

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MÉTODO DO TRIEDRO MÓVEL

ANA CLARA MARTINS BORGES

**GOIÂNIA - GOIÁS
2022**

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Ana Clara Martins Borges

Matrícula: 30181010940016

Título do Trabalho: Método do Triedro Móvel

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 04/07/2022.



Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

ANA CLARA MARTINS BORGES

MÉTODO DO TRIEDRO MÓVEL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás - IFG - Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientadora: Prof^a Dra. Karoline Victor Fernandes

GOIÂNIA - GOIÁS

2022

B732m Borges, Ana Clara Martins.

Método do triedro móvel / Ana Clara Martins Borges. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2022.
65f.

Orientação: Prof^a Dra. Karoline Victor Fernandes.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Formas diferenciais. 2 Geometria diferencial. I. Fernandes, Karoline Victor (orientação). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III. Título.

CDD 515.37

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Lana Cristina Dias Oliveira CRB1/ 2.631
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

MÉTODO DO TRIEDRO MÓVEL

por

ANA CLARA MARTINS BORGES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Dr^a. Karoline Victor Fernandes

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 20 de junho de 2022, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr^a. Karoline Victor Fernandes (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Hugo Leonardo da Silva Belisário (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Karoline Victor Fernandes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 20/06/2022 15:43:27.
- Hugo Leonardo da Silva Belisario, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 20/06/2022 15:43:24.
- Jose Eder Salvador de Vasconcelos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 20/06/2022 15:42:36.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 15/06/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 293993

Código de Autenticação: 654ea8b7ba



Resumo

Este trabalho tem por objetivo fazer o estudo da teoria de superfícies considerando os vetores X_u, X_v, N associados a uma superfície $X(u, v)$, para cada (u, v) , esses vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$ que, usualmente, não é ortonormal. Também será desenvolvida a teoria local de superfícies por meio do método do triedro móvel. Esse método que foi introduzido por Élie Cartan, consiste essencialmente em escolher adequadamente, para cada ponto da superfície, uma base ortonormal $e_1(u, v), e_2(u, v), e_3(u, v)$ de $\mathbb{R}^3$ de tal forma que os vetores e_1, e_2 são tangentes à superfície. Além de ilustrar uma aplicação deste método, o teorema de Bonnet.

Palavras-chave: Formas Diferenciáveis, Triedro móvel, Teorema de Bonnet.

Abstract

This work aims to study the theory of surfaces considering the vectors X_u, X_v, N associated with a surface $X(u, v)$, for each (u, v) , these vectors form a basis of $\mathbb{R}^3$ which is usually not orthonormal. The local theory of surfaces will also be developed using the mobile trihedron method. This method, which was introduced by Élie Cartan, essentially consists of properly choosing, for each point on the surface, an orthonormal basis $e_1(u, v), e_2(u, v), e_3(u, v)$ from $\mathbb{R}^3$ such that the vectors e_1, e_2 are tangent to the surface. In addition to illustrating an application of this method, Bonnet's theorem.

Keywords: Differentiable Forms, Mobile Trihedron, Bonnet's Theorem.

Sumário

Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Espaço Vetorial	1
1.2 Subespaço Vetorial	4
1.3 Dependência e Independência Linear	4
1.4 Base e Dimensão	4
1.5 Transformação Linear	5
1.6 Forma Bilinear	6
1.7 Espaço e Base Dual	8
1.8 Diferenciabilidade e Diferencial	10
1.9 Teoria Local De Superfícies	11
1.9.1 Superfície Parametrizada Regular, Plano Tangente; Vetor Normal	12
1.9.2 Primeira Forma Quadrática, Segunda Forma Quadrática; Curvatura Normal	21
1.9.3 Curvaturas Principais; Curvatura de Gauss; Curvatura Média	25
2 Formas Diferenciais	30
3 Triedro Móvel	45
4 O Teorema de Bonnet	59
Conclusão	64
REFERÊNCIAS	65

Introdução

A teoria dos referenciais móveis para superfícies, segundo (AKIVIS; ROSENFELD, 1993), começa no final do século XIX com Gaston Darboux e Émile Cotton estudando problema de construir um referencial móvel adaptado ao longo de superfícies no espaço Euclidiano ao invés de curvas, uma vez que este assunto já havia sido discutido por Serret, Frénet e outros.

O método do referencial móvel em superfícies foi apresentado sistematicamente por Darboux em suas notas *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (DARBOUX, 1887). Para estudar curvas em superfícies, Darboux considerou um triedro formado por vetores e_1, e_2 e e_3 , em que e_1 e e_3 eram paralelos à reta tangente à curva e a reta normal à superfície respectivamente, e para estudar superfícies considerou um novo triedro em que os vetores e_1 e e_2 eram paralelos às linhas de curvatura e e_3 normal à superfície. Neste último caso, Darboux considerou as derivadas do referencial segundo o comprimento do arco das linhas de curvatura, e os coeficientes dessas derivadas em relação à decomposição pelo triedro eram justamente as curvaturas principais da superfície, as curvaturas geodésicas das linhas de curvatura. Em 1905, Émile Cotton publicou o artigo *Généralisation de la théorie du trièdre mobile* (COTTON, 1905), em que introduziu a generalização do método do referencial móvel para espaços E que possuíam uma ação contínua e transitiva de um grupo G .

Apesar da vasta teoria desenvolvida no final do século XIX e começo do século XX, a ideia de referenciais móveis está muito atrelada ao nome de Élie Cartan, responsável por transformar a teoria em um poderoso algoritmo.

Desenvolvendo as ideias de Darboux e Cotton, em 1910 Cartan publicou os artigos *Sur les développables isotropes et la méthode du trièdre mobile* (CARTAN, 1955b) e *La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile* (CARTAN, 1955a). Cartan conecta, especialmente no segundo artigo, o método do referencial móvel via triedros com a estrutura de grupos de Lie e a teoria de equações de Pfaff, o que posteriormente ficou conhecido como método do referencial móvel propriamente dito.

O método do triedro móvel é um método alternativo para o estudo local de superfícies. Utilizando a teoria de formas diferenciais encontramos o co-referencial, as formas de conexão e as equações de estrutura do triedro móvel. Dessa forma, toda a teoria local das superfícies pode ser desenvolvida pelo método do triedro móvel.

O Capítulo 1 é um capítulo de preliminares que traz os pré-requisitos necessários para a compreensão do conteúdo do trabalho em si, assim, é um breve estudo de certos elementos da álgebra linear, cálculo diferencial e da teoria local de superfícies.

No Capítulo 2 será feito um estudo das formas diferenciais, tanto de grau 1 quanto de grau 2, bem como as operações de produto tensorial e produto exterior que são realizados com as formas diferenciais.

No Capítulo 3 deste trabalho encontra-se o desenvolvimento do método do triedro móvel propriamente dito, a obtenção do co-referencial e das formas de conexão e, ainda, as equações de estrutura.

Será analisado, no Capítulo 4, o teorema de Bonnet, uma aplicação do método do triedro móvel.

1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentadas definições e resultados que serão importantes ao estudo que faremos sobre o Método do Triedro Móvel.

O texto ao longo do capítulo será baseado em ([TENENBLAT, 2008](#)), ([LIMA, 2001](#)) e ([COELHO; LOURENCO, 2005](#)).

1.1 Espaço Vetorial

Definição 1.1. Um conjunto não vazio V é um *espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ se em seus elementos, denominados *vetores*, estiverem definidas as seguintes operações:

(A) A cada par u, v de vetores de V corresponde um vetor $u + v \in V$, chamado de *soma de u e v* , de modo que:

(A1) $u + v = v + u$, para todos $u, v \in V$ (propriedade comutativa);

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, para todos $u, v, w \in V$ (propriedade associativa);

(A3) exista em V um vetor, denominado *vetor nulo* e denotado por 0 , tal que $0 + v = v$, para todo $v \in V$;

(A4) a cada vetor $v \in V$ exista um vetor em V , denotado por $-v$, tal que $v + (-v) = 0$;

(M) a cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, corresponde um vetor $\alpha \cdot v \in V$, denominado *multiplicação por escalar de α por v* de modo que:

(M1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha (\beta \cdot v)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$ (propriedade associativa).

(M2) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$ (onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{K}$).

Além disso, vamos impor que as operações dadas em (A) e (M) se distribuam, isto é, que valham as seguintes propriedades:

$$(D1) \quad \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u, v \in V.$$

$$(D2) \quad (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall v \in V$$

Exemplo 1.1. O conjunto $V = \mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais.

Sejam $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2), w = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(A1)

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\ &= v + u \end{aligned}$$

(A2)

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= u + (v + w) \end{aligned}$$

(A3) Seja $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 0 + v &= (0, 0) + (x_2, y_2) \\ &= (0 + x_2, 0 + y_2) \\ &= (x_2, y_2) \\ &= v \end{aligned}$$

(A4) Seja $v = (x_2, y_2)$ e $-v = (-x_2, -y_2)$.

$$\begin{aligned} v + (-v) &= (x_2, y_2) + (-x_2, -y_2) \\ &= (x_2 - x_2, y_2 - y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(M1)

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)v &= (\alpha\beta) \cdot (x_2, y_2) \\&= ((\alpha\beta)x_2, (\alpha\beta)y_2) \\&= (\alpha(\beta x_2), \alpha(\beta y_2)) \\&= \alpha(\beta x_2, \beta y_2) \\&= \alpha(\beta(x_2, y_2)) \\&= \alpha(\beta v)\end{aligned}$$

(M2) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}1 \cdot v &= 1(x_2, y_2) \\&= (x_2, y_2) \\&= v\end{aligned}$$

(M3)

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (u + v) &= \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\&= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\&= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) \\&= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) \\&= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) \\&= \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) \\&= \alpha u + \alpha v\end{aligned}$$

(M4)

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot v &= (\alpha + \beta)(x_2, y_2) \\&= ((\alpha + \beta)x_2, (\alpha + \beta)y_2) \\&= (\alpha x_2 + \beta x_2, \alpha y_2 + \beta y_2) \\&= (\alpha x_2, \alpha y_2) + (\beta x_2, \beta y_2) \\&= \alpha(x_2, y_2) + \beta(x_2, y_2) \\&= \alpha v + \beta v\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$

Exemplo 1.2. O conjunto $V = \mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais.

A demonstração é análoga a do exemplo anterior.

1.2 Subespaço Vetorial

Definição 1.2. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto não vazio W de V é um *subespaço vetorial de V* se as restrições das operações de V a W torna esse conjunto um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, equivalentemente, se $\forall u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

a) $u + v \in W$;

b) $\lambda u \in W$,

Exemplo 1.3. O conjunto $V = \{(4x, 6x, 8x); x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais.

Sejam $u = (4x_1, 6x_1, 8x_1), v = (4x_2, 6x_2, 8x_2) \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

a)

$$\begin{aligned} u + v &= (4x_1, 6x_1, 8x_1) + (4x_2, 6x_2, 8x_2) \\ &= (4x_1 + 4x_2, 6x_1 + 6x_2, 8x_1 + 8x_2) \\ &= (4(x_1 + x_2), 6(x_1 + x_2), 8(x_1 + x_2)) \in V. \end{aligned}$$

b) $\alpha u = \alpha(4x_1, 6x_1, 8x_1) = (\alpha 4x_1, \alpha 6x_1, \alpha 8x_1) = (4\alpha x_1, 6\alpha x_1, 8\alpha x_1) \in V$.

· A partir de agora todos os espaços que iremos considerar serão espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, portanto, não será necessário fazermos menção ao corpo.

1.3 Dependência e Independência Linear

Definição 1.3. Seja V um espaço vetorial, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ vetores são ditos linearmente independentes se toda equação vetorial desses vetores da forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ tem solução única $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Serão chamados de linearmente dependentes se existirem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, nem todos nulos, tais que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$.

1.4 Base e Dimensão

Definição 1.4. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. É chamada de *base* de V , um subconjunto B de V , que satisfaz

- (i) B é linearmente independente;
- (ii) B gera V (qualquer vetor de V pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B).

Exemplo 1.4. Sendo $\mathbb{R}^3$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, pois é linearmente independente e gera, de fato, se $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

É possível mostrar que qualquer base de um mesmo espaço vetorial tem o mesmo número de vetores e isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.5. Seja V um espaço vetorial e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V. A dimensão de V é igual ao número de vetores da base ($\dim V = n$).

- (i) Se V não possui base, $\dim V = 0$;
- (ii) Se V tem uma base com infinitos vetores, então a dimensão de V é infinita e denota-se $\dim V = \infty$

Exemplo 1.5. Seja $V = \mathbb{R}^2$. O conjunto $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base de V. De fato,

$$V(x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

tem-se

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

e,

$$(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Logo, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Teorema 1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n . Então:

- i) Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gera V então B é base de V;
- ii) Se $0 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é linearmente independente então 0 é base de V.

1.5 Transformação Linear

Definição 1.6. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo arbitrário $\mathbb{K}$. Uma função $T : U \rightarrow V$ é uma *Transformação Linear* se

$$(1) T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U, \text{ e}$$

$$(2) T(\lambda u) = \lambda T(u), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in U.$$

Exemplo 1.6. A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (5x + y, 3x - 2y)$$

é linear.

De fato, se $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ vetores de $\mathbb{R}^2$, então

$$\begin{aligned} (a) \quad T(u_1 + u_2) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ &= T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) \\ &= (5(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2)) \\ &= (5x_1 + 5x_2 + y_1 + y_2, 3x_1 + 3x_2 - 2y_1 - 2y_2) \\ &= (5x_1 + y_1, 3x_1 - 2y_1) + (5x_2 + y_2, 3x_2 - 2y_2) \\ &= T(u_1) + T(u_2). \end{aligned}$$

(a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} T(\lambda u_1) &= T(\lambda(x_1, y_1)) \\ &= T(\lambda x_1, \lambda y_1) \\ &= (5\lambda x_1 + \lambda y_1, 3\lambda x_1 - 2\lambda y_1) \\ &= (\lambda(5x_1 + y_1), \lambda(3x_1 - 2y_1)) \\ &= \lambda(5x_1 + y_1, 3x_1 - 2y_1) \\ &= \lambda T(u). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

1.6 Forma Bilinear

Definição 1.7. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ é chamada de forma bilinear de $U \times V$ em $\mathbb{K}$ se satisfizer:

$$(i) f(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda f(u_1, v) + f(u_2, v), \text{ para todos } \lambda \in \mathbb{K}, u_1, u_2 \in U \text{ e } v \in V.$$

$$(ii) f(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda f(u, v_1) + f(u, v_2), \text{ para todos } \lambda \in \mathbb{K}, u \in U \text{ e } v_1, v_2 \in V.$$

Dessa forma, uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ é uma forma bilinear se for linear em cada uma das variáveis quando deixarmos a outra fixa.

$B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita alternada ou anti-simétrica se $B(v_1, v_2) = -B(v_2, v_1), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.

Uma forma bilinear simétrica que satisfaz:

$$B(u, u) \geq 0 \text{ e } B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

é chamado de produto interno.

Exemplo 1.7. A forma $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} B(u, v) &= x_u x_v + y_u y_v \\ u &= (x_u, y_u), \quad v = (x_v, y_v) \end{aligned}$$

é uma forma bilinear simétrica, mais do que isso, B é um produto interno.

Exemplo 1.8. A função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1 y_2 - 2x_2 y_1, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ é uma forma bilinear que não é induzida por um produto interno.

Quando uma forma bilinear $B : u \times v \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno, denotamos $B(u, v)$ por $\langle u, v \rangle$. Neste caso, a função $f : v \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u) = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ satisfaz:

- i) $f(u) \geq 0$ e $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
- ii) $f(\lambda u) = |\lambda| f(u)$;
- iii) $f(u + v) \leq f(u) + f(v)$;

E é chamada uma norma em V . A norma proveniente do produto interno $\langle, \rangle$.

Ocorre que no espaço veorial $\mathbb{R}^2$, fixando o produto interno dado no exemplo (1.7), temos

$$\begin{aligned} f(u) = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} &= (x_u^2 + y_u^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{x_u^2 + y_u^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$f(u) = \sqrt{x_u^2 + y_u^2},$$

é o comprimento do vetor $\vec{u}$ (com origem no ponto $(0, 0)$ e extremidade u). Por simplicidade usamos, em ambos os casos, apenas u .

Finalmente, fazendo

$$||u|| = f(u) = \sqrt{x_u^2 + y_u^2},$$

temos que a norma euclidiana ou comprimento de um vetor $u \in \mathbb{R}^2$ denotada por $||u||$ é dado pela expressão acima. Em geral, tem-se

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

É importante observar que existem normas que não são provenientes de produtos internos, mas estas não serão consideradas neste trabalho. Para mais detalhes veja (HOFFMAN; KUNZE, 1971) e (LIMA, 2020).

1.7 Espaço e Base Dual

Antes de definir Espaço Dual, haverá uma breve definição de Espaço $L(U, V)$.

Definição 1.8. Para espaços vetoriais U e V sobre $\mathbb{K}$, denotamos por $L(U, V)$ o conjunto de todas as transformações lineares de U a V . Sabendo que $L(U, V) = \{T : U \rightarrow V; T \text{ é uma transformação linear}\}$. Este conjunto herda uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de uma maneira bem natural. Primeiramente, a função nula de U a V é uma transformação linear. Por outro lado, é fácil ver que para $F, G \in L(U, V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que a função $\lambda F + G : U \rightarrow V$ dada por $(\lambda F + G)(u) = \lambda F(u) + G(u)$, para cada $u \in U$, é uma transformação linear e, portanto, pertence a $L(U, V)$. Com isso, mostramos que $L(U, V)$ é um subespaço vetorial do espaço $\mathcal{F}(U, V)$ de todas as funções de U em V e, em particular, um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. O próximo resultado mostrará que, quando U e V são de dimensão finita, então $\dim_{\mathbb{K}} L(U, V) = \dim_{\mathbb{K}} U \cdot \dim_{\mathbb{K}} V$.

Teorema 2. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com dimensões m e n , respectivamente. Então o espaço $L(U, V)$ tem dimensão $m \cdot n$.

Definição 1.9. Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Um *funcional linear* em V é uma transformação linear $f : V \rightarrow \mathbb{K}$.

Um importante resultado na teoria de álgebra linear, que não abordaremos neste trabalho é o teorema do núcleo e da Imagem. Este teorema estabelece o seguinte a respeito de uma transformação linear T entre espaços vetoriais U e V , ambos de dimensão finita.

$$\dim U = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$$

onde $(N(T))$ é o subespaço de U formado pelos vetores que anulam T , isto é,

$$(N(T)) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}.$$

Como $T(u) = T(V) \Leftrightarrow T(u - u) = 0$, temos que T é injetiva se, e somente se, $N(T) = \{0\}$, isto é, se, e somente se, $\dim(N(T)) = 0$.

Retomando o T.N.I temos que T é injetiva se, e somente se,

$$\dim V = \dim(Im(T)).$$

Dessa afirmação. segue que se U e V têm a mesma dimensão então T é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva, isto é,

$$Im(T) = V.$$

Particularmente,

$$\dim Im(T) = \dim V.$$

Definição 1.10. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear não nulo. Observa-se que f é sempre sobrejetora e será injetora se, e só se, $\dim_{\mathbb{K}} V = 1$ (e neste caso será também isomorfismo). Sabe-se pela definição (1.8), que o conjunto $L(V, \mathbb{K})$ dos funcionais lineares forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Denotaremos $L(V, \mathbb{K})$ por V^* chamado *espaço dual* a V . Segue-se do teorema 1 que $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} V^*$.

Exemplo 1.9. Sejam $\{e_1, e_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$, se $1 \leq i, j \leq 2$; defina

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Mostraremos que $\{f_1, f_2\}$ é base de $(\mathbb{R}^2)^*$.

I) Neste caso, $\{f_1, f_2\}$ deve ser linearmente independente.

$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$, com efeito,

$$\begin{aligned} (\alpha f_1 + \beta f_2)(e_1) &= 0(e_1) \Rightarrow 0 = (\alpha f_1)(e_1) + (\beta f_2)(e_1) = \alpha \\ (\alpha f_1 + \beta f_2)(e_2) &= 0(e_2) \Rightarrow 0 = (\alpha f_1)(e_2) + (\beta f_2)(e_2) = \beta \end{aligned}$$

II) $\{f_1, f_2\}$ gera $\mathbb{R}^{2*}$ pois $\dim \mathbb{R}^{2*} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\{f_1, f_2\}$ é linearmente independente se, e somente se, gera $\mathbb{R}^{2*}$.

1.8 Diferenciabilidade e Diferencial

Dizemos que a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto (u_0, v_0) se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ existem e se

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \frac{f(u, v) - \left[f(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)[(u - u_0)] + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)[(v - v_0)] \right]}{|(u, v) - (u_0, v_0)|} = 0$$

onde

$$|(u, v) - (u_0, v_0)|$$

representa a distância de (u, v) a (u_0, v_0) que é dada por $\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}$.

Diz-se que f é diferenciável em um conjunto $A \subset D(f)$, se f for diferenciável em todos os pontos de A . Destacando-se as seguintes afirmações:

- i) Para provar que uma função é diferenciável em (x_0, y_0) usando a definição, devemos mostrar que as derivadas parciais existem em (x_0, y_0) e, além disso, que o limite da equação acima é zero.
- ii) Se uma das derivadas parciais não existe no ponto (x_0, y_0) , f não é diferenciável nesse ponto.
- iii) Se o limite dado na equação acima for diferente de zero ou não existir, f não é diferenciável no ponto (x_0, y_0) , mesmo se existirem as derivadas parciais nesse ponto.

Exemplo 1.10. As projeções de $\pi_1(u, v) = u$ e $\pi_2(u, v) = v$ são funções diferenciáveis.

De fato considerando $\Pi_1(u, v) = u$, temos $\frac{\partial \Pi_1}{\partial u}(u, v) = 1$, $\frac{\partial \Pi_1}{\partial v}(u, v) = 0$.

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \frac{u - [u_0 + 1 \cdot (u - u_0) + 0 \cdot (v - v_0)]}{\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}} = 0$$

Definição 1.11. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \in \mathbb{R}^2$, diferenciável no ponto $q \in U$. A *diferencial* de f no ponto a é o funcional linear $df(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, cujo valor no vetor $V = (a, b)$ é dado por

$$df(q) \cdot V = \frac{\partial f}{\partial u}(q) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial v}(q) \cdot b$$

Como toda transformação linear $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o funcional linear $df(q)$ possui uma matriz 1×2 em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Se identificarmos o funcional com sua matriz,

teremos

$$df(q) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(q) \frac{\partial f}{\partial v}(q) \right)$$

Quando $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em todo ponto de U , obtemos uma aplicação $df : U \rightarrow (\mathbb{R}^{2*}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, que associa a cada ponto $x \in U$ o funcional $df(x)$.

A aplicação df é contínua se, e somente se, cada uma das suas funções coordenadas $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ de $U \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, isto é, se, e somente se, f é de classe C^1 .

É comum indicar-se a base canônica de $(\mathbb{R}^{2*})$ por $\{du, dv\}$, logo $du \cdot V = a$, $dv \cdot V = b$, se $V = (a, b)$. O motivo desta notação é: como a i -ésima projeção $\pi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ assume em cada ponto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ o valor $\pi_1(u, v) = u$ e $\pi_2(u, v) = v$, escreve-se u e v em vez de π_1 e π_2 , respectivamente. Calculando, de modo óbvio, a diferencial da projeções $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, obtemos $du(q) \cdot V = a$ e $dv(q) \cdot V = b$ em todo ponto $q \in \mathbb{R}^2$. Escrevendo $du \cdot V$ em vez de a e $dv \cdot V$ em vez de b , a definição de diferencial fica

$$df(q) \cdot V = \frac{\partial f}{\partial u}(q) du \cdot V + \frac{\partial f}{\partial v}(q) dv \cdot V$$

Como esta igualdade vale para cada $u, v \in \mathbb{R}^2$, temos

$$df(q) = \frac{\partial f}{\partial u}(q) du + \frac{\partial f}{\partial v}(q) dv$$

Isto significa que o funcional linear $df(q)$ se exprime como combinação linear dos funcionais du e dv , sendo $\frac{\partial f}{\partial u}(q)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(q)$ os coeficientes da combinação. Finalmente, a igualdade acima valendo para todo ponto $q \in U$, podemos escrever

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

A expressão formal da regra da cadeia (no caso $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) diz que, se cada coordenada u e v é função de um parâmetro real t então podemos dividir ambos os membros da igualdade acima por dt e obter

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

1.9 Teoria Local De Superfícies

Sobre o ponto de vista geométrico, toda curva é descrita por uma parametrização, sendo que existe sempre uma parametrização natural (parametrização por comprimento de arco).

Já para as superfícies não existem essas parametrizações que descrevem a totalidade da própria superfície. Pegando como exemplo uma esfera, onde $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ para qualquer escolha de um par de parâmetros, sempre existirá pelo menos um ponto no qual não poderá ser descrito por eles.

Assim entendemos como superfície um dado conjunto em $\mathbb{R}^3$ que “se assemelha” a uma parte de $\mathbb{R}^2$, “numa vizinhança” de qualquer ponto, por exemplo, a superfície da Terra, mesmo que esférica, pareça plana a um observador nela colocado que consegue ver somente até a linha do horizonte.

1.9.1 Superfície Parametrizada Regular, Plano Tangente; Vetor Normal

Nesta seção serão discutidas algumas propriedades geométricas das superfícies no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Assumiremos o sistema de coordenadas cartesianas x, y, z em $\mathbb{R}^3$, considerando a função:

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

de duas variáveis u, v que variam em um intervalo aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada par ordenado $(u, v) \in U$, $X(u, v)$ será um ponto em $\mathbb{R}^3$. Chamamos de S um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formados pelos pontos $X(u, v)$.

Definição 1.12. Uma superfície parametrizada regular ou simplesmente uma superfície é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que:

- a) X é diferenciável de classe C^∞ ;
- b) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferenciável de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

Os parâmetros da superfície serão as variáveis u, v e o *traço* de X será obtido pelo subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ pela aplicação em X .

Observações

- a) A aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é diferenciável de classe C^∞ quando as funções x, y, z têm derivadas parciais de todas as ordens contínuas.
- b) A condição b) da Definição anteriormente garante a existência de plano tangente em cada ponto da superfície. Vejamos algumas formas equivalentes de expressar essa condição. Sejam e_1, e_2 a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Para cada $q = (u_0, v_0) \in U$, sabemos que a matriz associada a dX_q nas bases canônicas é a matriz jacobiana.

$$J(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$

pois,

$$\begin{aligned} dX_q(e_1) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \\ dX_q(e_2) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \end{aligned}$$

Analisando os dois vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ conclui-se que as seguintes afirmações são equivalentes:

- b.1) dX_q é injetora;
- b.2) a matriz $J(u_0, v_0)$ tem posto 2;
- b.3) os vetores $X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;
- b.4) $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$

Considere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada, então se fixarmos um ponto $(u_0, v_0) \in U$, as curvas

$$\begin{aligned} u &\mapsto X(u, v_0), \\ v &\mapsto X(u_0, v), \end{aligned}$$

serão curvas com coordenadas de X em (u_0, v_0) . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são vetores tangentes às curvas coordenadas.

Exemplo 1.11. Sejam $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, e $b = (b_1, b_2, b_3)$ vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$. Consideremos a aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, associa $X(u, v) = p_0 + ua + vb$, isto é

$$X(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3).$$

Então, X é uma superfície parametrizada regular, pois X é diferenciável e os vetores $X_u = a, X_v = b$ são linearmente independentes. A aplicação X descreve um plano de $\mathbb{R}^3$

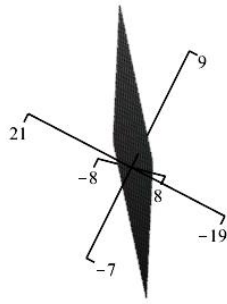


Figura 1.1: Vetores ortogonais

que passa pelo ponto p_0 , ortogonal ao vetor $a \times b$. As curvas coordenadas de X descrevem retas do plano, paralelas aos vetores a e b respectivamente.

Exemplo 1.12. Consideremos a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \cos v),$$

onde $a > 0$ e $U = \mathbb{R} \times (0, \pi) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$

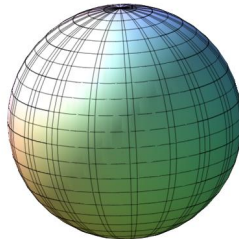


Figura 1.2: Esfera

A aplicação X é diferenciável e os vetores

$$\begin{aligned} X_u &= (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \operatorname{sen} v \cos u, 0) \\ X_v &= (a \cos v \cos u, a \cos v \operatorname{sen} u, -a \operatorname{sen} v) \end{aligned}$$

são linearmente independentes, para todo $(u, v) \in U$. De fato,

$$|X_u \times X_v| = a^2 \operatorname{sen} v \neq 0,$$

já que $v \in (0, \pi)$. A imagem de X é a esfera centrada na origem de raio a , menos os dois polos. As curvas coordenadas são os meridianos e os paralelos da esfera.

Exemplo 1.13. Seja

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right); \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

onde a e b são constantes não-nulas. A aplicação X é diferenciável e os vetores $X_u = (1, 0, \frac{2u}{a^2})$, $X_v = (0, 1, \frac{2v}{b^2})$ são linearmente independentes para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, X é uma superfície parametrizada regular, cuja imagem é o *paraboloide elíptico*.

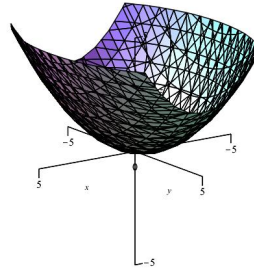


Figura 1.3: Paraboloide Elíptico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

As curvas coordenadas descrevem as parábolas obtidas pela intersecção de S com os planos paralelos a xz e yz .

Proposição 1.1. Se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de $\mathbb{R}^2$, então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f .

Demonstração. A diferenciabilidade de X decorre do fato de que as funções coordenadas

de X são diferenciáveis. A matriz jacobiana de X é igual a

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix},$$

que tem posto 2, para todo (u, v) . □

Exemplo 1.14. Dessa proposição temos que a aplicação

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

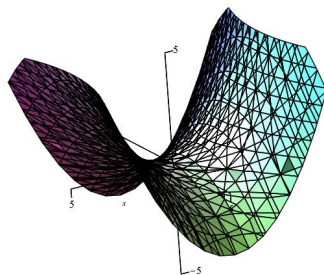


Figura 1.4: Paraboloide Hiperbólico

onde a e b são constantes não-nulas, é uma superfície parametrizada regular, cujo traço é o paraboloide hiperbólico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Essa é uma superfície de revolução em torno do eixo x .

Proposição 1.2. Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular tal que $f(u)$ não se anula. Então, a aplicação

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde $u \in I$ e $v \in \mathbb{R}$ é uma superfície parametrizada regular chamada “*superfície de rotação*” da curva α em torno do eixo Oz .

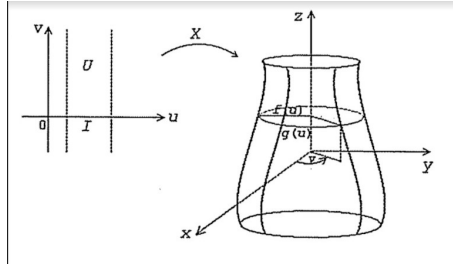


Figura 1.5: Superfície de rotação

Demonstração. Como α é uma aplicação diferenciável, temos que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. Os vetores

$$\begin{aligned} X_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \\ X_v &= (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

são linearmente independente, pois

$$|X_u \times X_v|^2 = f^2(u)[(g')^2 + (f')^2] \neq 0,$$

já que α é uma curva regular e f não se anula. Portanto, concluímos que X é uma superfície parametrizada regular. $\square$

Exemplo 1.15. A superfície

$$X(u, v) = (a \cos v, a \sin v, u),$$

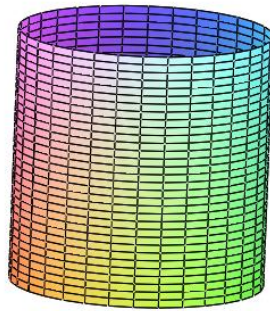


Figura 1.6: Cilindro Circular

onde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, descreve o cilindro circular, que é obtido pela rotação da reta $\alpha(u) = (a, 0, u)$ em torno do eixo $0z$.

Exemplo 1.16. Consideremos a catenária

$$\alpha(u) = \left(u, a \cosh \frac{u}{a}, 0\right), u \in \mathbb{R},$$

onde $a > 0$ é constante.

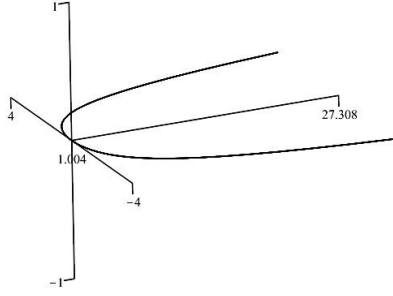


Figura 1.7: Catenária

A superfície

$$X(u, v) = \left(u, a \cosh \frac{u}{a} \cos v, a \cosh \frac{u}{a} \sin v\right),$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$, descreve o catenoide, que é obtido pela rotação da catenária α em torno do eixo $0x$.

Considere que $X(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ seja uma superfície regular, onde u, v são funções diferenciáveis com um parâmetro $t, t \in I \subset \mathbb{R}$, assim obtemos uma curva diferenciável $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ com o traço descrito na superfície de X , logo sabemos que α será a curva da superfície. Nessa seção vamos definir o vetor tangente à superfície como um vetor tangente a curva da superfície.

Definição 1.13. Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor w de $\mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

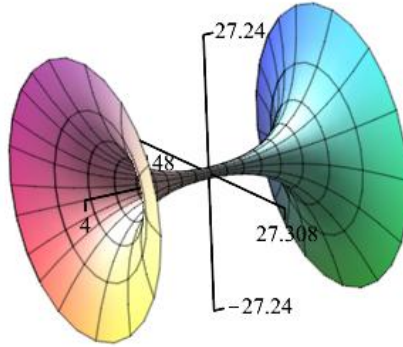


Figura 1.8: Catenoide

Observe que os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são tangentes a X em (u_0, v_0) , pois são tangentes às curvas coordenadas de X .

Definição 1.14. O plano tangente a X em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , que denotamos por $T_q X$, onde $q = (u_0, v_0)$.

A proposição a seguir trata de um plano tangente $T_q X \subset \mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores: $X_u(q)$ e $X_v(q)$.

Proposição 1.3. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. Então, $T_q X$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

Demonstração. Se $w \in T_q X$, então $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(t_0) = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) \big|_{t=t_0} \\ &= X_u(u_0, v_0) u'(t_0) + X_v(u_0, v_0) v'(t_0), \end{aligned}$$

isto é, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v em (u_0, v_0) . Reciprocamente, suponhamos que

$$w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0),$$

então existe uma curva $\alpha(t)$ da superfície tal que $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$. De

fato, basta considerar

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $u(t) = u_0 + at$, e $v(t) = v_0 + bt$, com $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Definição 1.15. Se $X(u, v)$ é uma superfície e $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de $\mathbb{R}^3$ é normal a X em q se é ortogonal a $T_q X$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q .

Seja o plano tangente $T_q X$, irá existir uma única direção normal ao plano, logo existirão dois vetores unitários normais a X em q . Iremos fixar o vetor unitário normal a X em q como sendo o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Considere que o domínio dessa superfície X é um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, variando $(u, v) \in U$, então teremos uma aplicação diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, chamada aplicação normal de Gauss, que é definida como:

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v).$$

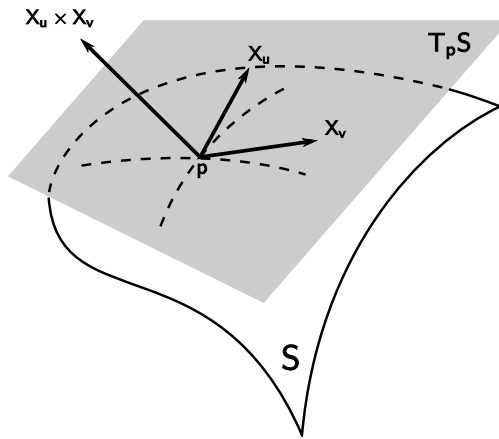


Figura 1.9: Vetor Normal

Exemplo 1.17. Seja $X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, $(u, v) \in U$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$. Consideremos o ponto $q = (u_0, v_0) = (0, 0)$. Pela Proposição (1.3), os vetores $X_u(0, 0) = (1, 0, 0)$ e $X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$ formam uma base do plano tangente $T_q X$. Portanto, todo vetor tangente a X em q é da forma $(a, b, 0)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e o vetor normal é $N(0, 0) = (0, 0, 1)$.

Exemplo 1.18. Se $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, então o plano tangente a X em (u, v) é gerado pelos vetores $X_u = (1, 0, 2u)$ e $X_v = (0, 1, 2v)$ e

$$N(u, v) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

1.9.2 Primeira Forma Quadrática, Segunda Forma Quadrática; Curvatura Normal

Observando a figura abaixo (1.10) percebemos que a maneira de definir a distância entre dois pontos da superfície difere da distância euclidiana tridimensional. Dado esse desafio, será definido agora o instrumento que nos permite calcular comprimentos, ângulos e áreas numa superfície: a primeira forma fundamental da superfície.

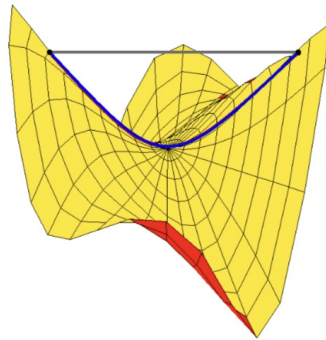


Figura 1.10: Superfície e reta

Definição 1.16. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $\forall q \in U$, a aplicação

$$\begin{aligned} I_q &: T_q X \longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longrightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \end{aligned}$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em q .

Seja a superfície formada por $X(u, v)$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$, então um vetor $w \in T_q X$

é dado como:

$$w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Usando a notação

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

Logo,

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Variando (u, v) temos as funções $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ diferenciáveis, que são denominadas coeficientes da primeira forma quadrática. As funções E, F, G satisfazem as seguintes propriedades:

- a) $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v) , pois os vetores X_u e X_v são não nulos;
- b) $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$. De fato, como

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2,$$

temos que

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0 \quad (1.1)$$

Exemplo 1.19. Seja $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, onde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e w_1, w_2 são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$, isto é, X descreve o plano ortogonal a $w_1 \times w_2$ que passa por p_0 . Então, $X_u(u, v) = w_1$ e $X_v(u, v) = w_2$. Como w_1 e w_2 são ortonormais, obtendo que os coeficientes da primeira forma quadrática são as funções constantes $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$, $G(u, v) = 1$.

Exemplo 1.20. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que descreve o cilindro circular $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1$. Os coeficientes da primeira forma quadrática são também dados por $E(u, v) = G(u, v) = 1, F(u, v) = 0$.

A chamada Aplicação de Gauss permite introduzir diversas maneiras de medir a “curvatura” de uma superfície. Todas elas se baseiam na chamada segunda forma fundamental de um mapa da superfície.

Decorrerá daqui que uma superfície fica determinado, a menos de um movimento rígido de $\mathbb{R}^3$, pelas suas primeira e segunda formas fundamentais, exatamente do mesmo modo que uma curva parametrizada por comprimento de arco é determinada, a menos de um movimento rígido, pela sua curvatura e torsão.

Definição 1.17. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixamos $q = (u_0, v_0) \in U$, a segunda forma quadrática de X em q é uma aplicação $II_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada vetor $w \in T_q X$ associa $II_q(w)$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos $II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$, onde N é o vetor normal a X .

Seguirá a verificação de que $II_q(w)$ não depende da curva escolhida. De fato, considere $w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0)$, e seja a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ de modo que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, ou seja,

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b).$$

Como

$$\alpha'(t) = u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = & u''(t) X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + \\ & 2u'(t)v'(t) X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) + \\ & v''(t) X_v(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

Então temos,

$$\begin{aligned} II_q(w) &= \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle \\ &= a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

esta última expressão não depende da curva α .

Usando a notação podemos escrever:

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0), \\ f(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0), \\ g(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Logo,

$$II_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2ab f(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0).$$

Variando (u, v) temos as funções diferenciáveis $e(u, v), f(u, v), g(u, v)$ que são denominados coeficientes da segunda forma quadrática da superfície parametrizada X .

Definição 1.18. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. A função curvatura normal em q é uma aplicação $k_n : T_q X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_q X$ não-nulo, associa,

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}.$$

Observações

Seja $w \in T_q X, w \neq 0$, então $k_n(\lambda w) = k_n(w), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Isto é, se $w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0)$, para $(a, b) \neq (0, 0)$. Denotando os coeficientes da segunda forma quadrática e_0, f_0, g_0 em (u_0, v_0) , temos que:

$$\begin{aligned} k_n(\lambda w) &= \frac{II_q(\lambda w)}{I_q(\lambda w)} = \frac{\lambda^2 a^2 e_0 + 2\lambda^2 ab f_0 + \lambda^2 b^2 g_0}{\lambda^2 \langle w, w \rangle} \\ &= \frac{a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0}{\langle w, w \rangle} = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = k_n(w). \end{aligned}$$

Como consequência pode-se falar na curvatura normal em q segundo uma direção tangente à superfície.

Exemplo 1.21. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

descreve o parabolóide hiperbólico Calculando os coeficientes da primeira e segunda formas

quadráticas em $q = (0, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} E(0, 0) &= 1 & F(0, 0) &= 0 & G(0, 0) &= 1, \\ e(0, 0) &= -2 & f(0, 0) &= 0 & g(0, 0) &= 2, \end{aligned}$$

Portanto, se $w = a X_u(0, 0) + b X_v(0, 0) \in T_q X$, temos que

$$\begin{aligned} I_q(w) &= a^2 + b^2, \\ II_q(w) &= -2a^2 + 2b^2 \end{aligned}$$

e, para $w \neq 0$,

$$k_n(a, b) = \frac{-2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}$$

De fato,

$$\frac{\partial k_n}{\partial a} = \frac{-8ab^2}{(a^2 + b^2)^2}, \quad \frac{\partial k_n}{\partial b} = \frac{8a^2b}{(a^2 + b^2)^2}$$

Resolvendo sistema

$$\begin{cases} -8ab^2 &= 0 \\ 8a^2b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Se $a = 0$, $w = b \cdot X_u$. Se $b = 0$, $w = a \cdot X_v$.

Assim, os pontos críticos são $(a, 0)$ e $(0, b)$, o que acontece nas direções X_u e X_v , respectivamente.

Então concluímos que k_n assume o valor máximo 2 e o mínimo -2, nas direções de X_v e X_u respectivamente.

1.9.3 Curvaturas Principais; Curvatura de Gauss; Curvatura Média

Provaremos aqui que a curvatura normal admitia valores máximo e mínimo, esses valores em um ponto q são chamados de curvaturas principais. Aqui vamos denotar os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas de uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$ em um ponto $q = (u_0, v_0)$.

Proposição 1.4. Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e k_n a função

curvatura normal de X em $q = (u_0, v_0)$. Então, existem vetores unitários e ortogonais $w_1, w_2 \in T_q X$ tais que $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são os valores mínimo e máximo da função k_n .

Demonstração. Se k_n é uma função constante, então quaisquer dois vetores unitários e ortogonais de $T_q X$ satisfazem as condições da proposição.

Suponhamos que k_n não é constante. Consideremos a função $\tilde{k}_n : \mathbb{R}^2 - (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{k}_n(a, b) = k_n(a X_u(q) + b X_v(q)), \quad (a, b) \neq (0, 0),$$

isto é,

$$\tilde{k}_n(a, b) = \frac{a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0}{a^2 E_0 + 2ab F_0 + b^2 G_0}.$$

Esta função é diferenciável já que $(a, b) \neq (0, 0)$. Além disso, para todo $\lambda \neq 0$, $\tilde{k}_n(\lambda a, \lambda b) = \tilde{k}_n(a, b)$. Portanto, para obter os valores mínimo e máximo da função $\tilde{k}_n$, basta restringir $\tilde{k}_n$ à circunferência C de $\mathbb{R}^2$ de raio 1 dada por $a^2 + b^2 = 1$. Como $\tilde{k}_n$ é contínua, em domínio compacto, então existem pontos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) de C tais que

$$k_1 = \tilde{k}(a_1, b_1) \quad k_2 = \tilde{k}(a_2, b_2)$$

são respectivamente o mínimo e o máximo da função $\tilde{k}_n$ restrita a C . Portanto,

$$k_1 \leq \tilde{k}_n(a, b) \leq k_2, \tag{1.2}$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Além disso, como k_n não é constante, $k_1 < k_2$.

Consideremos agora os vetores de $T_q X$

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= a_1 X_u(q) + b_1 X_v(q), \\ \bar{w}_2 &= a_2 X_u(q) + b_2 X_v(q). \end{aligned}$$

Pela própria definição de $\tilde{k}_n$, temos que, para todo $w \in T_q X \setminus 0$,

$$k_1 = k_n(\bar{w}_1) \leq k_n(w) \leq k_n(\bar{w}_2) = k_2.$$

Vamos provar que $\bar{w}_1$ e $\bar{w}_2$ são vetores ortogonais. Como (a_1, b_1) e (a_2, b_2) dão o mínimo e o máximo da função $\tilde{k}_n$, então as derivadas parciais de $\tilde{k}_n$ são nulas nestes pontos. Calculando essas derivadas parciais e usando 1.2, obtemos as seguintes expressões

$$(e_0 - k_1 E_0) a_1 + (f_0 - k_1 F_0) b_1 = 0, \quad (1)$$

$$(e_0 - k_2 E_0) a_2 + (f_0 - k_2 F_0) b_2 = 0, \quad (2)$$

$$(f_0 - k_1 F_0) a_1 + (g_0 - k_1 G_0) b_1 = 0, \quad (3)$$

$$(f_0 - k_2 F_0) a_2 + (g_0 - k_2 G_0) b_2 = 0. \quad (4)$$

Se a_1, a_2, b_1, b_2 são não-nulos, então subtraímos a equação (1) multiplicada por a_2 da equação (2) multiplicada por a_1 , em seguida subtraímos a equação (3) multiplicada por b_2 da equação (4) multiplicada por b_1 . Finalmente, somando as equações obtidas, temos que

$$(k_1 - k_2)(a_1 a_2 E_0 + a_1 a_2 F_0 + a_1 a_2 G_0) = 0.$$

Como $k_1 \neq k_2$, concluímos que

$$\langle \bar{w}_1, \bar{w}_2 \rangle = a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + a_1 b_1 F_0 + b_1 b_2 G_0 = 0.$$

De modo análogo, prova-se que $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ são ortogonais quando algum dos números a_1, a_2, b_1, b_2 se anula. Observamos dois vetores ortogonais $\bar{w}_1, \bar{w}_2$, não necessariamente unitários (embora $a_i^2 + b_i^2 = 1, i = 1, 2$), que dão o mínimo e o máximo da função k_n . Considerando

$$w_1 = \frac{\bar{w}_1}{|\bar{w}_1|}, \quad w_2 = \frac{\bar{w}_2}{|\bar{w}_2|},$$

como $k_n(\lambda w) = k_n(w), \forall \lambda \neq 0$, concluímos que w_1 e w_2 satisfazem as condições da proposição. $\square$

Os vetores w_1, w_2 são ditos vetores principais de X em q e as curvaturas k_1 e k_2 são denominadas curvaturas principais. As direções de $T_q X$ determinada pelo vetores principais são chamadas direções principais.

A curvatura gaussiana é definida como o produto de k_1 e k_2 e curvatura média é a semi soma de k_1 por k_2 .

Exemplo 1.22. Se X é uma superfície parametrizada regular que descreve um plano, já vimos que a curvatura normal em qualquer ponto é identicamente nula, portanto, as curvaturas principais são $k_1 = k_2 = 0$ e todo vetor unitário é um vetor principal. Concluímos que a curvatura gaussiana e a curvatura média são identicamente nulas.

Exemplo 1.23. Seja uma esfera de raio $a > 0$ descrita por

$$X(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v),$$

$u \in \mathbb{R}, 0 < v < \pi$, tem a curvatura normal $k_n = \frac{1}{a}$ para todo (u, v) . Portanto, todo vetor

unitário tangente é um vetor principal e as curvas curvaturas principais são $k_1 = k_2 = \frac{1}{a}$.
Concluimos que $K \equiv \frac{1}{a^2}$ e $H \equiv \frac{1}{a}$.

Proposição 1.5. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $q = (u_0, v_0)$, então

$$\begin{aligned} H(q) &= \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2}, \\ K(q) &= \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}. \end{aligned}$$

onde H é a Curvatura média e K é a Curvatura Gaussiana.

Demonstração. Se um real k_0 é uma curvatura principal em q , na direção de $w = a_0 X_u(q) + b_0 X_v(q)$, então

$$\begin{aligned} (e_0 - k_0 E_0) a_0 + (f_0 - k_0 F_0) b_0 &= 0, \\ (f_0 - k_0 F_0) a_0 + (g_0 - k_0 G_0) b_0 &= 0. \end{aligned}$$

De fato, como k_0 é o valor mínimo ou máximo da função

$$\frac{a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0}{a^2 E_0 + 2ab F_0 + b^2 G_0} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0),$$

em (a_0, b_0) , obtemos o sistema de equações acima calculando derivadas parciais dessa funções em (a_0, b_0) .

Segue-se do fato de que (a_0, b_0) é uma solução não-trivial do sistema que o determinante

$$X = \begin{vmatrix} e_0 - k_0 E_0 & f_0 - k_0 F_0 \\ f_0 - k_0 F_0 & g_0 - k_0 G_0 \end{vmatrix} = 0,$$

isto é, k_0 satisfaz a equação

$$x^2 - \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2} x + \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2} = 0$$

Pela relação entre os coeficientes de uma equação do segundo grau e as raízes da equação, concluimos que

$$\begin{aligned} H(q) &= \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2}, \\ K(q) &= \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.24. Consideremos o parabolóide hiperbólico descrito por

$$\begin{aligned}X(u, v) &= (u, v, v^2 - u^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \\E(0, 0) &= 1, \quad F(0, 0) = 0, \quad G(0, 0) = 1, \\e(0, 0) &= -2, \quad f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0) = 2.\end{aligned}$$

Segue da Proposição (1.5) que $H(0, 0) \equiv 0$ e $K(0, 0) = -4$.

2

Formas Diferenciais

Neste capítulo serão apresentadas as definições de formas diferenciais de grau 1 e 2. A principal referência é (TENENBLAT, 2008).

Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e o *espaço dual* de $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^{2*}$), isto é, o conjunto das aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. O espaço dual, munido com as operações usuais de funções, é um espaço vetorial. Dada uma base e_1, e_2 de $\mathbb{R}^2$, definimos uma base f_1, f_2 de $\mathbb{R}^{2*}$ por: $f_i(e_j) = 0$ se $i \neq j$, e $f_i(e_j) = 1$ se $i = j$, $1 \leq i, j \leq 2$. f_1, f_2 é chamada *base dual* se e_1, e_2 .

Denotemos por $q = (u, v)$ os pontos de um aberto U de $\mathbb{R}^2$. A partir de agora, a base canônica de $\mathbb{R}^2$ será denotada por $\frac{\partial}{\partial u} = (1, 0)$, $\frac{\partial}{\partial v} = (0, 1)$. Serão denotadas por u e v as projeções de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ na primeira e segunda coordenadas, respectivamente. As funções u e v são diferenciáveis e, para cada $q \in U$, as diferenciais de u e v em q , du_q, dv_q , formam a base dual da base canônica de $\mathbb{R}^2$. Portanto, considerando um vetor $V = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, isto é, $V = a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v}$, então $du_q(V) = a$ e $dv_q(V) = b$.

Definição 2.1. Uma *forma de grau 1* ou *1-forma* em um aberto U de $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação ω que para cada $q \in U$ associa $\omega_q \in \mathbb{R}^{2*}$.

$$\begin{aligned}\omega : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2*} \\ q &\longmapsto \omega_q\end{aligned}$$

da forma

$$\omega_q = P(q) du_q + Q(q) dv_q$$

Com

$$\begin{aligned} P & : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ Q & : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ω é dita uma *forma diferencial de grau 1* ou *1-forma* diferenciável em U se P e Q são funções diferenciáveis de U em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1. Usando a notação anterior e definindo du e dv como sendo as aplicações que associam, para cada $q \in U$, du_q e dv_q , temos que du e dv são 1-formas diferenciais.

Apartir de agora denotaremos as derivadas parciais de $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ em relação a u e v por f_u e f_v , respectivamente.

Exemplo 2.2. Se $f(u, v)$ é uma função diferenciável (C^∞) de $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Então a aplicação $df : U \rightarrow \mathbb{R}^{2*}$, que para cada $q \in U$, associa df_q , a diferencial de f em q , é uma 1-forma diferencial pois

$$df_q = f_u(q) du_q + f_v(q) dv_q.$$

Afim de verificar esta igualdade, observamos que, se $q = (u_0, v_0)$, então $\forall V = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned} df_q(V) &= \left. \frac{d}{dt} f(u_0 + ta, v_0 + tb) \right|_{t=0} = \\ &= f_u(u_0, v_0)a + f_v(u_0, v_0)b = \\ &= f_u(q) du_q(V) + f_v(q) dv_q(V), \end{aligned}$$

assim concluímos a igualdade (2.1).

Exemplo 2.3. Se ω é uma 1-forma diferencial em $U \subset \mathbb{R}^2$, então fixados $q \in U$ e um vetor $V \in \mathbb{R}^2$, $\omega_q(V)$ é um número real. Para ilustrar, consideremos a 1-forma diferencial definida por

$$\omega = (2u - v) du - u^2 dv,$$

i.e. $\omega = P du + Q dv$, onde P e Q são funções definidas por $P(u, v) = 2u - v$ e $Q(u, v) = -u^2$. Sejam $q = (2, 1)$ e $V = (-1, -2)$, então

$$\omega_q(V) = P(2, 1) du_q(-1, -2) + Q(2, 1) dv_q(-1, -2) = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2),$$

Assim, $\omega_q(V) = 5$.

Sejam ω e $\bar{\omega}$ 1-formas diferenciais em $U \subset \mathbb{R}^2$. Definimos a soma $\omega + \bar{\omega}$ como soma de funções, dessa forma, essa soma é uma 1-forma diferencial que, para cada $q \in U$, associa

$$(\omega + \bar{\omega})_q = \omega_q + \bar{\omega}_q.$$

Isso implica que se $\omega = P du + Q dv$ e $\bar{\omega} = \bar{P} du + \bar{Q} dv$ e sendo que ω e $\bar{\omega}$ são formas diferenciais de $U \in \mathbb{R}^2$, então

$$\omega + \bar{\omega} = (P + \bar{P}) du + (Q + \bar{Q}) dv.$$

Sejam ω uma 1-forma diferencial em um aberto U de $\mathbb{R}^2$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Defini-se o *produto* $f\omega$ como a 1-forma diferencial que associa

$$(f\omega)_q = f(q) \omega_q,$$

para cada $q \in U$.

Segue-se que se f é uma função real diferenciável em U , então

$$f\omega = (fP) du + (fQ) dv$$

onde fP e fQ são as funções produto.

Definição 2.2. Se ω e $\bar{\omega}$ são 1-formas diferenciais definidas em $U \subset \mathbb{R}^2$, então podemos dizer que ω e $\bar{\omega}$ são *linearmente independentes* quando, para cada $q \in U$, ω_q e $\bar{\omega}_q$ são *linearmente independentes* como elementos do $\mathbb{R}^{2*}$.

Proposição 2.1. Sejam $\omega = P du + Q dv$ e $\bar{\omega} = \bar{P} du + \bar{Q} dv$ duas 1-formas diferenciais, ω e $\bar{\omega}$ são linearmente independentes se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} P(q) & \bar{P}(q) \\ Q(q) & \bar{Q}(q) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \omega_q + \beta \bar{\omega}_q \\ &= [\alpha \cdot P(q) + \beta \cdot \bar{P}(q)] du_q + [\alpha \cdot Q(q) + \beta \cdot \bar{Q}(q)] dv_q \\ \Rightarrow &\begin{cases} \alpha \cdot P(q) + \beta \cdot \bar{P}(q) = 0 \\ \alpha \cdot Q(q) + \beta \cdot \bar{Q}(q) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{se } P\bar{Q} - \bar{P}Q \neq 0, \quad \alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P(q) & \bar{P}(q) \\ Q(q) & \bar{Q}(q) \end{vmatrix}} = 0.$$

Analogamente, temos que $\beta = 0$.

($\implies$)

ω e $\bar{\omega}$ são linearmente independentes (ω_q e $\bar{\omega}_q$ são linearmente independentes).

$\alpha \cdot \omega_q + \beta \cdot \bar{\omega}_q = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ e $\beta = 0$, o sistema (*) tem apenas solução trivial, logo,

$$\begin{vmatrix} P(q) & \bar{P}(q) \\ Q(q) & \bar{Q}(q) \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

Agora definiremos duas operações de produto para 1-formas diferenciais. Assim, é importante lembrar que uma aplicação $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita alterada ou anti-simétrica se, para vetores arbitrários V_1, V_2 de $\mathbb{R}^2$,

$$B(V_1, V_2) = -B(V_2, V_1).$$

Definição 2.3. Sejam ω e $\bar{\omega}$ 1-formas diferenciais definidas em $U \subset \mathbb{R}^2$. O *produto tensorial* de ω e $\bar{\omega}$, denotado por $\omega \otimes \bar{\omega}$ ou $\omega\bar{\omega}$, é uma aplicação que para cada $q \in U$, associa uma transformação bilinear $(\omega\bar{\omega})_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(\omega\bar{\omega})_q(V_1, V_2) = \omega_q(V_1) \bar{\omega}_q(V_2),$$

com $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2$.

Observação: A bilinearidade de $(\omega\bar{\omega})_q$ é consequência da linearidade de ω_q e $\bar{\omega}_q$.

Na definição anterior, devemos considerar a ordem dos fatores ω e $\bar{\omega}$, visto que, geralmente, $\omega\bar{\omega}$ é diferente de $\bar{\omega}\omega$. Por exemplo, $dudv \neq dvdu$, pois

$$(dudv)_q\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 1 \text{ e } (dvdu)_q\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0.$$

Denotaremos por ω^2 o produto tensorial $\omega\omega$. A operação de produto tensorial satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 2.2. Sejam $\omega, \bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}}$ 1-formas diferenciais em $U \in \mathbb{R}^2$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então,

a) $(\omega + \bar{\omega}) \bar{\bar{\omega}} = \omega \bar{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \bar{\bar{\omega}}$

b) $\omega (\bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}) = \omega \bar{\omega} + \omega \bar{\bar{\omega}}$

c) $(f\omega) \bar{\omega} = \omega (f\bar{\omega}) = f\omega \bar{\omega}$

d) Se $\omega = P du + Q dv$ e $\bar{\omega} = \bar{P} du + \bar{Q} dv$, então

$$\omega \bar{\omega} = P \bar{P} du^2 + P \bar{Q} dudv + Q \bar{P} dvdu + Q \bar{Q} dv^2,$$

onde $f\omega \bar{\omega}$ é a aplicação que, para cada $q \in U$, associa $f(q)(\omega \bar{\omega})_q$.

Demonstração. a) Para cada $q \in U$ e para vetores $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned} [(\omega + \bar{\omega}) \bar{\bar{\omega}}]_q(V_1, V_2) &= (\omega + \bar{\omega})_q(V_1) \bar{\bar{\omega}}(V_2) = \\ &= (\omega_q(V_1) + \bar{\omega}(V_1)) \bar{\bar{\omega}}(V_2) = \\ &= \omega_q(V_1) \bar{\bar{\omega}}(V_2) + \bar{\omega}(V_1) \bar{\bar{\omega}}(V_2) = \\ &= (\omega \bar{\bar{\omega}})_q(V_1, V_2) + (\bar{\omega} \bar{\bar{\omega}})_q(V_1, V_2) = \\ &= (\omega \bar{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \bar{\bar{\omega}})_q(V_1, V_2) \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, usamos a propriedade de distributividade de números reais. Como a igualdade se aplica $\forall q, V_1$ e V_2 , concluímos a demonstração da propriedade a).

Analogamente demonstram-se as propriedades b) e c).

d) Se $\omega = P du + Q dv$ e $\bar{\omega} = \bar{P} du + \bar{Q} dv$, então

$$\omega \bar{\omega} = (P du + Q dv)(\bar{P} du + \bar{Q} dv).$$

Logo, segue-se das propriedades a), b) e c) que

$$\omega \bar{\omega} = P \bar{P} du^2 + P \bar{Q} dudv + Q \bar{P} dvdu + Q \bar{Q} dv^2$$

□

Exemplo 2.4. Consideremos as seguintes 1-formas diferenciais

$$\omega = (u + v) du + dv$$

$$\omega = (u - v) du + dv$$

Assim, usando a propriedade d) da proposição 2.1, temos

$$\omega\bar{\omega} = (u^2 - v^2) du^2 + (u + v) dudv + (u - v) dvdu + dv^2,$$

$$\bar{\omega}\omega = (u^2 - v^2) du^2 + (u - v) dudv + (u + v) dvdu + dv^2.$$

Valendo-nos do produto tensorial de 1-formas definiremos a operação de produto exterior.

Definição 2.4. Sejam ω e $\bar{\omega}$ 1-formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. O *produto exterior* de ω e $\bar{\omega}$, denotado por $\omega \wedge \bar{\omega}$, é uma aplicação que associa cada $q \in U$ a uma transformação bilinear e alternada $(\omega \wedge \bar{\omega})_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(\omega \wedge \bar{\omega})_q = (\omega\bar{\omega})_q - (\bar{\omega}\omega)_q.$$

Segue da definição acima que, $\forall V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$(\omega \wedge \bar{\omega})_q(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} \omega_q(V_1) & \omega_q(V_2) \\ \bar{\omega}_q(V_1) & \bar{\omega}_q(V_2) \end{vmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (du \wedge dv)_q \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) &= 1 \\ du \wedge du &= dv \wedge dv = 0 \\ dv \wedge dv &= -dv \wedge du. \end{aligned}$$

O produto exterior satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 2.3. Sejam $\omega, \bar{\omega}$ e $\bar{\bar{\omega}}$ 1-formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Então,

- a) $\omega \wedge (\bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}) = \omega \wedge \bar{\omega} + \omega \wedge \bar{\bar{\omega}};$
- b) $(\omega + \bar{\omega}) \wedge \bar{\bar{\omega}} = \omega \wedge \bar{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \bar{\bar{\omega}};$
- c) $(f\omega) \wedge \bar{\omega} = \omega \wedge (f\bar{\omega}) = f\omega \wedge \bar{\omega};$

d) Se $\omega = P du + Q dv$ e $\bar{\omega} = \bar{P} du + \bar{Q} dv$, então

$$\omega \wedge \bar{\omega} = (P\bar{Q} - Q\bar{P})du \wedge dv;$$

e) $\omega \wedge \bar{\omega} = -\bar{\omega} \wedge \omega$;

f) ω e $\bar{\omega}$ são linearmente independentes se, e somente se, $\forall q \in U$, temos $(\omega \wedge \bar{\omega})_q \neq 0$.

Demonstração. a) Para cada $q \in U$, temos que

$$\begin{aligned} (\omega \wedge (\bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}))_q &= (\omega(\bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}))_q - ((\bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}})\omega)_q = \\ &= (\omega\bar{\omega})_q + (\omega\bar{\bar{\omega}})_q - (\bar{\omega}\omega)_q - (\bar{\bar{\omega}}\omega)_q = \\ &= (\omega \wedge \bar{\omega})_q + (\omega \wedge \bar{\bar{\omega}})_q, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos as propriedades a) e b) da Proposição 2.2. Como a igualdade se verifica $\forall q \in U$, concluímos a demonstração da propriedade a). Pode-se demonstrar as propriedades b) e c) de forma completamente análoga.

d) Se $\omega = P du + Q dv$ e $\bar{\omega} = \bar{P} du + \bar{Q} dv$, então

$$\omega \wedge \bar{\omega} = (P du + Q dv) \wedge (\bar{P} du + \bar{Q} dv).$$

Usando as propriedades a), b) e c), temos que

$$\omega \bar{\omega} = P\bar{P} du \wedge du + P\bar{Q} du \wedge dv + Q\bar{P} dv \wedge du + Q\bar{Q} dv \wedge dv.$$

Como $du \wedge du = dv \wedge dv = 0$ e $du \wedge dv = -dv \wedge du$, logo, temos

$$\omega \wedge \bar{\omega} = (P\bar{Q} - Q\bar{P})du \wedge dv.$$

A propriedade e) decorre de d).

Para provar f) consideramos $\omega = P du + Q dv$ e $\bar{\omega} = \bar{P} du + \bar{Q} dv$. Sabe-se que ω e $\bar{\omega}$ são linearmente independentes se, e somente se, $\forall q \in U$,

$$\begin{vmatrix} P(q) & \bar{P}(q) \\ Q(q) & \bar{Q}(q) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Como $(du \wedge dv)_q$ não é uma aplicação indenticamente nula, a partir de d) concluímos que $(\omega \wedge \bar{\omega})_q \neq 0$.

□

Exemplo 2.5. Consideremos as 1-formas diferenciais

$$\begin{aligned}\omega &= (2u + v) du - (u^2 - v) dv \\ \bar{\omega} &= u du + v dv\end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}\omega \wedge \bar{\omega} &= [(2u + v) du - (u^2 - v) dv] \wedge [u du + v dv] \\ &= [(2u + v) \cdot v + (u^2 - v) \cdot u] du \wedge dv \\ &= (u^3 + v^2 + u \cdot v) du \wedge dv.\end{aligned}$$

Exemplo 2.6. Se $V_1 = (a_1, b_1)$ e $V_2 = (a_2, b_2)$ são vetores de $\mathbb{R}^2$, então segue-se da definição de produto exterior que, $\forall q$,

$$(du \wedge dv)_q(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} du_q(V_1) & du_q(V_2) \\ dv_q(V_1) & dv_q(V_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Definição 2.5. Um *forma diferencial de grau 2* ou uma *2-forma diferencial* em um aberto U de $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação ϕ que, para cada $q \in U$, associa uma transformação bilinear e alternada $\phi_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\phi_q = f(q) (du \wedge dv)_q,$$

onde f é uma função diferenciável de U em $\mathbb{R}$. A 2-forma será denotada por $\phi = f du \wedge dv$.

A partir da propriedade d) da proposição 2.3, segue que o produto exterior de duas 1-formas diferenciais é uma 2-forma diferencial. A soma de 2-formas diferenciais também é definida como soma de funções, isto é, se $\phi = f du \wedge dv$ e $\bar{\phi} = \bar{f} du \wedge dv$, então

$$\phi + \bar{\phi} = (f + \bar{f}) du \wedge dv,$$

a soma de ϕ e $\bar{\phi}$ é uma 2-forma.

Se h é uma função real diferenciável, o produto $h\phi$ é definido por

$$h\phi = (hf) du \wedge dv.$$

Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é *0-forma diferencial* em U .

Definição 2.6. Seja $\omega = P du + Q dv$ uma 1-forma diferencial. A *diferencial exterior* de ω , denotada por $d\omega$, é a 2-forma diferencial definida por

$$d\omega = dP \wedge du + dQ \wedge dv.$$

Exemplo 2.7. Seja $\omega = P du + Q dv$ onde $P(u, v) = u^2 + v^2$ e $Q(u, v) = 2uv$.

Pelo exemplo (2.2) dP e dQ são formas diferenciáveis dadas por $dP = 2u du + 2v dv$ e $dQ = 2v du + 2u dv$.

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge du + dQ \wedge dv \\ &= 2u du \wedge du + 2v dv \wedge du + 2v du \wedge dv + 2u dv \wedge dv \\ &= (2v - 2v) du \wedge dv \\ &= 0. \end{aligned}$$

A diferencial exterior satisfaz a propriedades a seguir.

Proposição 2.4. Sejam ω e $\bar{\omega}$ 1-formas diferenciais em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

- a) Se $\omega = P du + Q dv$, então $d\omega = (Q_u - P_v) du \wedge dv$;
- b) $d(df) = 0$;
- c) $d(\omega + \bar{\omega}) = d\omega + d\bar{\omega}$;
- d) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$

onde Q_u e P_v indicam as derivadas parciais das funções Q e P .

Demonstração. a) Se $\omega = P du + Q dv$, então

$$d\omega = dP \wedge du + dQ \wedge dv.$$

Substituindo $dP = P_u du + P_v dv$ e $dQ = Q_u du + Q_v dv$ na expressão anterior e usando as propriedades do produto exterior, concluímos que

$$d\omega = (Q_u - P_v) du \wedge dv.$$

b) Como $df = f_u du + f_v dv$, segue-se de a) que

$$d(df) = (f_{vu} - f_{uv}) du \wedge dv.$$

Pelo teorema de Schwartz $f_{vu} = f_{uv}$, por isso, temos

$$d(df) = (f_{vu} - f_{uv})du \wedge dv = 0. \quad (2.1)$$

c) Se $\omega = P du + Q dv$ e $\bar{\omega} = \bar{P} du + \bar{Q} dv$, então

$$\omega + \bar{\omega} = (P + \bar{P}) du + (Q + \bar{Q}) dv.$$

$\therefore$

$$d(\omega + \bar{\omega}) = d(P + \bar{P}) \wedge du + d(Q + \bar{Q}) \wedge dv.$$

Como a diferencial de uma soma de funções em um ponto q é igual à soma das diferenciais das funções em q , temos que

$$d(\omega + \bar{\omega}) = (dP + d\bar{P}) \wedge du + (dQ + d\bar{Q}) \wedge dv.$$

Usando as propriedades do produto exterior, temos

$$d(\omega + \bar{\omega}) = dP \wedge du + d\bar{P} \wedge du + dQ \wedge dv + d\bar{Q} \wedge dv,$$

assim, concluímos que

$$d(\omega + \bar{\omega}) = d\omega + d\bar{\omega}.$$

d) Se $\omega = P du + Q dv$, então

$$f\omega = fP du + fQ dv.$$

Portanto,

$$d(f\omega) = d(fP) \wedge du + d(fQ) \wedge dv. \quad (2.2)$$

fP é um produto de funções $\forall q$, logo

$$d(fP)_q = df_q P(q) + f(q) dP_q \quad (2.3)$$

i.e.

$$d(fP) = P df + f dP. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) e (2.5) para $d(fQ)$ em (2.3) chegamos em

$$d(fP) = (P df + f dP) \wedge du + (Q df + f dQ) \wedge dv,$$

pelas propriedades de produto exterior, concluímos que

$$\begin{aligned} d(f\omega) &= df \wedge (P du + Q dv) + f(dP \wedge du + dQ \wedge dv) = \\ &= df \wedge \omega + f d\omega. \end{aligned}$$

□

Como aplicação das definições e proposições da presente seção serão resolvidos os seguintes exercícios sobre formas diferenciáveis.

Exercício 1. Seja $\omega = P du + Q dv$ e $V = (a, b)$. Verifique que, para todo $q \in \mathbb{R}^2$, $\omega_q(V) = P(q) a + Q(q) b$.

Sabe-se que $V = a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v}$, então $du_q(V) = a$ e $dv_q(V) = b$.

Logo, $\omega = P du + Q dv$ aplicado em $V = (a, b)$ é $\omega_q(V) = P(q) a + Q(q) b$.

Exercício 2. Considere as formas diferenciais

$$\begin{aligned} \omega &= v^2 du, \\ \bar{\omega} &= v du - u dv, \\ \bar{\bar{\omega}} &= (u^2 - 1) du + dv, \end{aligned}$$

o ponto $q = (-2, 1)$ e os vetores $V_1 = (2, -3)$, $V_2 = (1, 2)$.

a) obtenha as 2-formas $\omega \wedge \bar{\omega}$, $\omega \wedge \bar{\bar{\omega}}$, $\bar{\omega} \wedge \bar{\bar{\omega}}$.

$$\begin{aligned} \omega \wedge \bar{\omega} &= [v^2 du + 0 dv] \wedge [v du - u dv] \\ &= v^2 \cdot v du \wedge du + v^2(-u) du \wedge dv - 0 \cdot v dv \wedge du + 0 \cdot u dv \wedge dv \\ &= -v^2 \cdot u du \wedge dv. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \wedge \bar{\bar{\omega}} &= [v^2 du + 0 dv] \wedge [(u^2 - 1) du + dv] \\ &= v^2 \cdot (u^2 - 1) du \wedge du + v^2 du \wedge dv - 0 \cdot (u^2 - 1) dv \wedge du - 0 \cdot 1 dv \wedge dv \\ &= v^2 du \wedge dv. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} \wedge \bar{\bar{\omega}} &= [v \, du - u \, dv] \wedge [(u^2 - 1) \, du + dv] \\
&= v \cdot (u^2 - 1) \, du \wedge du + v \, du \wedge dv - u \cdot (u^2 - 1) \, dv \wedge du - u \, dv \wedge dv \\
&= (v + u^3 - u) \, du \wedge dv.
\end{aligned}$$

b) Calcule o valor das formas $\omega, \bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}}$ em q nos vetores V_1 e V_2 .

$$\begin{aligned}
\omega &= v^2 \, du + 0 \, dv \\
\omega_q(V_1) &= 1^2 \cdot (2) = 2 \\
\omega_q(V_2) &= 1^2 \cdot (1) = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= v \, du + u \, dv \\
\bar{\omega}_q(V_1) &= (1 \cdot 2) - [(-2)(-3)] = 2 - 6 = -4 \\
\bar{\omega}_q(V_2) &= (1 \cdot 1) - [(-2)(2)] = 1 + 4 = 5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\omega}} &= (u^2 - 1) \, du + dv \\
\bar{\bar{\omega}}_q(V_1) &= [((-2)^2 - 1) \cdot 2] + (-3) = 6 - 3 = 3 \\
\bar{\bar{\omega}}_q(V_2) &= [((-2)^2 - 1) \cdot 1] + 2 = 3 + 2 = 5
\end{aligned}$$

c) Calcule o valor das 2-formas do item a) em q para o par de vetores (V_1, V_2) .

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \bar{\omega} &= -v^2 \cdot u \, du \wedge dv \\
(\omega \wedge \bar{\omega})_q(V_1, V_2) &= -(1)^2 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4 + 3) = 14
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \bar{\bar{\omega}} &= v^2 \, du \wedge dv \\
(\omega \wedge \bar{\bar{\omega}})_q(V_1, V_2) &= 1^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 + 3) = 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} \wedge \bar{\bar{\omega}} &= (v + u^3 - u) \, du \wedge dv \\
(\bar{\omega} \wedge \bar{\bar{\omega}})_q(V_1, V_2) &= (1 + (-2)^3 - (-2)) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot 7 = -35
\end{aligned}$$

Exercício 3. Seja f e g funções reais diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, verifique que

$$df \wedge dg = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} du \wedge dv.$$

$$df = f_u du + f_v dv$$

$$dg = g_u du + g_v dv$$

$$\begin{aligned} df \wedge dg &= f_u g_v du \wedge dv + f_v g_u dv \wedge du \\ &= \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} du \wedge dv. \end{aligned}$$

Exercício 4. Sejam f e g funções reais diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$. Obtenha as seguintes diferenciais em termos de df e dg :

a)

$$d(fdg) = df \wedge dg + fd(dg) = df \wedge dg;$$

b)

$$d(fdg + gdf) = df \wedge dg + dg \wedge df = 0;$$

c)

$$\begin{aligned} &d((f - g)(df + dg)) = \\ &= d(f - g) \wedge (df + dg) + (f - g) \cdot d(df + dg) \\ &= (df - dg) \wedge (df + dg) \\ &= df^2 + dfdg - dgdf + dg^2 \\ &= 2dfdg; \end{aligned}$$

Faremos agora algumas generalizações que serão utilizadas na próxima seção.

Ao considerarmos uma aplicação diferencial $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ surge o conceito de terno de formas diferenciais. Se F é definida por

$$F(u, v) = (F^1(u, v), F^2(u, v), F^3(u, v)),$$

dessa forma, para cada $q = (u, v) \in U$, a diferencial de F em q é a aplicação linear

$dF_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que para cada $V \in \mathbb{R}^2$, associa

$$dF_q(V) = (dF_q^1(V), dF_q^2(V), dF_q^3(V)).$$

Como dF^1, dF^2, dF^3 são 1-formas diferenciais é natural considerar $dF = (dF^1, dF^2, dF^3)$ como um terno de 1-formas diferenciais em U .

Definição 2.7. Um terno (ordenado) de 1-formas diferenciais em $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação Ω que, para cada $q \in U$, associa uma transformação linear $\Omega_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, assim,

$$\Omega_q : ((\omega^1)_q, (\omega^2)_q, (\omega^3)_q).$$

Ω é um *terno de 1-formas diferenciais* se ω^1, ω^2 e ω^3 são 1-formas diferenciais.

Sejam Ω e $\bar{\Omega}$ dois ternos de formas diferenciais em $U \subset \mathbb{R}^2$ e f uma função diferenciável em U , a soma e o produto são definidos, respectivamente, como soma e produto de funções. Para elucidar, se

$$\begin{aligned}\Omega &= ((\omega^1), (\omega^2), (\omega^3)), \\ \bar{\Omega} &= ((\bar{\omega}^1), (\bar{\omega}^2), (\bar{\omega}^3)),\end{aligned}$$

então,

$$\Omega + \bar{\Omega} : (\omega^1 + \bar{\omega}^1, \omega^2 + \bar{\omega}^2, \omega^3 + \bar{\omega}^3),$$

e

$$f\Omega = (f\omega^1, f\omega^2, f\omega^3).$$

Se $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável, cujas funções coordenadas são F^1, F^2, F^3 e ω é uma 1-forma diferencial em U , definimos $F\omega$ como sendo o terno de 1-formas diferenciais

$$F\omega = (F^1\omega, F^2\omega, F^3\omega).$$

A partir das definições acima, temos que, se $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável, cujas funções coordenadas são F^1, F^2, F^3 , então o terno de 1-formas $dF = (dF^1, dF^2, dF^3)$ é igual a

$$dF = F_u du + F_v dv,$$

onde F_u e F_v são derivadas parciais de $F(u, v)$.

De forma análoga podemos definir um terno de 2-formas diferenciais em $U \subset \mathbb{R}^2$ como sendo uma aplicação ϕ que, para cada $q \in U$, associa uma transformação $\phi_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujas funções coordenadas $(\phi^1)_q, (\phi^2)_q, (\phi^3)_q$ são 2-formas diferenciais em U .

Se ϕ e $\bar{\phi}$ são dois ternos de 2-formas diferenciais em $U \subset \mathbb{R}^2$ e f é função real diferenciável em U , a soma $\phi + \bar{\phi}$ e o produto $f\phi$ são terno de 2-formas diferenciais.

Se $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma palicação diferenciável e ϕ é uma 2-forma diferencial em U , definimos $F\phi$ como sendo o terno de 2-formas diferenciais.

$$F\phi = (F^1\phi, F^2\phi, F^3\phi),$$

onde F^1, F^2, F^3 são as funções coordenadas de F .

Podemos definir a diferencial exterior de um terno $\Omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ de 1-formas como

$$d\Omega = (d\omega^1, d\omega^2, d\omega^3).$$

Logo, $d\Omega$ é um terno de 2-formas diferenciais.

A partir desta definição e da propriedade b) da proposição 2.3, temos que, se $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável, então

$$d(dF) = 0. \tag{2.5}$$

A respeito do produto exterior, sejam uma 1-forma ω num aberto U de $\mathbb{R}^2$ e um terno 1-formas $\Omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$, podemos definir o produto exterior $\Omega \wedge \omega$ como sendo o terno de 2-formas diferenciais dado por

$$\Omega \wedge \omega = (\omega^1 \wedge \omega, \omega^2 \wedge \omega, \omega^3 \wedge \omega).$$

Análogamente define-se $\omega \wedge \Omega$.

3

Triedro Móvel

Neste capítulo serão estudados importantes elementos para a fundamentação do método do tridero móvel, dentre eles o co-referencial, formas de conexão e equações de estrutura. Também será feito o estudo da teoria local de superfícies através do método do triedro móvel. A referência que se destaca no presente capítulo é ([TENENBLAT, 2008](#)).

Definição 3.1. Um *triedro móvel* associado a uma superfície parametrizada regular X , tal que $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é um terno de funções diferenciáveis e_1, e_2, e_3 de U em $\mathbb{R}^3$ tal que, $\forall q \in U$, o conjunto dos vetores $e_1(q), e_2(q), e_3(q)$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e $e_1(q), e_2(q)$ são vetores tangentes à superfície X em q .

A partir desta definição, concluímos que os vetores $e_1(q), e_2(q)$ formam uma base no plano tangente $T_q X$ e e_3 é um vetor normal à superfície X em q .

Dessa forma, existe um triedro móvel para qualquer superfície regular parametrizada. Para elucidar, consideremos por exemplo,

$$e_3(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q), \quad e_1(q) = \frac{X_u}{|X_u|}(q) \quad \text{e} \quad e_2(q) = e_3(q) \times e_1(q).$$

Se e_1, e_2, e_3 formarem uma base ortonormal $\langle e_1 \times e_2, e_3 \rangle = \pm 1$ então podemos nos restringir a triedros tais que,

$$\langle e_1 \times e_2, e_3 \rangle = 1.$$

Exemplo 3.1. Consideremos uma superfície de rotação

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

gerada por uma curva regular $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, onde a função f não se anula. Como

os vetores X_u e X_v são ortogonais, as funções definidas por

$$e_1 = \frac{X_u}{|X_u|}, \quad e_2 = \frac{X_v}{|X_v|}, \quad e_3 = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

formam um triedro móvel associado a X .

Exemplo 3.2. Seja $X(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ uma superfície regular. Consideremos uma aplicação $V : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$V(u, v) = a(u, v) X_u(u, v) + b(u, v) X_v(u, v),$$

onde a e b são funções reais diferenciáveis, que não se anulam simultaneamente. $V(u, v)$ é um vetor não-nulo do plano tangente a X em (u, v) . A partir da aplicação V , vamos definir um triedro móvel associado a X da seguinte forma:

$$e_1 = \frac{V}{|V|}, \quad e_3 = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, \quad e_2 = e_3 \times e_1.$$

Como as funções a e b são arbitrárias, este exemplo mostra que existe uma infinidade de triedros móveis associados a uma superfície.

Seja e_1, e_2, e_3 um triedro móvel associado a uma superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para cada $q \in U$ e cada $V \in \mathbb{R}^2$, temos que $dX_q(V)$ pertence ao plano tangente a X em q pois $dX_q(1, 0) = X_u$ e $dX_q(0, 1) = X_v$. Como os vetores $e_1(q), e_2(q)$ formam uma base de $T_q X$, temos que $dX_q(V)$ é uma combinação linear de $e_1(q)$ e $e_2(q)$. Isto é,

$$dX_q(V) = (\omega_1)_q(V) e_1(q) + (\omega_2)_q(V) e_2(q),$$

onde

$$(\omega_1)_q(V) = \langle dX_q(V), e_1(q) \rangle,$$

$$(\omega_2)_q(V) = \langle dX_q(V), e_2(q) \rangle.$$

Analogamente, tomando as funções diferenciais $e_i : U \rightarrow \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3$, temos que, para cada $q \in U$, a diferencial de e_i em q é uma aplicação linear $(de_i)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como os vetores $e_1(q), e_2(q), e_3(q)$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, para cada $V \in \mathbb{R}^2$, $(de_i)_q(V)$ é uma combinação linear dos elementos dessa base, isto é,

$$(de_i)_q(V) = (\omega_{i1})_q(V) e_1(q) + (\omega_{i2})_q(V) e_2(q) + (\omega_{i3})_q(V) e_3(q),$$

onde

$$(\omega_{ij})_q(V) = \langle (de_i)_q(V), e_j(q) \rangle, 1 \leq i, j \leq 3.$$

Para cada q , temos que $(\omega_1)_q, (\omega_2)_q, (\omega_{ij})_q$ são funções lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, portanto, ω_1, ω_2 e ω_{ij} são 1-formas diferenciais em U .

Considerando os ternos de 1-formas em U , dX e de_i , as expressões acima podem ser escritas como:

$$dX = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \quad (3.1)$$

$$de_i = \omega_{i1} e_1 + \omega_{i2} e_2 + \omega_{i3} e_3, 1 \leq i \leq 3, \quad (3.2)$$

onde

$$\omega_1 = \langle dX, e_1 \rangle$$

$$\omega_2 = \langle dX, e_2 \rangle \quad (3.3)$$

$$\omega_{ij} = \langle de_i, e_j \rangle, 1 \leq i, j \leq 3.$$

são 1-formas diferenciais em U . Ademais, visto que $dX = X_u du + X_v dv$ e $de_i = (e_i)_u du + (e_i)_v dv$, segue-se de (3.3) que

$$\omega_1 = \langle X_u, e_1 \rangle du + \langle X_v, e_1 \rangle dv,$$

$$\omega_2 = \langle X_u, e_2 \rangle du + \langle X_v, e_2 \rangle dv, \quad (3.4)$$

$$\omega_{ij} = \langle (e_i)_u, e_j \rangle du + \langle (e_i)_v, e_j \rangle dv.$$

Agora, verificaremos que qualquer 1-forma diferencial em U é uma combinação linear de ω_1 e ω_2 . Como, para cada $q \in U$, os dois pares de vetores $X_u(q), X_v(q)$ e $e_1(q), e_2(q)$ formam bases do plano tangente $T_q X$, temos que

$$X_u = a_{11} e_1 + a_{12} e_2,$$

$$X_v = a_{21} e_1 + a_{22} e_2, \quad (3.5)$$

onde $a_{11} = \langle X_u, e_1 \rangle$, $a_{12} = \langle X_u, e_2 \rangle$, $a_{21} = \langle X_v, e_1 \rangle$, $a_{22} = \langle X_v, e_2 \rangle$, são funções diferenciáveis em U tais que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(q) \neq 0.$$

Segue de (3.4) que

$$\begin{aligned}\omega_1 &= a_{11} du + a_{21} dv, \\ \omega_2 &= a_{12} du + a_{22} dv.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Logo,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} du \wedge dv.$$

Assim, levando em conta essas relações, concluímos que ω_1 e ω_2 são 1-formas diferenciais linearmente independentes. Logo, qualquer 1-forma diferencial em U é uma combinação linear de ω_1 e ω_2 em que os coeficientes são funções diferenciáveis. Além disso, percebemos que, se V_1 e V_2 são os vetores de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$dX_q(V_1) = e_1(q), dX_q(V_2) = e_2(q),$$

então,

$$(\omega_i)_q(V_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq 2.\tag{3.7}$$

Dizemos que ω_1, ω_2 é o *co-referencial* do triedro móvel associado à superfície e as formas $\omega_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$, são chamadas *formas de conexão* do triedro. As formas definidas anteriormente satisfazem certas relações que serão obtidas agora.

Proposição 3.1. Seja e_1, e_2, e_3 um triedro móvel associado a uma superfície $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. O co-referencial e as formas de conexão satisfazem as relações:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, 1 \leq i, j \leq 3,\tag{3.8}$$

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21},\tag{3.9}$$

$$d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_{12},\tag{3.10}$$

$$\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0,\tag{3.11}$$

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32},\tag{3.12}$$

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_{23},\tag{3.13}$$

$$d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13},\tag{3.14}$$

Demonstração. e_1, e_2, e_3 são funções diferenciáveis definidas em U , tais que, para cada

$q \in U$, $e_1(q), e_2(q), e_3(q)$ são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$. Portanto, podemos considerar as funções diferenciáveis em U , definidas por

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

onde $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Tomando a diferencial de cada uma dessas funções, obtemos para cada i, j

$$\langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = 0,$$

e segue de (3.3) que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, em particular $\omega_{ii} = 0$.

Para provar as relações (3.9) a (3.11) observamos que cada $d(dX) = 0$. Portanto, decorre de (3.1) que $d(e_1\omega_1 + e_2\omega_2) = 0$, utilizando as propriedades de diferencial exterior

$$e_1 d\omega_1 + de_1 \wedge \omega_1 + e_2 d\omega_2 + de_2 \wedge \omega_2 = 0.$$

Substituindo de_1 e de_2 pela relação (3.2), considerando (3.8) e que $\omega_{ii} = 0$, obtemos o seguinte

$$(d\omega_1 - \omega_2 \wedge \omega_{21}) e_1 + (d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_{12}) e_2 - (\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}) e_3 = 0,$$

dessa forma, concluímos que (3.9), (3.10), (3.11) são satisfeitas.

Analogamente, valendo-nos de (3.2) e lembrando que, para cada i , $1 \leq i \leq 3$, $d(de_i) = 0$, temos que

$$\sum_{j=1}^3 d(e_j \omega_{ij}) = 0,$$

isto é, para cada i ,

$$\sum_{j=1}^3 de_j \wedge \omega_{ij} + \sum_{j=1}^3 e_j d\omega_{ij} = 0,$$

Substituindo de_j por (3.2):

$$\sum_{j,k=1}^3 \omega_{jk} \wedge \omega_{ij} e_k + \sum_{j=1}^3 e_k d\omega_{ik} = 0.$$

Logo, para cada $i, k, 1 \leq i, k \leq 3$,

$$d\omega_{ik} = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \wedge \omega_{jk},$$

e concluímos, usando (3.8), que (3.12), (3.13), (3.14) são verdade. $\square$

As relações (3.8) a (3.14) são ditas *equações de estrutura* e são fundamentais para o estudo que se segue.

Exemplo 3.3. Consideremos uma superfície de rotação

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

$f(u) > 0$, e o triedro móvel associado a X , definido por

$$e_1 = \frac{X_u}{|X_u|}, \quad e_2 = \frac{X_v}{|X_v|}, \quad e_3 = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}.$$

Vamos obter o co-referencial ω_1, ω_2 e as formas de conexão ω_{ij} desse triedro móvel. Como

$$\omega_1 = \langle dX, e_1 \rangle = \left\langle X_u du + X_v dv, \frac{X_u}{|X_u|} \right\rangle = |X_u| du$$

então,

$$\omega_1 = \sqrt{(f')^2 + (g')^2} du.$$

De modo análogo, temos

$$\omega_2 = \langle dX, e_2 \rangle = |X_v| dv,$$

assim,

$$\omega_2 = f dv.$$

Vamos determinar as formas de conexão ω_{12} , ω_{13} e ω_{23} .

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \langle de_1, e_2 \rangle = \left\langle d \left(\frac{X_u}{|X_u|} \right), \left(\frac{X_v}{|X_v|} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{X_u}{|X_u|} \right)_u du + \left(\frac{X_u}{|X_u|} \right)_v dv, \left(\frac{X_v}{|X_v|} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

onde

$$\left(\frac{X_u}{|X_u|} \right)_u = \left(X_{uu} \cdot |X_u| - \frac{X_u \cdot \langle X_{uu}, X_u \rangle}{|X_u|} \right) \frac{1}{|X_u|^2}$$

e

$$\left(\frac{X_u}{|X_u|} \right)_v = \left(X_{uv} \cdot |X_u| - \frac{X_u \cdot \langle X_{uv}, X_u \rangle}{|X_u|} \right) \frac{1}{|X_u|^2}$$

logo,

$$\omega_{12} = \frac{1}{|X_u||X_v|} (\langle X_{uu}, X_v \rangle du + \langle X_{uv}, X_v \rangle dv).$$

Portanto,

$$\omega_{12} = \frac{f}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} dv.$$

De modo correlato, obtemos

$$\begin{aligned}\omega_{13} &= \frac{g''f' - g'f''}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} du, \\ \omega_{23} &= \frac{g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} dv.\end{aligned}$$

Seja e_1, e_2, e_3 um triedro móvel associado a uma superfície $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ω_1, ω_2 o co-referencial e ω_{ij} as formas de conexão. Como qualquer 1-forma em U é uma combinação linear de ω_1 e ω_2 , as 1-formas ω_{13} e ω_{23} podem ser expressas por

$$\begin{aligned}\omega_{13} &= h_{11} \omega_1 + h_{12} \omega_2, \\ \omega_{23} &= h_{21} \omega_1 + h_{22} \omega_2,\end{aligned}\tag{3.15}$$

Substituindo-as em (3.11), obtemos

$$(h_{12} - h_{21}) \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

Como ω_1 e ω_2 são linearmente independentes, pela proposição 2.2 item f, concluímos que

$$h_{12} = h_{21}\tag{3.16}$$

A seguinte proposição ilustra que ω_{12} , como combinação linear de ω_1 e ω_2 , é determinada por (3.9) e (3.10).

Proposição 3.2. A forma diferencial ω_{12} é determinada pelas equações

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21},\tag{3.17}$$

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12},\tag{3.18}$$

Demonstração. Sejam ω_{12} e $\bar{\omega}_{12}$ 1-formas diferenciais, satisfazendo (3.17) e (3.18). Pretendemos provar que $\omega_{12} = \bar{\omega}_{12}$. Com efeito, como

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21},\tag{3.19}$$

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \bar{\omega}_{12},$$

Por subtração, obtemos

$$0 = \omega_1 \wedge (\omega_{21} - \bar{\omega}_{21}).$$

Similarmente, considerando a segunda equação, temos

$$0 = \omega_1 \wedge (\omega_{12} - \bar{\omega}_{12}).$$

Como $\omega_{12} - \bar{\omega}_{12}$ é uma combinação linear de ω_1 e ω_2 , podemos escrever $\omega_{12} - \bar{\omega}_{12} = A\omega_1 + B\omega_2$. Substituindo esta expressão nas duas últimas equações e usando o fato de que ω_1 e ω_2 são linearmente independentes obtemos que $A = B = 0$, e concluímos que $\omega_{12} = \bar{\omega}_{12}$. $\square$

Seguiremos com um estudo de superfícies e linhas de curvatura usando o triedro móvel associado a uma superfície.

Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície e q um ponto de U . Sabe-se que a primeira forma quadrática I_q em q é uma aplicação que, para cada vetor tangente $\omega \in T_qX$, associa $I_q(w) = \langle w, w \rangle$. Notamos que, como $w \in T_qX$, temos que $w = dX_q(V)$, onde $V \in \mathbb{R}^2$. Logo,

$$I_q(dX_q(V)) = \langle dX_q(V), dX_q(V) \rangle.$$

Ou seja, podemos considerar a primeira forma quadrática em q como uma aplicação $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, denotada também por I_q , que associa, para cada $V \in \mathbb{R}^2$,

$$I_q(V) = \langle dX_q(V), dX_q(V) \rangle. \quad (3.20)$$

Similarmente, para a segunda forma quadrática, consideremos $w \in T_qX$ um vetor tangente e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva diferenciável da superfície tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$, $\alpha'(t_0) = w$. Lembrando que a segunda forma quadrática II_q em q é a aplicação que, para $w \in T_qX$, associa

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(q) \rangle,$$

onde $N(q)$ é o vetor normal a X em q . Para cada t , temos

$$\langle \alpha'(t), N(u(t), v(t)) \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\langle \alpha''(t_0), N(q) \rangle + \left\langle \alpha'(t_0), \frac{dN}{dt}(t_0) \right\rangle = 0,$$

e

$$II_q(w) = - \left\langle w, \frac{dN}{dt}(t_0) \right\rangle.$$

Como w é um vetor tangente à superfície em q , temos que $w = dX_q(V)$ para algum vetor V de $\mathbb{R}^2$. Além disso, $\alpha'(t_0) = w$. Segue-se da igualdade $dX_q(V) = \alpha'(t_0)$ que $V = (u'(t_0), v'(t_0))$ pois $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e, logo, $\frac{dN}{dT}(t_0) = dN_q(V)$. Dessa forma,

$$II_q(dX_q(V)) = -\langle dX_q(V), dN_q(V) \rangle.$$

Assim, podemos considerar a segunda forma quadrática em q como uma aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, denotada também por II_q que, para cada $V \in \mathbb{R}^2$, associa

$$II_q(V) = -\langle dX_q(V), dN_q(V) \rangle. \quad (3.21)$$

Consideremos e_1, e_2, e_3 um triedro móvel associado a superfície $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\omega_1, \omega_2, \omega_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$, o co-referencial e as formas de conexão do triedro. Como $dX = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$, segue-se de (3.20) que a primeira forma quadrática é dada por

$$I = \langle dX, dX \rangle = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad (3.22)$$

isto é, para cada ponto $q \in U$ e cada vetor $V \in \mathbb{R}^2$,

$$I_q(V) = ((\omega_1)_q(V))^2 + ((\omega_2)_q(V))^2.$$

Analogamente, como e_3 é normal à superfície, segue-se de (3.21) que a segunda forma quadrática é dada por

$$II = -\langle dX, de_3 \rangle = -\langle \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2 + \omega_{33} e_3 \rangle = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23},$$

ou seja, para cada ponto $q \in U$ e cada vetor $V \in \mathbb{R}^2$

$$I_q(V) = (\omega_1)_q(V)(\omega_{13})_q(V) + (\omega_2)_q(V)(\omega_{23})_q(V).$$

Agora relacionaremos os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas da superfície X com o co-referencial e as formas de conexão de um triedro associado. Consideremos a matriz $A(q)$ definida por

$$A(q) = \begin{pmatrix} \omega_1(q) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) & \omega_2(q) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \\ \omega_1(q) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) & \omega_2(q) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \end{pmatrix}, q \in U,$$

onde $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Como $dX = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$ e $X_u = dX_q \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$, $X_v = dX_q \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)$, segue-se da definição de coeficientes da primeira forma quadrática, que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = AA^t, \quad (3.23)$$

na qual A^t denota a matriz transposta de A .

Similarmente, como

$$de_3 = -\omega_{13} e_1 - \omega_{23} e_2,$$

segue-se das relações (3.8) a (3.11) que

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}(q) = A(q) \begin{pmatrix} \omega_{13}(q) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) & \omega_{13}(q) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \\ \omega_{23}(q) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) & \omega_{23}(q) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Por fim, considerando (3.15), temos

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= h_{11} \omega_1 + h_{12} \omega_2, \\ \omega_{23} &= h_{21} \omega_1 + h_{22} \omega_2, \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como $h_{12} = h_{22}$, obtemos de (3.24) que

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{22} & h_{22} \end{pmatrix} A^t. \quad (3.26)$$

A partir dessas relações vamos verificar que as curvaturas principais, curvatura média, e curvatura gaussiana da superfície são determinadas pelas funções h_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$.

Proposição 3.3. K é uma curvatura principal da superfície se, e somente se, k é solução da equação

$$\begin{vmatrix} h_{11} - k & h_{22} \\ h_{21} & h_{22} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Sabe-se que k é uma curvatura principal se, e somente, se

$$\begin{vmatrix} e - kE & f - kF \\ f - kF & g - kG \end{vmatrix} = 0.$$

Seguindo com a notação matricial, decorre de (3.23) e (3.25) que

$$\begin{pmatrix} e - kE & f - kF \\ f - kF & g - kG \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h_{11} - k & h_{22} \\ h_{21} & h_{22} - k \end{pmatrix} A^t.$$

e $\det A \neq 0$. Logo, K é uma curvatura principal se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} h_{11} - k & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - k \end{vmatrix} = 0.$$

□

Decorre da Proposição (3.3) que as curvaturas principais são as soluções da equação

$$k^2 - (h_{11} + h_{22})k + h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = 0.$$

Como a curvatura gaussiana K é o produto das curvaturas principais e a curvatura média H é a semi-soma das curvaturas principais, decorre dessa equação que

$$K = h_{11}h_{22} - h_{12}^2, \quad (3.27)$$

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}. \quad (3.28)$$

Proposição 3.4. Seja e_1, e_2, e_3 um triedro móvel associado a uma superfície X . Então, as formas diferenciais ω_1, ω_2 e ω_{ij} satisfazem às equações:

$$d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23} = -K \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (3.29)$$

$$\omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_{13} \wedge \omega_2 = 2H \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (3.30)$$

Demonstração. Considerando as expressões

$$\omega_{13} = h_{11} \omega_1 + h_{12} \omega_2$$

$$\omega_{23} = h_{21} \omega_1 + h_{22} \omega_2.$$

onde $h_{12} = h_{21}$, temos que

$$\begin{aligned} \omega_{13} \wedge \omega_{23} &= (h_{11} \omega_1 + h_{12} \omega_2) \wedge (h_{21} \omega_1 + h_{22} \omega_2) \\ &= (h_{11} h_{22} - h_{12}^2) \omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Portanto, segue-se de (3.12) e (3.26) que

$$d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23} = -K \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (3.31)$$

chamada equação de Gauss.

De forma análoga, temos que

$$\omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_{13} \wedge \omega_2 = (h_{22} + h_{11}) \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Assim, segue de (3.27) que

$$\omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_{13} \wedge \omega_2 = 2H \omega_1 \wedge \omega_2.$$

□

A equação (3.29) é conhecida como *equação de Gauss*, e como consequência dessa é possível provar o teorema Egregium de Gauss.

Teorema Egregium de Gauss 3.1. *A curvatura gaussiana só depende da primeira forma quadrática.*

Demonstração. Seja e_1, e_2, e_3 um triedro ortonormal associado a uma superfície. Sabe-se por (3.22) que a primeira forma quadrática é dada por $I = \omega_1^2 + \omega_2^2$. Pela proposição (3.2), ω_{12} é determinada por (3.9) e (3.10), segue-se que ω_{12} depende apenas da primeira forma quadrática e do triedro escolhido. Logo, considerando a equação de Gauss

$$d\omega_{12} = -K \omega_1 \wedge \omega_2,$$

e o fato de que K não depende do triedro (3.27), concluímos que K só depende da primeira forma quadrática. □

Neste capítulo, a teoria estudada depende da escolha do triedro móvel, principalmente, da escolha de e_1, e_2 . Portanto, dados dois triedros móveis e_1, e_2, e_3 e $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ associados a uma superfície X , onde $\bar{e}_3 = e_3$, é necessário sabermos relacionar as formas diferenciais associadas aos dois triedros. Lembrando que estamos considerando triedros tais que $\langle e_3, e_1 \times e_2 \rangle = 1$.

Proposição 3.5. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície. Consideremos dois triedros móveis e_1, e_2, e_3 e $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ associados a X e $\theta(u, v)$, com $(u, v) \in U$, uma função real diferenciável tal que

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \\ \bar{e}_2 &= -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1 &= \cos \theta \, \omega_1 + \sin \theta \, e_2, \\
\bar{\omega}_2 &= -\sin \theta \, \omega_1 + \cos \theta \, \omega_2, \\
\bar{\omega}_{12} &= d\theta + \omega_{12}, \\
\bar{\omega}_{13} &= \cos \theta \, \omega_{13} + \sin \theta \, \omega_{23}, \\
\bar{\omega}_{23} &= -\sin \theta \, \omega_{13} + \cos \theta \, \omega_{23},
\end{aligned}$$

onde $\omega_1, \omega_2, \omega_{ij}$ (resp. $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_{ij}$) são as formas diferenciais associados ao triedro e_1, e_2, e_3 (resp. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$).

Demonstração. Por definição de $\bar{\omega}_1$, temos que

$$\bar{\omega}_1 = \langle dX, \bar{e}_1 \rangle.$$

De (3.1) e da expressão de e_1 , segue-se que

$$\bar{\omega}_1 = \langle \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle,$$

e concluímos que

$$\bar{\omega}_1 = \cos \theta \, \omega_1 + \sin \theta \, \omega_2.$$

De forma análoga, como $\bar{\omega}_2 = \langle dX, \bar{e}_2 \rangle$, temos que

$$\bar{\omega}_2 = -\sin \theta \, \omega_1 + \cos \theta \, \omega_2.$$

Por definição de $\bar{\omega}_{12}$, temos que

$$\bar{\omega}_{12} = \langle d\bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle.$$

Da expressão de $\bar{e}_1$ decorre que

$$d\bar{e}_1 = -\sin \theta \, d\theta e_1 + \cos \theta \, d\theta e_2 + \cos \theta \, de_1 + \sin \theta \, de_2.$$

Pois $\theta = \theta(u, v)$, substituindo essa expressão e $\bar{e}_2$ na relação anterior e usando (3.3) e (3.8), conclui-se que

$$\bar{\omega}_{12} = d\theta + \omega_{12}.$$

Similarmente, segue-se de $\bar{\omega}_{13} = \langle d\bar{e}_1, e_3 \rangle$ e $\bar{\omega}_{23} = \langle d\bar{e}_2, e_3 \rangle$, pois $\bar{e}_3 = e_3$, que

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_{13} &= \cos \theta \, \omega_{13} + \sin \theta \, \omega_{23}, \\
\bar{\omega}_{23} &= -\sin \theta \, \omega_{13} + \cos \theta \, \omega_{23},
\end{aligned}$$



4

O Teorema de Bonnet

Neste capítulo veremos uma aplicação da teoria apresentada anteriormente, o teorema de Bonnet, que relaciona superfícies de curvatura gaussiana constante positiva com superfícies de curvatura média constante. Como referência utilizou-se ([TENENBLAT, 2008](#)).

Lema 4.1. *Uma aplicação diferenciável $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular se, e somente se, existem funções diferenciáveis f e $\bar{f}$ de U em $\mathbb{R}^3$ e 1-formas diferenciais ω e $\bar{\omega}$ em U tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- a) $\forall q \in U$, $f(q)$ e $\bar{f}(q)$ são vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$;
- b) ω e $\bar{\omega}$ são 1-formas linearmente independentes;
- c) $\forall q \in U$, $dX_q = \omega_q f(q) + \bar{\omega}_q \bar{f}(q)$.

Dessa forma, $f(q)$ e $\bar{f}(q)$ geram o plano tangente à superfície em q .

Demonstração. Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, então as funções X_u, X_v e as formas du, dv satisfazem as três condições do lema. Reciprocamente, suponhamos que $f, \bar{f}, \omega, \bar{\omega}$ satisfazem as condições do lema. Pretendemos provar que, $\forall q \in U$, dX_q é injetiva, isto é, se V é um vetor de $\mathbb{R}^2$ tal que $dX_q(V) = 0$, então $V = 0$. Com efeito, se $dX_q(V) = 0$, então, usando a condição c), temos que

$$\omega_q(V) f(q) + \bar{\omega}_q(V) \bar{f}(q) = 0.$$

Segue-se de a) que

$$\omega_q(V) = \bar{\omega}_q(V) = 0.$$

Portanto,

$$(\omega \wedge \bar{\omega})_q(V, V) = 0,$$

para todo $V \in \mathbb{R}^2$. Em particular, se $V \neq 0$, podemos escolher $\bar{V}$ tal que V e $\bar{V}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Como $(\omega \wedge \bar{\omega})_q$ é bilinear, concluímos que $(\omega \wedge \bar{\omega})_q \equiv 0$, o que contradiz b). Logo, $V = 0$.

Se as propriedades a) e b) são satisfeitas, então decorre trivialmente de c) que $f(q)$ e $\bar{f}(q)$ gera o plano tangente a X em q . $\square$

Proposição 4.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, de curvatura média H e curvatura gaussiana K . Consideremos a aplicação $\bar{X}$ definida por

$$\bar{X}(u, v) = X(u, v) + aN(u, v), (u, v) \in U, \quad (4.1)$$

onde $N(u, v)$ é normal a X e a é uma constante tal que $1 - 2aH + a^2K \neq 0$. Então $\bar{X}$ é uma superfície parametrizada regular e as curvaturas $\bar{H}$ e $\bar{K}$ de $\bar{X}$ são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{H - aK}{1 - 2aH + a^2K}, \\ \bar{K} &= \frac{K}{1 - 2aH + a^2K}. \end{aligned}$$

Demonstração. Consideremos um triedro móvel e_1, e_2, e_3 associado a X tal que $e_3 = N$. Como

$$\bar{X} = X + a e_3,$$

temos que $\bar{X}$ é diferenciável e

$$d\bar{X} = dX + a de_3,$$

onde $X = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$ e $de_3 = \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2$.

Logo,

$$d\bar{X} = (\omega_1 - a \omega_{13}) e_1 + (\omega_2 - a \omega_{23}) e_2. \quad (4.2)$$

As 1-formas $\omega_1 - a \omega_{13}$ e $\omega_2 - a \omega_{23}$ são linearmente independentes, já que utilizando as equações (27), (28), (3.2.6) e (3.2.7) temos

$$(\omega_1 - a \omega_{13}) \wedge (\omega_2 - a \omega_{23}) = (1 - 2aH + a^2K) \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Portanto, decorre do Lema 4.1 que $\bar{X}$ é uma superfície parametrizada regular e podemos associar a $\bar{X}$ o triedro móvel

$$\bar{e}_1 = e_1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

Denotemos por $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_{ij}$ as 1-formas deste triedro de $\bar{X}$. Como

$$d\bar{X} = \bar{\omega}_1 \bar{e}_1 + \bar{\omega}_2 \bar{e}_2.$$

Comparando com (4.2), temos

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= \omega_1 - a \omega_{13}, \\ \bar{\omega}_2 &= \omega_2 - a \omega_{23}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Segue-se de (4.3) que

$$\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.\tag{4.5}$$

Pela proposição (3.4), temos que

$$\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_{23} + \bar{\omega}_{13} \wedge \bar{\omega}_2 = 2\bar{H} \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2.$$

Dessa forma, substituindo (4.5) e (4.6) nesta equação e usando a proposição (3.4) para a superfície X , obtemos que

$$(H - aK) \omega_1 \wedge \omega_2 = \bar{H}(1 - 2aH + a^2K) \omega_1 \wedge \omega_2,$$

e concluímos que

$$\bar{H} = \frac{H - aK}{1 - 2aH + a^2K}.$$

De modo completamente análogo, considerando a equação

$$\bar{\omega}_{13} \wedge \bar{\omega}_{23} = \bar{K} \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2.$$

obtemos que

$$K \omega_1 \wedge \omega_2 = \bar{K}(1 - 2aH + a^2K) \omega_1 \wedge \omega_2,$$

assim, averiguamos que

$$\bar{K} = \frac{K}{1 - 2aH + a^2K}.$$

□

As superfícies da proposição anterior são chamadas de *superfícies paralelas*. Como consequência dessa proposição, vamos obter o teorema de Bonnet.

Definição 4.1. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que $q = (u, v)$ é um ponto

- a) elíptico se $K(q) > 0$;
- b) hiperbólico se $K(q) < 0$;
- c) parabólico se $K(q) = 0$ e $H(q) \neq 0$;

d) planar se $K(q) = 0$ e $H(q) = 0$.

Definição 4.2. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Um ponto $q \in U$ é dito *ponto umbílico* da superfície X se as curvaturas principais de X em q coincidem.

Em um ponto umbílico q de uma superfície X , a curvatura normal de qualquer vetor não-nulo é constante igual a $k_1 = k_2$. Consequentemente todo vetor unitário de $T_q X$ é um vetor principal.

O teorema de Bonnet mostra que o estudo local das superfícies de curvatura média constante não-nula é essencialmente equivalente ao estudo das superfícies de curvatura gaussiana constante positiva. De forma mais acurada:

Corolário 4.1. *(Teorema de Bonnet) Para cada superfície de curvatura média constante igual a $c \neq 0$, sem pontos umbílicos e parabólicos, podemos associar duas superfícies paralelas, uma de curvatura gaussiana igual a $4c^2$ e a outra de curvatura média $-c$.*

Reciprocamente, para cada superfície de curvatura gaussiana constante positiva igual a $4c^2$ e sem pontos umbílicos, podemos associar duas superfícies paralelas cujas médias são iguais a c e $-c$ respectivamente.

Demonstração. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, de curvatura média constante $H(u, v) = c \neq 0$. Consideremos a aplicação

$$\bar{X} = X + \frac{1}{2c} e_3,$$

onde $e_3(u, v)$ é diferenciável, unitário, normal a X , para o qual $H(u, v) = c$. Como a superfície X não tem pontos parabólicos, temos que a constante $\frac{1}{2c}$ satisfaz as condições da proposição anterior. Portanto, $\bar{X}$ é uma superfície cuja curvatura gaussiana é dada por $\bar{K} = 4c^2$.

De forma análoga, como a superfície X não tem pontos umbílicos, temos que a constante $\frac{1}{c}$ satisfaz as condições da proposição anterior. Logo,

$$\bar{\bar{X}} = X + \frac{1}{c} e_3,$$

é uma superfície cuja curvatura média é igual a $-c$.

Mutualmente, considerando $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular de curvatura

gaussiana igual a $4c^2$. Tomemos em conta

$$\begin{aligned}\bar{X} &= X + \frac{1}{2c} e_3, \\ \bar{\bar{X}} &= X - \frac{1}{2c} e_3,\end{aligned}$$

onde e_3 é normal a X e $c > 0$. Como a superfície X não tem pontos umbílicos, as constantes $\pm \frac{1}{2c}$ satisfazem as condições da proposição anterior. Concluimos que as curvaturas médias de $\bar{X}$ e $\bar{\bar{X}}$ são, respectivamente, iguais a $-c$ e c . □

Conclusão

Neste trabalho estudamos as formas diferenciais de grau 1 e 2 com suas propriedades e os produtos tensorial e exterior, assim como a definição de diferencial exterior.

Entendemos a definição do triedro móvel como um terno de funções diferenciáveis no espaço e vimos que existe um triedro móvel associado a cada superfície parametrizada regular. A partir de certas relações conseguimos estabelecer e definir o co-referencial e as formas de conexão do triedro e, com estas, as equações de estrutura. Tomando esse elementos prévios fomos capazes de desenvolver a teoria local de superfícies usando o método do triedro móvel.

Para aplicar a teoria apresentada nos capítulos anteriores estudamos o Teorema de Bonnet, no qual entendemos a importância da escolha do triedro móvel mais apropriado para cada situação.

Referências Bibliográficas

AKIVIS, M. A.; ROSENFELD, B. A. *Élie Cartan (1869-1951) (Translations of Mathematical Monographs)*. [S.l.]: American Mathematical Society, 1993. v. 123.

CARTAN, E. La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile. *Bulletin de la Sciences Mathématiques*, v. 1-2, p. 145–178, 1955.

CARTAN, E. Sur le développables isotropes e la méthode du trièdre mobile. Société Mathématique de France, v. 1-2, p. 141–143, 1955.

COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2005.

COTTON, E. Généralisation de la théorie du trièdre mobile. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, v. 33, p. 42–64, 1905.

DARBOUX, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Paris: Editora, 1887. Part 1.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. Second. New Jersey: Prentice Hall, 1971.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001. v. 2.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. ISBN 9786599052835.

TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. São Paulo: Blucher, 2008.