Maria Eduarda Pereira Costa. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023.
47 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. João Lopes Cardoso Filho.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Sistemas lineares. 2. Epidemiologia matemática - modelo SIR. I. Cardoso Filho, João Lopes (orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 515.35

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Alisson de Sousa Belthodo Santos CRB1/ 2.266
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E O MODELO FUNDAMENTAL DA EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA

por

MARIA EDUARDA PEREIRA COSTA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Dr. João Lopes Cardoso Filho

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 12 de junho de 2023, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. João Lopes Cardoso Filho (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Hugo Leonardo da Silva Belisário (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Me. João Batista de Paula Abreu (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Joao Batista de Paula Abreu, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/06/2023 13:56:23.
- Hugo Leonardo da Silva Belisario, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/06/2023 13:55:00.
- Joao Lopes Cardoso Filho, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/06/2023 13:54:40.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 02/06/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 415290

Código de Autenticação: b7a939cfd7



Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais e a minha irmã que são o que tenho de mais valioso nessa vida.

Agradecimentos

Agradeço principalmente aos meus pais, Domingos Salvio da Costa e Deuzelia Pereira de Carvalho Costa, por me darem o privilégio e as condições de poder me dedicar exclusivamente aos meus estudos durante toda a minha graduação. Sem o seu apoio eu não teria chegado até aqui.

Sou grata ao meu namorado Matheus Costa Ferraz por sempre me escutar, incentivar, acreditar na minha capacidade e por estar ao meu lado em todos os momentos desde o início.

Ao Nano que com certeza não lerá isso, mas acredito que seja válido dizer que ele foi um grande apoio emocional para mim, deixando o processo da minha graduação mais leve.

Aos meus colegas e amigos da faculdade que durante todo o curso me falaram que eu conseguiria, que dividiram comigo momentos de tensão e de alegrias, e pela parceria.

Aos meus professores, do ensino fundamental, médio e superior, por todo o aprendizado. Muitos de vocês são as razões pelas quais admiro tanto a licenciatura e a escolhi para a minha vida.

Ao meu orientador João Lopes Cardoso Filho pelo incentivo, paciência, confiança e por me mostrar que eu posso conquistar muito mais.

Ao Instituto Federal de Goiás - Campus Goiânia e todos os seus funcionários que se dedicam a fazer desse lugar o melhor para receber seus alunos.

Resumo

O presente trabalho de conclusão de curso tem como objetivo apresentar por meio do estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) o modelo fundamental da epidemiologia matemática, o modelo SIR (suscetível, infectado e recuperado). Para isso, fez-se necessário uma explanação sobre Equações Diferenciais Ordinárias e mais precisamente sobre os sistemas lineares que as contêm. Dentro dessa revisão bibliográfica, foi feita a explicação dos métodos para se resolver sistemas lineares homogêneos e não homogêneos. Arelado a isso, foram observados e interpretados gráficos de exemplos de sistemas, sendo parte essencial para posteriormente trazer como aplicação o modelo SIR e poder compreendê-lo. Por fim, foi discutido a importância da modelagem matemática na área da epidemiologia e como isso é significativo para a humanidade.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias; Epidemiologia Matemática; Modelo SIR.

Abstract

This course completion work aims to present, through the study of Ordinary Differential Equations (ODE), the fundamental model of mathematical epidemiology, the SIR model (susceptible, infected and recovered). For this, it was necessary an explanation about Ordinary Differential Equations and more precisely about the linear systems that contain them. Within this bibliographic review, the explanation of the methods to solve homogeneous and non-homogeneous linear systems was made. Linked to this, graphs of examples of systems were observed and interpreted, being an essential part to later bring the SIR model as an application and to be able to understand it. Finally, the importance of mathematical modeling in the area of epidemiology and how this is significant for humanity was discussed.

Keywords: Systems of Ordinary Differential Equations; Mathematical Epidemiology; SIR model.

Sumário

1	Introdução	3
2	Teoria Básica	4
2.1	Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes	9
2.1.1	Autovalores Reais Distintos	10
2.1.2	Autovalores Repetidos	10
2.1.3	Autovalores Complexos	11
2.1.4	Retrato de Fase	12
2.2	Sistemas Lineares Não Homogêneos	21
2.2.1	Método dos Coeficientes Indeterminados	22
2.2.2	Método da Variação de Parâmetros	22
2.3	Exponencial de Matriz	25
2.3.1	Calculando e^{At} por transformada de Laplace	27
3	Modelo Fundamental de EDO da Epidemiologia Matemática	29
3.1	Origem e Termos	29
3.2	O Modelo SIR	30
3.2.1	O Modelo SIR com mortes	36
4	Conclusão	38

Lista de Figuras

2.1	Gráficos de $x(t)$ no plano tx e $y(t)$ no plano ty .	13
2.2	Trajectoria para $x = e^{-t} + 3e^{4t}$ e $y = -e^{-t} + 2e^{4t}$.	13
2.3	Retrato de fase do sistema (2.11).	14
2.4	Retrato de fase com vetores.	14
2.5	Nó repulsor.	16
2.6	Ponto nó atrator.	16
2.7	Ponto de sela.	17
2.8	Nó próprio com trajetórias divergindo da origem.	19
2.9	Nó impróprio com trajetórias divergindo da origem.	19
2.10	Ponto espiral divergindo da origem.	20
2.11	Elipses de centro na origem e rotação no sentido horário.	21
3.1	Retrato de fase do modelo SIR.	34
3.2	Retrato de fase do sistema 3.5 incluindo os quadrantes II, III e IV ($\beta = 0, 1$ e $\gamma = 0, 3$).	34

1 Introdução

Através da matemática é possível descrever processos físicos, químicos e biológicos, como a propagação de doenças dentre outros fenômenos da realidade. Isso se dá por modelos matemáticos, que podem ser expressos por equações diferenciais (ED). Pois, comumente esses comportamentos são descritos por relações que envolvem a taxa conforme as coisas se desenvolvem. E matematicamente, as relações são equações e as taxas são derivadas, assim as equações diferenciais são exatamente derivadas inseridas em equações. (BOYCE; DIPRIMA, 2010)

Como afirma Zill (2016), as equações diferenciais podem ser classificadas em ordinárias (EDO) ou parciais (EDP) a partir da quantidade de variáveis independentes, sendo a primeira com uma única variável independente e a segunda com duas ou mais. O estudo de EDO é imprescindível para tratar de modelagem epidemiológica, já que segundo López-Flores et al. (2021) os modelos mais utilizados para estudar a propagação de doenças infecciosas e possíveis efeitos de contramedidas são os de EDO.

Esses modelos dividem a população em compartimentos e descrevem a evolução do número de pessoas em cada compartimento em relação ao tempo. Já a EDP, pode ser utilizada para observar o comportamento de uma doença em determinado espaço. Dessa forma, a equação terá como variáveis independentes o tempo e o espaço. (LÓPEZ-FLORES et al., 2021)

Neste estudo, o foco será dado ao modelo fundamental de EDO da epidemiologia matemática, o modelo SIR (suscetível, infectado e recuperado) que será abordado no capítulo 3. Para isso, será discutida primeiramente no capítulo 2 a teoria básica de EDO, principalmente sobre a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem.

2 Teoria Básica

Neste capítulo será apresentada a teoria básica de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) que se faz necessária para a compreensão de modelagem epidemiológica e pode ser encontrada em livros como o de [Boyce e DiPrima \(2010\)](#) ou o de [Zill \(2016\)](#) onde encontram-se as definições e os teoremas aqui utilizados.

De acordo com [Boyce e DiPrima \(2010\)](#), uma Equação Diferencial (ED) é uma equação contendo derivadas de uma ou mais funções desconhecidas, em relação a uma ou mais variáveis independentes. A ED pode ser classificada como **ordinária** quando a função desconhecida depende de uma única variável independente, ou como **parcial** quando depende de duas ou mais variáveis independentes. Também pode ser classificada quanto a ordem que é indicada pela ordem da maior derivada na equação. Neste trabalho o foco será em equações diferenciais **ordinárias**.

Outra classificação importante é se a equação é **linear** ou **não linear**. A equação diferencial ordinária de ordem n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

é linear se F for linear nas variáveis $y, y', \dots, y^{(n)}$. Ou seja, quando a equação for

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

E não linear caso contrário.

A **solução** de uma equação diferencial ordinária é uma função ϕ definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I , que quando substituídas na equação a reduzem a uma identidade. Isso equivale a dizer que a solução é uma função ϕ a qual

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0,$$

para todo $x \in I$.

Quando nos deparamos com mais de uma função desconhecida para determinar, precisamos então de um **sistema de equações**.

Sistemas de Equações Diferenciais

Trataremos agora sobre sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, excepcionalmente os que chamamos de lineares. Esse tipo de sistema ocorre quando cada função g no sistema de primeira ordem com a forma normal

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.1)$$

for linear nas variáveis dependentes $x_1, x_2, \dots, x_n$. Assim, teremos o sistema linear de forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Tomando os coeficientes a_{ij} e as funções f_i contínuos em um mesmo intervalo I , o sistema linear será homogêneo quando $f_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, e não homogêneo quando $f_i(t) \neq 0$.

Forma Matricial de um sistema linear

Ainda, podemos escrever um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem em **forma matricial**, pois é padrão utilizar noções de álgebra matricial para resolver os sistemas. Então, se

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

logo o sistema (2.2) pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

ou como a simples equação

$$X' = AX + F, \quad (2.3)$$

e

$$X' = AX, \quad (2.4)$$

se o sistema for homogêneo, ou seja, se $f_i(t) = 0$.

Tratando-se da resolução do sistema é importante saber como é dada a sua solução.

Definição 2.1 (Vetor solução). Um vetor solução em um intervalo I é qualquer matriz coluna

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cujos elementos são funções diferenciáveis que satisfazem o sistema (2.3) no intervalo.

Geometricamente, o vetor solução do sistema (2.3) nada mais é do que um conjunto de equações paramétricas de uma curva - comumente chamada de trajetória - no espaço com n soluções escalares. Quando tem-se $n=2$, as equações $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$ representam uma curva no plano x_1x_2 , o qual chamamos de plano de fase. Tais conceitos serão abordados novamente na próxima seção.

Problema de Valor Inicial

Também se faz necessário citar sobre **problema de valor inicial**, que denotando um ponto t_0 no intervalo I e

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad e \quad X_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

onde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ são constantes dadas, o problema de valor inicial no intervalo é resolver $X' = A(t)X + F(t)$ sujeito a $X(t_0) = X_0$. A sua solução é única garantida pelo resultado a seguir e que tem a sua demonstração discutida em [Boyce e DiPrima \(2010\)](#).

Teorema 2.2 (Existência de uma única solução). *Suponhamos que os elementos das matrizes $A(t)$ e $F(t)$ sejam funções contínuas em um intervalo comum I que contenha o ponto t_0 . Existe então uma única solução do problema de valor inicial no intervalo.*

Sistemas Homogêneos

A partir daqui os teoremas e as definições encontrados em [Zill \(2016\)](#) tratarão apenas de **sistemas homogêneos** e as funções a_{ij} e $f_i = 0$ serão tomadas como funções contínuas de t no mesmo intervalo I . Uma das coisas que o seguinte teorema irá garantir é que um múltiplo constante de qualquer vetor solução também será solução do mesmo sistema homogêneo de equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Teorema 2.3 (Princípio da superposição). *Sejam $X_1, X_2, \dots, X_k$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (2.4) no intervalo I . Então a combinação linear*

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k,$$

onde $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Definição 2.4 (Dependência/Independência linear). *Sejam $X_1, X_2, \dots, X_k$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (2.4) no intervalo I . Dizemos que o conjunto é **linearmente dependente** no intervalo se existirem constantes $c_1, c_2, \dots, c_k$, não todas nulas, de tal forma que*

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k = 0$$

para todo t no intervalo. Se o conjunto de vetores não for linearmente dependente no intervalo, ele será chamado de **linearmente independente**.

Um caso importante a ser destacado é quando $k = 2$. Nesse caso, os dois vetores solução serão linearmente dependentes se um for múltiplo constante do outro. Já para $k > 2$ os vetores solução só serão linearmente dependentes se pelo menos um deles puder ser expresso como uma combinação linear dos outros.

O próximo teorema, nos traz uma forma de verificar se uma solução é linearmente independente que é utilizando o conceito do determinante **Wronskiano**.

Teorema 2.5 (Critério para independência linear de soluções). *Sejam*

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

n vetores solução do sistema homogêneo (2.4) no intervalo *I*. Então, o conjunto de vetores solução será linearmente independente em *I*, se e somente se o **Wronskiano**

$$W(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.5)$$

para todo *t* no intervalo.

Desse modo, pode-se mostrar que com os vetores solução $X_1, X_2, \dots, X_n$ o Wronskiano só poderá ser igual a 0 ou diferente de 0 para todo *t* no intervalo. Assim, se conseguirmos mostrar que o Wronskiano é diferente de 0 para algum t_0 , logo $W \neq 0$ para todo *t* e as soluções serão linearmente independentes no intervalo.

Definição 2.6 (Conjunto fundamental de soluções). Todo conjunto $X_1, X_2, \dots, X_n$ de *n* vetores solução linearmente independentes do sistema homogêneo (2.4) em um intervalo *I* é chamado de **conjunto fundamental de soluções** no intervalo.

Teorema 2.7 (Existência de um conjunto fundamental). *Existe um conjunto fundamental de soluções para o sistema homogêneo (2.4) no intervalo *I*.*

Teorema 2.8 (Solução geral - sistemas homogêneos). *Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (2.4) no intervalo *I*. Então, a **solução geral** do sistema no intervalo é*

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n,$$

onde c_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são constantes arbitrárias.

Agora a respeito de sistemas **não homogêneos**, teremos uma solução particular X_p no intervalo *I* que será qualquer vetor, sem parâmetros arbitrários, com seus elementos sendo funções que satisfazem o sistema (2.3). E sua solução geral será dada como evidenciado no seguinte teorema:

Teorema 2.9 (Solução geral - sistemas não homogêneos). *Seja X_p uma solução dada do sistema não homogêneo (2.3) no intervalo I e seja*

$$X_c = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$$

*a solução geral no mesmo intervalo do sistema homogêneo associado (2.4). Então a **solução geral** do sistema não homogêneo no intervalo é*

$$X = X_c + X_p.$$

*A solução geral X_c do sistema homogêneo (2.4) é chamada **função complementar** do sistema não homogêneo (2.3).*

2.1 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Seja

$$X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = K e^{\lambda t} \quad (2.6)$$

um vetor solução do sistema linear homogêneo de primeira ordem

$$X' = AX, \quad (2.7)$$

onde A é uma matriz $n \times n$ de constantes. Então, $X' = K \lambda e^{\lambda t}$, de tal forma que (2.7) se modifica para $K \lambda e^{\lambda t} = A K e^{\lambda t}$. Dividindo ambos os membros por $e^{\lambda t}$ teremos $AK = \lambda K$ ou $AK - \lambda K = 0$. E essa última será equivalente a

$$(A - \lambda I)K = 0, \quad (2.8)$$

já que $K=IK$, sendo I a matriz identidade. Dessa forma, é necessário primeiramente obter um vetor não trivial K que satisfaça (2.8) para chegarmos a uma solução não trivial X de (2.7). Para isso, devemos ter

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (2.9)$$

que chamamos de **equação característica** da matriz A .

Autovalores e Autovetores

Os autovalores de A são as soluções da equação característica, ou seja, os resultados de λ que satisfazem a equação (2.9). E um autovetor de A é uma solução $K \neq 0$ de (2.8) correspondente a um autovalor λ . Logo, obteremos como uma solução do sistema homogêneo (2.7) $X = Ke^{\lambda t}$.

Nas subseções seguintes discutiremos os três casos de autovalores: reais e distintos; repetidos e; complexos.

2.1.1 Autovalores Reais Distintos

Quando dizemos que os autovalores são reais e distintos isso significa que não haverá dois autovalores iguais. O teorema que se segue nos garantirá que no caso em que a matriz A , $n \times n$, tiver n autovalores reais distintos, poderá ser obtido o conjunto de n autovetores linearmente independentes e terá

$$X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad X_n = K_n e^{\lambda_n t}$$

como conjunto fundamental de soluções de (2.7) em $(-\infty, \infty)$.

Teorema 2.10 (Solução geral - sistemas homogêneos). *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n autovalores reais distintos da matriz de coeficientes A do sistema homogêneo (2.7) e sejam $K_1, K_2, \dots, K_n$ os autovetores correspondentes. Então, a **solução geral** de (2.7) no intervalo $(-\infty, \infty)$ será dada por*

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t}.$$

2.1.2 Autovalores Repetidos

Não necessariamente teremos sempre uma matriz A $n \times n$ com todos os seus n autovalores distintos, haverá casos em que alguns autovalores poderão se repetir. Comumente, se m for um número inteiro positivo, $(\lambda - \lambda_1)^m$ é um fator da equação característica e se ainda, $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ não for fator, diremos que λ_1 é um **autovalor de multiplicidade m** .

Quando temos autovalores repetidos pode ocorrer um desses casos:

- Quando, para uma matriz A $n \times n$, é possível obter m autovetores linearmente independentes $K_1, K_2, \dots, K_m$ correspondentes a um autovalor λ_1 de multiplicidade

$m \leq n$. Nesse caso, a solução geral do sistema contém a combinação linear

$$c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_m K_m e^{\lambda_1 t}.$$

- Quando há somente um autovetor correspondente ao autovalor λ_1 de multiplicidade m (como no exemplo anterior). Já nesse caso, podem ser obtidas m soluções linearmente independentes da forma

$$X_1 = K_{11} e^{\lambda_1 t}$$

$$X_2 = K_{21} t e^{\lambda_1 t} + K_{22} e^{\lambda_1 t}$$

$$\vdots$$

$$X_m = K_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + K_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + \dots + K_{mm} e^{\lambda_1 t},$$

onde os K_{ij} são vetores coluna.

Porém, esses casos não cobrem todas as possibilidades já que quando temos um autovalor de multiplicidade m pode ocorrer do número de autovetores correspondentes ser menor que m .

2.1.3 Autovalores Complexos

Partindo da suposição de que $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ (com $\beta > 0$, $i^2 = -1$) são autovalores complexos da matriz dos coeficientes A , podemos encontrar autovetores correspondentes com coordenadas complexas. Além disso, os autovalores complexos serão sempre pares conjugados quando a equação característica apresentar coeficientes reais.

O Teorema a seguir nos mostra que ao encontrar um autovetor K_1 correspondente a λ_1 , um segundo autovetor K_2 correspondente a λ_2 terá as coordenadas como as conjugadas das coordenadas de K_1 e naturalmente λ_2 é a conjugada de λ_1 .

Teorema 2.11 (Soluções correspondentes a autovalores complexos). *Seja A a matriz de coeficientes com elementos reais do sistema homogêneo (2.4) e seja K_1 um autovetor correspondente ao autovalor complexo $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, α e β reais. Então*

$$K_1 e^{\lambda_1 t} \text{ e } \overline{K_1} e^{\overline{\lambda_1} t}$$

são soluções de (2.4).

Para fins matemáticos, é preferível escrever a solução em termos de funções reais. Buscando tal objetivo, segue o teorema:

Teorema 2.12 (Soluções reais correspondentes a um autovalor complexo). *Seja $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ um autovalor complexo da matriz dos coeficientes A no sistema homogêneo (2.4) e*

sejam B_1 e B_2 os vetores coluna denotados por

$$B_1 = \text{Re}(K_1) \quad \text{e} \quad B_2 = \text{Im}(K_1).$$

Então

$$X_1 = [B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t]e^{\alpha t} \quad \text{e} \quad X_2 = [B_2 \cos \beta t + B_1 \sin \beta t]e^{\alpha t} \quad (2.10)$$

são soluções linearmente independentes de (2.4) em $(-\infty, \infty)$.

A solução geral do sistema para $n = 2$ em forma real fica

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

e com isso é possível obter um retrato de fase traçando a trajetória $(x(t), y(t))$ para vários valores de C_1 e C_2 .

2.1.4 Retrato de Fase

Segundo [Boyce e DiPrima \(2010\)](#), é possível obter um **campo de direções** de vetores tangentes a soluções do sistema escolhendo um grande número de pontos para calcular AX e fazendo o gráfico dos vetores resultantes. Desse modo, podemos ter uma interpretação das soluções do sistema. Mas, para informações mais precisas podemos observar as **trajetórias**.

Como já dito no início deste capítulo, as equações geradas a partir da solução geral podem ser interpretadas como equações paramétricas de uma curva (trajetória) no plano xy que chamamos de plano de fase.

Por exemplo, veja o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases} \quad (2.11)$$

que tem como solução geral

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}. \quad (2.12)$$

Somando os vetores do lado direito de (2.12) e equacionando as entradas com as corres-

pendentes no vetor do lado esquerdo, temos

$$x = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t}, \quad y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t}.$$

Escolhendo $c_1 = c_2 = 1$ na solução (2.12), obteremos o gráfico $x(t)$ no plano tx e o gráfico $y(t)$ no plano ty (Figura 2.1). E da mesma forma obtemos a **trajetória** formada pelos pontos $(x(t), y(t))$ no plano de fase (Figura 2.2).

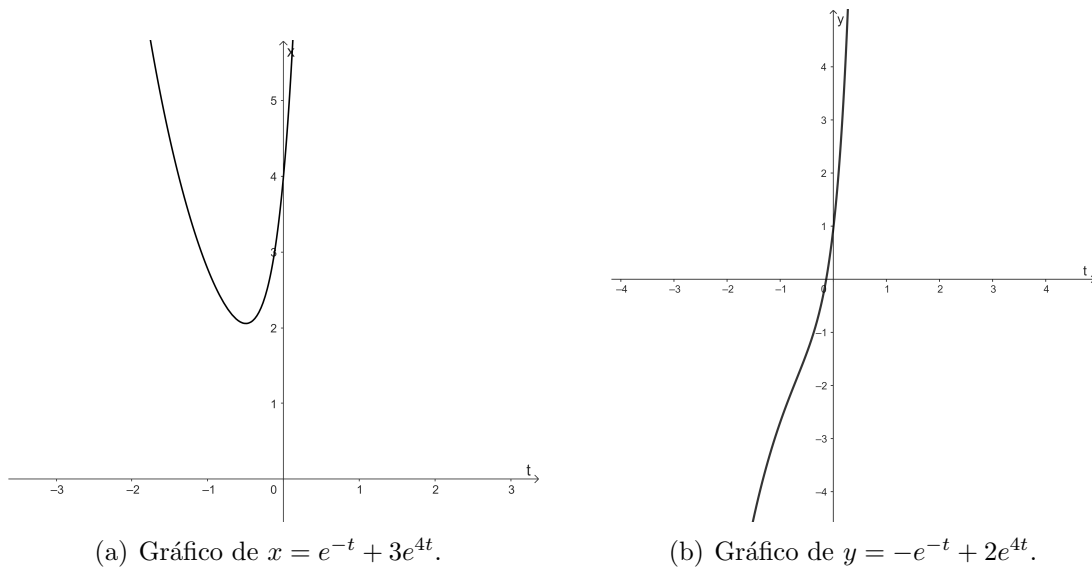


Figura 2.1: Gráficos de $x(t)$ no plano tx e $y(t)$ no plano ty .

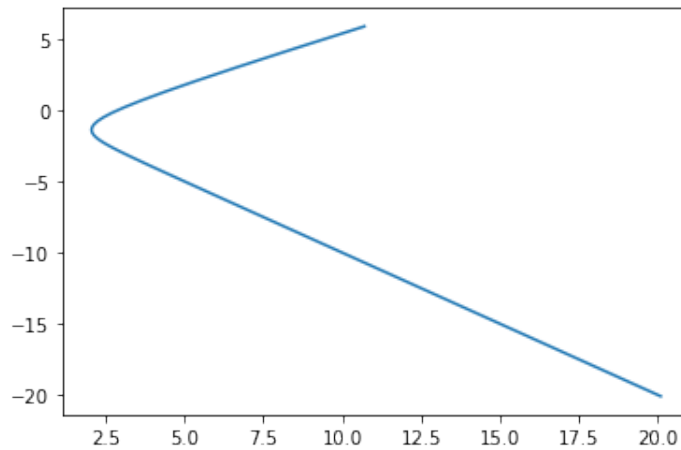


Figura 2.2: Trajetória para $x = e^{-t} + 3e^{4t}$ e $y = -e^{-t} + 2e^{4t}$.

O conjunto de trajetórias no plano de fase chama-se **retrato de fase** e nos mostra o

comportamento das várias soluções de um sistema, como o representado na Figura (2.3) do sistema (2.11).

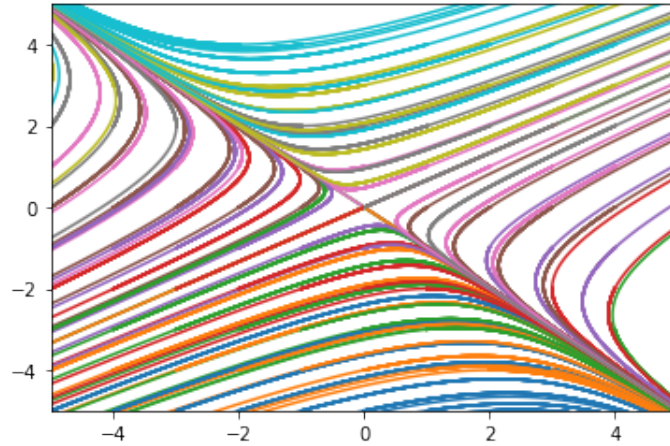


Figura 2.3: Retrato de fase do sistema (2.11).

Além disso, é possível observar o campo de vetores junto com as trajetórias como na Figura (2.4).

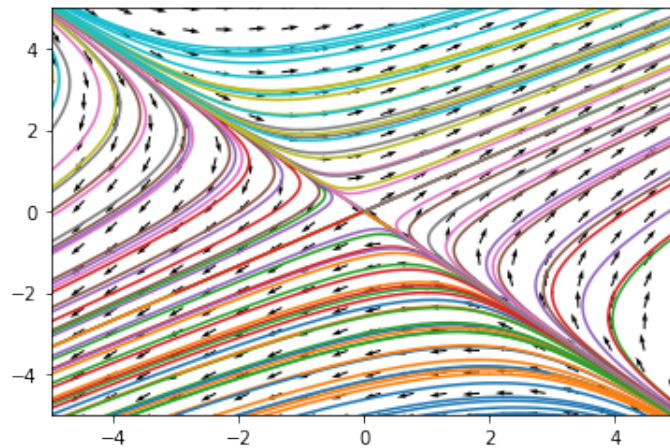


Figura 2.4: Retrato de fase com vetores.

Uma parte importante no estudo qualitativo de sistemas lineares homogêneos $X' = AX$ (2×2), é o comportamento das trajetórias em relação a origem - onde temos a solução constante $x = 0$ e $y = 0$. A ponta dos vetores indica a direção em que uma partícula com coordenadas $(x(t), y(t))$ se move sobre a trajetória em relação ao tempo. Note na Figura (2.4) que os vetores, com exceção dos que estão sob as semirretas do segundo e quarto quadrante, estão indicando que as soluções se afastam da origem ao decorrer do tempo. (ZILL, 2016)

Para analisar o comportamento das soluções desses sistemas é relevante conhecer o que são **pontos críticos** - conceito abordado no curso de Cálculo. Resumidamente, no caso dos sistemas de equações diferenciais, os pontos críticos serão os pontos onde $AX = 0$ e esses pontos corresponderão a soluções constantes ou de equilíbrio. Supondo A invertível ($\det(A) \neq 0$), o único ponto crítico do sistema será $x = 0$. (BOYCE; DIPRIMA, 2010)

Existem específicos retratos de fase para cada tipo de autovalores obtidos na resolução de sistemas. Veremos a seguir quais são eles.

Autovalores reais, distintos e de mesmo sinal

Conforme Theodoro e Carvalho (2018), no caso em que temos dois autovalores reais distintos λ_1 e λ_2 com seus autovetores correspondentes K_1 e K_2 , satisfazendo a equação

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t},$$

teremos duas possibilidades:

- λ_1 e λ_2 positivos: $X \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo, as trajetórias estarão divergindo do ponto crítico e teremos um **nó repulsor**;
- λ_1 e λ_2 negativos: $X \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim, as trajetórias estarão convergindo para o ponto crítico e teremos um **nó atrator**.

É importante observar que os autoespaços são gerados pelos autovetores e as trajetórias sempre tangenciarão o autoespaço gerado pelo autovalor de menor módulo.

Exemplo 2.13. Seja o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases}.$$

Resolvendo a equação característica da matriz A desse sistema através da fórmula de Bhaskara: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, obteremos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Ou seja, dois autovalores reais distintos e de mesmo sinal. Prosseguindo, consequentemente encontraremos os autovetores $K_1 = (1, 0)$ e $K_2 = (0, 1)$. Desse modo, os autoespaços serão o eixo x e o eixo y , e as trajetórias vão tangenciar o eixo x . Então, o retrato de fase será um nó repulsor como na Figura (2.5).

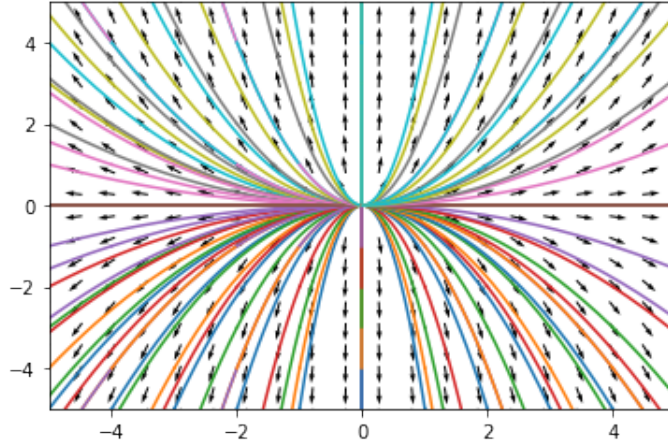


Figura 2.5: Nó repulsor.

Exemplo 2.14. Seja o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}.$$

Resolvendo novamente a equação característica $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, obteremos $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$, conseqüentemente, $K_1 = (1, 0)$ e $K_2 = (1, 1)$. Os autoespaços serão retas passando pela origem com vetores diretores K_1 e K_2 . Como nesse caso temos dois autovalores reais distintos negativos teremos um nó atrator, visto na Figura (2.6).

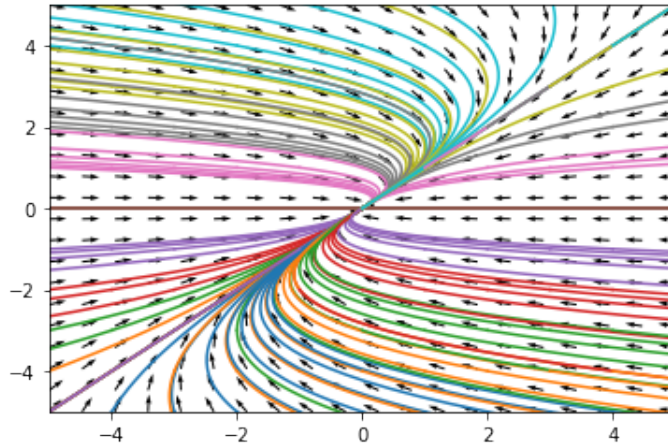


Figura 2.6: Ponto nó atrator.

Autovalores reais, distintos e com sinais opostos

A solução é dada da mesma forma que no caso anterior:

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Porém, com os autovalores com sinais opostos o ponto crítico é chamado de **ponto de sela**. As trajetórias no autoespaço gerado por λ_1 negativo convergem para a origem, enquanto as trajetórias do autoespaço gerado por λ_2 positivo convergem para o infinito. As trajetórias fora dos autoespaços são hipérboles. (THEODORO; CARVALHO, 2018)

Exemplo 2.15. Seja o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases}.$$

Tendo como equação característica $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ e resolvendo-a, obteremos $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$, e como consequência, $K_1 = (1, 0)$ e $K_2 = (0, 1)$. Como K_1 está associado ao valor negativo, a trajetória sobre o eixo x convergirá para a origem. Já K_2 está associado ao valor positivo então a trajetória no eixo y divergirá da origem. Veja esse retrato de fase na Figura (2.7) chamado de **ponto de sela**. Comparando-o com o retrato de fase do sistema (2.11) nota-se que na Figura (2.4) também tem-se um ponto de sela.

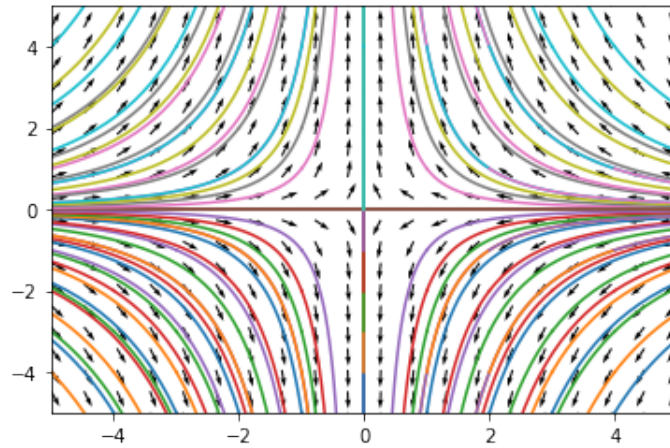


Figura 2.7: Ponto de sela.

Autovalores reais e iguais

Supondo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, segundo [Theodoro e Carvalho \(2018\)](#), se $\lambda > 0$ as trajetórias divergem da origem e se $\lambda < 0$ elas convergem para a origem. Além disso, quando temos autovalores reais iguais existem dois casos:

- Dois autovetores independentes, onde a solução geral é dada por

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 K_2 e^{\lambda t},$$

como já visto na Subseção (2.1.2). Nesse caso, as trajetórias são retas que passam pela origem e o ponto crítico é chamado de **nó próprio**;

- Um autovetor independente, onde a solução geral pode ser dada por

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 (K_1 t e^{\lambda t} + K_2 e^{\lambda t}).$$

Com $(A - \lambda I)K_1 = K_2$. Nesse caso, o ponto crítico é chamado de **nó impróprio** e depende da posição de K_1 . Tanto para $t \rightarrow \infty$ quanto para $t \rightarrow -\infty$, o termo dominante da equação é $c_2 K_1 t e^{\lambda t}$. Mas para t positivo as trajetórias tendem a origem tangenciando K_1 . Já para t negativo cada trajetória assintota uma reta paralela a K_1 .

Exemplo 2.16. Seja o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}.$$

Solucionando a equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, é obtido $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$. Como qualquer par de vetores satisfaz a equação e λ é real e positivo, temos um nó próprio com trajetórias divergindo da origem (Figura (2.8)).

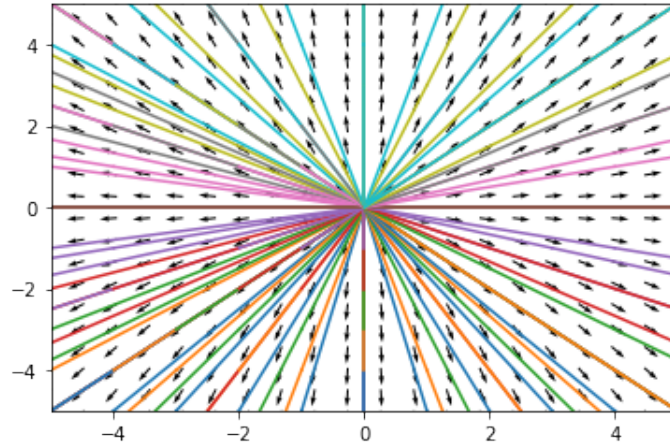


Figura 2.8: Nó próprio com trajetórias divergindo da origem.

Exemplo 2.17. Seja o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}.$$

Com a resolução da equação característica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, obteremos $\lambda_1 = 1$ e consequentemente $K_1 = (1, 0)$. Assim, quando $t \rightarrow \infty$ as trajetórias tangenciarão K_1 , como na Figura (2.9).

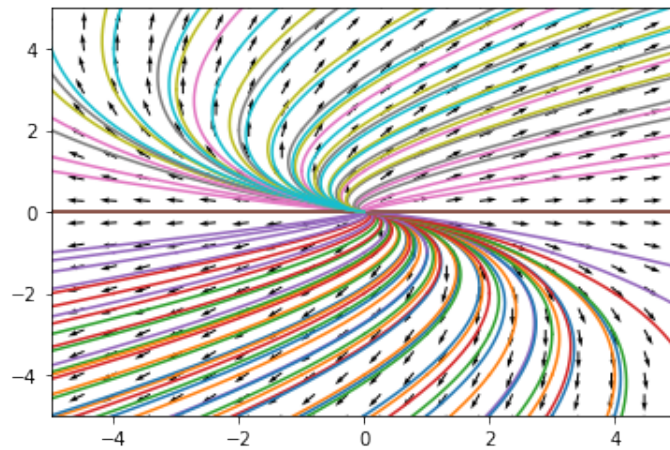


Figura 2.9: Nó impróprio com trajetórias divergindo da origem.

Autovalores Complexos

Quando temos autovalores complexos, sendo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, α é responsável pela convergência das soluções em relação a origem, enquanto β é responsável pela rotação das soluções em torno da origem. De acordo com [Boyce e DiPrima \(2010\)](#), observa-se que:

- Quando $\alpha \neq 0$, as trajetórias são espirais. Se $\alpha > 0$, as soluções divergem da origem e se $\alpha < 0$, elas convergem para a origem. E quando $\beta > 0$, a rotação é no sentido anti-horário e quando $\beta < 0$, a rotação é no sentido horário. Nesse caso, os pontos críticos são chamados de **pontos espirais**;
- Quando $\alpha = 0$, ou seja, o autovalor é um imaginário puro, as trajetórias são elipses centradas na origem e o ponto crítico é chamado de **centro**. E são percorridos no sentido horário se $\beta > 0$ e no sentido anti-horário se $\beta < 0$.

Exemplo 2.18. Seja o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}.$$

Utilizando da fórmula de resolução de equação quadrática em $\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$, conclui-se que $\lambda_1 = 5 + 2i$ e $\lambda_2 = 5 - 2i$. Dessa forma, $\alpha > 0$ significa que as trajetórias vão divergir da origem e $\beta > 0$ que a rotação será no sentido anti-horário (verifique na Figura (2.10)).

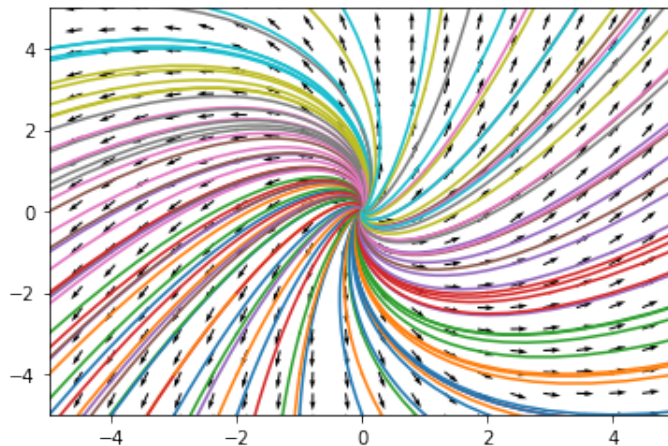


Figura 2.10: Ponto espiral divergindo da origem.

Exemplo 2.19. Seja o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y \end{cases}.$$

Fazendo a resolução da equação de segundo grau $\lambda^2 + 4 = 0$, conclui-se que $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$. Logo, $\alpha = 0$ garante que teremos elipses e $\beta > 0$ que a rotação será no sentido horário (Figura (2.11)).

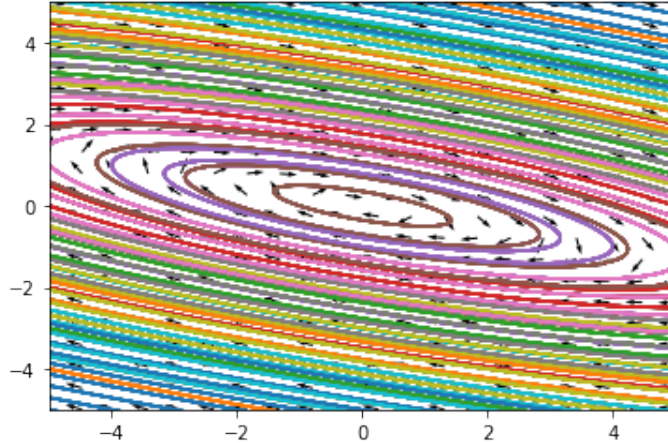


Figura 2.11: Elipses de centro na origem e rotação no sentido horário.

2.2 Sistemas Lineares Não Homogêneos

No início deste capítulo, falamos brevemente sobre a forma de um sistema linear não homogêneo ser $X' = AX + F(t)$ e a sua solução geral ser $X = X_c + X_p$, onde X_c é a função complementar ou a solução geral do sistema linear homogêneo associado e X_p é qualquer solução particular do sistema não homogêneo.

Já vimos na seção anterior como encontrar X_c , então o foco desta seção serão os dois métodos para se obter X_p : o método dos coeficientes indeterminados e o método da variação dos parâmetros. Estes métodos são introduzidos como formas de encontrar soluções particulares de equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares não homogêneas, e são adaptados para serem utilizados no caso de sistemas. Entre eles, a variação de parâmetros é o que mais se destaca por ser mais seguro e preciso.

2.2.1 Método dos Coeficientes Indeterminados

O método dos coeficientes indeterminados nada mais é do que uma conjectura, ou seja, é feito um palpite a respeito da forma do vetor solução particular baseado nos tipos de funções que fazem parte das entradas da matriz coluna $F(t)$.

É importante ressaltar que o método só é válido quando as entradas de A são constantes e as entradas de $F(t)$ são constantes, polinômios, funções exponenciais, funções senos e cossenos, ou somas e produtos finitos desses tipos de funções. Além disso, as regras específicas utilizadas quando o método é para encontrar uma solução particular de uma EDO não são tão satisfatórias para sistemas. Com isso, partiremos para o próximo método.

2.2.2 Método da Variação de Parâmetros

Antes de entrarmos na explicação do método propriamente dito, é necessário falarmos de **matriz fundamental**.

Matriz Fundamental

Utilizando do Teorema (2.8), a solução geral do sistema homogêneo é a combinação linear $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$ que também pode ser escrita como

$$X = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \dots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \dots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \dots + c_nx_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Podemos identificar a matriz no final da equação (2.13) como um produto de duas matrizes, uma $n \times n$ por outra $n \times 1$. Assim, a solução geral pode ser escrita como

$$X = \Phi(t)C, \quad (2.14)$$

onde

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

e a matriz $n \times n$ com as colunas sendo as entradas dos vetores solução do sistema $X' = AX$,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

denomina-se **matriz fundamental** do sistema.

A matriz fundamental tem as seguintes propriedades:

- A matriz fundamental $\Phi(t)$ é inversível ou não singular, ou seja, é uma matriz quadrada com determinante diferente de 0 possuindo assim uma matriz inversa.
- Se $\Phi(t)$ for uma matriz fundamental do sistema, então

$$\Phi'(t) = A\Phi(t). \quad (2.15)$$

A primeira propriedade segue do fato de que é possível verificar que o determinante de $\Phi(t)$ é igual ao Wronskiano no Teorema (2.5). Desse modo, a independência linear das colunas na matriz fundamental garante que o seu determinante é diferente de 0 para todo t no intervalo. Além disso, como $\Phi(t)$ é inversível, $\Phi^{-1}(t)$ existe para todo t no intervalo. E a segunda propriedade é garantida pois temos como vetores solução cada coluna de $\Phi(t)$.

Variação de Parâmetros

Este método, como o dos coeficientes indeterminados, origina-se como um método para achar uma solução particular de uma EDO linear não homogênea onde basicamente substituímos o parâmetro c_1 pela função u_1 . Adaptando-o para sistemas, iremos substituir

a matriz coluna C em (2.14) por uma matriz coluna de funções $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$. Dessa

forma, a solução particular do sistema não homogêneo

$$X' = AX + F(t), \quad (2.16)$$

será

$$X_p = \Phi(t)U(t). \quad (2.17)$$

Fazendo a derivada de (2.17) utilizando a Regra do Produto, temos

$$X_p' = \Phi(t)U'(t) + \Phi'(t)U(t), \quad (2.18)$$

onde a ordem das multiplicações é importante pois $U(t)$ é uma matriz coluna implicando que $U'(t)\Phi(t)$ e $U(t)\Phi'(t)$ não estejam definidas. Agora, realizando a substituição de (2.16) e (2.18) em (2.17) resultará em

$$\Phi(t)U'(t) + \Phi'(t)U(t) = A\Phi(t)U(t) + F(t). \quad (2.19)$$

E usando (2.15) em (2.19) teremos $\Phi(t)U'(t) + A\Phi(t)U(t) = A\Phi(t)U(t) + F(t)$, que somando $-A\Phi(t)U(t)$ nos dois membros da igualdade se tornará

$$\Phi(t)U'(t) = F(t). \quad (2.20)$$

A fim de encontrarmos $U(t)$, multiplicamos cada lado da equação por $\Phi^{-1}(t)$ obtendo $U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t)$ e assim obtemos $U(t) = \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$.

Logo, a solução particular (2.17) de (2.16) será

$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt, \quad (2.21)$$

devendo-se integrar cada entrada de $\Phi^{-1}(t)F(t)$ para obtermos a integral indefinida. Lembrando que o uso da constante de integração nesse caso é arbitrário.

Portanto, concluímos que a solução geral do sistema não homogêneo é

$$X = \Phi(t)C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt. \quad (2.22)$$

Problema de Valor Inicial

Quando temos um sistema linear não homogêneo sujeito a uma condição inicial $X(t_0) = X_0$, os limites de integração são escolhidos de maneira que a solução particular se anula quando $t = t_0$. Utilizando a escrita alternativa da solução geral (2.22),

$$X = \Phi(t)C + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)F(s)ds$$

e usando $t = t_0$, teremos $X_0 = \Phi(t_0)C$. Isolando C , obtemos $C = \Phi^{-1}(t_0)X_0$ que ao substituir na solução geral alternativa ficará

$$X = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)F(s)ds, \quad (2.23)$$

obtendo a solução do problema de valor inicial.

2.3 Exponencial de Matriz

Como já sabemos, a EDO linear de primeira ordem $x' = ax$, com $\mathbf{a}$ constante, tem como solução geral $x = ce^{at}$. Poderíamos então definir uma função exponencial de matriz e^{At} tal que, e^{At} fosse uma matriz de constantes para ser uma solução de um sistema linear?

Sistemas Homogêneos

Respondendo a indagação introdutória, podemos definir uma função exponencial de matriz e^{At} de modo que

$$X = e^{At}C \quad (2.24)$$

seja uma solução do sistema homogêneo (2.4). Para definirmos e^{At} , uma forma é utilizando série de potências da função exponencial escalar e^{at} e adaptando-a para a situação em que temos uma matriz A $n \times n$ no lugar de a .

Definição 2.20 (Exponencial de Matriz). Para uma matriz A , $n \times n$,

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^k \frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}. \quad (2.25)$$

É válido observar que no caso em que A é uma matriz qualquer $n \times n$ com todas as suas entradas fora da diagonal principal sendo 0 (denominada matriz diagonal), teremos

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix}.$$

Derivada de e^{At}

Diferenciando (2.25) termo a termo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt} \left[I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^k \frac{t^k}{k!} + \cdots \right] \\ &= A + A^2 t + \frac{1}{2!} A^3 t^2 + \cdots \\ &= A \left[I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right] \\ &= Ae^{At},\end{aligned}$$

nota-se que a derivada da exponencial de matriz se assemelha à exponencial escalar $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$ e é

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}. \quad (2.26)$$

Em consequência disso, é possível mostrar que (2.24) é de fato solução de $X' = AX \forall$ vetor C de constantes, $n \times 1$:

$$X' = \frac{d}{dt}e^{At}C = Ae^{At}C = A(e^{At}C) = AX.$$

e^{At} é uma Matriz Fundamental

Se usarmos a notação $\Psi(t)$ para e^{At} , a equação (2.26) ficará $\Psi'(t) = A\Psi(t)$, o que obedece a segunda propriedade de matriz fundamental em (2.20). Também é possível constatar que pela Definição (2.13), $\Psi(0) = e^{A0} = I$. Ou seja, fazendo $t = 0$ resultará na matriz identidade, a qual o determinante é diferente de 0. Logo, $\det \Psi(0) \neq 0$ obedecendo a primeira propriedade de matriz fundamental já vista na subseção (2.2.2). A partir disso, podemos afirmar que e^{At} ou $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema $X' = AX$.

Sistemas Não Homogêneos

Visto que uma forma de escrever a solução geral de uma equação diferencial linear de primeira ordem $x' = ax + f(t)$ é

$$x = x_c + x_p = ce^{at} + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-as} f(s) ds,$$

é possível observar que a solução geral de um sistema linear não homogêneo é

$$X = X_c + X_p = e^{At}C + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} F(s) ds. \quad (2.27)$$

Isso se dá pelo fato de que e^{At} é matriz fundamental, então ela sempre será inversível, possuindo inversa $(e^{As})^{-1}$ que é igual a e^{-As} . E e^{-As} é obtida de e^{At} fazendo $t = -s$.

2.3.1 Calculando e^{At} por transformada de Laplace

Como visto anteriormente, podemos usar a Definição (2.13) para calcular a exponencial de matriz. Mas, buscando resolvê-la de forma mais simples podemos utilizar a transformada de Laplace que iremos revisar a seguir (tendo em mente que o conteúdo de transformada de Laplace seja de conhecimento do leitor).

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um tipo especial de transformada integral $\int_a^b K(s, t) f(t) dt$, em que o núcleo $K(s, t) = e^{-st}$ e o intervalo de integração é $[0, \infty]$. Com $f(t)$ definida para $t \geq 0$, a integral imprópria $\int_0^\infty K(s, t) f(t) dt$ pode ser definida como o limite:

$$\int_0^\infty K(s, t) f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t) f(t) dt.$$

Definição 2.21 (Transformada de Laplace). Seja f uma função definida para $t \geq 0$. A integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2.28)$$

será chamada de **transformada de Laplace** de f , desde que a integral convirja.

Para calcular e^{At} também é necessário conhecer a **transformada inversa de Laplace**: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, onde $F(s)$ representa a transformada de Laplace de $f(t)$.

Outro ponto importante que devemos ter em mente é o seguinte resultado de **transformada de derivada**:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (2.29)$$

Uso da Transformada de Laplace

Revisitando (2.27) podemos tirar como conclusão que uma solução do sistema linear homogêneo $X' = AX$ é $X = e^{At}$, fazendo $t = 0$ temos $e^{A0} = I$ e assim $X = e^{At}$ será

solução do problema de valor inicial

$$X' = AX, \quad X(0) = I. \quad (2.30)$$

Se a transformada de Laplace de e^{At} for $x(s)$, então podemos obter a transformada de Laplace de (2.30) fazendo primeiramente a transformada de cada lado da equação, lembrando que a transformada de X' segue do resultado (2.29), então teremos:

$$sx(s) - X(0) = Ax(s) \quad \text{ou} \quad (sI - A)x(s) = I.$$

Por fim, multiplicamos a última equação por $(sI - A)^{-1}$ obtendo $x(s) = (sI - A)^{-1}I = (sI - A)^{-1}$. Logo, a transformada de Laplace da exponencial de matriz será dada por $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$ e a transformada inversa por

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}. \quad (2.31)$$

Exemplo 2.22 (Exponencial de Matriz usando a Equação (2.31)). Calcule e^{At} usando a transformada de Laplace, onde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Primeiro devemos calcular $(sI - A)$:

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s-2 \end{pmatrix},$$

e obter a sua inversa:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s-2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s-2}{s(s-1)} & \frac{1}{s(s-1)} \\ \frac{-2}{s(s-1)} & \frac{s+1}{s(s-1)} \end{pmatrix}.$$

Agora decompondo em frações parciais as entradas dessa última matriz, temos:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{s} + \frac{-1}{s-1} & -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \\ \frac{2}{s} + \frac{-2}{s-1} & -\frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} \end{pmatrix}.$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em $(sI - A)^{-1}$, (2.31) nos garantirá que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2 - e^t & -1 + e^t \\ 2 - 2e^t & -1 + 2e^t \end{pmatrix}.$$

3 Modelo Fundamental de EDO da Epidemiologia Matemática

É fato que as equações diferenciais ordinárias são comumente usadas para o desenvolvimento de modelos que explicam e antecedem o comportamento de fenômenos. Entre as áreas onde podem ser aplicadas, a epidemiologia é uma delas. Nesse ramo, o intuito dos modelos é prever a propagação de doenças e como reagirão a possíveis intervenções contra as suas disseminações.

Nos modelos de EDO a população é segmentada em categorias, denominadas compartimentos, e essa divisão é feita de acordo com os atributos relevantes para o estudo. Desse modo, o modelo possibilita descrever a evolução da fração de população em cada compartimento em relação ao tempo.

Neste capítulo será abordado o modelo de EDO considerado por [López-Flores et al. \(2021\)](#) como o fundamental da epidemiologia matemática e também alguns conceitos dessa área que serão necessários para a compreensão do modelo. Toda a teoria aqui presente se baseia no trabalho de [López-Flores et al. \(2021\)](#).

3.1 Origem e Termos

De acordo com [López-Flores et al. \(2021\)](#), na epidemiologia matemática, o modelo fundamental de EDO foi introduzido pelo o escocês Anderson Gray McKendrick e o britânico William Ogilvy Kermack em um artigo em 1927. Esse modelo é chamado de SIR e isso se deve aos seus compartimentos que são: suscetível, infeccioso e recuperado.

Neste trabalho o foco será dado a doenças infecciosas contagiosas. Uma doença infecciosa é aquela que é causada por seres como bactérias, vírus, parasitas entre outros, e quando podem ser transmitidas de pessoa para pessoa são chamadas de doenças contagiosas. Em concordância com a epidemiologia matemática e da mesma maneira que [López-Flores et al. \(2021\)](#), usaremos o termo doenças infecciosas para nos referirmos ao tipo de doença que é interesse deste estudo.

Ainda, uma doença infecciosa se espalha pela população em decorrência do próprio comportamento populacional e de características patogênicas. Essas características são responsáveis por circunstanciar como uma pessoa pode se infectar e transmitir, já o comportamento humano nos diz com que frequência isso pode acontecer. (LÓPEZ-FLORES et al., 2021)

3.2 O Modelo SIR

O modelo SIR basicamente serve para modelar uma doença infecciosa que não é fatal e após contraída uma vez, a imunidade é garantida. Como já mencionado, a população é dividida em três compartimentos: suscetíveis, infectados e recuperados. Atribuiremos a cada um deles respectivamente as variáveis $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ para representarem as frações da população em cada compartimento no tempo t . Também sabemos que $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ e $R(t) \geq 0$, pois obviamente não haverá um número negativo de pessoas. Além disso, $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, ou seja, a soma das frações da população é a população ao todo. A partir dessa última equação também podemos afirmar que $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$.

Para compreender o sistema de equações diferenciais desse modelo também podemos utilizar a dimensão real da população ao invés das frações populacionais. Então, considerando a constante N como o tamanho da população (ignorando nascimentos e mortes), $s(t)$ será o número de suscetíveis, $i(t)$ o de infectados e $r(t)$ o de recuperados de forma que $s(t) + i(t) + r(t) = N$.

As constantes β e γ

Um indivíduo suscetível se torna infectado ao entrar em contato com outro indivíduo já infectado e esse contato deve ser de forma que a transmissão da doença é caracterizada - geralmente chamados de contatos adequados, mas por simplificação chamaremos apenas de contatos. Além disso, há uma probabilidade para que o contato resulte de fato na transmissão. Caso alguma fração da população não seja suscetível à doença por determinada razão, essa é incluída no compartimento dos recuperados desde o início.

Supondo que a taxa de contatos por pessoa infectada é constante, multiplicando-a por $\frac{s(t)}{N}$ obtemos a taxa de indivíduos suscetíveis contatados por pessoa infectada. E multiplicando esse resultado pela probabilidade de transmissão, obtemos a taxa de novas pessoas infectadas por pessoa infectada:

$$\frac{\text{novas pessoas infectadas}}{\text{pessoa infectada} \cdot \text{dia}} = \frac{\text{pessoas contatadas}}{\text{pessoa infectada} \cdot \text{dia}} \cdot \frac{s(t)}{N} \cdot \text{probabilidade de transmissão.} \quad (3.1)$$

A taxa de novas infecções quando todas as pessoas que entram em contato com a doença são suscetíveis ($s(t) = N$) é β , o **coeficiente de transmissão**. Por definição, β é o produto dos dois termos que estão multiplicando $\frac{s(t)}{N}$ na Equação (3.1):

$$\beta = \frac{\text{pessoas contatadas}}{\text{pessoa infectada} \cdot \text{dia}} \cdot \text{probabilidade de transmissão.} \quad (3.2)$$

No início de uma epidemia, quando os indivíduos não estão tomando medidas contra a doença, a probabilidade de transmissão é apenas o quanto contagiosa a própria doença é. O primeiro termo, no entanto, depende do modo de vida da população, do ambiente, fatores climáticos, etc. Ademais, observe que se o tempo está sendo medido em dias, e β representa pessoas contagiadas por pessoa infectada por dia, a unidade pessoa cancela então a unidade de β é 1/dia.

Uma vez que $i(t)$ é o número de infectados no instante t , a taxa de novas infecções na população inteira no momento t é obtida multiplicando a Equação (3.1) por $i(t)$:

$$\frac{\text{novas pessoas infectadas}}{\text{dia}} = \beta \cdot \frac{s(t)}{N} \cdot i(t). \quad (3.3)$$

Já a taxa de recuperação é proporcional a $i(t)$, com a constante de proporcionalidade γ . Veja que pensando de forma isolada no fenômeno de recuperação, a taxa de infectados decresce com a cura das pessoas. E $1/\gamma$ será o tempo médio para o qual as pessoas ficam doentes. Esses resultados podem ser verificados em [López-Flores et al. \(2021\)](#), no qual utiliza-se do cálculo de distribuição de probabilidade e a sua média para chegar a interpretação de γ .

A dedução do modelo

Segundo [López-Flores et al. \(2021\)](#), para se chegar ao sistema de equações do modelo SIR é plausível observar que fazendo por suposição a multiplicação de $I(t)$ por uma constante k , estaremos multiplicando a taxa com que os contatos ocorrem por k . Da mesma forma, se multiplicarmos $S(t)$ por um número k , também estaremos multiplicando a mesma taxa por k . Assim, podemos concluir que a taxa a que a doença é transmitida no tempo t é proporcional ao produto $S(t) \cdot I(t)$. Também de maneira razoável podemos supor que a taxa com que os infectados se recuperam é proporcional a $I(t)$.

Com isso e as interpretações levantadas anteriormente sobre as constantes β e γ , podemos deduzir que a taxa de infecções será proporcional a β vezes o produto $S(t) \cdot I(t)$ menos a taxa de recuperação que será a constante γ vezes $I(t)$. Como $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$,

então a taxa de suscetíveis só poderá ser $-\beta S(t)I(t)$. Logo, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (3.4)$$

Esse sistema nos diz matematicamente como a transmissão da doença funciona. Por isso, para deduzir um modelo epidemiológico não basta ter conhecimentos matemáticos, deve-se conhecer a doença e as suas características. Quando temos os valores de S e I em um instante t é possível chegar as suas taxas de variações naquele mesmo instante, usando (3.4). Porém, somente as equações do sistema não são capazes de nos dizer o que acontecerá ao longo tempo: se a doença desaparecerá, ou se espalhará completamente, ou oscilará continuamente, ou ficará presente na população para sempre. Isso só poderá ser constatado a partir das soluções.

O número de reprodução básico (R_0)

O número de reprodução básico é o número médio de indivíduos infectados por cada indivíduo infectado quando uma doença é introduzida numa população, no pressuposto de que toda a população é suscetível. No modelo SIR, (R_0) é o número de novas infecções causadas por dia por cada infectado (β) vezes o tempo médio em dias em que um indivíduo permanece infectado ($1/\gamma$). Ou seja,

$$R_0 = \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Assim que uma doença infecciosa é introduzida na população por um indivíduo, ao final do tempo médio em que está infectado, ele passa para o compartimento de recuperados sendo substituído por outros R_0 indivíduos infectados. Assim, se $R_0 > 1$, a doença se propaga pois o número de infectados cresce. Caso $R_0 < 1$, o número de infectados decresce e a infecção extingue-se.

Interpretação Geométrica e Retrato de Fase

Sabendo que $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$, se inicialmente temos $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, então a soma dos compartimentos sempre será igual a 1. Com isso, podemos obter R(t) a partir dos valores de S(t) e I(t) encontrados fazendo $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$. Portanto, nos basta

utilizar as duas primeiras equações do sistema (3.4):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I. \end{cases} \quad (3.5)$$

Para o sistema acima, é possível verificar que $\frac{dS}{dt} = 0$ quando $S = 0$ ou $I = 0$, logo nos dois eixos está o plano SI. Já $\frac{dI}{dt} = 0$ ocorre quando $I = 0$ ou $S = \frac{\gamma}{\beta}$. As soluções de equilíbrio (rever subseção 2.1.4) desse sistema estarão onde temos $\frac{dS}{dt} = 0$ e $\frac{dI}{dt} = 0$ ao mesmo tempo. Conclui-se que o eixo S (linha $I = 0$) é formado por equilíbrios e somente ele.

O campo de vetores é vertical nas curvas $\frac{dS}{dt} = 0$ e horizontal nas curvas $\frac{dI}{dt} = 0$ (exceto onde eles se cruzam, sendo vertical). Essas curvas dividem o plano em regiões abertas onde $\frac{dS}{dt}$ e $\frac{dI}{dt}$ tem sinais constantes. Os sinais em cada região determinam em que quadrante os vetores se encontram, basta observar para onde os vetores apontam.

O espaço de fase é a região triangular $\tau = \{(S, T) : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\}$, pois como já mencionado $S(t) \geq 0, I(t) \geq 0$ e $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$. Dessa forma, haverá dois casos: $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} < 1$ e $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$. No primeiro caso $\frac{\gamma}{\beta} > 1$, o que implica que a linha $S = \frac{\gamma}{\beta}$ não intersesta τ . Já no outro caso intersesta, pois $\frac{\gamma}{\beta} < 1$.

Para encontrar as trajetórias do sistema SIR, podemos utilizar o sistema (3.5) e dividir a segunda equação pela primeira (método comumente visto em Cálculo). Assim, obteremos uma única equação diferencial para as trajetórias no espaço SI:

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S}. \quad (3.6)$$

Integrando (3.6), obtemos a família das curvas

$$I = -S + \frac{\gamma}{\beta} \ln S + C. \quad (3.7)$$

Isso nos mostra que o retrato de fase do sistema SIR depende apenas da razão $\frac{\gamma}{\beta}$ que é equivalente a dizer que depende de $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$. Note também que o valor máximo que as curvas atingem é $S = \frac{\gamma}{\beta}$. A figura 3.1 ilustra um retrato de fase do modelo SIR a partir do sistema 3.5, sendo (a) um caso em que $R_0 < 1$ e (b) um caso em que $R_0 > 1$. Os valores atribuídos para β e γ foram escolhidos arbitrariamente.

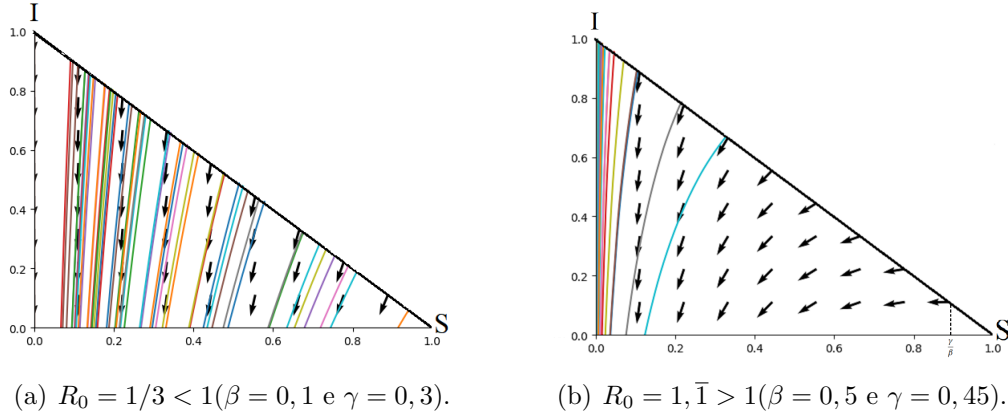


Figura 3.1: Retrato de fase do modelo SIR.

Apenas a título de curiosidade e relacionando com a discussão feita na subseção 2.1.4, se observarmos o retrato de fase do sistema 3.5 contendo todos os quadrantes e considerando S e I negativos (Figura 3.2), veremos que se assemelha a um nó atrator como o visto no exemplo 2.14 (verificar figura 2.6). Nessa figura podemos perceber que a maior parte das trajetórias convergem para o eixo S , apesar de que no quadrante IV elas começam a divergir se assemelhando a um ponto de sela (verificar figuras 2,4 e 2.7).

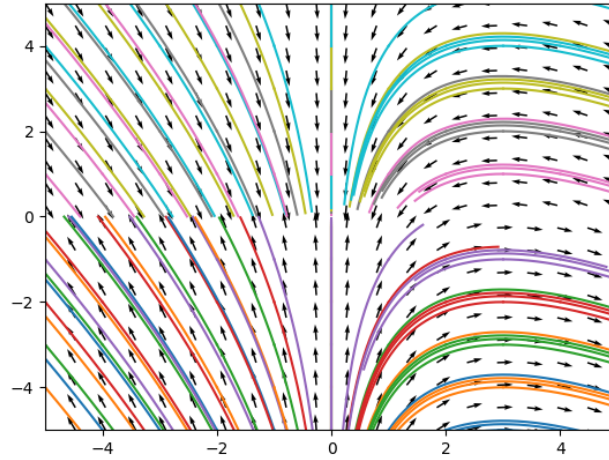


Figura 3.2: Retrato de fase do sistema 3.5 incluindo os quadrantes II, III e IV ($\beta = 0,1$ e $\gamma = 0,3$).

Voltando a discussão do modelo em que nos interessa apenas a região τ , se considerarmos uma solução $(S(t), I(t))$ com $R_0 > 1$, a curva traçada pela solução não será toda a curva $I = -S + \ln S + C$, pois as soluções não podem passar pelos equilíbrios no eixo S . Ou seja, a solução não está na parte $I = 0$. A curva $I = -S + \ln S + C$ intercepta o eixo

S em dois pontos $(S_-, 0)$ e $(S_+, 0)$, com $S_+ < \frac{\gamma}{\beta} < S_-$.

No caso $R_0 > 1$, ou seja, quando o número de infectados cresce, as trajetórias conectam um equilíbrio $(S, I) = (S_-, 0)$ com $\frac{\gamma}{\beta} < S_- < 1$, a um equilíbrio $(S, I) = (S_+, 0)$ com $0 < S_+ < \frac{\gamma}{\beta}$. A interpretação que temos disso é que a fração populacional S_- é suscetível e ninguém está ainda infectado. Daí quando a doença é introduzida, de modo que I se torna positivo, o número de infectados aumenta, e o número de suscetíveis diminui. Com o tempo, o número de suscetíveis cai abaixo de $\frac{\gamma}{\beta}$ e o número de infectados começa também a cair levando a doença ao fim. No final da epidemia, a fração suscetível da população é S_+ . Logo, a fração da população que contraiu a doença durante a epidemia é $S_- - S_+$.

Por esse motivo, é interessante calcular S_+ a partir de S_- . Esse cálculo pode ser feito já que se a curva passa pelo ponto $(S_-, 0)$, então

$$0 = -S_- + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_- + C \implies C = S_- - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_-.$$

Como a curva passa também por $(S_+, 0)$, então

$$0 = -S_+ + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_+ + C = -S_+ + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_+ + S_- - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_-.$$

Simplificando a equação anterior temos

$$-(S_+ - S_-) + \frac{\gamma}{\beta} (\ln S_+ - \ln S_-) = 0.$$

Portanto, podemos encontrar S_+ em função de S_- dado escrevendo

$$F(S) = -(S - S_-) + \frac{\gamma}{\beta} (\ln S - \ln S_-) = 0$$

e resolvendo por um método numérico.

Outra informação importante a ser obtida é o valor máximo de I na trajetória, que indica a fração máxima da população infectada de uma só vez durante a epidemia, e ocorre em $S = \frac{\gamma}{\beta}$. A importância se dá pelo fato de que através desse número é possível saber se em algum momento a rede hospitalar ficará sobrecarregada.

Contudo, devemos lembrar que o comportamento humano é um fator que influencia em como a epidemia acontece. Por isso, os números que conseguimos através desses cálculos e da observação das trajetórias do sistema não nos garante correspondência com a situação real.

3.2.1 O Modelo SIR com mortes

E se a doença pudesse levar as pessoas a morte? Conforme [López-Flores et al. \(2021\)](#), o modelo SIR também pode ser utilizado nesse caso com algumas modificações.

Pensando na população de número inicial N , no momento t , $s(t)$ é o número de pessoas suscetíveis, $i(t)$ de infectadas, $w(t)$ de recuperadas e $d(t)$ de mortas. Agora o coeficiente de transmissão no momento t , $\beta(t)$, será dado pelo β que já determinamos na subseção anterior multiplicado pela fração da população ainda viva. Pois, à medida que as mortes acontecem, a população reduz e consequentemente o número de pessoas que um infectado pode entrar em contato diminui. E essa diminuição pode ser dada pela fração da população que está viva. Dessa forma

$$\beta(t) = \beta \cdot \frac{s(t) + i(t) + w(t)}{N}. \quad (3.8)$$

Na subseção 3.2, vimos que a taxa de novas infecções por um infectado no tempo t é $\beta(t)$ (3.8) multiplicada pela fração da população que é suscetível nesse mesmo tempo t . Para o modelo, agora a fração da população suscetível é $\frac{s(t)}{s(t) + i(t) + w(t)}$. E multiplicando em seguida por $i(t)$ podemos obter a taxa a que novos infectados são gerados em toda a população. A partir disso, a diminuição de suscetíveis é:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta \cdot \frac{s(t) + i(t) + w(t)}{N} \cdot \frac{s(t)}{s(t) + i(t) + w(t)} \cdot i(t) = -\frac{\beta}{N} s(t) i(t).$$

Determinando μ como a taxa em que os infectados se recuperam e δ a taxa em que morrem, o sistema completo que representa o modelo SIR com morte pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\frac{\beta}{N} si \\ \frac{di}{dt} = \frac{\beta}{N} si - \mu i - \delta i \\ \frac{dw}{dt} = \mu i \\ \frac{dd}{dt} = \delta i. \end{cases} \quad (3.9)$$

Com a finalidade de simplificar o sistema, podemos reunir os compartimentos w e d em um compartimento r chamado de removido, assim $r = w + d$ e $\frac{dr}{dt} = \frac{dw}{dt} + \frac{dd}{dt} = \mu i + \delta i =$

$(\mu + \delta)i$. Assim, o sistema fica

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\frac{\beta}{N}si \\ \frac{di}{dt} = \frac{\beta}{N}si - (\mu + \delta)i \\ \frac{dr}{dt} = (\mu + \delta)i. \end{cases} \quad (3.10)$$

Colocando as variáveis como frações populacionais no lugar dos números totais temos:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \delta)I \\ \frac{dR}{dt} = (\mu + \delta)I. \end{cases} \quad (3.11)$$

Note que se no lugar de $\mu + \delta$ tivermos γ , teremos exatamente o sistema 3.4. Então, o sistema 3.11 é o modelo SIR com a diferença de que nesse caso R é o compartimento de removidos, podendo ser por recuperações ou mortes. E de forma análoga ao que foi feito anteriormente para o sistema 3.4, é possível obter os retratos de fase para fazer uma interpretação das soluções.

4 Conclusão

Os sistemas de equações diferenciais são vastamente utilizados para modelar situações reais, sendo uma delas o desenvolvimento de patologias. Procuramos neste trabalho mostrar como as EDO estão presentes no âmbito da saúde tendo assim uma grande relevância para a nossa sociedade.

Este trabalho possibilitou a percepção de que para a compreensão do modelo SIR aqui discutido, além do conhecimento teórico de EDO, é necessário ter clareza sobre alguns conceitos de epidemiologia. E dentro do próprio conteúdo de EDO, quando nos deparamos com os sistemas precisamos significativamente de conteúdos que são estudados em Álgebra Linear. Assim, nota-se que buscar conhecimento a respeito de algo é mais do que estudar conteúdos de forma isolada.

Como muitas vezes na disciplina de EDO não temos a possibilidade de entrar a fundo nos capítulos sobre sistemas e tampouco em suas aplicações, este estudo se faz válido para uma apreciação de como a matemática é crucial em nossas vidas.

É a partir dessa teoria e do desenvolvimento de modelos como o SIR que surgem modelos mais complexos que ajudam a fazer o controle de doenças, por exemplo da covid-19 que marcou drasticamente os anos de 2020 ao início de 2023. Porém, sistemas nos quais modelam doenças desse nível apresentam mais compartimentos, contendo mais equações levando mais tempo para serem formulados e compreendidos.

Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. [S.l.]: LTC, 2010.

LÓPEZ-FLORES, M. M.; MARCHESIN, D.; MATOS, V.; SCHECTER, S. Equações diferenciais e modelos epidemiológicos. **Editora do IMPA**, 2021.

THEODORO, M. M.; CARVALHO, T. de. Análise de retratos de fase. **CQD - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2018.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. [S.l.]: Cengage Learning Editores, 2016.