

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**Estudos das Séries e Transformadas de Fourier e suas Aplicações em
Processamento de Imagens**

Cláudia Maria Caixeta

**GOIÂNIA - GOIÁS
2022**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Cláudia Maria Caixeta

Matrícula: 20181010940261

Título do Trabalho: Estudos das Séries e Transformadas de Fourier e suas Aplicações em Processamento de Imagens

Autorização - Marque uma das opções

1. (X) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).
4. Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:
() O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 14 / 12 / 2022.

Local Data

Cláudia Maria Caixeta

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

CLÁUDIA MARIA CAIXETA

**ESTUDOS DAS SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER E SUAS
APLICAÇÕES EM PROCESSAMENTO DE IMAGENS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás - IFG - Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Professor Dr. João Lopes Cardoso Filho

GOIÂNIA - GOIÁS

2022

C124e Caixeira, Cláudia Maria.

Estudos das Séries e Transformadas de Fourier e suas Aplicações em Processamento de Imagens / Cláudia Maria Caixeta. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2022.
63 f.: il.

Orientadora: Profa. Dr. João Lopes Cardoso Filho.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Séries de Fourier. 2. Transformadas de Fourier. 3. Processamento Digital de Imagens.
I. Cardoso Filho, João Lopes (orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva CRB1/ 2.740
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

ESTUDO DAS SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER E SUAS APLICAÇÕES EM PROCESSAMENTO DE IMAGENS

por

CLAÚDIA MARIA CAIXETA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Dr. João Lopes Cardoso Filho

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 12 de dezembro de 2022, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. João Lopes Cardoso Filho (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Márcio Dias de Lima (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Profª. Ma. Priscila Branquinho Xavier (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Priscila Branquinho Xavier, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/12/2022 19:14:07.
- Marcio Dias de Lima, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/12/2022 19:13:32.
- Joao Lopes Cardoso Filho, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/12/2022 19:12:49.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 18/11/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 346342

Código de Autenticação: b9e782869f



Dedicatória

Dedico ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo. À minha mãe, por seu cuidado e amor, uma mulher forte e sábia. E à minha irmã Carmen (in memoriam), que sempre me entusiasmou na busca do conhecimento.

Agradecimentos

À Deus que me sustenta em amor em todos os segundos da minha vida.

À minha mãe por tudo que me fez desde quando eu estava em seu ventre, ela que sempre deu o seu melhor para o bem de todos da família.

Ao meu orientador Professor Doutor João Lopes Cardoso Filho, por ter confiado em mim, por me direcionar e colocar seu conhecimento em favor deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora que tão gentilmente aceitaram participar e colaborar com este trabalho de conclusão de curso.

Aos Professores do curso de Licenciatura em Matemática, a boa convivência com os colegas estudantes e a todos os funcionários que contribuem para o funcionamento do IFG.

Resumo

Os conceitos de sinais e sistemas surgem em diversos campos, e as ideias e técnicas associadas a esses conceitos desempenham um papel importante em áreas diversificadas da ciência e tecnologia, como comunicações, projeto de circuitos, análise econômica, acústica, engenharia biomédica, sistemas de geração e distribuição de energia e processamento de voz. Este trabalho apresenta a teoria das séries de Fourier e das transformadas de Fourier que permitem representar e estudar o comportamento de certas funções com respeito a propriedades de periodicidade.

As séries de Fourier permitem representar muitas funções periódicas como uma soma infinita de exponenciais complexas. A representação por meio de séries é bastante vantajosa quando se deseja aproximar os valores da função.

A discretização das funções de interesse é bastante desejável em muitas aplicações, em especial aquelas que se baseiam em técnicas digitais. Essa discretização dá origem a transformada discreta de Fourier (DFT) que provê uma aproximação muito boa para os coeficientes da série de Fourier de funções periódicas.

Este trabalho contempla informações sobre alguns tipos de aplicações da transformada de Fourier no processamento de imagens, dando continuidade natural a esse trabalho expandindo nossa visão para outros campos de aplicações por meio de uma breve extensão da teoria para o caso de duas variáveis e executando determinadas aplicações, com objetivo de destacar características relevantes, corrigir defeitos, atenuar ruídos, abordando a elaboração de filtros específicos para realização dessas tarefas. Dessa forma, apresentamos como é possível aplicar a transformada de Fourier em uma imagem e em seguida aplicar a inversa e obter, praticamente, a imagem original.

Palavras-chave: Funções, Sinais, Séries de Fourier, Transformadas de Fourier, Filtragem, Processamento de Imagens

Abstract

Signal and systems concepts arise in many fields, and the ideas and techniques associated with these concepts play an important role in diverse areas of science and technology, such as communications, circuit design, economic analysis, acoustics, biomedical engineering, generation systems. and power distribution and voice processing. This work presents the theory of Fourier series and Fourier transforms that allow to represent and study the behavior of certain functions with respect to periodicity properties.

Fourier series allow you to represent many periodic functions as an infinite sum of exponential complex. The representation through series is very advantageous when you want to approximate the values of the function.

Discretization of the functions of interest is quite desirable in many applications, especially those based on digital techniques. Discretization gives rise to the discrete Fourier transform (DFT) which provides a very good approximation for the coefficients of the Fourier series of periodic functions.

We will end this work to also include information about some types of applications of the Fourier transform in image processing, giving a natural continuity to this work, expanding the vision to other fields of applications through a brief extension of the theory for the case of two variables and executing certain applications, with the objective of highlighting relevant characteristics, correcting defects, attenuating noise, approaching the elaboration of specific filters to perform these tasks. Thus, we present how it is possible to apply the Fourier transform in an image and then apply the inverse and obtain, practically, the original image.

Keywords: Functions, Signals, Fourier Series, Fourier Transforms, Filtering, Image Processing

Lista de Figuras

1.1	Imagem de dois sinais, contínuo e discreto	15
1.2	Exemplo de deslocamento no tempo contínuo t	17
1.3	Exemplo de deslocamento no tempo discreto N	17
1.4	Gráficos de reflexão	18
1.5	Gráficos de escala no tempo	18
1.6	Exponencial real de tempo contínuo $x(t) = Ce^{at}$ com $a < 0$ e $a > 0$	19
1.7	Sinal senoidal de tempo contínuo	20
1.8	Sinal exponencial real de tempo discreto	22
1.9	Sinal exponencial real de tempo discreto	23
1.10	Sinal exponencial complexo de tempo discreto (primeiro intervalo)	24
1.11	Sinal exponencial complexo de tempo discreto (segundo intervalo)	24
2.1	Sinal $x(t)$ como combinação linear de sinais senoidais harmonicamente re- lacionados (sendo, $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_0(t) + x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente)	29
2.2	Sinal $x(t)$ como combinação linear de sinais senoidais harmonicamente re- lacionados (sendo, $x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$, $x_3(t)$ e $x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$, respectivamente)	30
3.1	Figura modificada de (PEDRINI, 2022)	42
3.2	Figura modificada de (PEDRINI, 2022)	43
3.3	Figura modificada de (SOVIERZOSKI, 2022)	46
3.4	Diagrama da conversão contínuo para discreto	47
4.1	Reticulado uniforme da representação matricial da imagem.	53
4.2	Representação de três componentes 4-conexas ou uma componente 8-conexa.	54
4.3	Figura ilustrativa dos passos da filtragem de uma imagem no domínio de Fourier.	56
4.4	Figura modificada de (CONCI, 2018) com imagens representadas como funções bidimensionais e seus respectivos espectros de Fourier.	57

4.5	Figura modificada de (PEDRINI, 2022) com da função de transferência de um filtro passa-baixa.	58
4.6	Figura modificada de (PEDRINI, 2022) com da função de transferência de um filtro passa-alta ideal.	59
4.7	Figura modificada mostrando três projetos de filtro, (a) passa-baixa, (b) passa-alta, (c) passa-faixa.	59
4.8	Figura modificada de (PEDRINI, 2022) com imagem de entrada, dos espectros de frequências, do filtro passa-faixa e da imagem de saída.	60
4.9	Figura modificada de (PEDRINI, 2022) com imagem de entrada, dos espectros de frequências, do filtro rejeita-faixa e da imagem de saída.	61

Sumário

Introdução	13
1 Um Breve Estudo de Sinais	14
1.1 Classificação de Sinais	15
1.2 Transformações da variável independente	16
1.2.1 Deslocamento no tempo	16
1.2.2 Reflexão no tempo	17
1.2.3 Mudança na escala	18
1.3 Sinais exponenciais e senoidais	19
1.3.1 Sinais exponenciais de tempo contínuo	19
1.3.2 Sinais exponenciais de tempo discreto	22
2 Aspectos Básicos das Séries de Fourier	27
2.1 Representação em série de Fourier em tempo contínuo de sinais periódicos .	27
2.2 Representação em série de Fourier da exponencial complexa e trigonométrica	30
2.2.1 Sinais Pares e Ímpares	32
2.3 Algumas propriedades das séries de Fourier para sinais contínuos	32
2.3.1 Linearidade	32
2.3.2 Deslocamento no tempo	33
2.3.3 Reflexão no tempo	33
2.3.4 Mudança na Escala no tempo	34
2.3.5 Multiplicação	34
2.4 Série exponencial de Fourier para sinais discretos	34
3 Transformadas de Fourier Contínuas e Discretas	37
3.1 Impulsos e sua propriedade	37
3.2 Transformadas de Fourier para sinais contínuos	38
3.3 Propriedades da Transformada Contínua de Fourier	40
3.4 Espectro de Fourier	42
3.5 Amostragem	42

3.6	Transformada discreta de Fourier	44
3.6.1	Exemplo de Convolução	46
3.6.2	Amostragem periódica	47
3.7	Extensão para funções de duas variáveis	48
3.7.1	O impulso 2-D e sua propriedade de peneiramento	48
3.7.2	Transformada discreta de Fourier 2-D e sua inversa	49
3.7.3	Espectro de Fourier e ângulo de fase	50
3.7.4	O teorema de convolução 2-D	50
3.8	Processamento de imagens e DFT	51
4	Tópicos em Processamento Digital de Imagens	52
4.1	Propriedades de uma imagem digital (vizinhança e conectividade)	53
4.2	Operações orientadas a vizinhança	54
4.2.1	Morfologia matemática	55
4.3	Filtragem no domínio espacial e no domínio da frequência	55
4.3.1	Filtragem no domínio da frequência	56
4.3.2	Filtro passa-baixa e passa-alta	58
5	Conclusão	62
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63

Introdução

Os conceitos de sinais e sistemas surgem em diversos campos, e as ideias e técnicas associadas a esses conceitos desempenham um papel importante em áreas diversificadas da ciência e tecnologia, como comunicações, projeto de circuitos, análise econômica, acústica, engenharia biomédica, sistemas de geração e distribuição de energia e processamento de voz. Os sinais constituem um ingrediente básico de nossa vida diária.

Segundo [HAYKIN; VEEN \(2001\)](#), um sinal é formalmente definido como uma função de uma ou mais variáveis, a qual veicula informações sobre a natureza de um fenômeno físico. Por exemplo, pode-se citar duas formas de comunicação humana, os sinais de fala e os sinais assumindo a forma de imagens. No Capítulo 1, será feito um breve estudo de sinais, mostrando como são classificados, as transformações da variável independente e diversos sinais básicos de tempo contínuo e de tempo discreto.

A utilização das séries de Fourier é de vital importância em muitas áreas, particularmente nas comunicações. A representação por meio de séries é bastante vantajosa quando se deseja aproximar os valores de uma função. No Capítulo 2, será abordada a teoria das séries de Fourier, sua representação em tempo contínuo de sinais periódicos, da exponencial complexa e trigonométrica e a série exponencial de Fourier para sinais discretos.

Uma função não periódica pode ser representada por um integral de um conjunto de senos e/ou cossenos de diferentes frequências, a transformada de Fourier permite decompor sinais que não são periódicos (imagens, por exemplo), portanto, o estudo da transformada de Fourier abrange essas funções como é mostrado no Capítulo 3. A transformada discreta de Fourier em uma dimensão (DFT) ou duas dimensões (DFT-2D).

No Capítulo 4, são mostradas as aplicações da DFT-2D no caso do processamento de imagem digital. A transformada discreta de Fourier é amplamente utilizada em filtragem de imagens, segmentação, descrição e classificação de objetos, seus conceitos e propriedades serão abordados. Como se dá a transformação da imagem com o uso da DFT-2D, como por exemplo, na filtragem no domínio da frequência, mostrando exemplos de filtros.

Neste trabalho, portanto, serão apresentados conceitos matemáticos que são necessários para a análise de sinais, além da aplicação em processamento de imagens.

1

Um Breve Estudo de Sinais

Os conceitos de sinais e sistemas surgem em diversos campos, e as ideias e técnicas associadas a esses conceitos desempenham um papel importante em áreas diversificadas da ciência e tecnologia, como comunicações, projeto de circuitos, análise econômica, acústica, engenharia biomédica, sistemas de geração e distribuição de energia, processamento de voz e imagens.

A lista daquilo que constitui um sinal é quase interminável, vai desde os mais variados exames médicos, análise de dados econômicos à exploração espacial. Os sinais constituem um ingrediente básico de nossa vida diária. Segundo [HAYKIN; VEEN \(2001\)](#), um sinal é formalmente definido como uma função de uma ou mais variáveis, a qual veicula informações sobre a natureza de um fenômeno físico. Por exemplo, uma sonda que envia imagens em infravermelho transmite informações sobre um planeta distante.

Quando a função depende de uma variável, diz-se que o sinal é unidimensional, como exemplo, tem-se um sinal de fala, cuja amplitude varia com o tempo. Quando a função depende de duas ou mais variáveis, diz-se que o sinal é multidimensional, como em uma imagem, sendo que as coordenadas horizontal e vertical da mesma representam duas dimensões.

Funções unidimensionais ou multidimensionais, os sinais contêm informações sobre o comportamento ou natureza de algum fenômeno, já os sistemas respondem a sinais em particular, produzindo outros sinais ou uma resposta qualquer ([OPPENHEIM; WILLSKY, 2010](#)).

Portanto, um sistema processa um conjunto de sinais (entradas) resultando em um outro conjunto de sinais (saídas). Um sistema pode ser construído com componentes físicos, os chamados hardwares, ou pode ser um algoritmo que gera uma resposta desejada na saída de um sinal de entrada. Como exemplo, pode-se ver um programa de computador para diagnóstico automatizado de radiografias como um sistema que tem sua entrada a imagem digitalizada e que produz como saída um diagnóstico preliminar.

1.1 Classificação de Sinais

Os sinais podem ser classificados entre sinais de tempo contínuo e de tempo discreto. Um sinal de fala pode ser representado matematicamente pela pressão acústica como uma função do tempo e uma imagem pode ser representada pelo brilho como uma função de duas variáveis. Como esse exemplo, vários outros fenômenos físicos podem ser representados matematicamente como funções de uma ou mais variáveis independentes.

As operações de processamento envolvidas na construção de sistemas de comunicação, sistema de controle, sistemas de sensoriamento remoto e instrumentos para processamento de sinais biológicos, entre as muitas aplicações, são analisadas de duas maneiras diferentes: (1) abordagem analógica ou de tempo contínuo e (2) abordagem digital ou de tempo discreto.

A principal vantagem da abordagem analógica é a capacidade natural de resolver equações diferenciais que descrevem sistemas físicos, sem ter que lançar mão de soluções aproximados para elas (HAYKIN; VEEN, 2001). Já, a abordagem digital recorrem a computações numéricas para suas operações, com a necessidade de aproximações.

No caso dos sinais de tempo contínuo, a variável independente é contínua e, portanto, esses sinais são definidos em um conjunto contínuo de valores da variável independente. Em contrapartida, os sinais de tempo discreto são definidos somente em instantes discretos, ou seja, a variável independente assume apenas um conjunto discreto de valores.

Um sinal de fala em função do tempo e a pressão atmosférica em função da altitude são exemplos de sinais de tempo contínuo, e, do tempo discreto, o índice semanal Dow-Jones da Bolsa de Valores de Nova York. Na Figura 1.1, têm-se exemplos de dois sinais de tempo contínuo e de dois sinais de tempo discreto.

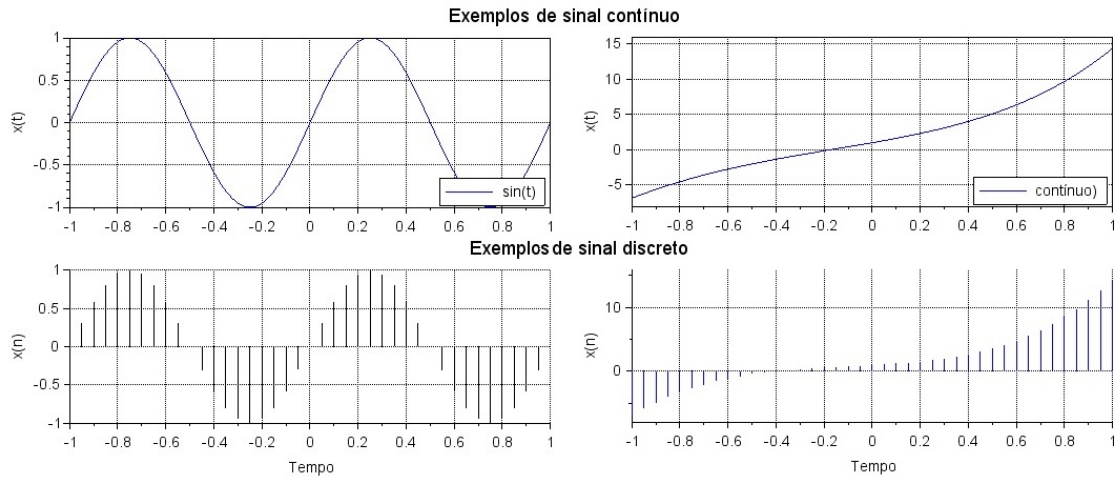


Figura 1.1: Imagem de dois sinais, contínuo e discreto

É interessante destacar que um sinal discreto pode ser a representação de um fenômeno (sistema) inerentemente discreto, como por exemplo o caso de índices demográficos ou os índices da bolsa de valores citado anteriormente. Mas, há também sinais discretos no tempo que são oriundos da amostragem de sinais contínuos. Como por exemplo, os sistemas digitais de áudio ou de vídeo. Estes sistemas requerem o uso de sequências discretas no tempo que são representações (discretizações) de sinais contínuos no tempo.

Para distinguir os sinais contínuos e discretos no tempo será usado “t” para denotar o tempo como variável independente contínua e “n” para denotar o tempo como variável independente discreta. Além disso, nos sinais contínuos será usado parêntesis normais (), por exemplo, $x(t)$, $y(t)$ entre outros, enquanto que nos sinais discretos usaremos colchetes [], como exemplo, $x[n]$, $y[n]$. Esta é notação comumente adotada na literatura de Análise de Sinais.

Se um sinal de tempo contínuo $x(t)$ puder assumir qualquer valor no intervalo contínuo (a, b) , onde a pode ser $-\infty$ e b pode ser $+\infty$, então o sinal contínuo $x(t)$ é chamado sinal analógico. Se um sinal de tempo discreto $x[n]$ puder assumir apenas um número finito de valores distintos, então ele é chamado sinal digital (HSU, 2004).

1.2 Transformações da variável independente

Frequentemente, utiliza-se sinais que são obtidos a partir de outros através de uma transformação simples da variável independente. Classificam-se os sistemas quanto às suas propriedades tais como: deslocamento no tempo, reflexão no tempo e simetria ou anti-simetria em relação a origem (sinal par ou ímpar), e, mudança na escala.

1.2.1 Deslocamento no tempo

Uma primeira transformação deste tipo é o deslocamento no tempo, que corresponde a obter um sinal $y(t)$ a partir de $x(t)$ através de $y(t) = x(t - t_0)$. Quando $t_0 > 0$, diz-se que esta transformação é um atraso no tempo; para $t_0 < 0$ diz-se que há um avanço no tempo de $x(t)$. As mesmas definições se usam para o deslocamento de um sinal de tempo discreto, $y[n] = x[n - n_0]$, onde, naturalmente, n_0 é inteiro, ou seja, sinais idênticos na forma $x[n]$ e $x[n - n_0]$.

Um deslocamento em tempo, quando se estuda o tempo contínuo, em que $x(t - T)$ representa uma versão atrasada com $t_0 = T$ (se T é positivo) ou adiantada (se T é negativo) de $x(t)$. A Figura 1.2 mostra o deslocamento em tempo contínuo. Também encontraremos deslocamentos em tempo discreto, na Figura 1.3, na qual temos dois sinais $x[n]$ e $x[n - n_0]$ que são idênticos na forma, mas um está deslocado em relação ao outro, em que $x[n - N]$ representa uma versão atrasada com $n_0 = N$ (se N é positivo).

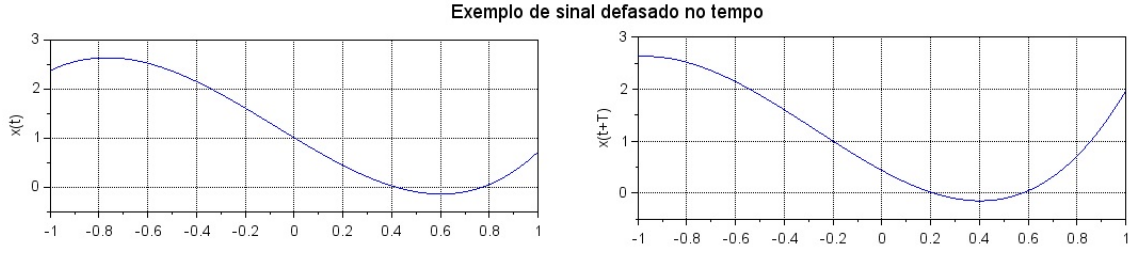


Figura 1.2: Exemplo de deslocamento no tempo contínuo t

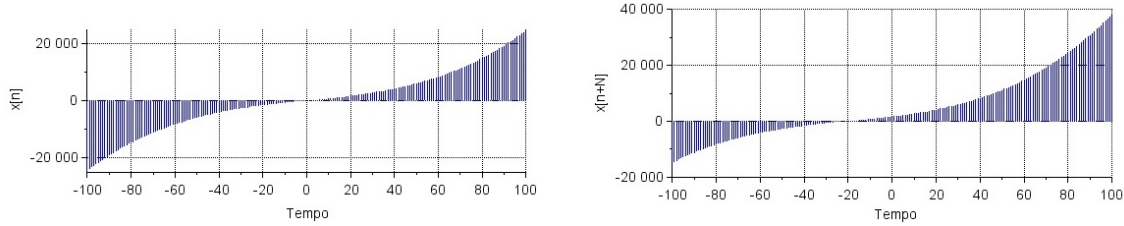


Figura 1.3: Exemplo de deslocamento no tempo discreto N

Sinais relacionados dessa maneira surgem em aplicações como radar, sonar e processamento de sinais sísmicos, em que diversos receptores em diferentes lugares observam um sinal transmitido por um meio (água, rocha, ar, etc), idealmente, sem contar com atenuações ou ruídos, por exemplo. Nesse caso, a diferença no tempo de propagação do ponto de origem do sinal transmitido para quaisquer dois receptores resulta em um deslocamento do tempo entre os sinais nos dois receptores ([OPPENHEIM; WILLSKY, 2010](#)).

1.2.2 Reflexão no tempo

Têm-se outras transformações básicas do eixo do tempo, como a reflexão do tempo. Tendo que $y(t)$ denotando o sinal observado substituindo-se o tempo t por $-t$, como é mostrado por $y(t) = x(-t)$. O sinal $y(t)$ representa uma versão refletida de $x(t)$ em relação ao eixo de amplitude. Sendo que os sinais pares e ímpares são de especial interesse, como mostrado mais a seguir.

Em relação a simetria com relação à reflexão no tempo, há outro grupo de propriedades úteis dos sinais. Um sinal é considerado par se é simétrico em relação à origem, isto é, para um sinal contínuo $x(-t) = x(t)$, ou discreto $x[-n] = x[n]$. Um sinal é ímpar se é anti-simétrico em relação à origem: $x(t) = -x(-t)$, para o tempo contínuo, ou, $x[n] = -x[-n]$, do sinal discreto. Neste último caso, deve-se observar que sempre $x(0) = 0$. Sendo que qualquer sinal pode ser representado como a soma de dois sinais, um par e outro ímpar.

Como exemplo de função ímpar, tem-se $x_i(t) = \text{sen}(t)$ que $\forall t \in \mathbb{R}, \text{sen}(-t) = -\text{sen}(t)$. E também tem-se a função par, com $x_p(t) = \cos(-t)$ que $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(-t) = \cos(t)$. Tais que: $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$, sendo que $x_p(t)$ é um sinal par e $x_i(t)$ é um sinal ímpar. Pode-se ter de forma análoga as definições para o caso do tempo discreto. A Figura 1.4 mostra um exemplo desta transformação do sinal em tempo contínuo.

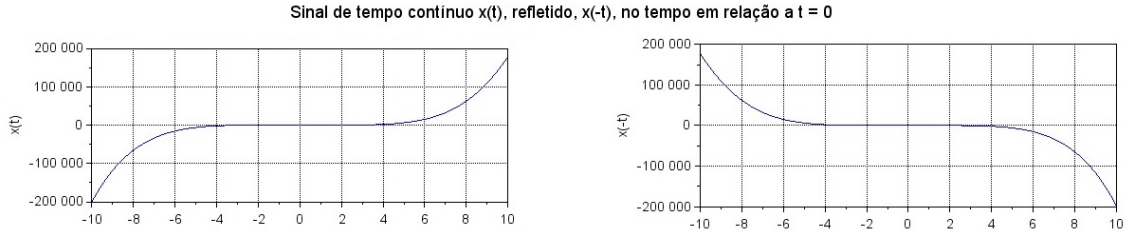


Figura 1.4: Gráficos de reflexão

1.2.3 Mudança na escala

A transformação de mudança na escala no tempo, faz-se alterando $x(t)$ para $x(\alpha t)$. Pode-se determinar o efeito da transformação da variável independente do sinal $x(t)$ obtendo-se sinais da forma, $x(\alpha t + \beta)$, sendo α e β valores dados, para deslocamento no tempo e mudança de escala executados nesta ordem.

Esta transformação pode ser exemplificada ao executar um sinal de voz gravado numa velocidade mais rápida do que a gravação original, obtendo-se uma compressão ($\alpha > 1$), ou mais lenta, numa expansão ($\alpha < 1$). Na Figura 1.5, mostra-se a mudança de escala no tempo contínuo.

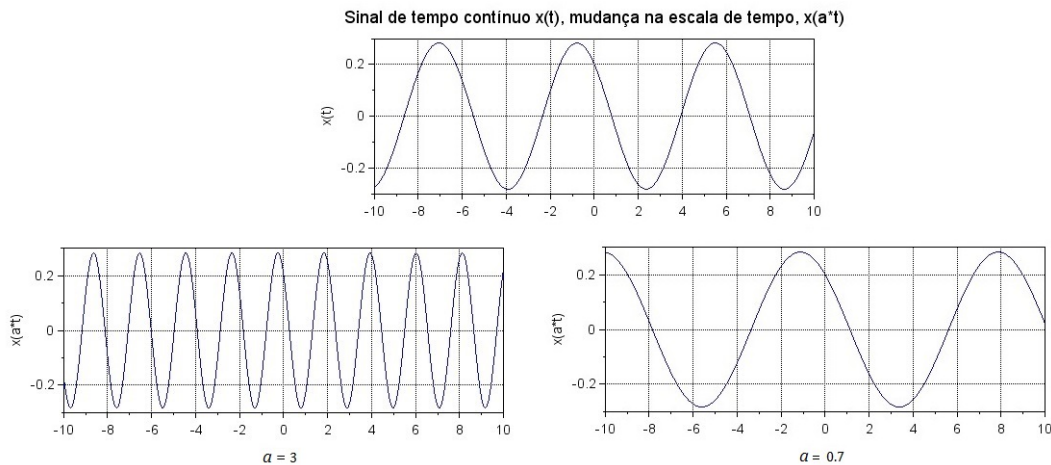


Figura 1.5: Gráficos de escala no tempo

1.3 Sinais exponenciais e senoidais

Apresenta-se diversos sinais básicos de tempo contínuo e de tempo discreto. São sinais que ocorrem com frequência nos mais variados sistemas, e servem também como elementos básicos a partir dos quais se constroem muitos outros sinais.

1.3.1 Sinais exponenciais de tempo contínuo

A) Sinais exponenciais reais

Há, basicamente, dois tipos de comportamentos que podem ser representados graficamente em uma exponencial real. Se a é negativo, enquanto t aumenta, a exponencial é decrescente. Sendo a positivo, a exponencial será crescente. Os gráficos da Figura 1.6 mostram esses dois comportamentos, que podem acontecer em vários fenômenos físicos, como em explosões atômicas (exponencial crescente) e outro exemplo, sistemas mecânicos amortecidos (exponencial decrescente). Sendo $a = 0$ $x(t)$ é constante.

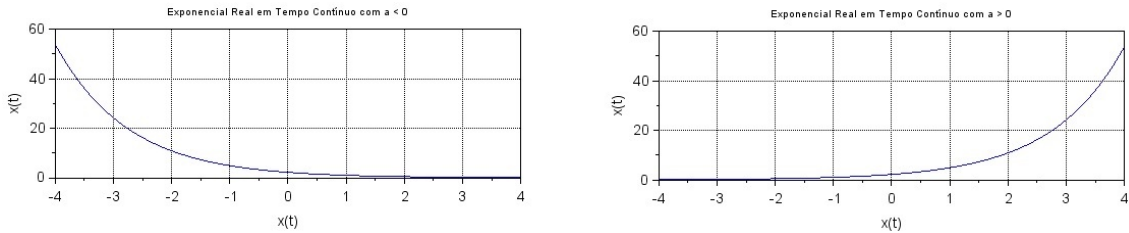


Figura 1.6: Exponencial real de tempo contínuo $x(t) = Ce^{at}$ com $a < 0$ e $a > 0$

B) Sinais senoidais e exponenciais complexas de tempo contínuo

O sinal exponencial complexo de tempo contínuo tem a forma de

$$x(t) = Ce^{at} \quad (1.1)$$

em geral, C e a são números complexos, que pode levar a exponencial complexa a assumir várias características diferentes. Mas, se C e a forem reais, como visto anteriormente, $x(t)$ será uma exponencial real.

C) Sinais senoidais e exponenciais complexas periódicas

Sendo a puramente imaginário. Considere, então,

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (1.2)$$

Esse sinal tem uma importante propriedade, ele é periódico. Verifica-se esta propriedade a seguir,

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)} \quad (1.3)$$

Portanto, $e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$, ou seja, $e^{j\omega_0 T} = \frac{e^{j\omega_0 t}}{e^{j\omega_0 t}}$ que nos leva a

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \quad (1.4)$$

Se $\omega_0 = 0$ então $x(t) = 1$, que é periódico para qualquer valor de T . Se $\omega_0 \neq 0$ então o período fundamental T_0 , ou seja, menor valor positivo de T para a qual a Equação 1.4 é válida. Com

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \quad (1.5)$$

Para o tempo contínuo, o sinal senoidal que é relacionado à exponencial complexa periódica, sendo da forma $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$. Onde,

- A é a amplitude do sinal senoidal;
- ω_0 é a frequência angular em radianos por segundo (rad/s);
- ϕ é o ângulo de fase em radianos

Estes sinais exponenciais e senoidais complexos (Figura 1.7) também são usados para descrever muitas características de muitos processos físicos, como é o caso do sistema mecânico consistindo em uma massa conectado em uma mola a uma base fixa.

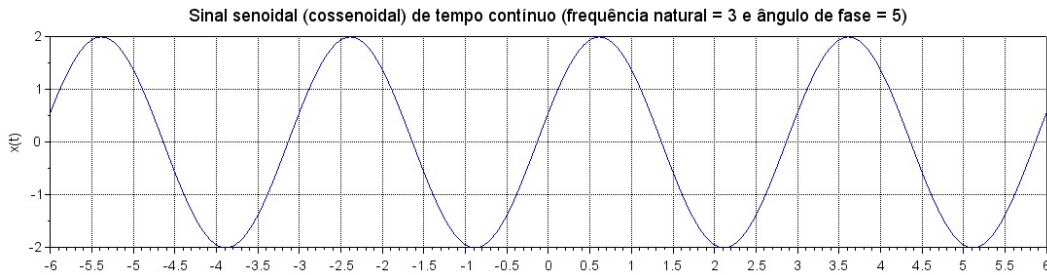


Figura 1.7: Sinal senoidal de tempo contínuo

A inversa do período fundamental T_0 de um sinal senoidal de tempo contínuo ou de uma exponencial periódica complexa é inversamente proporcional a $|\omega_0|$, Equação 1.5, a chamada frequência fundamental. Esta frequência é diretamente proporcional a taxa de oscilação e se diminuída, aumentamos o período. Segundo [OPPENHEIM; WILLSKY \(2010\)](#), sendo $\omega_0 = 0$, $x(t)$ é constante, e, portanto, periódico com período T para todo valor positivo de T . Assim, o período fundamental de um sinal constante é indefinido, ou seja, um sinal constante tem taxa de oscilação zero.

Pode-se escrever de $\omega_0 = 2\pi f_0$, sendo que f_0 tem como unidade de ciclos por segundo, ou hertz (Hz).

É interessante destacar os chamados sinais exponenciais complexos harmonicamente relacionados, esses são conjuntos de sinais exponenciais periódicos, com um período comum T_0 , isto é, com frequências fundamentais que são múltiplas de uma única frequência positiva w_0 . Sendo a condição necessária:

$$e^{j\omega T_0} = 1, \quad (1.6)$$

o que significa que wT_0 é múltiplo de 2π , isto é,

$$wT_0 = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.7)$$

Assim, quando se define,

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (1.8)$$

então, ω deve ser um inteiro múltiplo de ω_0 com,

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.9)$$

Sendo $k = 0$, $\phi_k(t)$ é uma constante, enquanto que para qualquer outro valor de k , a k -ésima harmônica $\phi_k(t)$ é periódica, com período T_0 e contém exatamente $|k|$ de seus períodos fundamentais.

Um exemplo, justamente consistente ao termo "harmônica" adivinda da música, que é o padrão das vibrações de uma corda em um instrumento com um violino e, pode ser descrito como uma superposição de exponenciais periódicas harmonicamente relacionadas ([OPPENHEIM; WILLSKY, 2010](#)). A "harmônica" se refere a tons resultantes de variações da pressão acústica em frequências que são múltiplas da frequência fundamental.

Um sinal diretamente relacionado à exponencial complexa periódica é o sinal senoidal $\text{Acos}(\omega_0 t + \phi)$. Usando a relação de Euler, a exponencial complexa $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ pode ser escrita em termos de sinais senoidais com o mesmo período fundamental: $e^{j\omega_0 t} =$

$$\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

Na identidade de Euler, tem-se que: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$. Logo, $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + jA\sin(\omega_0 t)$. Para $x(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}$ pode-se escrever: $A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}Ae^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$. De modo alternativo, pode-se expressar um sinal senoidal em termos de um sinal exponencial como: $A\cos(\omega t + \phi) = A\operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$ e $A\sin(\omega t + \phi) = A\operatorname{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$. Ou reencrevendo, considerando o número complexo $c = e^{j(\omega_0 t + \phi)}$, $\operatorname{Re}\{c\}$ é a parte real e $\operatorname{Im}\{c\}$ a parte imaginária, esta representação da parte real e imaginária será utilizada no próximo capítulo deste trabalho.

1.3.2 Sinais exponenciais de tempo discreto

A) Sinais exponenciais reais de tempo discreto

Sendo C e α reais, $|\alpha| > 1$ o módulo do sinal cresce exponencialmente com n e para $|\alpha| < 1$ tem-se uma exponencial decrescente, além disso, se α é positivo, terá $C\alpha^n$ de mesmo sinal, como pode ser visto no exemplo em que $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 1.5$ (Figura 1.8), mas se α é negativo, $C\alpha^n$ é alternado (Figura 1.9). Estudando também, valores de $\alpha = 1$, vê-se $x[n]$ constante, mas se $\alpha = -1$, $x[n]$ alterna entre $+C$ e $-C$.

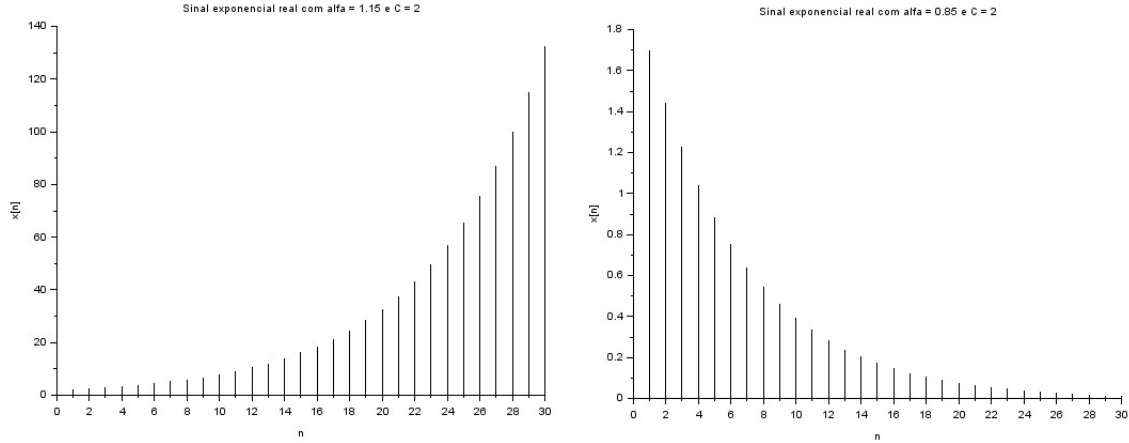


Figura 1.8: Sinal exponencial real de tempo discreto

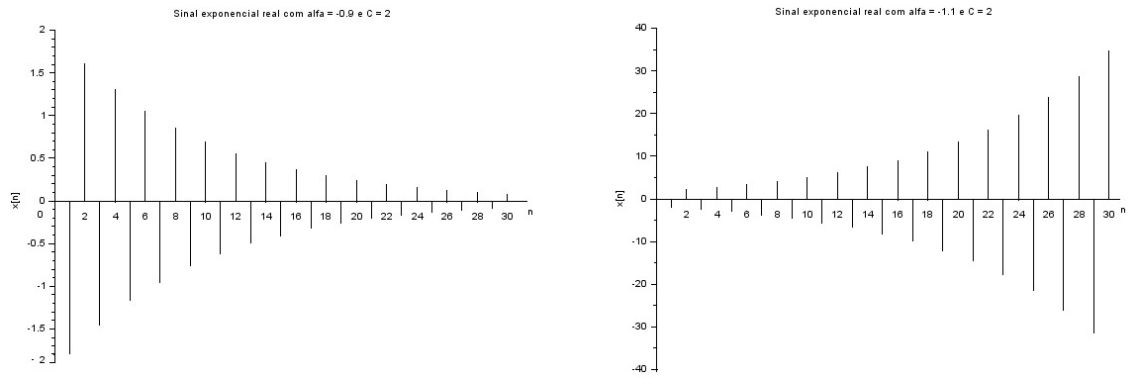


Figura 1.9: Sinal exponencial real de tempo discreto

B) Sinais exponenciais complexas de tempo discreto

Definido como $x[n] = C\alpha^n$

Sendo $C=1$ e $|\alpha| = 1$; $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

Usando a equação de Euler tem-se que:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$$

Note que o sinal exponencial $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ satisfaz a seguinte propriedade:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j(\omega_0 \pm m\pi)n} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ou seja, o sinal $x[n]$ é o mesmo para frequência ω_0 e $(\omega_0 + 2\pi)$, isto é, para qualquer frequência $(\omega_0 \pm m\pi)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ele se repete a cada 2π a medida que a frequência ω_0 varia.

Essa situação é diferente do seu sinal analógico contínuo $x(t)$, onde para cada ω_0 , $x(t)$ era um sinal diferente, tanto quanto maior a frequência ω_0 maior a taxa de oscilação de $x(t)$. No caso discreto, o que ocorre é que conforme ω_0 aumenta de 0 até π , obtém-se sinais que oscilam cada vez mais rápido, e no intervalo de π até 2π , vai se oscilando cada vez mais lentamente até voltar a ser o mesmo que era em $\omega_0 = 0$ para $\omega_0 = 2\pi$. Essa propriedade é mostrada na oscilação crescendo em um primeiro intervalo, Figura (1.10), e depois a oscilação diminui, como visto na Figura(1.11).

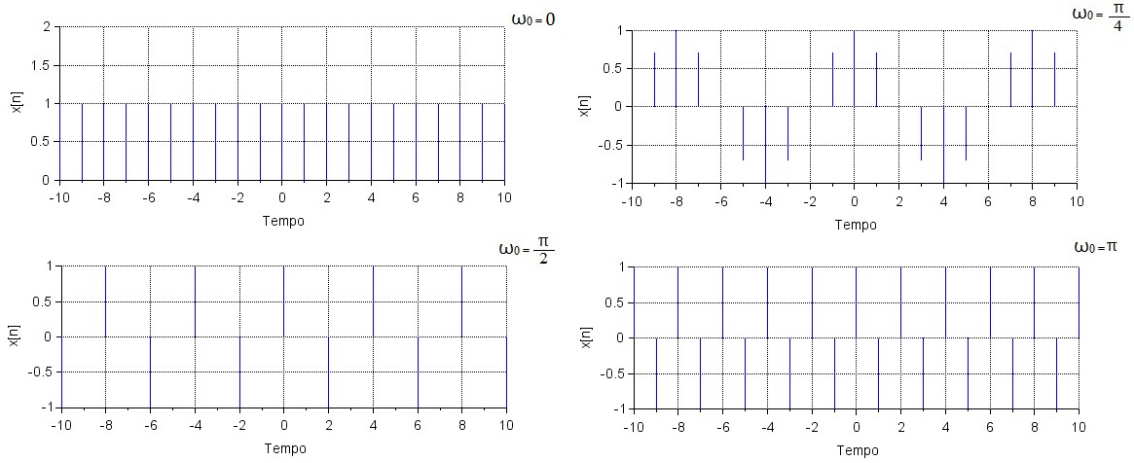


Figura 1.10: Sinal exponencial complexo de tempo discreto (primeiro intervalo)

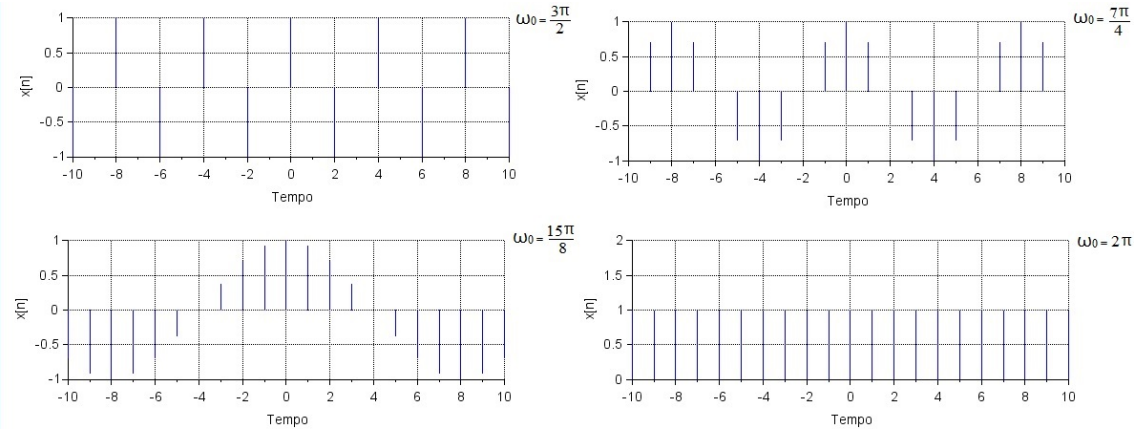


Figura 1.11: Sinal exponencial complexo de tempo discreto (segundo intervalo)

Se $\omega_0 = \pi$ ou $\omega_0 = \pm n\pi$ para um valor de n ímpar, a oscilação é máxima pois $x[n] = e^{j\omega_0 n} = e^{j\pi n}$, para n ímpar $x[n] = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$, ou seja, o sinal $x[n]$ salta de +1 para -1 a cada ponto n no tempo. Por outro lado, se $\omega_0 = 0$ ou $\omega_0 = \pm n\pi$ para um valor de n par, não há oscilação pois $x[n] = e^{j\omega_0 n} = e^{j0} = 1$.

Resumindo, quando se tem variações lentas do sinal $x[n]$ os valores de ω_0 estarão próximos de 0, 2π , etc. (ou seja, múltiplos pares de π), enquanto que as variações rápidas estão próximas a $\pm\pi$ e seus múltiplos ímpares.

Uma outra propriedade que se pode destacar a diferença entre sinal contínuo $x(t)$ e $x[n]$ é a periodicidade. O sinal contínuo é sempre periódico, mas no sinal $x[n]$ nem sempre ocorre essa periodicidade.

Sendo, $x[n + N] = e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n} = x[n]$, esta igualdade ocorre se

$e^{j\omega_0 N} = 1$, isto é, se $\omega_0 N = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ou seja, $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$.

Portanto, o sinal discreto $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ só é periódico quando $\frac{\omega_0}{2\pi}$ é um número racional. Pode-se verificar isto com exemplos como,

$$x_1[n] = A\cos(\omega_0 n) \text{ para } \omega_0 = 0, 2\pi, \dots \text{ ou}$$

$$x_2[n] = A\cos(\omega_0 n) \text{ para } \omega_0 = 0, 3\pi, \dots \text{ e vendo o caso não periódico de}$$

$$x_3[n] = A\cos(\omega_0 n) \text{ para } \omega_0 = 1.$$

O Quadro 1.1 mostra a propriedade em tempo contínuo e discreto lado a lado, para mostrar a diferença entre elas.

Quadro 1.1: Propriedade em tempo contínuo e em tempo discreto

$x(t) = e^{j\omega_0 t}$	$x[t] = e^{j\omega_0 n}$
$x(t)$ diferentes para ω_0 diferentes	$x[n]$ se repete para $\omega_0, (\omega_0 + 2\pi), (\omega_0 + 4\pi), etc$
$x(t)$ é periódica $\forall \omega_0$	$x[n]$ só é periódico se $\omega_0 = (\frac{2\pi m}{N})$ Para algum inteiro $N > 0$ e m inteiro. (m e N primos entre si)
frequência fundamental de $x(t)$ ω_0	frequência fundamental de $x[n]$ $\frac{\omega_0}{m}$ (m e N primos entre si)
período fundamental de $x(t)$ se $\omega_0 = 0$ não existe e se $\omega_0 \neq 0$ implica $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	período fundamental de $x[n]$ se $\omega_0 = 0$ não existe e se $\omega_0 \neq 0$ implica $N_0 = m(\frac{2\pi}{\omega_0})$

Fonte: [SOUZA \(2022\)](#)

Nesse capítulo, foi feito um breve estudo de sinais, que é utilizado em séries de Fourier

de tempo contínuo e discreto. As séries de Fourier são ferramentas que permite representar um sinal periódico como uma soma infinita de componentes senoidais (senos e cossenos), onde será visto a transformação de sinais para o domínio da frequência de sinais representados originalmente no domínio do tempo.

2

Aspectos Básicos das Séries de Fourier

A história moderna sobre a utilização de somas trigonométricas, ou seja, soma de senos e cossenos relacionados harmonicamente ou exponenciais complexas periódicas começa em 1748 com L. Euler ([OPPENHEIM; WILLSKY, 2010](#)). A observação inicial foi no movimento de uma corda vibrante, que verificou a deflexão vertical $f(t, x)$, sendo x a distância ao longo da corda e t o tempo, ele concluiu que os modos normais são funções senoidais harmonicamente relacionadas.

Vários tipos de séries existem e são apropriadas para representar funções periódicas definidas na reta em termos de senos e de cossenos ([PUPIN, 2011](#)). As séries que serão descritas neste capítulo têm seu nome em homenagem a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que as estudou sistematicamente, passando a serem chamadas de Séries de Fourier; estas serão expressas como somas infinitas de exponenciais complexas.

Análise de Fourier (também chamada de Análise Harmónica), que diz respeito à representação de sinais como uma combinação linear de sinais básicos como senos e cossenos, ou exponenciais complexas.

Busca-se neste capítulo, introduzir o conceito de Série de Fourier e estudar algumas de suas propriedades imediatas. Como será vista aplicações específicas desse conceito, a abordagem será básica, não sendo aprofundado todos os aspectos desta teoria.

2.1 Representação em série de Fourier em tempo contínuo de sinais periódicos

Como foi abordado no Capítulo 1, um sinal de tempo contínuo $x(t)$ será periódico se existir um valor diferente de zero positivo para T tal que,

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

O período fundamental T_0 de $x(t)$ é o menor valor positivo de T para qual a Equação 2.1 é satisfeita, e $\frac{1}{T_0} = f_0$ é chamada frequência fundamental.

Considere um sinal periódico $x(t) \in \mathbb{R}, \forall t$. O sinal $x(t)$ pode ser expresso como sinal senoidal real,

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (2.2)$$

e o sinal exponencial complexo $x(t)$ como,

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}, \quad (2.3)$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$ é a chamada frequência angular fundamental.

Ao sinal da Equação 2.3 está associado o conjunto de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas,

$$\phi_m(t) = e^{j\omega_0 t} = e^{jm(2\pi/T_0)t}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

Cada um desses sinais tem uma frequência fundamental que é um múltiplo de ω_0 e, portanto, cada um é periódico com período T (embora, para cada $|m| \geq 2$, o período fundamental de $\phi_m(t)$ seja uma fração de T_0). Assim uma combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas na forma

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jm\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jm(2\pi/T_0)t} \quad (2.5)$$

também é periódica com período T_0 . Na Equação 2.5, o termo para $m = 0$ é uma constante. Os termos para $m = +1$ e $m = -1$ possuem frequência fundamental igual a ω_0 e são denominadas componentes de primeira harmônica. Os termos para $m = +2$ e $m = -2$ são periódicos com o dobro da frequência fundamental e são denominadas componentes de segunda harmônica. E assim, são os termos para $m = +N$ e $m = -N$ que são os de n -ésima harmônica.

Como exemplificação, analisa-se quando $m = \pm 3$, considerando um sinal periódico $x(t)$ e frequência fundamental 2π , tem-se

$$x(t) = \sum_{m=-3}^{+3} a_m e^{jm2\pi t} \quad (2.6)$$

sendo,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= a_{-1} = 1/4, \\ a_2 &= a_{-2} = 1/2, \\ a_3 &= a_{-3} = 1/3, \end{aligned}$$

agrupando cada componente harmônico que possui a mesma frequência fundamental, tem-se

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \quad (2.7)$$

De Euler, escreve-se $x(t)$ na forma,

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t), \quad (2.8)$$

podendo nomeá-los como $x_0(t) = 1$, $x_1(t) = \frac{1}{4}\cos(2\pi t)$, $x_2(t) = \cos(4\pi t)$ e $x_3(t) = \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$. Pode-se ver na Figura 2.1 e na Figura 2.2 como se representam os gráficos.

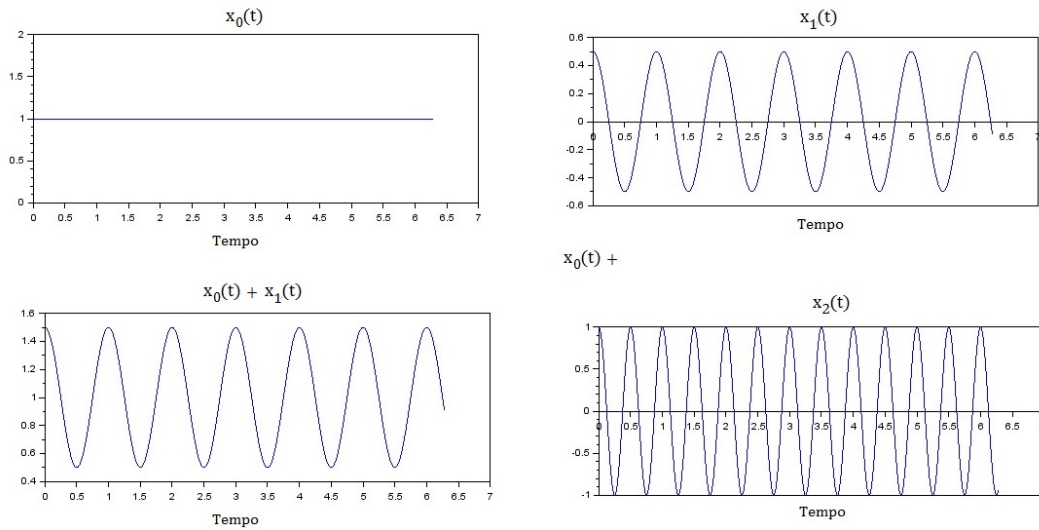


Figura 2.1: Sinal $x(t)$ como combinação linear de sinais senoidais harmonicamente relacionados (sendo, $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_0(t) + x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente)

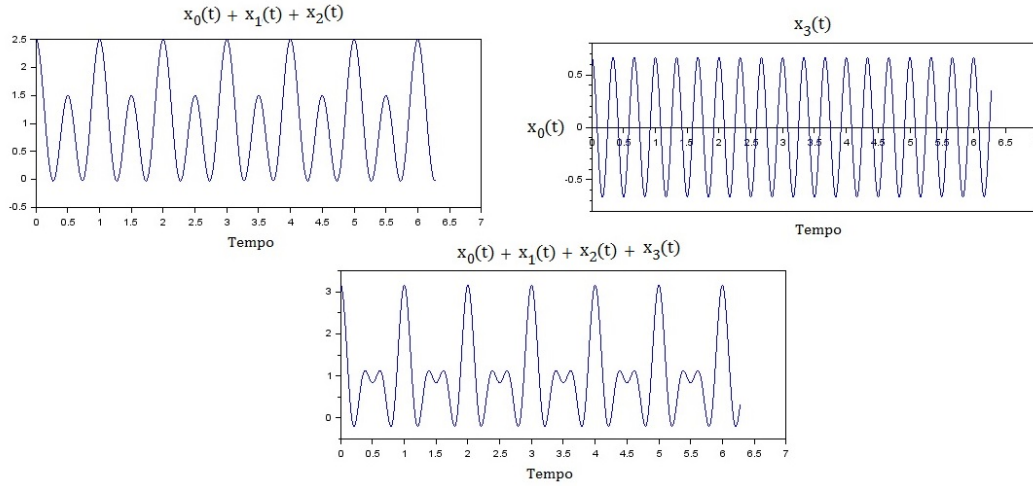


Figura 2.2: Sinal $x(t)$ como combinação linear de sinais senoidais harmonicamente relacionados (sendo, $x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$, $x_3(t)$ e $x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$, respectivamente)

2.2 Representação em série de Fourier da exponencial complexa e trigonométrica

Definição 2.2.1. *Seja uma função $x(t)$ de período T_0 , então os coeficientes de Fourier $\{c_m\}$ de $x(t)$ são definidos por*

$$c_m = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{\frac{-j2\pi mt}{T_0}} dt \quad (2.9)$$

para todo m inteiro. Usando os coeficientes $\{c_m\}$ podemos definir a série.

$$x(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2.10)$$

chamada Série de Fourier de $x(t)$.

Os c_m são os coeficientes de Fourier complexos, e são expressos da forma,

$$c_m = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt \quad (2.11)$$

usando comumente intervalos da integral de 0 a T_0 ou de $-T_0/2$ a $T_0/2$. E fazendo $m = 0$ na Equação 2.11 tem-se

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt, \quad (2.12)$$

ou seja, indica que de certa forma c_0 é igual ao valor médio de $x(t)$ em um período.

Definição 2.2.2. *Seja $T_0 > 0$, define-se série trigonométrica toda função do tipo.*

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t)] \quad (2.13)$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

Sendo,

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(m\omega_0 t) dt \quad (2.14)$$

$$b_m = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(m\omega_0 t) dt \quad (2.15)$$

Os coeficientes a_m e b_m e os coeficientes de Fourier complexos c_m se relacionam

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad a_m = c_m + c_{-m} \quad b_m = j(c_m - c_{-m}) \quad (2.16)$$

Da Equação 2.16, obtemos

$$c_m = \frac{1}{2}(a_m - jb_m) \quad c_{-m} = \frac{1}{2}(c_m + jc_m) \quad (2.17)$$

Quanto $x(t)$ for real, então a_m e b_m são reais e pela Equação 2.16, temos

$$a_m = 2\text{Re}[c_m] \quad b_m = -2\text{Im}[c_m] \quad (2.18)$$

ou seja, as duas séries de Fourier, *trigonométrica* e *exponencial* são equivalentes.

2.2.1 Sinais Pares e Ímpares

Se um sinal periódico $x(t)$ for par, então $b_k = 0$ e sua série de Fourier contém apenas termos de cossenos:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2.19)$$

Se um sinal periódico $x(t)$ for ímpar, então $a_k = 0$ e sua série de Fourier contém apenas termos de senos:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2.20)$$

Entretanto, considere agora um sinal periódico contínuo $x(t) \in \mathbb{C} = \{\text{conjunto dos números complexos}\}$, ou seja, o sinal $x(t)$ tem valores complexos, com parte real e parte imaginária. A série exponencial de Fourier nos permite aproximar $x(t)$, o que não era possível com a série trigonométrica.

A série exponencial (ou complexa) de Fourier generaliza a série trigonométrica de Fourier e tem também a vantagem de ser mais compacta.

2.3 Algumas propriedades das séries de Fourier para sinais contínuos

2.3.1 Linearidade

Sejam dois sinais periódicos,

$x_1(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier a_m ,
 $x_2(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier b_m .

Como estes sinais tem o mesmo período T , a combinação linear deles também será periódica com período T e que $y(t) = A x_1(t) + B x_2(t)$ tendo $y(t)$ período T ,

$y(t)$ tem frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e coeficientes de Fourier,

$$c_m = Aa_m + Bb_m .$$

2.3.2 Deslocamento no tempo

Quando um deslocamento é aplicado a um sinal $x(t)$ com período T , este é preservado. Os coeficientes de Fourier b_m e que $y(t) = x(t - t_0)$ ou seja, $y(t)$ é o sinal $x(t)$ com uma translação (shift) no tempo de t_0 . $y(t)$ tem frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e coeficientes de Fourier

$$b_m = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jm\omega_0 t} dt$$

Fazendo $\tau = t - t_0$ na integral e notando que a nova variável τ também variará sobre um intervalo de duração T , obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jm\omega_0(\tau+t_0)} d\tau &= e^{-jm\omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jm\omega_0 \tau} d\tau \\ &= e^{-jm\omega_0 t_0} a_m = e^{-jm(2\pi/T)t_0} a_m \end{aligned}$$

Quando, então, um sinal período é deslocado no tempo, as magnitudes de seus coeficientes da série de Fourier permanecem inalterada. Tem-se, portanto,

$$|b_m| = |a_m|$$

2.3.3 Reflexão no tempo

Suponha que $x(t)$ é um sinal com período T e que $y(t) = x(-t)$ para determinar os coeficientes da série de Fourier, $y(t)$ tem frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Tendo,

$$x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{-jm(2\pi/T)t} .$$

Fazendo, $m = -k$, obtem-se

$$y(t) = x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk(2\pi/T)t} ,$$

com os coeficientes da série de Fourier b_m são $b_m = a_{-m}$.

Então, se $x(t)$ é um sinal par, tem-se os coeficientes de Fourier, eles próprios, pares; isto é, $a_m = a_{-m}$, e se $x(t)$ é um sinal ímpar, tem-se os coeficientes de Fourier, eles próprios, ímpares; isto é, $a_{-m} = -a_m$.

A reflexão no tempo aplicada a um sinal de tempo contínuo resulta numa reflexão no tempo da sequência correspondente dos coeficientes da série de Fourier.

2.3.4 Mudança na Escala no tempo

Suponha que $x(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c_m e que $y(t) = x(-t)$, ou seja, $y(t)$ tem frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e coeficientes de Fourier e que $y(t) = x(\alpha t)$, ou seja, $y(t)$ com um período T/α ,

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{-jm(\alpha\omega_0)t}.$$

A série de Fourier muda por causa da mudança da frequência fundamental (e do período), entretanto, os coeficientes não mudam.

2.3.5 Multiplicação

Tendo,

$x_1(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c'_m ,
 $x_2(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier c''_m .

Sendo o sinal $y(t) = x_1(t)x_2(t)$ e coeficientes de Fourier,

$$c_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{m-l} = a[m] * b[m].$$

Ou seja, c_m é a convolução entre os sinais discretos $a_m = a[m]$ e $b_m = b[m]$ que serão visto em seções a seguir.

2.4 Série exponencial de Fourier para sinais discretos

Um sinal discreto é periódico se $x[n] = x[n + N]$ onde N é o período, além disso, ele é chamando de período fundamental se for o menor inteiro para o qual a relação acima satisfaz. E neste caso: $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ frequência fundamental.

O conjunto de todos os sinais discretos no tempo do tipo exponenciais complexos que são periódicos (com período N) é dado por

$$\phi_m[n] = e^{jm\omega_0 n} = e^{jm(2\pi/N)n}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.21)$$

e todos estes sinais têm frequência fundamental que são múltiplas de $2\pi/N$ e portanto são harmonicamente relacionados.

A representação em série de Fourier de um sinal periódico de tempo discreto é uma série finita, já na representação da série do sinal periódico em tempo discreto é infinita.

Existem apenas N sinais distintos no conjunto de funções $\phi_m[n]$ definido pela Equação 2.21.

Isto é uma consequência do fato de que sinais discretos no tempo do tipo exponenciais complexas que diferem na frequência por um múltiplo de 2π são idênticos.

Ou seja, após N consecutivos, estes termos começam a repetir-se (SOUZA, 2022). Então se for considerado mais do que N valores de m , os a_m repetem-se periodicamente com período N ,

$$\begin{aligned}\phi_0[n] &= \phi_N[n] \\ \phi_1[n] &= \phi_{N+1}[n] \\ \phi_2[n] &= \phi_{N+2}[n] \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \phi_m[n] &= \phi_{N+m}[n] \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

Esta situação é diferente do caso contínuo pois os coeficientes que aparecem na equação de síntese da série de Fourier para sinais contínuos são todos diferentes uns dos outros.

Considerando em termos de combinações lineares das sequências $\phi_m[n]$, então, obterá

$$x[n] = \sum_m a_m \phi_m[n] = \sum_m a_m e^{jm\omega_0 n} = \sum_m a_m e^{jm(2\pi/N)n}. \quad (2.22)$$

Portanto, a série de Fourier para sinais discretos terá apenas N termos, para N consecutivos valores de m , de $m = 1$ até $m = 1 + N - 1$ e, semelhantemente, apenas N coeficientes c_k . Logo, a série de Fourier para sinais discretos tem a expressão:

$$x[n] = \sum_{m=l, (l+1), \dots}^{l+N-1} c_m e^{jm\omega_0 n} = \sum_m c_m e^{jm(2\pi/N)n}. \quad (2.23)$$

Já os coeficientes c_k s no caso discreto são definidos por

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{n=l, (l+1), \dots, l+N-1} x[n] e^{-jm\omega_0 n} = \sum_n x[n] e^{-jm(2\pi/N)n}. \quad (2.24)$$

Eles são chamados de coeficientes da série Fourier discreta ou coeficientes espectrais.

As propriedades da série de Fourier de tempo discreto são muito semelhantes a do tempo contínuo ([SOUZA, 2022](#)), já vistas na subseção anterior, com deduções similares.

A abordagem deste capítulo sobre o caso das Séries de Fourier, a frequência é varrida em múltiplos inteiros da frequência fundamental do sinal periódico, $k\omega_0$. No Capítulo 3, onde será vista a Transformada de Fourier, a frequência é varrida continuamente em ω ; assim, matematicamente, nas séries há o somatório para a varredura enquanto nas transformadas há um integral.

3

Transformadas de Fourier Contínuas e Discretas

Foram vistos no Capítulo 2 sinais periódicos, cujas exponenciais complexas que os representam estão relacionados harmonicamente. Para sinal aperiódico elas estão infinitesimalmente próximas em frequência, e a representação em termos de uma combinação linear toma a forma de uma integral em vez de uma soma. O espectro de coeficientes resultante nessa representação é chamada de transformada de Fourier. A transformada de Fourier permite analisar de forma adequada funções não periódicas.

Enquanto as séries de Fourier eram definidas apenas para sinais periódicos, as transformadas de Fourier são definidas para uma classe de sinais mais ampla.

3.1 Impulsos e sua propriedade

É importante chamar a atenção para o impulso, para então continuarmos a tratar da transformada de Fourier. A finalidade aqui não é aprofundar o assunto e sim chamar atenção a ele, fazendo um breve resumo da propriedade de peneiramento. Um impulso unitário de uma variável contínua t localizada em $t = 0$ é definido como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty; & \text{se } t = 0; \\ 0; & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

e também satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.2)$$

Considerando t como tempo, um impulso pode ser visto como um pico de amplitude

infinita e duração zero, e tendo área unitária. Com isto, levando-se em conta este comportamento, na prática (com $x(t)$ contínua em $t = 0$ uma propriedade de "peneiramento", ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0). \quad (3.3)$$

Se um ponto t qualquer é deslocado de t_0 , ele pode ser expresso como $\delta(t-t_0)$, passando a ser a propriedade expressa em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0). \quad (3.4)$$

Sendo n uma variável discreta, o impulso unitário discreto $\delta(n)$ atende aos sistemas discretos assim como o $\delta(t)$ atendem aos contínuos.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1; & \text{se } n = 0; \\ 0; & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

E tem como equivalente discreto da Equação 3.2,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1. \quad (3.6)$$

Sendo, portanto, que a propriedade de peneiramento se expressa:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n) = x(0). \quad (3.7)$$

Da mesma forma em termos mais gerais,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n-n_0)\delta(n) = x(n_0). \quad (3.8)$$

3.2 Transformadas de Fourier para sinais contínuos

Um sinal $x(t)$ e sua transformada de Fourier $X(j\omega)$ são relacionados pelas equações de síntese e análise da transformada de Fourier, esta normalmente é simbolizada por:

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega)$$

e permite expressar o sinal $x(t)$, o que não era possível com a série de Fourier se o sinal não fosse periódico, como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) e^{j\omega t} dt \quad (3.9)$$

onde:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.10)$$

Para sinais aperiódicos, as exponenciais complexas vão se aproximando e formando uma curva contínua em frequência. De acordo com a Equação 3.9 tem-se amplitude $X(j\omega)(d\omega/2\pi)$. Sendo $X(j\omega)$ é conhecido como espectro de $x(t)$, fornecendo informações para descrever o sinal $x(t)$ como uma integral de sinais senoidais em diferentes frequências.

Portanto, a transformada de Fourier é uma função de ω (ou de $j\omega$) e, de certa forma, generaliza a série de Fourier (SOUZA, 2022). A Equação 3.9 como a fórmula da transformada inversa de Fourier, e a Equação 3.10 dá propriamente a fórmula da transformada de Fourier. Uma função pode ser recuperada a partir da sua transformada.

A Transformada de Fourier da função x de domínio temporal passa para o domínio de frequência. Ela apresenta várias operações geralmente calculadas em funções, por exemplo: combinações lineares, diferenciação, translação, dilatação, entre outras (PUPIN, 2011).

Também pode-se desenvolver representações de transformada de Fourier para sinais periódicos, considera-se então sinais periódicos e aperiódicos.

Considerando, $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ ao aplicar a Equação 3.9 para determinar $x(t)$ se obtém $e^{j\omega_0 t}$.

A forma de uma combinação linear de impulsos igualmente espaçados em frequência, ou seja,

$$X(j\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \text{ então } x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

que correspondente a representação da série de Fourier de um sinal periódico.

Assim a transformada de Fourier de um sinal periódico com coeficientes da série de Fourier $\{a_k\}$ pode ser interpretada como um trem de impulsos ocorrendo nas frequências harmonicamente relacionadas e para os quais a área do impulso na k -ésima frequência harmônica $k\omega_0$ é 2π vezes o k -ésimo coeficiente a_k da série de Fourier (OPPENHEIM; WILLSKY, 2010).

Definição 3.2.1. *Uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente integrável sobre um intervalo real $[a, b]$ se*

$$\int_a^b |x(t)| dt < +\infty. \quad (3.11)$$

Da mesma forma podemos definir uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo absolutamente integrável sobre a reta $\mathbb{R}$ se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty. \quad (3.12)$$

Utilizando a fórmula de Euler, a transformada de Fourier pode ser reescrita como

$$X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi kt) - j \sin(2\pi kt) dt. \quad (3.13)$$

Sendo $x(t)$ é real, a transformada de Fourier normalmente é complexa. A transformada de Fourier é uma extensão de $x(t)$ multiplicada por termos senoidais cujas frequências são definidas pelos valores de k . Por isso, como a única variável restante após a integração é a frequência, diz-se que o domínio da transformada de Fourier é o domínio da frequência.

3.3 Propriedades da Transformada Contínua de Fourier

Propriedade 3.3.1 (Linearidade). *Sejam $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções absolutamente integráveis e $a, b \in \mathbb{R}$, então*

$$\mathcal{F}(ax + by) = a\mathcal{F}(x) + b\mathcal{F}(y)$$

$$\begin{aligned} \text{Prova. } \mathcal{F}(ax + by)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax(t) + by(t)) e^{-j\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \mathcal{F}(x)(\omega) + b\mathcal{F}(y)(\omega) \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.3.2 (Translação). *Seja $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função absolutamente integrável, então*

$$\mathcal{F}(x(t - a))(\omega) = e^{-j\omega a} \mathcal{F}(x(t))(\omega)$$

sendo portanto, neste caso $a > 0$, ele é o quanto a função foi transladada. Reciprocamente,

$$\mathcal{F}(e^{jat} x(t)) = \mathcal{F}(x(t))(\omega - a)$$

$$\begin{aligned} \text{Prova. } \mathcal{F}(x(t - a))(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - a) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega(u+a)} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-j\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega u} du \\
&= e^{-j\omega a} \mathcal{F}(x(t))(\omega).
\end{aligned}$$

E verificando o caminho inverso tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{jat}x(t))(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jat}x(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-a)t}dt \\
&= \mathcal{F}(x(t))(\omega-a).
\end{aligned}$$

□

Propriedade 3.3.3 (Dilatação). *Seja $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função absolutamente integrável, e $a \neq 0$, então*

$$\mathcal{F}(x(at))(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(x)\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Em particular,

$$\mathcal{F}(-t) = \mathcal{F}(x)(-\omega)$$

Prova. Para $a > 0$ tem-se: $\mathcal{F}(x(at))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega u/a} \frac{du}{a} \\
&= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\frac{\omega}{a}u} du \\
&= \frac{1}{a} \mathcal{F}(x(t))\left(\frac{\omega}{a}\right).
\end{aligned}$$

Para $a < 0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x(at))(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\frac{\omega}{a}t} \frac{1}{a}dt \\
&= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\frac{\omega}{a}t} \frac{1}{a}dt \\
&= -\frac{1}{a} \mathcal{F}(x(t))\left(\frac{\omega}{a}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{F}(x(at))(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(x)\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

□

3.4 Espectro de Fourier

O espectro de Fourier é formado pelas componentes de magnitude e fase da transformada. Geralmente, a transformada de Fourier $\mathcal{F}(k)$ de uma função $x(t)$ contém termos complexos, podendo ser representada como um vetor $\mathcal{F}(k) = a(k) + jb(k)$ no plano complexo. Um modo de interpretar a transformada de Fourier é calcular a magnitude (ou amplitude) dela (um valor real), sendo seu módulo igual a $\sqrt{a(k)^2 + b(k)^2}$ e o ângulo de fase ϕ igual a $\arctg \frac{b(k)}{a(k)}$.

Tendo a função $x(t) = \delta(t - t_0) \iff \mathcal{F}(k) = e^{-jk_0t} = \cos(2\pi kt_0) - j\sin(2\pi kt_0)$ representada na Figura 3.1

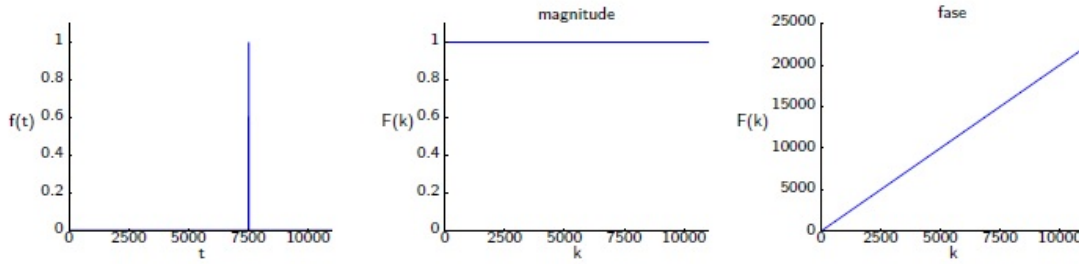


Figura 3.1: Figura modificada de (PEDRINI, 2022)

Que mostra que um deslocamento do sinal no domínio do tempo não afeta a magnitude, mas, adiciona um componente linear a fase.

3.5 Amostragem

As tecnologias digitais muito empregadas hoje em dia requerem a discretização das funções, reduzindo-as a uma lista finita de números (amostras). No uso de um sistema por um engenheiro não importa muito o comportamento de uma função (sinal) em instantes de tempo anteriores ou no momento posterior ao seu uso.

Por exemplo, na prática, os sinais de som possuem formas complicadas. Uma vez mais, não se conhecem suas expressões analíticas. Geralmente, o que se tem é um sinal elétrico análogo a grandeza que se deseja medir e analisar. Nestes casos, o que se faz é “amostrar” o sinal em vários instantes de tempo e calcular a transformada discreta de Fourier, uma aproximação da transformada continua de Fourier.

O Teorema da Amostragem da chamada Teoria da Informação diz que, sob certas condições, as aproximações podem ser apropriadas quanto maior a taxa de amostragem (PUPIN, 2011), que não é objeto de estudo mais aprofundada, será abordado de maneira a

dar uma idéia sobre um passo de como discretizar o sinal contínuo. O teorema que realiza a análise de sequências periódicas ou funções, com isto, é realizada uma amostragem da função, ou tem-se a representação de um sinal contínuo por um número finito de valores, gerando a possibilidade de armazenamento e processamento digital. Na Figura 3.2, mostra-se um exemplo do processo de amostragem.

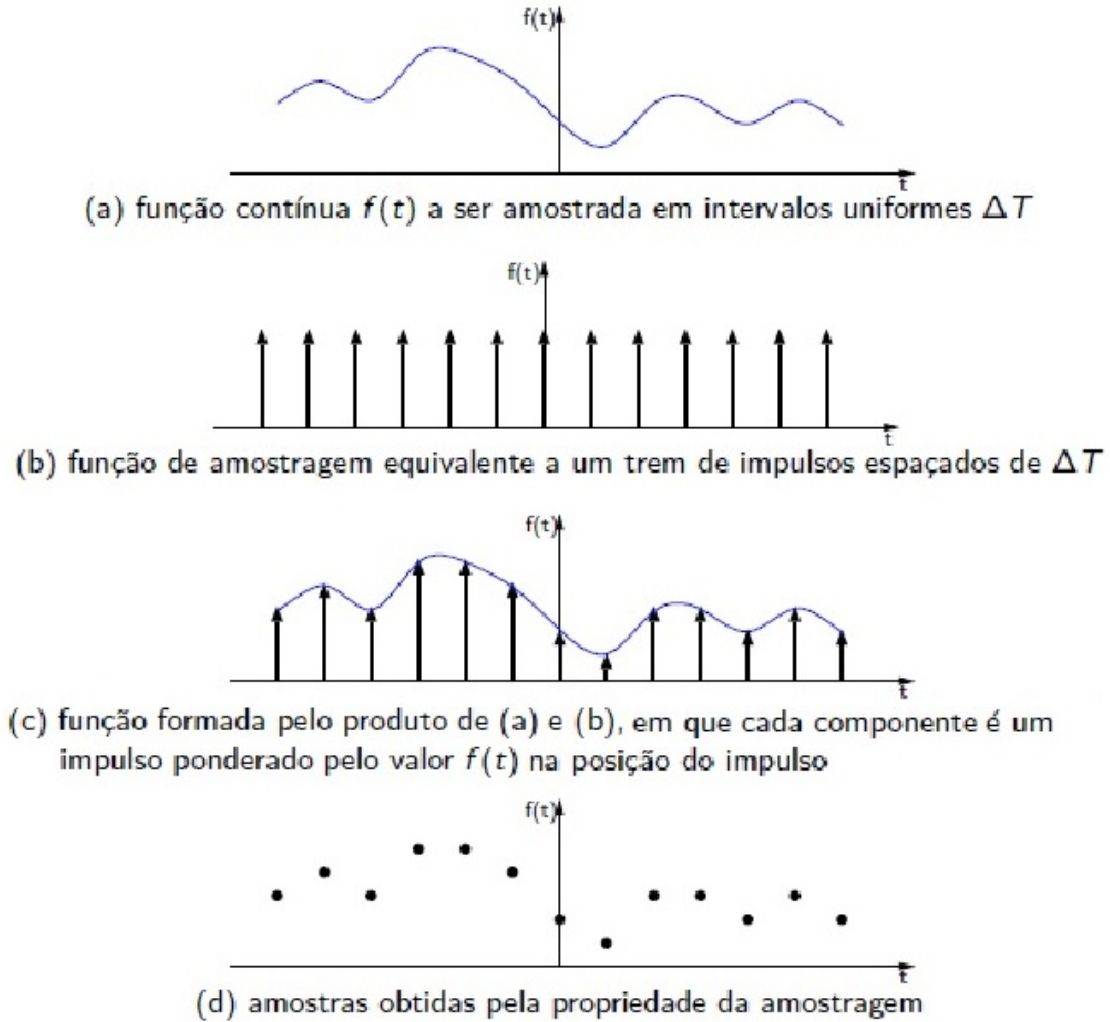


Figura 3.2: Figura modificada de (PEDRINI, 2022)

Seja $x(t)$ uma função contínua a ser amostrada em intervalos uniformes ΔT . Uma forma de modelar a amostragem de multiplicar $x(t)$ por uma função de amostragem equivalente a um trem de impulsos espaçados de ΔT , ou seja,

$$\hat{x}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - n\Delta T),$$

em que $\hat{x}(t)$ a função amostrada. Cada componente do somatório de um impulso ponderado pelo valor de $x(t)$ na posição do impulso. O valor x_k de cada amostra na sequência é dado por

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - k\Delta T)dt = x(k\Delta T) = x(k\Delta T) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Seja $\hat{x}(t)$ a versão amostrada de $x(t)$ usando a amostragem de impulso com uma frequência de amostragem f_s . Então, as amostras $x(k)$ contêm todas as informações necessárias para recuperar o sinal original $x(t)$. Este resultado, chamado de teorema da amostragem, estabelece que é possível reconstruir um sinal (de banda limitada, B) contínuo no tempo a partir de suas amostras se a frequência de amostragem exceder duas vezes a largura da banda, que é o limite de uma banda de frequência no intervalo finito, ou seja, $f_s > 2B$. O teorema da amostragem foi formulado por Harry Nyquist.

3.6 Transformada discreta de Fourier

A transformada discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT) é o membro da família utilizado para sinais digitalizados. Os coeficientes da DFT fornece uma aproximação para os respectivos coeficientes da Série de Fourier.

A DFT é uma transformação de coordenadas, que resulta em componentes pertencentes aos números complexos. Cada coeficiente é obtido pela combinação linear dos elementos da entrada com o núcleo da transformada. O resultado da transformada de Fourier representa exatamente um período ([OPPENHEIM; WILLSKY, 2010](#))

O sinal de entrada está no domínio de tempo, os sinais de saída estão no domínio de frequência. O processo de calcular o domínio de frequência é chamado de decomposição, análise, DFT dianteira ou simplesmente DFT. O processo oposto é chamado de síntese ou a DFT inversa.

Suponha que uma função contínua $x(t)$ se discretizada numa sequência $f(t_0), f(t_0 + \Delta t), f(t_0 + 2\Delta t), \dots, f(t_0 + [N - 1]\Delta t)$. Ou seja, $x(t) = f(t_0 + t\Delta t)$, em que t agora assume os valores discretos $0, 1, 2, \dots, N - 1$. Então, tem-se $f(0), f(1), f(2), \dots, f(N - 1)$ que denotam a amostragem de N valores uniformemente espaçados de uma função contínua correspondente. Na computação digital a transformada de Fourier precisa ser corretamente adequada para sinais discretos.

A DFT é dada por

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.14)$$

A DFT inversa (IDFT) por

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.15)$$

Portanto, o conjunto de amostras $x[n]$ pode ser recuperado a partir de $F[k]$.

Os fatores de normalização que multiplicam a DFT e a IDFT (1 e $1/N$) e os sinais dos coeficientes são meramente convenções e diferem em alguns tratamentos. Os únicos requisitos dessas convenções são que a DFT e a IDFT tenham expoentes com sinais opostos e que o produto de seus fatores de normalização seja $1/N$. Uma normalização de $\sqrt{1/N}$ nas transformadas DFT e IDFT, por exemplo, torna as transformadas unitárias ([PEDRINI, 2022](#)).

O par DFT é aplicável a qualquer conjunto finito de amostras discretas colhidas uniformemente.

Teorema 3.6.1 (Teorema da Convolução). *A operação de convolução está relacionada com a transformada de Fourier, aqui denotada como $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{F}(f(t) \otimes h(t)) \iff \mathcal{F}(f(t))\mathcal{F}(h(t))$$

ou seja, a transformada de Fourier de uma convolução entre $f(t)$ e $h(t)$ é uma multiplicação complexa de suas respectivas transformadas de Fourier no domínio da frequência.

Sejam $f(t)$ e $h(t)$ sinais contínuos no tempo. A convolução $g(t)$ de $f(t)$ com $h(t)$ é denotada $f(t) \iff h(t)$ e definida como

$$g(t) = f(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)h(\tau)dt$$

Sejam $f[n]$ e $h[n]$ sinais discretos no tempo. A convolução $g[n]$ de $f[n]$ com $h[n]$ é denotada $f[n] \otimes h[n]$ e definida como

$$g[n] = f[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n - k)h[k]$$

3.6.1 Exemplo de Convolução

A convolução discreta de sinais finitos realizada pela abordagem gráfica da resposta impulsiva é apresentada através de um exemplo gráfico. Na Figura 3.3, pode-se ver o sinal de entrada discreto, $x[n]$, e a resposta impulsiva do sistema $h[n]$, ambas com três amostras. O sinal $x[n]$ pode ser decomposto pelas suas amostras ($x[0] = 2$; $x[1] = 1$; $x[2] = -1$) multiplicadas por impulsos deslocados, $x[n] = 2\delta[n] + \delta[n - 1] - \delta[n - 2]$. Sendo que o sinal de saída também corresponde ao somatório das respectivas saídas em $y[n] = 4\delta[n] + 6\delta[n - 1] + 4\delta[n - 2] - 2\delta[n - 4]$, pela aplicação do princípio da superposição em sistemas lineares, $y[n] = y_0[n] + y_1[n] + y_2[n]$.

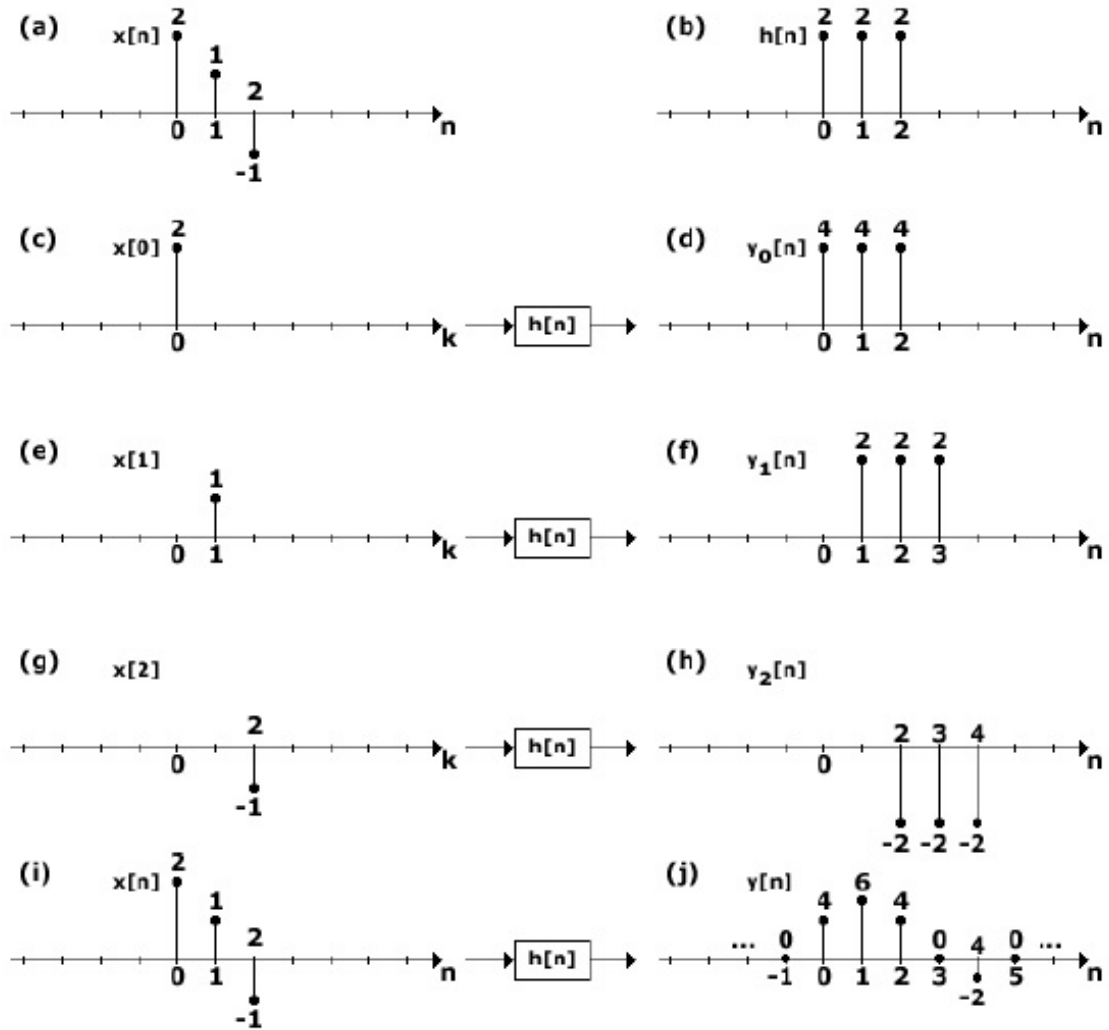


Figura 3.3: Figura modificada de (SOVIERZOSKI, 2022)

3.6.2 Amostragem periódica

Se pretendermos trabalhar com sinais de tempo discreto, primeiramente devemos amostrar o seu equivalente de tempo contínuo. Na prática a operação de amostragem é executada por um conversor AD (conversor analógico-digital) que inclui também a quantização das amplitudes das amostras e a digitalização. Assim, a saída do conversor AD é uma série de valores digitais. A operação reversa para a reconstrução de um sinal contínuo a partir de suas amostras é conhecida como conversão digital analógica (DA). A teoria da amostragem tem um papel muito importante no desempenho de qualquer sistema de processamento digital de sinais.

Uma representação de um conversor AD em um diagrama é dada na Figura 3.4, que mostra um conversor Contínuo/Discreto e onde representa-se visualmente o sinal contínuo, a frequência de amostragem e o sinal discreto.

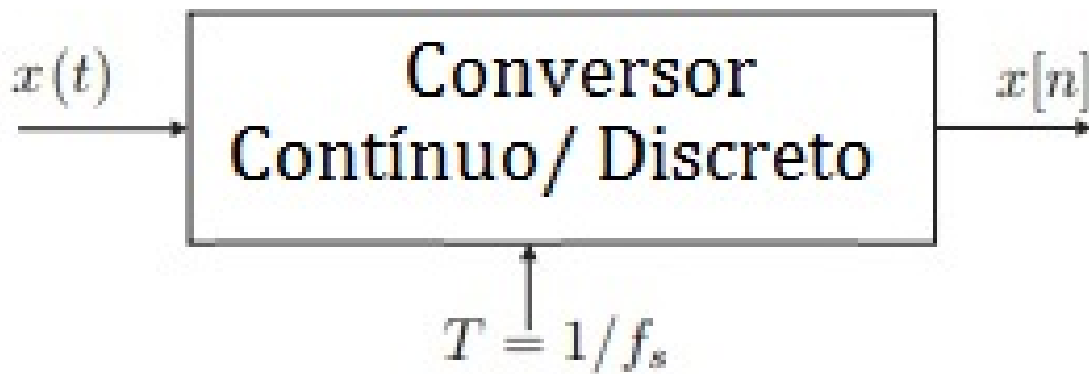


Figura 3.4: Diagrama da conversão contínuo para discreto

Onde:

- Sinal de tempo contínuo: $x(t)$
- Sinal de tempo discreto: $x[n] = x(nT)$, $-\infty < n < \infty$
- Período de amostragem: $T[s]$
- Frequência de amostragem: $f_s = 1/T$ [Hz ou amostras/s]
- Frequência de amostragem: $\Omega_s = 2\pi f_s$ [rad/s]

Geralmente, utiliza-se m e n para expressar variáveis discretas por ser mais comum para derivações. Mas, quando vai se trabalhar com duas dimensões é comum utilizar x e

y para variáveis de coordenadas de imagem, que representam uma tela de equipamentos eletrônicos, ou os eixos de uma tela, sendo a origem no lado esquerdo superior e u e v para variáveis de frequência onde se entende que elas sejam inteiras. A resolução em termos de frequência, Δu , da DFT depende da duração T ao longo da qual a função contínua $x(t)$, é amostrada, e o intervalo de frequências coberto pela DFT depende do intervalo de amostragem ΔT .

3.7 Extensão para funções de duas variáveis

3.7.1 O impulso 2-D e sua propriedade de peneiramento

O impulso, $\delta(t, z)$ de duas variáveis contínuas, t e z , é definido,

$$\delta(t, z) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = z = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.16)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, z) dt dz = 1 \quad (3.17)$$

Sendo a função $f(t, z)$, a propriedade de peneiramento se dá como,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t, z) dt dz = f(0, 0) \quad (3.18)$$

em um impulso localizado nas coordenadas nas coordenadas (t_0, z_0) , esta propriedade resulta no valor da função $f(t, z)$ na posição do impulso.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0, z - z_0) \delta(t, z) dt dz = f(t_0, z_0) \quad (3.19)$$

Para variáveis discretas x e y , o impulso discreto 2-D

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.20)$$

e sua propriedade de peneiramento é

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) = f(0, 0) \quad (3.21)$$

sendo $f(x, y)$ uma função das variáveis discretas x e y . Para um impulso localizado ns coordenadas (x_0, y_0) . A propriedade de peneiramento é

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (3.22)$$

e esta propriedade resulta no valor da função $f(x, y)$ na posição do impulso.

3.7.2 Transformada discreta de Fourier 2-D e sua inversa

No caso de duas variáveis, o par de transformadas discretas de Fourier é

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \quad (3.23)$$

Com o tamanho da imagem digital M e N e nos intervalos $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ e $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

Dada a transformada $F(u, v)$, pode-se $f(x, y)$ utilizando a transformada discreta de Fourier inversa (IDFT):

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{[j2\pi(ux/M + vy/N)]} \quad (3.24)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ e $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ as Equações 3.23 e 3.24 são o par de transformadas discretas de Fourier 2-D.

quando as imagens são amostradas em uma matriz quadrada, $M = N$ e

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{[-j2\pi(ux + vy)/N]} \quad (3.25)$$

para $u, v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ e

$$F(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{[j2\pi(ux + vy)/N]} \quad (3.26)$$

para $x, y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Sendo $F(u, v)$ e $f(x, y)$ um par de transformadas de Fourier, o argumento destes fatores multiplicativos constantes e arbitrários. Na prática, as imagens são tipicamente digitalizadas em matrizes quadradas, de modo que as Equações 3.25 e 3.26 são as utilizadas na maior parte das vezes.

A) Relacionamento entre intervalos de frequência e amostragem

Com uma função contínua $f(t, z)$ amostrada para formar uma imagem digital $f(x, y)$, e portanto, tendo $M \times N$ amostras obtidas, respectivamente, na direção de t e z . Sendo ΔT

e ΔZ os intervalos entre as amostras. Os intervalos entre as variáveis discretas correspondentes no domínio da frequência.

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} \text{ e } \Delta v = \frac{1}{N\Delta Z}$$

sendo as amostras no domínio de frequência são inversamente proporcionais tanto no número de amostras quanto para o espaçamento entre amostras no domínio do espaço.

3.7.3 Espectro de Fourier e ângulo de fase

A DFT 2-D pode ser expressa pela forma polar,

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\phi(u, v)} \quad (3.27)$$

sendo que a magnitude

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2} \quad (3.28)$$

é chamado de espectro de Fourier. E o ângulo de fase é dado por,

$$\phi(u, v) = \arctg \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \quad (3.29)$$

Sendo R e I as partes reais e imaginárias de $F(u, v)$. respectivamente.

A transformada de Fourier de uma função real é conjugada simétrica, isso quer dizer que o espectro apresenta simetria par em relação à origem, já o ângulo de fase ($\phi(u, v)$) tem simetria ímpar (GONZALES; WOODS, 2010):

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad \text{e} \quad \phi(u, v) = -\phi(-u, -v)$$

O espectro de Fourier assim obtido dão informações sobre as estruturas na imagem de entrada, e faz mapeia as variações nos tons de cinza dos *pixels*. Pequenas variações de intensidade de cinza em um determinado espaço indica regiões de baixa frequência, enquanto variações em maior número indica a presença de regiões de frequência alta (PEDRINI, 2022).

3.7.4 O teorema de convolução 2-D

$$f(x, y)h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x-m, y-n) \quad x=0, 1, \dots, M-1 \quad y=0, 1, \dots, N-1 \quad (3.30)$$

$$f(x, y)h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n) \text{ sendo}$$

$$x = 0, 1, \dots, M - 1 \text{ e } y = 0, 1, \dots, N - 1$$

O teorema da convolução é a base de várias técnicas de filtragem e é dada por,

$$f(x, y) \otimes h(x, y) \iff F(u, v)H(u, v)$$

e inversamente,

$$f(x, y)h(x, y) \iff F(u, v) \otimes H(u, v)$$

3.8 Processamento de imagens e DFT

Métodos de processamento digital de imagens aqui tratam da área de aplicação de melhoria de informação (imagem) para interpretação humana ou para outros passos no processamento de imagens, como, por exemplo, a segmentação, a descrição e a classificação de objetos.

Uma imagem digital pode ser considerada uma matriz, cujos elementos são chamados de *pixels* (*picture elements*), que é proporcional ao brilho ou nível de cinza da imagem naquele ponto, ou seja, o termo imagem refere-se a uma função de intensidade de luz bi-dimensional $f(x, y)$, onde x e y são coordenadas espaciais e o valor de f em um ponto qualquer (x, y) é o nível de cinza.

A DFT bidimensional é uma ferramenta matemática que pode ser aplicada na solução dos problemas de processamento digital de imagens, onde pode-se mudar do domínio do tempo ou espaço (x, y) para o domínio da frequência para seu processamento.

Na prática, quando se quer trabalhar uma imagem no domínio da frequência, por exemplo, simplesmente faz-se a DFT da imagem e a multiplica-se pela função de transferência de um filtro que é projetado de acordo com a aplicação.

No próximo capítulo será abordado o processamento de imagens, com uma visão geral sobre o assunto, e também será mostrado alguns exemplos de filtros .

4

Tópicos em Processamento Digital de Imagens

A imagem é um sinal bidimensional, deve-se, portanto, estabelecer um universo matemático no qual seja possível definir diversos modelos abstratos de uma imagem. Em seguida deve-se criar um universo de representação discreta desses modelos, com o objetivo de obter uma codificação da imagem de computador ([GOMES; VELHO, 1994](#)).

Os passos fundamentais para se representar o processamento digital de imagens são: a aquisição da imagem, o pré-processamento, a segmentação, a extração de características, e o reconhecimento e interpretação.

No pré-processamento pode se tratar do processo de filtragem, que trabalha a imagem adquirida e a transforma de acordo com objetivo desejado para sua utilização, seja atenuando ruídos, ou realçando bordas ou mesmo fazendo o processo de borrimento de alguma parte da imagem que não se deseja mostrar. Isto é, consiste em trabalhar a imagem de forma a colocá-la numa representação adequada ao interesse do estudo.

Para ser adequada ao processamento computacional, uma função $f(x, y)$ precisa ser digitalizada tanto espacialmente quanto em amplitude. A digitalização das coordenadas espaciais (x, y) é denominada amostragem da imagem e a digitalização da amplitude é chamada quantização em níveis de cinza ([GONZALES; WOODS, 2010](#))

A imagem digitalizada pode ser representada por uma matriz $M \times N$, sendo que x está no intervalo de 0 a $M-1$ e y , no intervalo de 0 a $N-1$:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \dots & f(0, N-1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \dots & f(1, N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(M-1, 0) & \dots & \dots & f(M-1, N-1) \end{bmatrix}$$

Os índices de linhas identificam um ponto na imagem, e o correspondente valor do elemento da matriz identifica o nível de cinza naquele ponto; portanto, $f(x, y)$ representa o valor do nível de cinza da imagem, como representado na Figura 4.1.

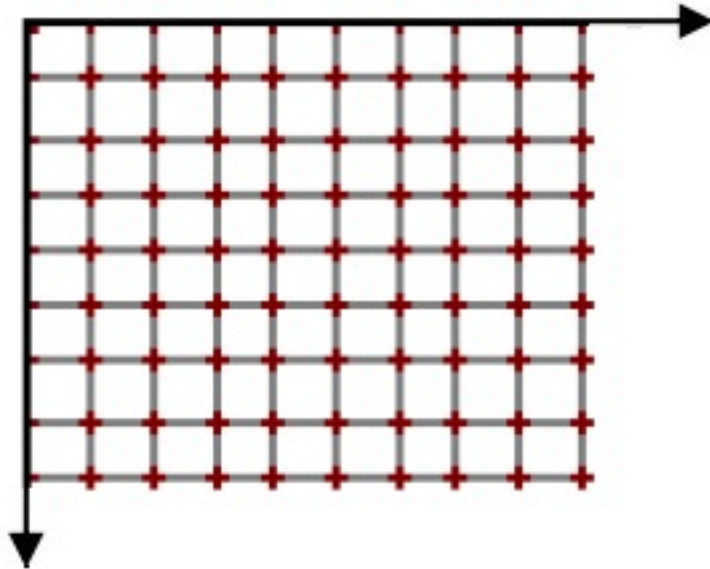


Figura 4.1: Reticulado uniforme da representação matricial da imagem.

O processamento de imagens é uma área que possibilita a utilização da aplicação de várias áreas da matemática, como a álgebra, a topologia e o estudo de várias transformadas, como a de Fourier, abordada neste trabalho.

O objetivo aqui é apresentar algumas técnicas que podem ser vista na área para que despertem interesse a futuros trabalhos.

4.1 Propriedades de uma imagem digital (vizinhança e conectividade)

A adjacência entre pontos pode ser definida a partir da noção de vizinhança. A vizinhança tem duas formas mais comuns de ser definida, conjunto de pixels:

- vizinhança 4: os 4 pontos imediatamente ao norte, sul, leste e oeste do pixel em estudo formam a vizinhança;
- vizinhança 8: os 8 pontos imediatamente ao nordeste, leste, sudeste, sul, sudoeste, oeste, noroeste e norte do pixel em estudo formam a vizinhança.

A conectividade entre *pixel* é um conceito para estabelecer limites de objetos e componentes de regiões em uma imagem.

Uma primeira definição de um conjunto conexo é que dois pontos quaisquer desse conjunto podem ser ligados por uma curva completamente contida nesse conjunto. Uma outra definição mais complexa é que dois pixels são ditos conexos se existe no mínimo uma sequência de pixels que os liga, tal que dois pixels consecutivos dessa sequência satisfaçam a condição de conectividade imediata (FACON, 2002).

A Figura 4.2 exemplifica a diferença em se considerar uma componente 4-conexa e 8-conexa. Se a figura for observada com conectividade-8 tem-se um único componente; considerando a conectividade-4, ela possui três componentes.

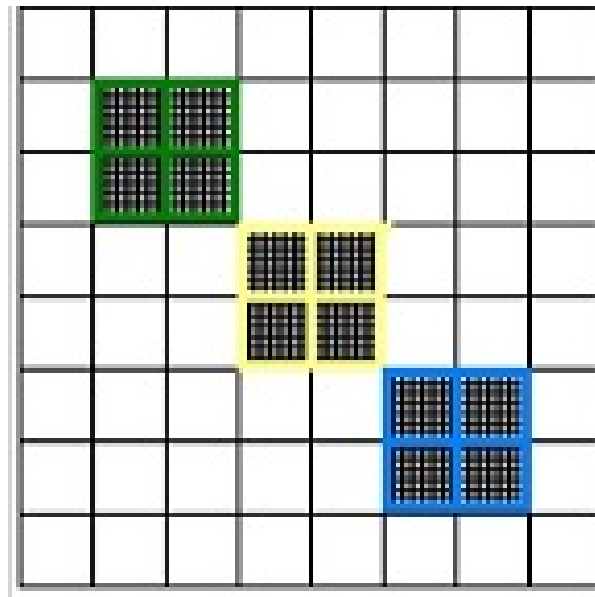


Figura 4.2: Representação de três componentes 4-conexas ou uma componente 8-conexa.

4.2 Operações orientadas a vizinhança

As operações lógicas e aritméticas orientadas a vizinhança utilizam o conceito de convolução com máscaras (ou janelas ou *templates* ou ainda, *kernels*). a convolução é uma operação entre duas matrizes, geralmente bidimensionais, uma das quais é a imagem e a outra é uma matriz chamada de matriz de convolução ou elemento estruturante.

Além de processamento *pixel a pixel*, as operações lógicas e aritméticas podem ser utilizadas em processamentos orientados a vizinhança. A aplicação de uma máscara em cada *pixel* da imagem é uma tarefa de alto custo computacional. As operações de convolução com máscaras são amplamente utilizadas ao processamento de imagens. As técnicas de

melhoria da qualidade de imagens podem ser divididas em duas famílias, as de realce e as de restauração de imagens. Sendo que as degradações a combater podem ser classificadas como espaciais, pontuais ou uma combinação de ambas.

Numa filtragem, o processamento de um nível de cinza de um pixel depende dos valores do pixel em questão e dos seus vizinhos. As operações de filtragem podem ser divididas em duas classes, a linear e a não-linear. A linear é obtida através de uma operação de convolução.

4.2.1 Morfologia matemática

O princípio básico da morfologia matemática consiste em extrair uma informação relativa à geometria e a topologia de um conjunto desconhecido de uma imagem pela transformação a partir de um outro conjunto completamente definido chamado elemento estruturante (FACON, 2002).

Ela é uma ferramenta utilizada no processamento de imagens para extrair informações relativas à forma e topologia da imagem. Suas operações estão fundamentadas na teoria matemática dos conjuntos, sendo aplicadas em várias áreas como: realce, filtragem, segmentação, entre outras.

As operações morfológicas aplicam um conjunto chamado elemento estruturante na imagem, a fim de examinar propriedades de interesse. Fundamentalmente técnicas de processamento morfológico de imagens são como técnicas de filtragem espacial, mas estes filtros espaciais não lineares são conhecidos como filtros morfológicos.

A definição formal de operações morfológicas pode ser realizada por meio da álgebra de Minkowskik. Tal álgebra é baseada nos conceitos de teoria de conjuntos, especialmente a união, a intersecção e a complementação (PEDRINI; SCHWARTZ, 2008).

O elemento estruturante é movimentado por cada *pixel* da imagem original para gerar um *pixel* na nova imagem processada. Há duas operações morfológicas básicas: erosão e dilatação, e as outras operações são elaboradas a partir delas.

4.3 Filtragem no domínio espacial e no domínio da frequência

As técnicas de filtragem podem ser divididas em dois tipos: filtragem no domínio espacial (aplicadas diretamente na matriz) e no domínio de frequência (baseadas na transformada de Fourier).

A filtragem no domínio espacial baseia-se na utilização de máscara, que são pequenas matrizes bidimensionais. As técnicas de filtragem de imagens são transformações *pixel* a

pixel, dependem além do nível de cinza de um determinado *pixel* do valor dos níveis de cinza dos *pixels* vizinhos na imagem. Combinam a intensidade de um certo número de pixels, para gerar a intensidade da imagem de saída.

Uma grande variedade de filtros digitais podem ser implementados através da convolução no domínio do espaço. Nos filtros espaciais de convolução (lineares), para se efetuar a filtragem, faz-se a convolução de uma máscara sobre a imagem que se deseja filtrar. Esta máscara é uma matriz de pesos pelos quais são multiplicados o nível de cinza do próprio pixel e de seus vizinhos. A soma destas multiplicações resulta no nível de cinza do pixel da imagem filtrada. Mais detalhes podem ser obtidos em toda a bibliografia deste trabalho.

Uma filtragem eficiente pode ser realizada usando a transformadas de Fourier quando a imagem apresenta ruído regular e/ou periódico. O que quer dizer que esta periodicidade vai ser verificada pela presença no espectro de Fourier de um pico de frequência específica. Quando se remove este pico de espectro e efetua a transformada de Fourier inversa, será removido a causa desse pico de frequência e portanto o ruído.

4.3.1 Filtragem no domínio da frequência

As técnicas de filtragem no domínio da frequência utilizam-se da convolução e baseiam-se na modificação da transformada de Fourier para atingir um objetivo específico e calcular a DFT inversa para retomar ao domínio da imagem, sendo que se tem acesso ao espectro (magnitude) e o ângulo de fase. Segue-se os seguintes passos neste processo de filtragem (mostrados na Figura 4.3): a imagem é transformada do domínio espacial para o domínio da frequência, usando a transformada de Fourier; usam-se as operações com filtro na imagem; e então, faz-se a inversa de Fourier para que a imagem possa ser exibida onde a imagem no domínio da frequência é transformada para o domínio espacial.

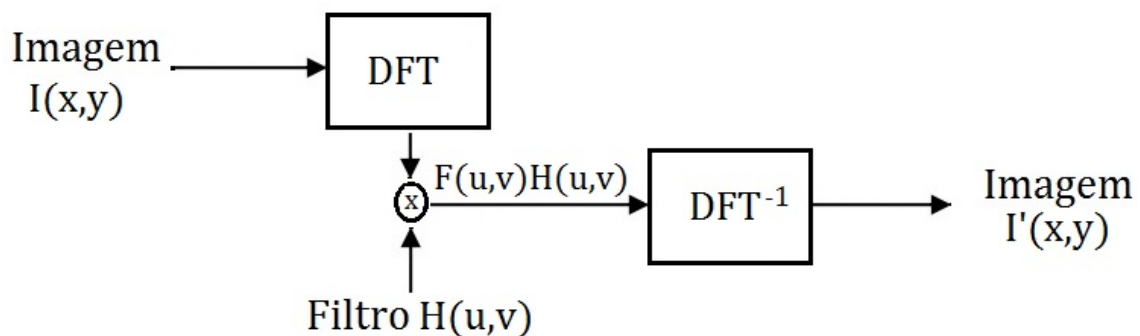


Figura 4.3: Figura ilustrativa dos passos da filtragem de uma imagem no domínio de Fourier.

Na transformada de Fourier, não há perda de informação durante a mudança de domínios, apenas a informação visual da imagem está representada de uma outra forma, no domínio da frequência. Uma imagem representada no domínio da frequência pode conter informações sobre toda a imagem no domínio espacial, indicando quanto desta frequência há na imagem. A partir do entendimento da representação da imagem do espectro de Fourier, torna-se mais simples determinar um filtro apropriado a ser aplicado à imagem. Através das informações geradas do espectro de Fourier pode-se realçar (manter) ou reter (eliminar) os coeficientes das componentes de determinadas frequências.

A Figura 4.4, mostra os espectro de Fourier de algumas imagens simples: um ponto, um segmento de reta vertical e quatro segmentos de reta. Como a frequência é diretamente relacionada a taxas espaciais de variação, não é difícil associar frequências na transformada de Fourier e os aspectos espaciais de uma imagem.



Figura 4.4: Figura modificada de (CONCI, 2018) com imagens representadas como funções bidimensionais e seus respectivos espectros de Fourier.

A relação entre filtragem no domínio do espaço e de frequência é o teorema da convolução. Assim, o filtro espacial $h(x, y)$ e o filtro no domínio de frequência $H(u, v)$ formam um par de transformadas de Fourier $h(x, y) \iff H(u, v)$.

Como esse filtro pode ser obtido a partir da resposta de um filtro no domínio de frequência a um impulso, $h(x, y)$, algumas vezes ele é chamado de resposta ao impulso de $H(u, v)$. Além disso, como todos os valores de uma implementação discreta da equação são finitos, esses filtros são chamados de filtros de resposta finita ao impulso (FIR - finite impulse response).

A imagem transformada é manipulada para ajustar seu conteúdo de frequência espacial, e então desenvolver uma transformada inversa para produzir a imagem filtrada de Fourier. Na terminologia de sistemas lineares, a transformada $H(u, v)$ é denominada função de transferência do filtro (PEDRINI, 2022).

Assim como no domínio espacial, os filtros passa-baixas no domínio de frequência causam uma suavização da imagem, uma vez que as altas frequências, correspondendo às transições abruptas. O filtro passa baixa permite que apenas as componentes de frequência

espacial baixa passem, cortando as frequências espaciais altas. E o filtro chamado passa-alta faz exatamente o contrário, deixando passar as altas. E tem ainda os chamados passa-faixa, que deixam passar determinada faixa de frequência especificadas no projeto. Além do filtro rejeita-faixa que atenua as frequências localizadas em uma faixa ou banda específica, enquanto permite a passagem de todas as outras frequências.

4.3.2 Filtro passa-baixa e passa-alta

Um filtro passa-baixa ideal pode ser representado pela função de transferência, em que D_0 é a frequência de corte medida a partir da origem e $D(u, v)$ é a distância do ponto $(u; v)$ até a origem do plano da frequência, ou seja, $\sqrt{u^2 + v^2}$. A Equação 4.1 e a Figura 4.5 mostram esta representação de um filtro passa baixa ideal.

$$H(u, v) = \begin{cases} 1; & \text{se } D(u, v) \leq D_0; \\ 0; & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

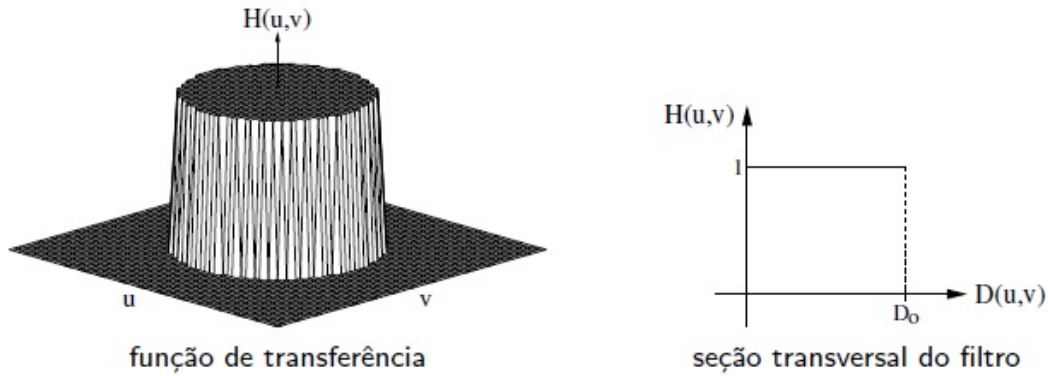


Figura 4.5: Figura modificada de (PEDRINI, 2022) com da função de transferência de um filtro passa-baixa.

Pode-se observar que, de acordo com a Equação 4.1 para $H(u, v)$, todas as frequências contidas dentro do círculo de raio D_0 não sofrem atenuações, enquanto todas as frequências fora deste círculo são completamente atenuadas, por isso, o termo filtro ideal.

Assim como no domínio espacial, os filtros passa-baixas no domínio de frequência causam uma suavização da imagem, uma vez que as altas frequências, correspondendo às transições abruptas, são atenuadas. Tais filtros tendem a minimizar o efeito de ruído, entretanto, diminuem a nitidez da imagem.

Como mencionado anteriormente, as transições bruscas de um sinal estão associadas aos componentes de alta frequência do espectro de Fourier. Assim, um realce da imagem,

com ênfase nessas transições, pode ser obtido deixando-se passar as altas frequências e atenuando-se as demais.

A Equação 4.2 e a Figura 4.6 mostram esta representação de um filtro passa alta ideal.

$$H(u, v) = \begin{cases} 0; & \text{se } D(u, v) \leq D_0; \\ 1; & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

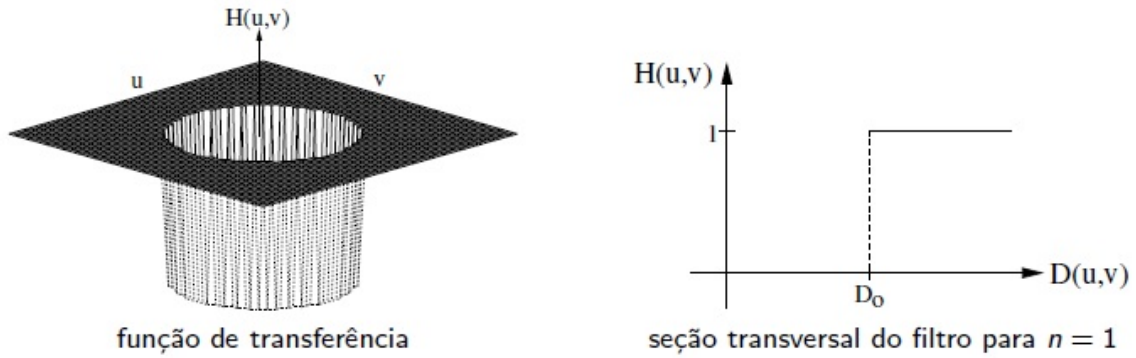


Figura 4.6: Figura modificada de (PEDRINI, 2022) com a função de transferência de um filtro passa-alta ideal.

Um filtro passa-alta permite a passagem das frequências altas com facilidade, porém atenua a amplitude das frequências abaixo de frequência de corte. Ou seja, o passa-baixa deixa passar as baixas frequências da imagem (suavização) e o passa-alta deixa passar as altas frequências da imagem (realce). A Figura 4.7 mostra três filtros lado a lado, mostrando visualmente a diferença dos seus projetos.

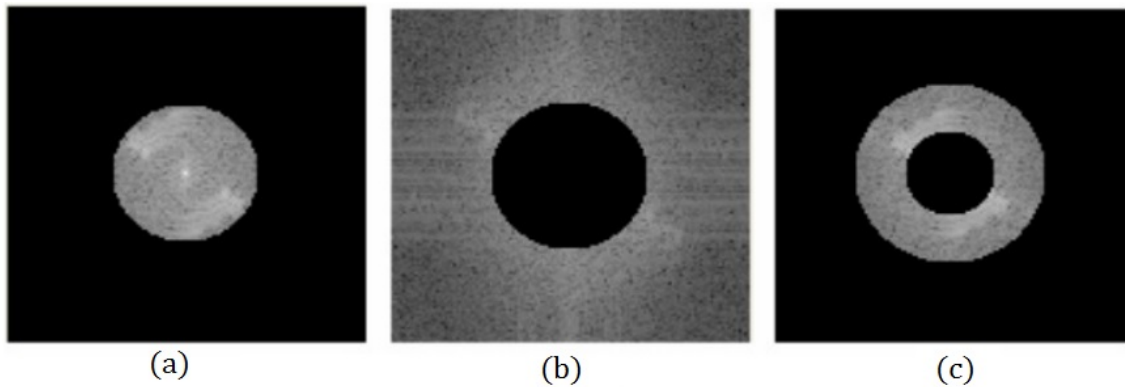


Figura 4.7: Figura modificada mostrando três projetos de filtro, (a) passa-baixa, (b) passa-alta, (c) passa-faixa.

Outros filtros como o passa-faixa e o rejeita-faixa fazem o trabalho de cortar (no caso ideal) ou atenuar frequências pré-determinadas (no caso não-ideal), como por exemplo, a Figura 4.8 que mostra o passa-faixa.



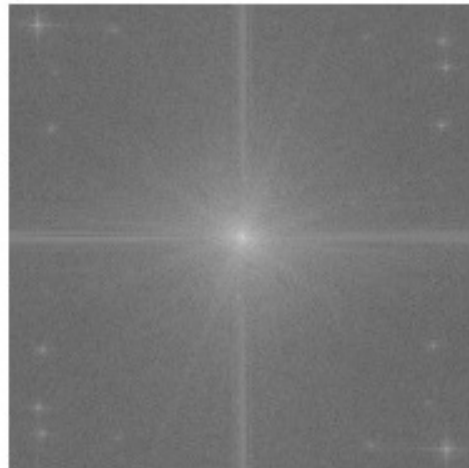
Figura 4.8: Figura modificada de (PEDRINI, 2022) com imagem de entrada, dos espectros de frequências, do filtro passa-faixa e da imagem de saída.

O resultado do uso do filtro rejeita-faixa na imagem original é mostrado na Figura 4.9.

Todos os filtros podem ser projetados de acordo com o que se espera da imagem de saída.

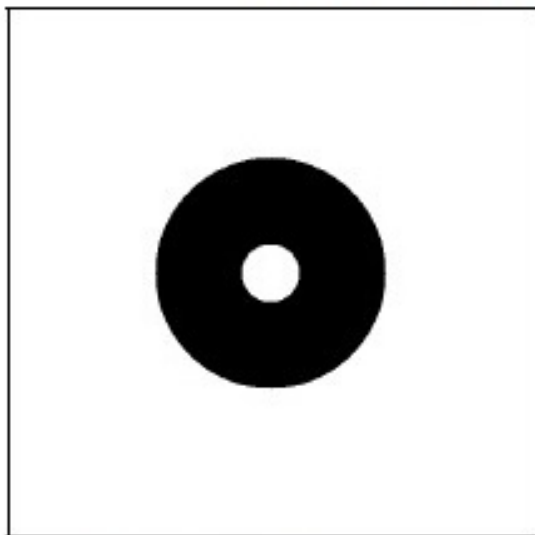


imagem original



espectro de frequência

Filtro rejeita-faixa



função de filtragem

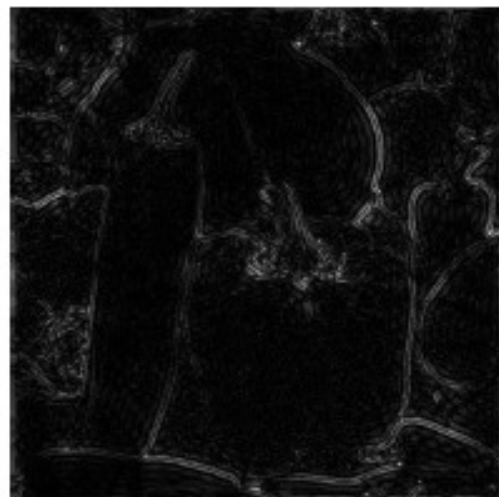


imagem filtrada

Figura 4.9: Figura modificada de (PEDRINI, 2022) com imagem de entrada, dos espectros de frequências, do filtro rejeita-faixa e da imagem de saída.

Neste trabalho, foram abordados estudos de sinais, as séries e as transformadas de Fourier. Aplicações realizadas no processamento de imagens trazem um elemento visual que ajudam na compreensão da teoria matemática estudada e estimulam o seu aprendizado.

5

Conclusão

Geralmente, ao se tratar de sinais, (sons, imagens, entre outros) exige uma grande aplicação de conceitos matemáticos. O sinal analógico ou digital deve ser tratado e processado para que gere informações buscadas. Para apresentar uma visão geral do assunto foi mostrado no primeiro Capítulo uma visão do estudo de sinais.

Todos os assuntos abordados são complexos e seus estudos não se encerram nesta proposta de trabalho, cabendo seu aprofundamento e conhecimentos específicos como a teoria da amostragem, o estudo de séries, a convolução e a correlação aplicadas no estudo de sinais. Buscou-se visualizar a análise de sinais, através de suas duas teorias, as séries e as transformadas de Fourier nos capítulos seguintes.

Em se tratando de técnicas de processamento de imagens, há um mundo a ser conhecido, pois há um número enorme de filtros espaciais e de frequência, filtros lineares e não-lineares e até mesmo o estudo em teoria de conjuntos, como no caso do uso da morfologia matemática, que também é muito usado no processamento de imagens digitais.

A escolha da aplicação do processamento digital de sinais/imagens se deu porque ela convida ao estudante para dar um mergulho no conhecimento da matemática que instiga e impulsiona seu aprendizado. Conceitos estudados tais como o estudo de sinais, a série de Fourier, a Transformada de Fourier, e técnicas de filtragem de imagens mostraram-se importantes para aprendizado da matemática e de visualizar o seu uso no cotidiano e no desenvolvimento humano.

Referências Bibliográficas

CONCI, A. *Operações Globais em Imagens: Transformações Geométricas e Transformadas*. 2018. Disponível em: <http://http://www.ic.uff.br/~aconci/Transformadas.pdf>.

FACON, J. *Processamento e Análise de Imagens*. 2002. Disponível em: <https://web.tecgraf.puc-rio.br/~scuri/inf1378/pub/CursoProcImagem.pdf>.

GOMES, J.; VELHO, L. *Computação Gráfica: Imagem*. São Paulo: Série de Computação e Matemática - IMPA/SBMPedrini), 1994.

GONZALES, R. C.; WOODS, R. E. *Processamento digital de imagens*. 3nd. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HAYKIN, S.; VEEN, B. V. *Sinais e sistemas*. 2nd. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HSU, P. H. P. *Teoria e Problemas de Sinais e Sistemas*. Porto Alegre: Bookman, 2004.

OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. *Sinais e Sistemas*. 2nd. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

PEDRINI, H. *Processamento e Análise de Imagens (MC940) Análise de Imagens (MO445)*. 2022. Disponível em: <https://www.ic.unicamp.br/~ffaria/pi2s2015/class17/dominio.frequencia.pdf>.

PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R. *Análises de Imagens Digitais*. Brasil: Thomson, 2008.

PUPIN, J. R. *Introdução às Séries e Transformadas de Fourier e Aplicações no Processamento de Sinais e Imagens*. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2011.

SOUZA, J. A. M. F. de. *Séries de Fourier*. 2022. Disponível em: http://webx.ubi.pt/~felippe/texts2/an_sinais_cap7.pdf.

SOVIERZOSKI, M. A. *Convolução de Sinais: Definição, Propriedades e Ferramentas*. 2022. Disponível em: <https://ilhadigital.florianopolis.ifsc.edu.br/index.php/ilhadigital/article/download/24/24>.