

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**A APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA NA COMPOSIÇÃO
ARQUITETÔNICA**

ELLYDA MARIA CUPERTINO FREIRE SILVA

**GOIÂNIA – GOIÁS
2021**

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia - Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Ellyda Maria Cupertino Freire Silva

Matrícula: 20162010940230

Título do Trabalho: A Aplicação da Matemática na Composição Arquitetônica

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

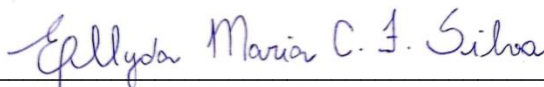
- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

_____, 28 / 01 / 2022 .
Local Data



Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

ELLYDA MARIA CUPERTINO FREIRE SILVA

**A APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA NA COMPOSIÇÃO
ARQUITETÔNICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Goiás – IFG – Câmpus
Goiânia, como requisito parcial para obtenção
do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

**GOIÂNIA - GOIÁS
2021**

S596a Silva, Ellyda Maria Cupertino Freire.

A aplicação da matemática na composição arquitetônica / Ellyda Maria Cupertino Freire Silva. –
Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2021.
59f; il.

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Matemática. 2. Arquitetura. 3. Proporção áurea. I. Vaz, Duelci Aparecido de Freitas (orientador).
II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Lana Cristina Dias Oliveira CRB1/ 2.631
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

A APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA NA COMPOSIÇÃO ARQUITETÔNICA

por

ELLYDA MARIA CUPERTINO FREIRE SILVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás — Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 22 de dezembro de 2021, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz (Presidente da Banca/ IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof^a. Dr^a. Sandra Catharinne Pantaleão Resende (UEG/Câmpus Anápolis)

(assinado eletronicamente)

Prof^a. Ma. Ana Cristina Gomes de Jesus (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

Ana Cristina Gomes de Jesus, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 22/12/2021 10:09:13.

Sandra Catharinne Pantaleão Resende, SANDRA CATHARINNE PANTALEÃO RESENDE - DOCENTE - UEG (01112580000171), em 22/12/2021 10:08:21.

Duelci Aparecido de Freitas Vaz, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 22/12/2021 10:07:29.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 13/12/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 229012

Código de Autenticação: 36ffda0e3b



AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma, seja direta ou indireta, me ajudaram a chegar até aqui e contribuíram para a minha formação profissional.

A minha mãe, que não mediu esforços para que eu pudesse ter acesso à uma boa educação desde as séries iniciais; a todos da minha família que sempre acreditaram no meu potencial e incentivaram os meus estudos.

Ao meu amor por todo apoio, conselho, ajuda e incentivo durante o processo de formação; por sempre incentivar e acreditar no meu potencial; por caminhar junto, dividir sonhos e conquistas comigo; por acrescentar alegria aos meus dias.

A sorte de ter encontrado no curso amigos que, ao longo desses cinco anos e meio, tornaram o percurso mais leve, divertido e não deixaram que em um momento de cansaço eu desistisse do caminho trilhado.

As amigas Aline, Susan e Anna Claudya por serem ouvintes, conselheiras, parceiras nos trabalhos e por partilhar comigo momentos repletos de alegria no pátio do Instituto Federal de Goiás.

A Atlética Integrada, mais especificamente à diretora Manuela, que proporcionou momentos de alegria e diversão com os jogos universitários. Manu, como sentimos a sua falta!

Ao professor e orientador Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz, pelo tempo dedicado a esse trabalho.

Aos professores que compõem o corpo docente do Instituto Federal de Goiás, foi imenso o prazer e grande o aprendizado dos momentos que passamos juntos, seja em sala de aula, em uma conversa informal no pátio ou nos congressos da matemática.

Àqueles que não citei diretamente, mas que compartilharam essa jornada comigo.

Obrigada!

Não há ramo da matemática,
por mais abstrato que seja,
que não possa um dia
vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.
(Nikolai Lobachevsky)

RESUMO

O trabalho estuda os pontos de tangência que podem ser estabelecidos entre a linguagem matemática e a arquitetura. Primeiramente discute-se uma matemática quantitativa cujo elo de ligação com a arquitetura está pautado pelo número irracional Phi e sua aplicação baseada na reprodução do módulo. Na segunda parte utilizou-se como confluência a topologia, campo da geometria que é descrito como qualitativo, aparecendo como referência analógica na adoção do partido arquitetônico. Para facilitar a compreensão, no desenvolver do trabalho será discutido os conceitos de proporção áurea, número Phi, retângulo de ouro, sequência de Fibonacci e topologia. O objetivo é que, ao trabalhar os conceitos matemáticos, posteriormente possibilite a investigação dos desdobramentos na composição arquitetônica, registrados na elaboração de tratados de arquitetura e evidenciados através da seleção de algumas obras.

Palavras-chave: Matemática. Arquitetura. Proporção. Módulo. Topologia.

ABSTRACT

This final paper studies the tangency points that can be established between the mathematic and architectural language. Primarily argues a quantitative mathematic whose connection bond with architecture is based by irrational number Phi and his application based on module breeding. In the second part the topology was used as confluence, a geometry field that is described as qualitative, appearing as an analogy reference at the adoption of architectural party. To make it easy to understand, within the develop of this paper it will be discussed the concepts of golden proportion, number Phi, golden rectangle, Fibonacci sequence and topology. The purpose is that, when we work on mathematical concepts, posteriorly enables the investigation of developments in architectural composition, registered in the drafting of architecture traits and evidenced through the selection of some works.

Key-words: Mathematic. Architecture. Proportion. Module. Topology

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Proporção áurea.	16
Figura 2 - Proporção áurea na natureza	17
Figura 3 - Construção do retângulo de ouro	18
Figura 4 - Construção do retângulo de ouro	18
Figura 5 - Construção do retângulo de ouro	19
Figura 6 - Retângulo de ouro.....	19
Figura 7 - Sequência de Fibonacci e o problema de reprodução dos coelhos	21
Figura 8 - Fibonacci e o espiral de ouro	22
Figura 9 - Fachada do Parthenon e o retângulo de ouro.....	23
Figura 10 - Fachada da Catedral de Notre Dame e o retângulo de ouro	24
Figura 11 - Desenho esquemático do Museu do crescimento ilimitado.....	24
Figura 12 - Fachada da Sede da ONU e o retângulo de ouro	25
Figura 13 - Chapel de Notre Dame du Haut e a razão áurea	25
Figura 14 - Relação das métopas e dos tríglifos no intervalo das colunas	27
Figura 15 - Distância entre as colunas.....	28
Figura 16 - Razão da altura pelo diâmetro da coluna e suas respectivas ordens.....	28
Figura 17 - O Homem Vitruviano	37
Figura 18 - O número de ouro e o corpo humano	39
Figura 19 - O Modulor	40
Figura 20 - Esquema de posicionamentos de acordo com as séries	41
Figura 21 - Esquema de formação e medidas do Modulor.....	42
Figura 22 - Unidade de Habitação de Marselha	43
Figura 23 - Referência ao modulor na composição arquitetônica	43
Figura 24 - Regiões geométricas topologicamente congruentes	44
Figura 25 - Construção do Toro ou Toróide.....	48
Figura 26 - Confecção da fita de Möbius	48
Figura 27 - Construção da Garrafa de Klein.....	49
Figura 28 - Esquematização da Casa Möbius.....	51
Figura 29 - Perspectiva externa e interna	52
Figura 30 - Maquete eletrônica e perspectiva interna.....	53
Figura 31 - O partido arquitetônico	53
Figura 32 - Perspectiva dos diferentes níveis	54

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Razão entre os termos da sequência de Fibonacci	22
Quadro 2 - Superfície topológica e o respectivo valor da característica de Euler.....	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
2	A SIMBOLOGIA DOS NÚMEROS NA ARQUITETURA	15
2.1	A PROPORÇÃO ÁUREA	15
2.2	O RETÂNGULO DE OURO.....	18
2.3	A SÉRIE DE FIBONACCI.....	20
2.4	APLICAÇÕES NA ARQUITETURA	23
3	O RIGOR MATEMÁTICO DA ARQUITETURA GREGA	26
3.1	O MÓDULO NA COMPOSIÇÃO ARQUITETÔNICA.....	26
3.2	A PROPORÇÃO DO PARTHENON	29
4	VITRÚVIO E O LEGADO NA ARQUITETURA	29
4.1	O TRATADO DE ARQUITETURA	29
4.2	A INFLUÊNCIA NO RENASCIMENTO	33
4.2.1	O tratado de Alberti	34
4.2.2	O homem vitruviano	36
5	LE CORBUSIER E O MODULOR	39
5.1	BREVE BIOGRAFIA	39
5.2	O MODULOR.....	39
6	A TOPOLOGIA E A ARQUITETURA CONTEMPORÂNEA.....	43
6.1	CONCEITUANDO TOPOLOGIA	43
6.2	SUPERFÍCIES TOPOLÓGICAS	47
6.2.1	Toro.....	47
6.2.2	Faixa de Möbius	48
6.2.3	Garrafa de Klein	49
6.3	A ARQUITETURA E AS SUPERFÍCIES TOPOLÓGICAS	50
6.3.1	Lucky Knot (2016)	53
6.3.2	Möbius House (1998)	51
6.3.3	Klein Bottle House (2008).....	52
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
8	REFERÊNCIAS.....	57

1 INTRODUÇÃO

Na vida escolar é comum que a disciplina de matemática seja o "monstro no armário" para os alunos. Apesar da aversão, é inegável sua importância ao nosso cotidiano, seja utilizando de procedimentos simples aos mais complexos. A matemática está presente, por exemplo, no simples ato de ir ao mercado e efetuar cálculos para saber o valor total das compras, ou de maneira mais complexa como na música, com as composições; na computação, com o uso da programação; na administração, para gerenciar os recursos financeiros; entre diversas outras profissões. Essa busca por demonstrar as relações entre a matemática e outras áreas de conhecimento parece súplica na tentativa de transparecer aos discentes a importância da educação matemática e justificar o que se ensina nas escolas.

No campo das construções, mais especificamente na arquitetura, a matemática está presente desde a aplicação a programas e softwares gráficos utilizados como ferramentas na elaboração de projetos, como o AutoCAD onde o projeto é criado em um sistema de plano cartesiano; como em concepções mais elaboradas, como a topologia aplicada à arquitetura. Refletindo sobre a experiência pessoal no curso de arquitetura, dentre os saberes matemáticos necessários à formação pode-se citar a aferição de medidas, o cálculo de áreas, cálculos orçamentários, desenhos bidimensionais e tridimensionais, noções de geometria, etc. Todos os conteúdos matemáticos exemplificados são aplicados ao projeto arquitetônico na concepção de plantas, fachadas, perspectivas, projeções ou elementos decorativos.

A temática desse trabalho surgiu da intenção de reunir o conhecimento entre as duas áreas de formação, a matemática e a arquitetura. Essa relação interdisciplinar da matemática com as demais disciplinas permeia desde os tempos da antiguidade, onde os gregos estabeleceram que o conhecimento matemático era composto pelo Quadrivium (astronomia, geometria, aritmética e música). Rabelo (2007, p.30) faz referência a essa concordância e cita que “a utilização da geometria, quer seja na arquitetura ou em qualquer outro campo, era um modo de repetir, no plano dos homens, a perfeição das proporções e razões do Universo”.

O objetivo da pesquisa se pautou em examinar as relações entre os conhecimentos no campo da matemática e da arquitetura, investigando alguns dos saberes matemáticos desenvolvidos ao longo da história que foram apropriados às composições arquitetônicas e exemplificá-los por meio de determinadas obras.

A organização deste trabalho será da seguinte forma, no primeiro capítulo apresentamos os pressupostos que norteiam o trabalho, bem como as motivações acerca do tema e o objetivo da pesquisa. No segundo capítulo, explanamos sobre a simbologia dos números,

particularmente, o irracional ϕ (Phi). Explicamos um pouco da história da proporção áurea e suas primeiras aparições; a aplicação das propriedades de ϕ na composição do retângulo de ouro; a relação da razão áurea com a sequência de Fibonacci. Por fim, verificamos algumas construções em que o número de ouro foi usado na composição arquitetônica. No terceiro capítulo, abordamos o ideal de beleza grego que, associado às leis matemáticas, foram fundamentais na composição arquitetônica. Destaca-se a construção do Parthenon, obra grandiosa da época, objetivando demonstrar como ocorria a aplicação do módulo na arquitetura grega. No quarto capítulo, apresentamos o legado que Vitrúvio deixou para a arquitetura com sua obra teórica *De Architectura Libri Decem*, destacando os pontos de convergência entre o tratado de arquitetura e a matemática; bem como a influência no período do Renascimento, tendo Alberti e Da Vinci como os representantes da época. No quinto capítulo, apresentamos o arquiteto Le Corbusier e sua escala harmônica que se baseava nas proporções humanas e na proporção áurea. Demonstramos como o arquiteto desenvolveu os cálculos e as medidas do *Modulor* e exemplificamos onde o sistema foi aplicado pela primeira vez na arquitetura moderna.

Essa primeira parte do trabalho está vinculada a um sistema de proporção que tem como denominador comum a seção áurea. Ching, discorrendo sobre a aplicação do número de ouro ao longo dos períodos históricos, nos diz que:

Os sistemas matemáticos de proporção se originam do conceito pitagoriano de que “tudo é número” e na crença de que certas relações numéricas manifestam a estrutura harmônica do universo. Uma dessas relações que tem sido utilizada desde os tempos da antiguidade é a proporção conhecida como Secção Áurea. Os gregos reconheceram o papel dominante que a Secção Áurea desempenhava nas proporções do corpo humano. Acreditando que tanto a humanidade quanto os santuários que acomodavam suas divindades deveriam pertencer a uma ordem universal mais elevada, utilizavam essas mesmas proporções nas estruturas de seus templos. Os arquitetos renascentistas também exploraram a Secção Áurea em suas obras. Em tempos mais recentes, Le Corbusier baseou seu sistema Modulor na Secção Áurea. Seu uso na arquitetura perdura mesmo nos dias atuais. (CHING, 1999, p.286)

A segunda parte, que compreende os tópicos da sexta seção, está voltado a uma introdução conceitual sobre topologia. Essa área da matemática se mostra bastante interessante aos arquitetos, que utilizam das definições de faixa de Möbius, Toro e garrafa de Klein como ferramenta do partido arquitetônico. Para compreender o comportamento de cada uma dessas superfícies, incorporamos os objetos à agrupamentos de acordo com características próprias segundo a definição de superfície com bordo, superfície sem bordo, superfície fechada, superfície básica, superfície não orientável e superfície orientável. Para finalizar, verificamos alguns projetos arquitetônicos em que a topologia é abordada de forma analógica.

Observa-se que, enquanto a primeira parte do trabalho discute a matemática quantitativa que permeava a antiguidade e que foi representada por sistemas matemáticos de proporção, por exemplo, a aplicação do módulo; a segunda parte fixa-se em uma geometria qualitativa que teoricamente afasta completamente essa ideia de objeto comensurável, todavia, ao ser aplicada à arquitetura se faz necessário uma referência analógica devido ao caráter quantitativo intrínseco dessa área.

Relacionar as aplicações matemáticas com a arquitetura desde a antiguidade até os dias atuais é um estudo bastante complexo. Tentar abarcar todo o período extrapolaria o limite do razoável tornando o estudo superficial, uma vez que, seria necessário maior tempo de pesquisa e aprofundamento ao tema. Sendo assim, tentou-se pegar períodos históricos mais notórios em que é evidente o uso de regras matemáticas nas obras arquitetônicas. Por fim, ressaltamos que o objetivo deste trabalho não é apresentar uma catalogação de obras arquitetônicas na qual a composição é regida pela estruturação matemática, tampouco analisar plantas e fachadas, mas é comparar a linguagem matemática e arquitetônica buscando os pontos de convergência entre esses conhecimentos.

2 A SIMBOLOGIA DOS NÚMEROS NA ARQUITETURA

“Tudo está organizado de acordo com os números e as formas matemáticas”

Pitágoras

Os números, além do princípio da contagem e do uso habitual para mensurar grandezas, são carregados historicamente de simbologia que varia de acordo com a cultura. Por vezes, eles foram vinculados a significados místicos na antiguidade perdurando até os dias atuais, como por exemplo, sorte ou azar, bem ou mal, bonito ou feio, etc. A interpretação positiva ou negativa varia de acordo com a repetição dos números em determinados eventos.

Eves (2004, p. 98) cita que “os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números e, ao mesmo tempo, do lançamento das bases do futuro misticismo numérico, foram dados por Pitágoras e seus seguidores”. A exemplo, temos a descoberta dos números amigáveis, que teve influência nos campos da magia, astrologia e dos horóscopos. Porém esses estudos de Pitágoras, até o momento, se mostravam restritos apenas aos números inteiros.

Posteriormente, com a descoberta da existência dos números irracionais, surgiu também o conceito de proporção áurea, utilizado pela primeira vez em “Os Elementos” de Euclides (300 a.C). Na sequência será desenvolvido conceitos acerca da proporção áurea e sua relação com o retângulo de ouro e a sequência de Fibonacci, bem como o desdobramento que essa constante teve nas concepções arquitetônicas.

2.1 A PROPORÇÃO ÁUREA

A proporção áurea é definida, em termos matemáticos, como uma constante real algébrica irracional e possui como sinônimos os termos número de ouro, razão áurea, seção áurea e proporção de ouro. A utilização desse conceito não se restringiu apenas às aplicações matemáticas e avançou, por exemplo, para o campo das artes. Na arquitetura, um dos objetos de estudo que compõem este trabalho, a proporção está diretamente relacionada aos ideais de beleza e simetria, uma vez que, as composições arquitetônicas regidas por esse número eram consideradas mais harmônicas e agradáveis aos olhos. Quanto a descoberta da proporção áurea:

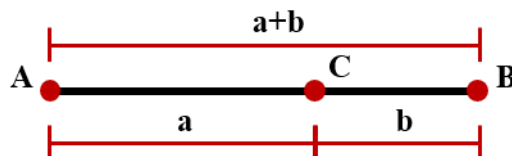
Muitos pesquisadores [...], sugerem que os Pitagóricos foram os primeiros a descobrir a Razão Áurea e a incommensurabilidade. Esses historiadores da Matemática afirmavam que a preocupação pitagórica com o pentagrama e o pentágono, combinada

com o conhecimento geométrico que havia no meio do século V A.C., tornou plausível que os pitagóricos, e, em particular Hipaso de Metaponto, tenham descoberto a Razão Áurea e, através dela, a incomensurabilidade. (LIVIO apud SILVA, 2018, p.7)

Silva (2018) relata que alguns autores registram a primeira aparição da proporção áurea com a construção das pirâmides do Egito, por volta de 4750 a.C.; outros atribuem ao documento egípcio de Ahmes, denominado *Papiro de Rhind* (1650 a.C.), no qual consta referências a uma “razão sagrada”. A definição de fato aparece pela primeira vez em “Os Elementos” de Euclides (300 a.C), na qual o procedimento consistia em uma simples divisão que o matemático chamou de **razão extrema e média**.

Para obter o chamado número de ouro deve-se seguir a seguinte lei de formação: ao seccionar o segmento AB no ponto C em duas partes não iguais (figura 1) e calcular a razão entre o segmento mais longo (AC) pelo segmento menor (CB), o resultado obtido por esta divisão deve ser o mesmo se calcularmos a razão entre a medida da reta inteira (AB) pelo segmento mais longo (AC), como demonstrado na equação 1. O valor obtido pelas operações algébricas é representado pela letra grega ϕ (Phi) e denominado **número de ouro**, cujo valor aproximado equivale a 1,6180 (resultado da expressão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Segundo Silva (2018), o símbolo da razão áurea foi determinado pela letra ϕ (lê-se Fi) em homenagem ao escultor Fídias (490 a.C. - 430 a.C.) que utilizava frequentemente a proporção em suas esculturas.

Figura 1 - Proporção áurea



Fonte: A autora.

Escrevendo matematicamente a lei de formação, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} \leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \leftrightarrow a^2 = b^2 + ab$$

(Equação 1)

Sabe-se que $\phi = a/b$ é o número conhecido como razão áurea. Dessa forma, dividindo a equação anterior por b^2 :

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} + \frac{ab}{b^2} \leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \frac{a}{b} \leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

(Equação 2)

Resolvendo a equação quadrática, temos:

$$\varphi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vale ressaltar que $\varphi > 0$ por se tratar de uma medida de comprimento e, portanto, não admite valores negativos. Logo:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi \cong 1,6180$$

Pitágoras e seus discípulos acreditavam que a lógica matemática era universal, essa conclusão é resultado da observação dos fenômenos da natureza. De fato, conseguiu-se comprovar a presença de um padrão de repetição em diversos fenômenos naturais (figura 2), como na formação das galáxias, nos furacões, nas pétalas das rosas, na razão da quantidade de abelhas fêmeas pela quantidade de machos na colmeia, nas dimensões do corpo humano, etc. Por esse motivo, a proporção áurea também é chamada de **divina proporção**.

Figura 2 - Proporção áurea na natureza



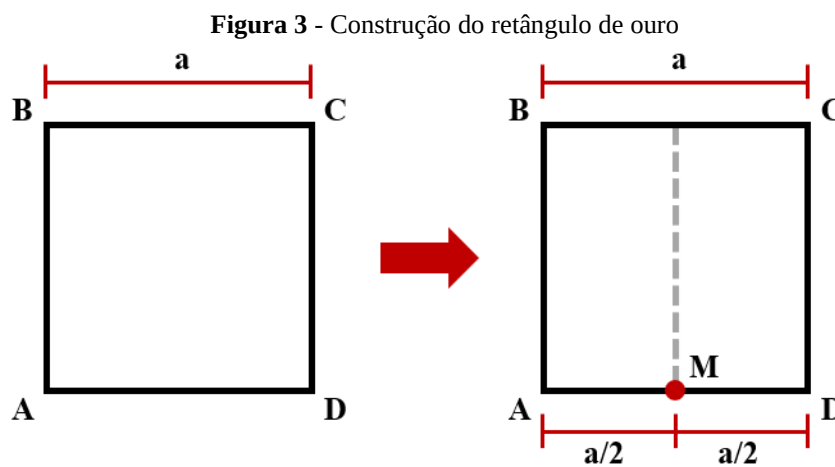
Fonte: <<https://engenharia360.com/proporcao-aurea-e-as-formas-da-arquitetura/>>

Acesso em: 11 out. 2021.

2.2 O RETÂNGULO DE OURO

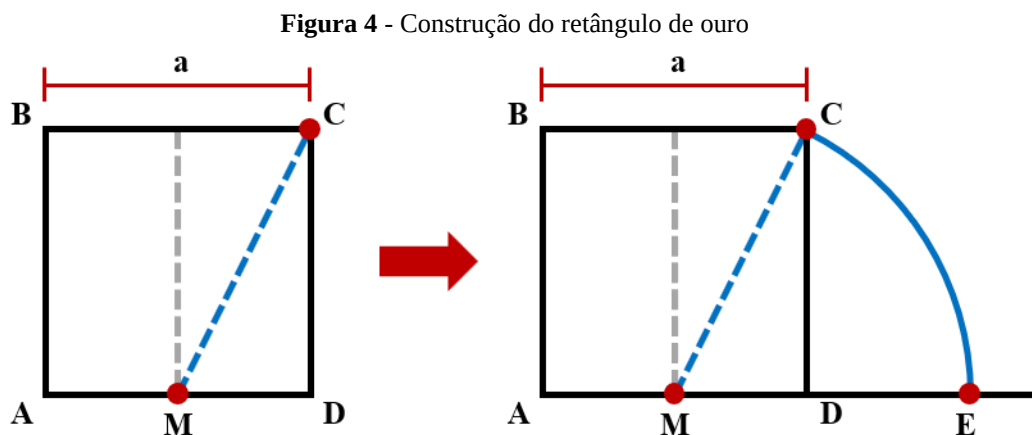
Uma aplicação das propriedades da proporção áurea está no retângulo dourado, cujas dimensões obedecem a relação de razão do maior pelo menor lado resultando no número de ouro. O processo de construção do retângulo de ouro consiste nas seguintes etapas:

1º) Primeiramente desenha-se o quadrado ABCD de lado “a” e em seguida marca-se o ponto médio do segmento [AD];



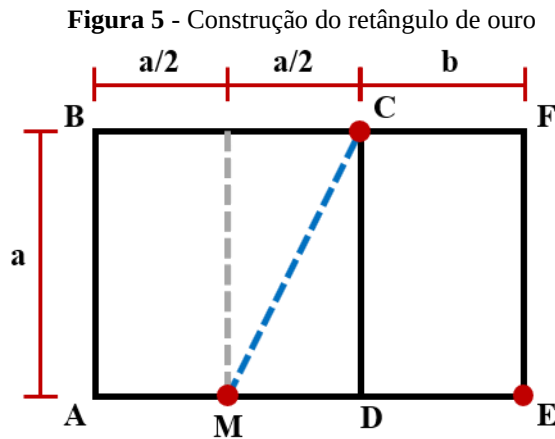
Fonte: A autora.

2º) Em seguida, liga-se o ponto médio M ao ponto C do quadrado, a dimensão deste segmento de reta é correspondente ao raio do arco. O arco deve ser desenhado com o centro em M, iniciando-se a trajetória de sentido horário no ponto C e parando na intersecção com o prolongamento da base [AD], o ponto E;



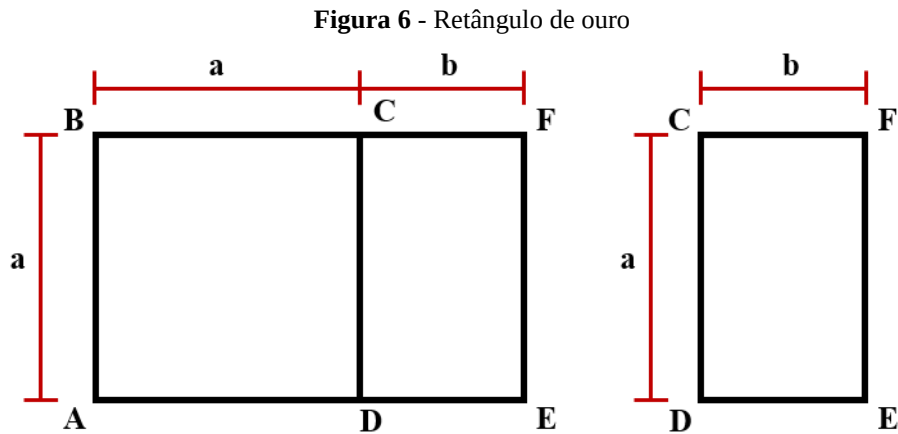
Fonte: A autora.

3º) Por fim, traça-se o segmento de reta passando pelo ponto E e paralelo à [CD]. A intersecção entre o segmento de reta que passa por E e o prolongamento do segmento [BC], corresponde ao ponto F.



Fonte: A autora.

Observando a lei de formação pode-se concluir que, dado um retângulo ABEF ele será um retângulo dourado se for possível retirarmos um quadrado ABCD e um retângulo CDEF que será semelhante ao retângulo de origem.



Fonte: A autora.

Sendo assim, se o retângulo CDEF é semelhante ao retângulo ABEF, vale a relação:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \rightarrow a^2 = b^2 + ab$$

2.3 A SÉRIE DE FIBONACCI

Um outro desdobramento do número de ouro se encontra na sequência de números infinita desenvolvida por Leonardo Pisano Fibonacci (1175-1250), importante matemático da idade média. Acerca da importância de Fibonacci ao formular a sequência que culmina na proporção áurea:

O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro lado, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações. (LIVIO, 2009 apud SILVA, 2018, p.16)

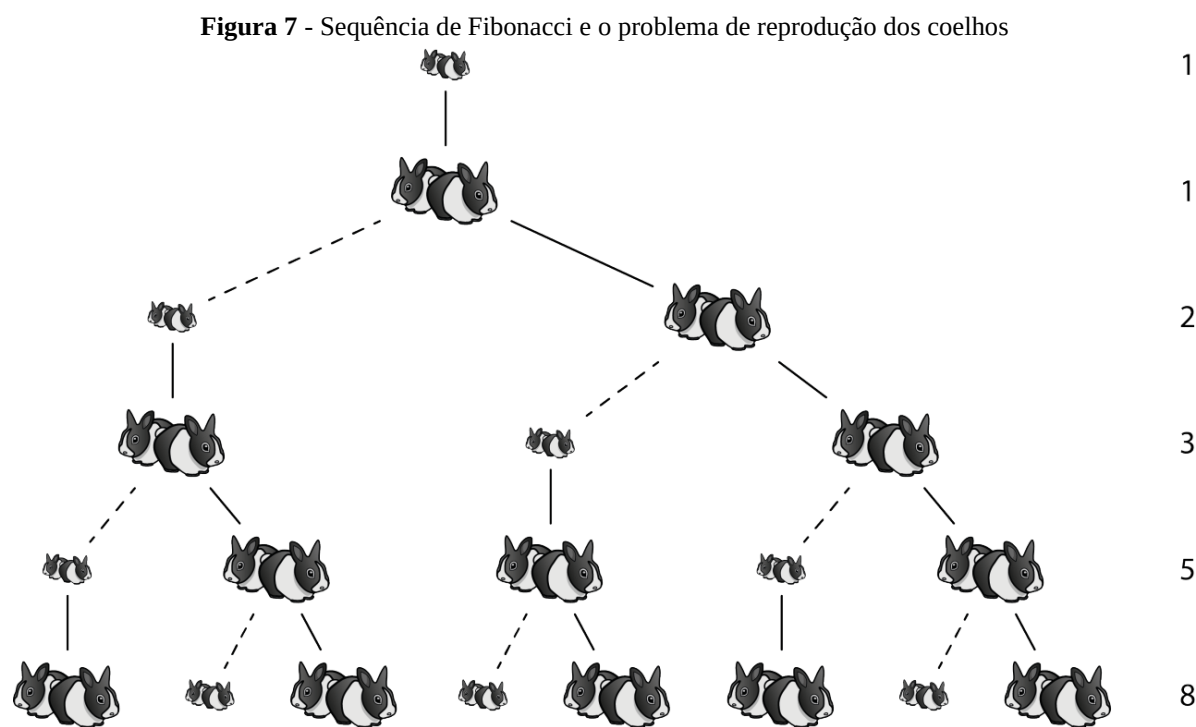
Em sua obra mais famosa intitulada por *Liber Abaci* (1202) Leonardo escreve a problemática em relação a procriação dos coelhos, cujo resultado dá origem à sequência:

“Colocando juntos um casal de coelhos, estes se tornam produtivos apenas após dois meses, gerando um par (macho e fêmea) a cada mês subsequente. A linhagem de reprodução se replica aos filhotes do casal inicial, que após dois meses também geram um par. A pergunta é, quantos pares de coelhos teremos ao completar um ano?”

Para a solução, estabelecidas as condições no problema, analisa-se a quantidade de coelhos em cada mês subsequente:

- 1º mês: o casal ainda não é fértil, contabilizando apenas um casal de coelhos.
- 2º mês: o casal de coelhos está adulto e, portanto, já é fértil.
- 3º mês: tem-se um casal de adultos férteis e um casal de coelhos filhotes gerados por eles. Portanto, temos dois casais de coelhos.
- 4º mês: tem-se o casal de adultos férteis inicial gerando mais um casal de filhotes e o casal de coelhos filhotes do mês anterior que agora já está fértil. Portanto, temos três casais de coelhos.
- 5º mês: tem-se dois casais de adultos férteis gerando um casal de filhotes cada e o casal de coelhos filhotes do mês anterior que agora já está fértil. Totalizando cinco casais de coelhos.
- 6º mês: tem-se três casais de adultos férteis gerando um casal de filhotes cada e os dois casais de coelhos filhotes do mês anterior que agora já estão férteis. Portanto, temos oito casais de coelhos.

Os próximos meses irão seguir essa mesma lógica de reprodução. Para uma melhor compreensão, a figura 7 demonstra a quantidade de casais formados nos primeiros seis meses, onde os coelhos maiores correspondem ao casal de adultos férteis e os menores são os filhotes:



Fonte: <<https://souretardado.wordpress.com/2016/10/26/a-sequencia-fibonacci/>>

Acesso em: 11 out. 2021.

Observa-se que, como resultado ao problema de reprodução, os números que compõem a quantidade de casais de coelhos constituem uma série que segue um padrão de crescimento onde o termo posterior é resultado da soma dos dois termos anteriores:

$$(1, 1, 2, 3, 5, \dots, m, n, m+n, \dots)$$

Sendo assim, ficam estabelecidos os termos iniciais:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots)$$

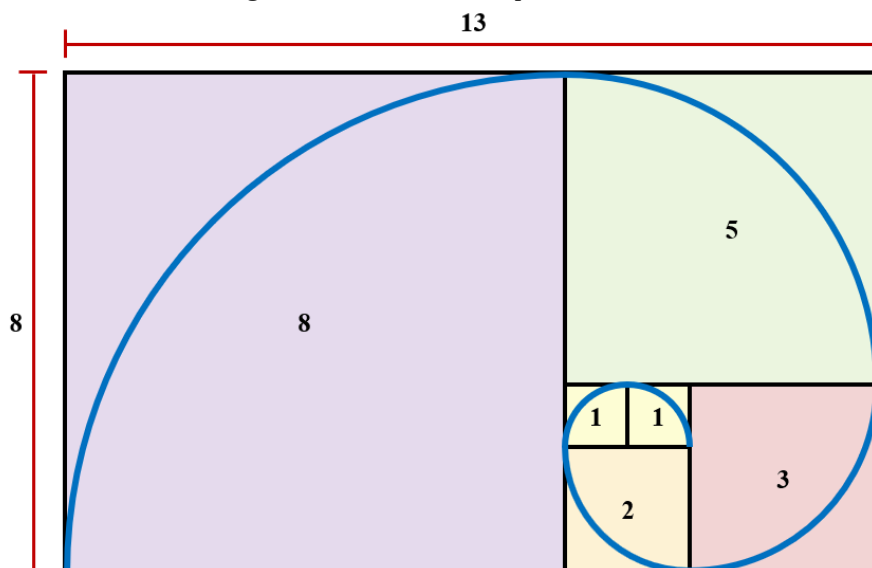
A similaridade que a sequência apresenta com a proporção áurea está no processo de divisão de um número pelo seu antecessor. À medida que os termos da sequência utilizados na operação aumentam, o resultado desta razão converge para o número ϕ , como mostra o quadro seguinte:

Quadro 1 - Razão entre os termos da sequência de Fibonacci

Razão entre os termos da sequência de Fibonacci		
$1 \div 1$	=	1,0000000000000000
$2 \div 1$	=	2,0000000000000000
$3 \div 2$	=	1,5000000000000000
$5 \div 3$	=	1,6666666666666667
$8 \div 5$	=	1,6000000000000000
$13 \div 8$	=	1,6250000000000000
$21 \div 13$	=	1,615384615384615
$34 \div 21$	=	1,619047619047619
$55 \div 34$	=	1,617647058823529
$89 \div 55$	=	1,618181818181818
$144 \div 89$	=	1,617977528089888
$233 \div 144$	=	1,6180555555555556
$377 \div 233$	=	1,618025751072961
$610 \div 377$	=	1,618037135278515
$987 \div 610$	=	1,618032786885246

Fonte: A autora.

Ao organizar os quadriláteros com as dimensões equivalentes à sequência de Fibonacci, observa-se que a composição tende a formar retângulos que convergem para a proporção áurea. O resultado da divisão dos lados do quadrilátero convergindo ao número ϕ já era esperado devido à sequência de razões predeterminadas demonstradas no quadro 1.

Figura 8 - Fibonacci e o espiral de ouro

Fonte: A autora.

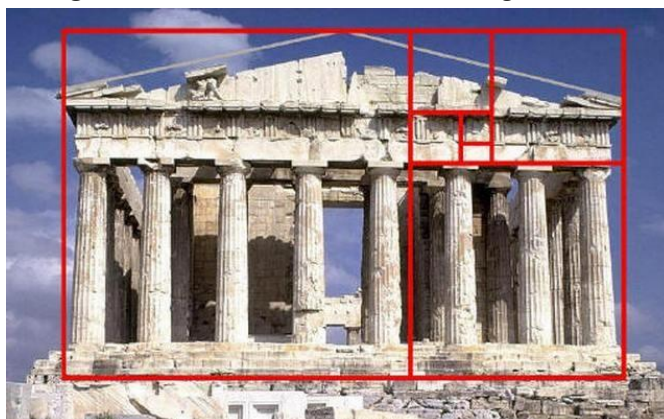
A partir dessa composição geométrica é possível construir um espiral onde os raios dos arcos que a compõem possuem dimensões equivalentes aos lados dos quadrados. Como resultado tem-se o espiral de ouro, cujo padrão é encontrado em diversos elementos da natureza (figura 8).

2.4 APLICAÇÕES NA ARQUITETURA

Segundo Silva (2018) o retângulo de ouro simbolizava para os gregos a expressão máxima da beleza em termos matemáticos, sua forma é considerada harmoniosamente dimensionada tornando-a mais agradável aos olhos do observador. As propriedades estéticas do retângulo dourado tiveram diversas aplicações no campo das artes, como por exemplo, na arquitetura, na escultura e na pintura. Sendo assim, a pesquisa reuniu algumas obras na qual é evidente a aplicação da seção áurea na composição arquitetônica.

Parthenon (447-436 a.C): construído em Atenas, na Grécia, a obra é classificada como o maior exemplo da arquitetura grega. O retângulo de ouro pode ser encontrando tanto na planta quanto na elevação frontal da construção.

Figura 9 - Fachada do Parthenon e o retângulo de ouro

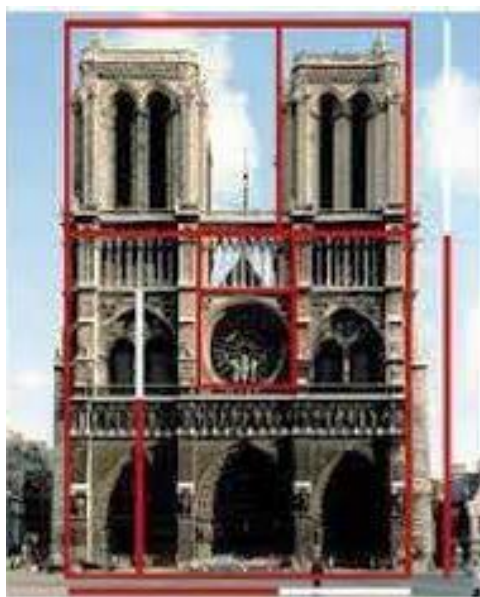


Fonte: <<https://projetobatente.com.br/regra-aurea-na-arquitetura/>>

Acesso em: 23 out. 2021.

Catedral de Notre Dame (1163-1345): localizada em Paris, na França, e construída em estilo gótico, a composição da fachada ocidental da catedral foi construída com base no segmento áureo. Constituída em três seções horizontais, é possível enquadrar nos componentes da elevação vários retângulos de ouro.

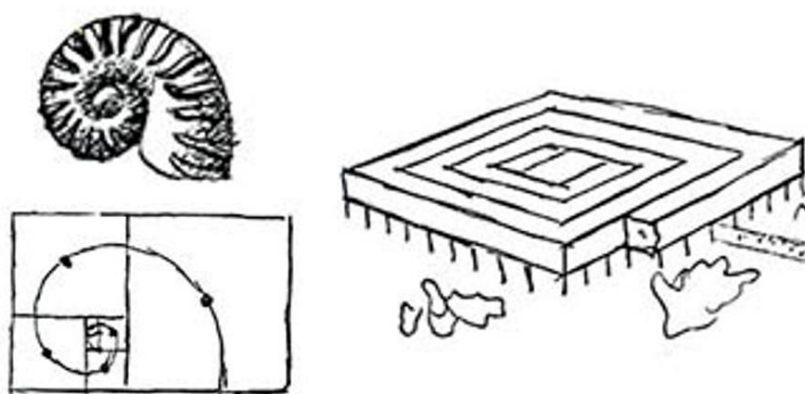
Figura 10 - Fachada da Catedral de Notre Dame e o retângulo de ouro



Fonte: <<http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/20.pdf>>
Acesso em: 25 out. 2021.

Museu do Crescimento Ilimitado (1939): o projeto corresponde a uma proposta do arquiteto Le Corbusier de construção para um museu em Philippeville, na Argélia. O partido arquitetônico foi inspirado na seção áurea e o projeto foi concebido disposto na forma de um caracol que se desenrola de uma seção retangular, possibilitando que o museu pudesse ser ampliado em caso de necessidade.

Figura 11 - Desenho esquemático do Museu do crescimento ilimitado



Fonte: <http://www.kamit.jp/17_world/76_museum/mus_eng.htm>
Acesso em: 28 nov. 2021.

Sede da Organização das Nações Unidas (1952): situado em Nova Iorque, nos Estados Unidos, o edifício foi projetado por uma equipe internacional de arquitetos, entre

eles Le Corbusier e Oscar Niemeyer. Observe que na composição da fachada é possível identificar a presença de três retângulos de ouro posicionados horizontalmente.

Figura 12 - Fachada da Sede da ONU e o retângulo de ouro

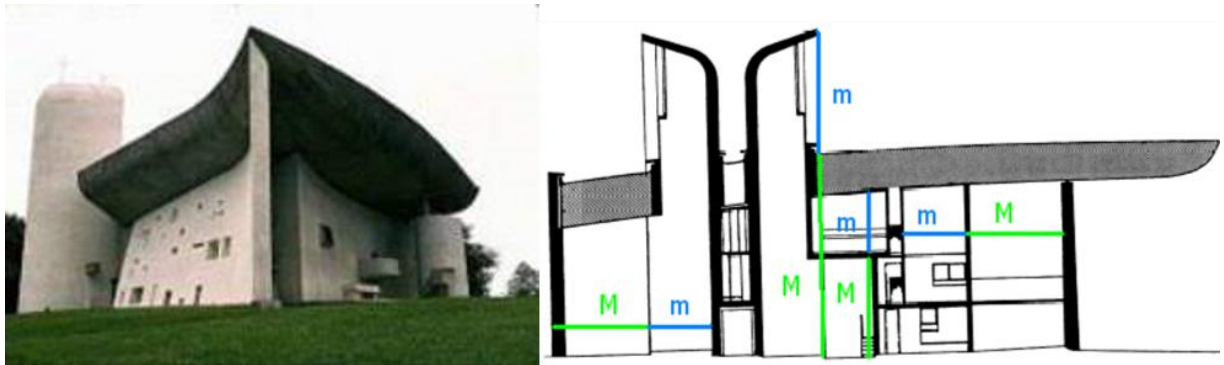


Fonte: <<https://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>>

Acesso em: 23 out. 2021.

Chapel de Notre Dame du Haut (1955): localizado em Ronchamp, na França, a “Capela Nossa Senhora das Alturas” constitui uma das obras mais conhecidas do arquiteto Le Corbusier.

Figura 13 - Chapel de Notre Dame du Haut e a razão áurea



Fonte: <<https://repositorio.unifesp.br/bitstream/handle/11600/52859/2018-0803.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>

Acesso em: 25 out. 2021.

Observe que, para dimensionar os ambientes e conferir harmonia à edificação, o arquiteto utilizou a **razão extrema e média**, cujo resultado corresponde ao número de ouro:

$$\frac{M + m}{M} = \frac{M}{m}$$

(Equação 3)

3 O RIGOR MATEMÁTICO DA ARQUITETURA GREGA

A antiguidade se caracteriza por uma busca incessante do ideal de beleza e, se tratando da beleza arquitetônica, esse ideal poderia ser alcançado através da proporção. De acordo com Ching (1999), a razão corresponde a uma comparação entre duas medidas, que em termos matemáticos podemos traduzir como o equivalente ao resultado de uma divisão. A proporção seria obtida ao se estabelecer uma igualdade entre razões, ou seja, se trata de uma equivalência de frações. Ao adotar no projeto arquitetônico um sistema de proporcionalidade, estabelecemos ao conjunto uma relação entre as partes baseada em uma razão, que será transmitida de unidade em unidade até chegar ao todo da edificação.

3.1 O MÓDULO NA COMPOSIÇÃO ARQUITETÔNICA

A arquitetura clássica surgiu na Grécia Antiga e depois foi adotada para as construções de Roma. O lugar e o tempo no qual a arquitetura se localiza influencia diretamente nas ideias e maneira de projetar. Segundo Ching (1999), é comum ao arquiteto utilizar os princípios desenvolvidos que comunicam os elementos em um sistema de projeto, sendo que, ao longo da história, diversos sistemas de proporções foram desenvolvidos – seção áurea, ordens clássicas, teorias renascentistas, o *Modulor*, etc.

Caracterizando-se pelo pensamento lógico-racional da época, a arquitetura grega seguia uma rigorosa regra construtiva com fundamento nas leis matemáticas, cujo objetivo era expressar harmonia em suas obras. A razão, a proporção, a simetria e a harmonia são palavras que constituem a essência da composição arquitetônica da época. Elas são resultado da comensurabilidade entre os elementos, isto é, todas as medidas definidas no projeto partem de uma medida comum, o módulo.

A palavra módulo teve origem na Grécia Antiga e desde o seu surgimento até a aplicação nos dias atuais sempre esteve sujeita a diversas interpretações. Todo o rigor matemático da arquitetura grega se deposita sobre a coordenação do módulo. Partindo de uma unidade básica, que seria o diâmetro da coluna, os gregos estabeleciam as fórmulas matemáticas que determinavam a dimensão dos demais elementos da composição arquitetônica. Sobre a aplicação do módulo na arquitetura grega, Farrelly expõe:

O diâmetro de cada coluna é determinado tanto por sua altura como pelo espaço deixado entre elas (chamado de intercolúnio), e, conseqüentemente, pelas relações com o todo e as proporções da edificação sustentada. Cada elemento individual da

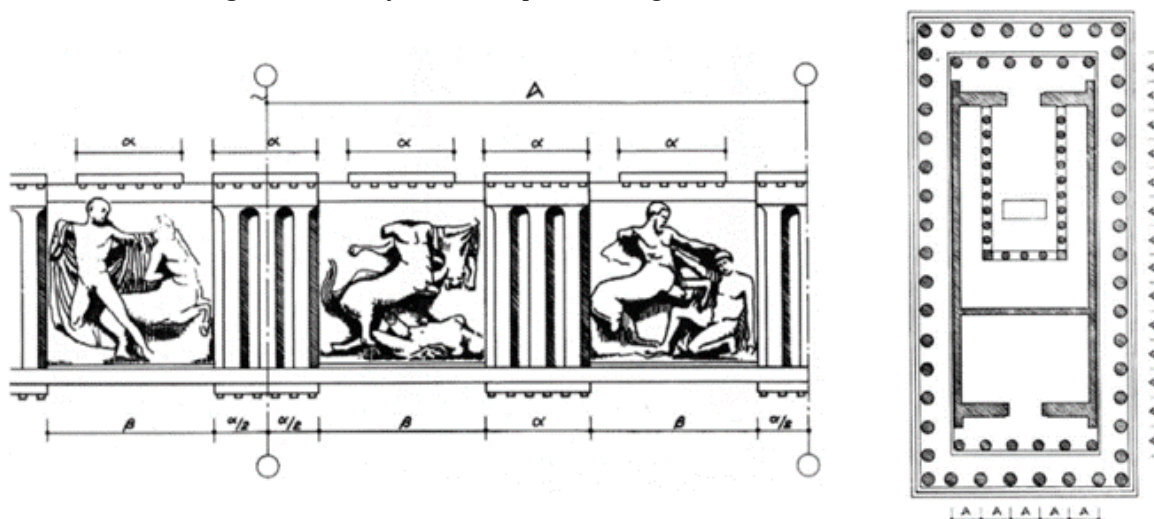
arquitetura grega se relacionava matematicamente com todos os demais, transformando a edificação em uma totalidade integrada. Esse sistema modular, em que a largura da coluna determinava as proporções da edificação, gerou uma fórmula de projeto. O esquema poderia ser aplicado tanto a uma casa pequena como a uma cidade inteira, e, ao fazê-lo permitia a criação de uma arquitetura homogênea e harmoniosa. (FARRELLY, 2014, p.38-39).

O módulo aparece associado à arquitetura grega não apenas como unidade de medida a partir da qual se dimensionava toda a edificação, mas como caráter estético, uma forma de alcançar a harmonia e a beleza. Rabelo descreve sobre a aplicação do módulo:

A arquitetura clássica caracteriza-se por um senso absoluto de equilíbrio, subordinando suas proporções à ordem matemática. [...] Normalmente, as medidas dos edifícios gregos eram múltiplas e submúltiplas do diâmetro médio da coluna, obedecendo à proporção áurea ou seção áurea, que é uma razão (ϕ) considerada particularmente harmônica entre dois segmentos. (RABELO, 2007, p.30).

Greven (2007) exemplifica a aplicação modular em uma residência de um pavimento com o módulo de $A = 4$ pés atenienses, como mostra a figura 14. Observe que à esquerda na figura está disposta a vista frontal do detalhe do friso em que a organização de duas métopas e dois tríglifos determinam o intervalo entre as colunas. No desenho à direita temos a planta baixa do edifício com a dimensão “A” correspondendo a distância dos eixos das colunas.

Figura 14 - Relação das métopas e dos tríglifos no intervalo das colunas



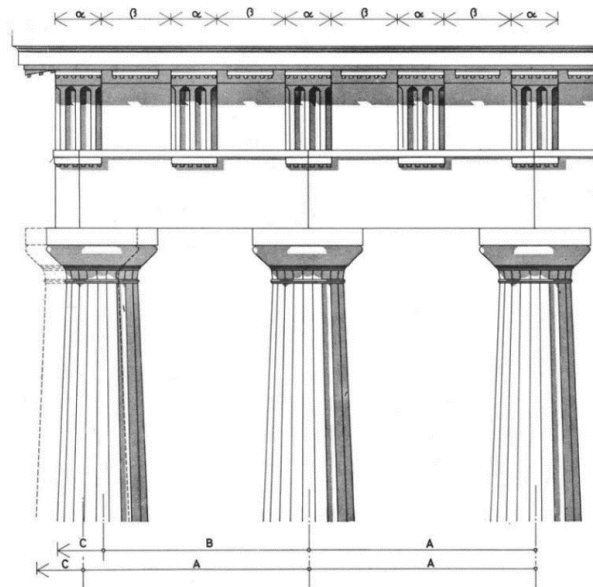
Fonte: <http://www.habitare.org.br/pdf/publicacoes/arquivos/colecao10/livro_completo.pdf>

Acesso em: 14 out. 2021.

Repare que o desenho da planta baixa não traz a distância das colunas extremas. De fato, o vão “B” da extremidade é menor que os intermediários “A”, para que os frisos e as vigas mantivessem as dimensões fixas. A representação em linha tracejada na figura 15 mostra onde

deveria ser o posicionamento da coluna da extremidade caso a distância dos eixos fossem todas iguais a “A”.

Figura 15 - Distância entre as colunas

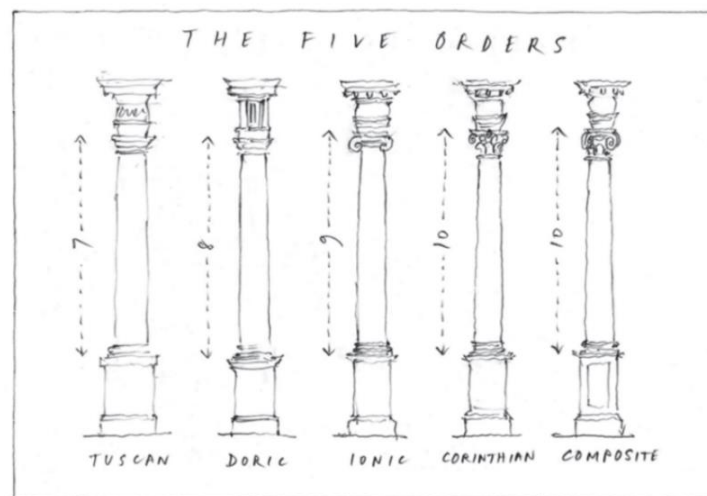


Fonte: <http://www.habitare.org.br/pdf/publicacoes/arquivos/colecao10/livro_completo.pdf>

Acesso em: 14 out. 2021.

Farrelly (2014) traz em seu livro *Fundamentos de Arquitetura* um croquis esquematizando as cinco ordens da arquitetura clássica (toscana, dórica, jônica, coríntia e compósita), que constituíam a base de construção dos edifícios públicos. Segundo a autora, os números indicados correspondem à razão entre a medida da altura pelo diâmetro da coluna, indicando quantos módulos constituem essa relação (figura 16).

Figura 16 - Razão da altura pelo diâmetro da coluna e suas respectivas ordens



Fonte: <https://books.google.com.br/books?hl=ptBR&lr=&id=QISaAgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA1&dq=arquitetura+cl%C3%A1ssica+grega&ots=iVsbe2M_q2&sig=HZmexFffxh3mA-KWl6Ytz64uONY#v=onepage&q&f=false> Acesso em: 16 out. 2021.

3.2 A PROPORÇÃO DO PARTHENON

O Parthenon (447-436 a.C), projeto idealizado pelos arquitetos Ictínio e Calícrates com o escultor Fídias, foi construído em homenagem a deusa grega Atena e constitui no maior exemplo da ordem dórica na arquitetura grega. O templo expressa os ideais de harmonia aplicados à composição arquitetônica da época, sendo possível identificar a razão (1:2,25 metros) entre os seus elementos. A razão estabelece uma ordem na composição, sobre as leis matemáticas aplicadas à arquitetura Ching expõe que:

Os sistemas de proporcionalidade vão além dos determinantes funcionais e técnicos da forma e do espaço arquitetônicos, conferindo um fundamento estético lógico para as suas dimensões. Podem unificar visualmente a multiplicidade de elementos de um projeto arquitetônico ao fazer com que todas as suas partes pertençam à mesma família de proporções. Podem conferir um sentido de ordem a uma sequência de espaços e elevar a continuidade dela. Podem estabelecer relações entre os elementos externos e internos de um edifício. (CHING, 1999, p.285)

As dimensões do Parthenon correspondem a 69,5 metros de comprimento, 30,9 metros de largura e 13,7 metros de altura até a cornija. As medidas apresentadas em metros tornam mais difícil a identificação do módulo, elemento responsável pela comensurabilidade da edificação. Os valores transformados em pés correspondem, respectivamente, a 228, 101 e 45. Essas medidas estabelecem uma proporção de 4:9 tanto da largura para o comprimento, quanto da altura para a largura. Associando as três dimensões (altura:largura:comprimento) temos a relação 16:36:81. Como resultado tem-se a configuração do módulo em 0,858m. A *cella* ou a *naos*, parte interna do templo onde se colocava a estátua da divindade, também utiliza a proporção de 4:9 correspondendo a 70,3 pés (21,44 metros) de largura por 158,5 pés (48,3 metros) de comprimento, assim como o diâmetro das colunas externas com 6,25 pés (1,905 metros) e o intercolúnio com 14,08 pés (4,293 metros).

4 VITRÚVIO E O LEGADO NA ARQUITETURA

4.1 O TRATADO DE ARQUITETURA

Marcus Vitruvius Pollio foi um importante arquiteto e engenheiro romano do século I a.C, e deixou como legado sua obra intitulada *De Architectura Libri Decem* (Os dez livros da arquitetura), a primeira escrita teórica sobre arquitetura. O tratado de Vitrúvio trouxe importantes contribuições para a arquitetura que seria desenvolvida posteriormente, “a partir

do Renascimento, em diversas regiões, o tratado vitruviano influenciou sucessivas gerações de arquitetos que construíram edificações no estilo arquitetônico conhecido como Classicismo” (BAIER, 2020, p.3).

Os dez livros que compõem o tratado descrevem sobre a educação do arquiteto, planejamento urbano, materiais de construção, os templos gregos e as ordens, edifícios públicos e privados, acabamentos, equipamentos hidráulicos, relógios solares e máquinas. Algumas escritas do manual de arquitetura serão trabalhadas neste estudo, estabelecendo um compilado de bibliografias com o objetivo de evidenciar os pontos em comum da arquitetura com a matemática. Silva descreve a relação entre os campos do conhecimento da matemática e da arquitetura dizendo que:

Um arquiteto, por via da matemática ou da geometria, procura uma forma de organização para sua construção, não buscando apenas expressar a beleza mas, também, harmonia e estética em seu projeto arquitetônico. O arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio [...] aborda em seu trabalho *De architectura* [...] que para conseguir essas qualidades, o arquiteto deve buscar para seu trabalho as proporções da natureza. (SILVA, 2018, p.43)

O primeiro livro do tratado faz um apanhado geral sobre a arquitetura descrevendo a importância da formação e traz o ideal de interdisciplinaridade, que tanto é almejado na educação contemporânea, ao afirmar que a educação do arquiteto deve ser composta por um conjunto de saberes nas diversas áreas:

[...] a visão de Vitruvius sobre a educação matemática do arquiteto se alinha com o atual entendimento de educação matemática no que se refere à valorização do ensino de conteúdos matemáticos contextualizados. O campo de pesquisa da educação matemática na contemporaneidade se caracteriza pelo seu aspecto interdisciplinar, também evidenciado no tratado vitruviano, sendo o estudo dos conteúdos de aritmética e de geometria ligados com o cotidiano e relacionados com os fundamentos históricos e filosóficos da matemática. (BAIER, 2020, p.12)

Baier (2020, p.1) ressalta que, segundo a visão filosófica de Vitruvius, “todas as áreas do saber elencadas para a educação do arquiteto estão intimamente ligadas e constituem um único corpo de conhecimento”. Assim, o arquiteto deveria ser um homem erudito com formação enciclopédica, tal fato só seria possível pois todas as disciplinas possuem pontos de convergência, ligando e comunicando os diferentes saberes. Dentre os diversos campos do conhecimento que contribuem para a formação do arquiteto, temos:

Convém que o arquiteto conheça a arte literária, para que possa deixar uma marca mais forte através dos seus escritos. Também deverá ser instruído na ciência do desenho, a fim de que disponha da capacidade de mais facilmente representar a forma que deseja para suas obras, através de modelos pintados. A geometria, por sua vez,

proporciona à arquitetura muitos recursos. Em primeiro lugar, logo a seguir às linhas retas, ensina o uso do compasso, com o qual muito mais facilmente se efetuam as representações gráficas dos edifícios nos seus próprios locais, juntamente com a ajuda dos esquadros, dos níveis e dos direcionamentos de linhas. Em segundo lugar, porque, através da óptica, se orientam corretamente os vãos de iluminação nas construções, a partir de determinadas zonas da abóbada celeste. E, por último, porque através da aritmética, se calculam as despesas dos edifícios, se define a lógica das medidas e se encontram soluções para as difíceis questões das comensurabilidades através da lógica e métodos geométricos. (VITRÚVIO, 2007 apud DE LEÃO, 2018, p.188).

O trecho em destaque traduzido por De Leão (2018) acerca do tratado de arquitetura discorre sobre as diversas áreas do saber necessárias para formar um bom arquiteto. Nota-se que, no que diz respeito aos conhecimentos matemáticos, o ponto de tangência com a arquitetura se encontra no campo da geometria com os diversos recursos instrumentais e as formas geométricas como, respectivamente, ferramentas construtivas e meios de representação do desenho arquitetônico; já a área da aritmética é utilizada na parte orçamentária da construção e no rigor matemático da comensurabilidade que rege as edificações da arquitetura clássica.

D'Agostino (2003) traz em seu texto uma referência a interdisciplinaridade e a importância da educação matemática para o arquiteto, tendo a geometria e a aritmética como conhecimentos essenciais na composição arquitetônica, afirmando que:

O arquiteto necessita saber sobre música sem ser músico, sobre geometria sem ser geômetra, pois são as verdades da geometria que dirigem a disposição das partes do edifício, as leis matemáticas da harmonia que governam a beleza da arquitetura, e assim por diante. (D'AGOSTINO, 2003, p.31).

Nos escritos de Vitrúvio, a definição de arquitetura trazida pelo arquiteto consiste em uma combinação dos termos: ordenação, disposição, euritmia, comensurabilidade, decoro e distribuição (DA CUNHA, 2020). Vamos nos restringir a detalhar apenas aquelas cujas definições estão vinculadas ao conhecimento e aplicação da matemática.

A **ordenação** se refere a proporção aplicada nas medidas das partes de forma isolada e na observação do conjunto. Ela está vinculada à ideia de módulo, uma vez que, a partir de uma medida se dimensionam todas as partes do edifício. Quanto à **disposição**, o autor explica que pode ser subdividida em três categorias e todas estão relacionadas ao desenho arquitetônico, são elas: iconografia, ortografia, cenografia.

A iconografia corresponde a representação do edifício em plano, o que na arquitetura é chamado de planta baixa, sendo imprescindível a precisão das medidas; a ortografia era a representação em vista da edificação, ou seja, das fachadas; a cenografia seria o delineamento da fachada principal com as partes laterais em perspectiva. Nota-se na disposição a necessidade de o arquiteto ter o domínio do desenho arquitetônico e das formas

geométricas que o compõem, sendo necessário o conhecimento de técnicas acerca do processo de construção das figuras geométricas.

A **eurritmia** se refere ao exterior do edifício, a aplicação das dimensões ditas como agradáveis aos olhos. Isso só é possível quando a altura, a largura e o comprimento são proporcionais. Nota-se uma similaridade nos conceitos de eurritmia e proporção:

Todos os intérpretes acreditaram que a Eurritmia e a Proporção, que Vitruvius chama Simetria, eram duas coisas diferentes, pois, aparentemente, ele dá duas definições; porém, essas definições, se bem interpretadas, dizem a mesma coisa. Uma e outra, através de um discurso igualmente confuso, falam da Conveniência, da Correspondência e da Proporção das partes com o todo. (PERRAULT apud D'AGOSTINO, 2003, p.28).

A **comensurabilidade**, que segundo Da Cunha (2020) foi o termo encontrado para *symmetria*, corresponde a harmonia da edificação a partir da proporcional relação dos elementos, uma medida em comum que rege todos os elementos. Observa-se aqui a estrita ligação entre as palavras ordenação, eurritmia e comensurabilidade. Ao interpretarmos os conceitos todos vão remeter a ideia de aplicação do módulo na concepção arquitetônica visando alcançar a simetria, que está estritamente relacionada ao conceito de beleza da época.

Vale ressaltar que a simetria proposta por Vitruvius, cujo sinônimo foi estabelecido a palavra comensurabilidade, possui definição diferente da simetria axial ou de reflexão, que consiste em dividir um objeto com uma reta gerando duas imagens geometricamente iguais. De Andrade traz uma passagem, do capítulo segundo do Livro I, explicando o que seria o conceito da simetria utilizado época:

Simetria é a concordância correta entre as partes da obra e a relação entre partes diferentes com o esquema todo da obra. Assim, existe um tipo de simetria no corpo humano entre o braço, o pé, o dedo, a mão e outras partes pequenas. Isso deve ser a mesma coisa com um edifício perfeito. No caso de templos, simetria se encontra no diâmetro de uma coluna, nos triglifos, na modulação ou em outras partes variadas que estão relacionadas umas com outras. (VITRÚVIO apud DE ANDRADE, 2008, p.8)

Vitruvius apresenta no tratado de arquitetura os três critérios que fundamentam a obra arquitetônica, são eles: *firmitas*, *utilitas* e *venustas* (solidez, utilidade e beleza, respectivamente). Nos interessa apenas a definição de *venustas* que, segundo Baier (2020, p.11), corresponde “as proporções numéricas consideradas adequadas para as edificações serem belas e elegantes”.

Ressalta-se a necessidade de o arquiteto conhecer a matemática e a geometria, pois estes campos do conhecimento seriam a ferramenta necessária para organizar a construção expressando harmonia, estética e beleza na composição arquitetônica. A beleza da obra não

estaria limitada apenas a aparência, mas também na combinação dos seus elementos que estão ligados pela relação de proporcionalidade. Segundo Vitrúvio, para alcançar essas qualidades o arquiteto deveria incorporar em suas obras as proporções da natureza (SILVA, 2018).

Além disso, esse ideal de beleza teria fundamento e seria alcançado através da harmonia presente no ser humano. Vitrúvio foi o primeiro a utilizar o antropomorfismo como recurso para determinar a beleza da forma, a exemplo disso, o homem vitruviano, cujo desenho é inscrito dentro de um círculo e de um quadrado para demonstrar a beleza geométrica e a perfeição das proporções humanas. A partir daí, o antropomorfismo foi amplamente utilizado na arquitetura, nas obras do Renascimento, do Barroco e na arquitetura moderna com Le Corbusier (DOS SANTOS, 2007).

4.2 A INFLUÊNCIA NO RENASCIMENTO

O período histórico denominado Renascimento surgiu na Itália, no século XIV e perdurou até o século XVII, constituindo-se como época de transição entre a Idade Média e a Modernidade. O Renascimento, como o próprio nome indica, marca uma retomada aos valores da antiguidade clássica - Grécia e Roma antiga. Esse retorno ao classicismo evidencia uma produção que prioriza o valor estético e, conseqüentemente, recorre à aplicação das leis matemáticas. De acordo com Ching:

Os arquitetos da Renascença, acreditando que seus edifícios tinham que pertencer a uma ordem mais elevada, retomaram o sistema matemático grego das proporções. Assim como os gregos concebiam a música como sendo geometria traduzida em som, os arquitetos renascentistas acreditavam que a arquitetura era matemática traduzida em unidades espaciais. (CHING, 1999, p. 298)

Caracterizado ainda pela racionalidade e pelo antropocentrismo, a cultura renascentista colocava o homem como o centro do universo e a máxima criação divina. Segundo De Andrade (2008), para demonstrar harmonia em sua composição a arquitetura produzida na época tinha o alicerce nas proporções humanas e na natureza. Quanto a aplicação matemática destas relações, o autor cita em seu texto:

Baseados em relações matemáticas da natureza, ou seja, fazendo uso de relações numéricas entre as partes, os primeiros tratadistas do Renascimento, seguindo as orientações mencionadas por Vitrúvio, defenderam que o espaço urbano deveria estar relacionado com o edifício, e este com os seus espaços e medidas internas, todos articulados em razão de um módulo pré-estabelecido. Assim sendo, a materialidade da arquitetura estaria, de algum modo, refletindo uma ordem maior, ou seja, uma ordem da natureza e da divindade. (DE ANDRADE, 2008, p.7).

Para explicar os princípios arquitetônicos que regem o Renascimento, De Andrade (2008, p.6) cita que “Vitruvius foi a base epistemológica para a teoria da arquitetura no Renascimento e Alberti foi o precursor desta teoria no século XIV”. Sendo assim, vamos caracterizar o período através de alguns dos principais nomes da época, Alberti e Da Vinci, cuja produção resgata o tratado de Vitruvius, que se caracteriza por constituir a base teórica sobre a arquitetura da antiguidade.

4.2.1 O tratado de Alberti

Leon Battista Alberti (1404-1472) foi um importante teórico do Renascimento, em seu tratado *De Re Aedificatoria* (1452), que segue o modelo vitruviano composto por dez livros, o autor retoma e reformula os conceitos de Vitruvius aplicados à arquitetura, sintetizando conceitos de simetria, harmonia, ritmo, ordem e composição.

Apesar de utilizar os textos de Vitruvius, o *De Re Aedificatoria* é uma obra bastante original na qual Alberti se arrisca em propor a escrita de um novo tratado no lugar de uma simples tradução da obra vitruviana. O autor foi responsável por elevar a arquitetura a um outro patamar, o que anteriormente se caracterizava como ofício manual exercido por artesãos passa a integrar a categoria artística e de trabalho intelectual (RABELO, 2007).

O texto de Vitruvius enaltecia a natureza e o ser humano, que seriam regidos pela lógica matemática, e constituiu como material de base para o desenvolvimento dos teóricos do renascimento. Nota-se que nesse período a linguagem arquitetônica continua fortemente vinculada a leis matemáticas, cujo processo de concepção envolve conceitos de razão e proporção como base dos princípios estéticos. Sobre a relação interdisciplinar entre essas áreas do conhecimento, De Andrade cita:

Vitruvius via na natureza a fonte de inspiração para a arquitetura. Esta visão, baseada nas regras e proporções da matemática e da geometria euclidiana, foi adotada por Alberti e manifestou-se no seu tratado de arquitetura. Esta nova forma de difusão do conhecimento, diferente do conhecimento oral medieval, favoreceu à percepção da arquitetura como ciência. [...] A visão vitruviana de que há princípios racionais que devem basear o pensamento arquitetônico, levou Alberti a considerar a matemática e a geometria como a base dos “princípios do desenho” na arquitetura. Surge, exatamente neste período, a diferenciação entre construção e arquitetura (DE ANDRADE, 2008, p.6).

De Andrade (2008) afirma que distinguir construção do que seria arquitetura só se tornou possível com a contribuição de tratadistas como Alberti. O autor ressalta ainda a arquitetura como uma arte fundamentada em princípios, deixando de ser uma tradição prática e

se tornando uma tradição literária, sendo necessário, portanto, um conhecimento teórico. Essa diferenciação, na qual o arquiteto passa a seguir uma teoria, contribuiu para que os princípios arquitetônicos estabelecessem vínculos com conceitos estéticos e matemáticos, cuja base fixa-se na proporção áurea, no módulo e nas relações métricas entre os espaços do edifício.

No período do renascimento a arquitetura se tornou a ciência na qual o ser humano se estabeleceu como a referência projetual, consequentemente Alberti se fixou nas dependências entre as partes do corpo para estabelecer as relações de proporção. Dessa maneira, estabelecendo à arquitetura leis matemáticas cuja essência da composição é regida por relações numéricas entre as partes, todas articuladas, temos novamente a ideia do módulo estabelecido ao modo de projetar. Alberti escreve, no quinto capítulo do Livro VII, esta relação:

Do mesmo modo que em um organismo animal, os pés ou qualquer outra parte do corpo estão estritamente relacionados entre si, como todo o corpo, como também as partes do edifício, e, sobretudo em um templo, devem-se conformar todas as partes do seu corpo de modo que corresponda inteiramente umas às outras, a ponto de poder facilmente perceber-se as relações métricas de uma com as outras. (ALBERTI apud DE ANDRADE, 2008, p.8)

Alberti utiliza uma palavra central para definir a temática de sua obra edificatória, a *concinnita* ou concinidade, cuja caracterização ocorre a partir da concordância harmoniosa entre três elementos compondo um todo único e coerente que busca por produzir uma arquitetura dita como bela. Quanto a explicação do termo, encontramos uma referência no texto de Rabelo, onde o autor descreve:

Para Alberti, o objetivo do arquiteto em suas obras é alcançar o que ele denomina concinnitas — a correta conexão e relação dos três principais componentes da obra: número, proporção e posição. Segundo ele, a beleza seria uma forma de simpatia e consonância das partes com o todo, ditadas pela concinnitas. A origem dessa harmonia de proporções está latente na Natureza de tal forma que qualquer coisa por ela produzida é regulada por essas leis harmônicas. Alberti segue seu texto detalhando cada um desses três componentes e sempre fazendo referência aos filósofos e matemáticos da Antiguidade Clássica. (RABELO, 2007, p.34).

O que Rabelo (2007) cita como a definição tripartida de concinidade por número, proporção e posição, corresponde à tradução dos termos citados no *De Re Aedificatoria* como *numerus*, *finitio* e *collocatio*.

A tarefa da *concinnitas* seria o de relacionar as partes ao todo no edifício, estabelecendo correspondência ao conjunto segundo a precisão de regras matemáticas e consequentemente alcançando a perfeição na composição. A origem do termo estaria associada ao de *dispositio* e *symmetria* estabelecidos no tratado de Vitrúvio, cuja definição está vinculada a comensurabilidade do edifício que utiliza como ferramenta as relações de proporção entre os

elementos e aplicação do módulo. Quanto à tríade que compõe o termo *concinnitas*, o *numerus* se estabelece pela relação de proporção dos algarismos, utilizando da simbologia numérica e das relações geométricas; *finitio* corresponde a medida, um elemento ao qual se pode estabelecer uma relação de escala; *collocatio* é equivalente a posição, pode ser traduzido em como cada elemento ocupa um lugar específico no edifício. Os termos albertianos *numerus*, *finitio* e *collocatio* correspondem à releitura da relação de interdependência dos termos vitruvianos *distributio*, *symmetria* e *dispositio* (ANZOLCH, 2009).

Alberti faz menção no Livro IX ao uso dos sistemas proporcionais 1:2, 2:3 e 3:4 como símbolos representantes da harmonia universal. Esse sistema utilizado no tratado de edificação apresenta equivalência aos intervalos das escalas musicais de 1:2 (uma oitava), 2:3 (uma quinta perfeita) e 3:4 (uma quarta perfeita). Rabelo (2007) relata que para o tratadista do *De Re Aedificatoria*, a escala musical é agradável aos ouvidos e, conseqüentemente, o uso desses sistemas de números seria uma boa relação aos olhos. Ainda segundo o autor “a ideia principal é de que a arquitetura, utilizando-se das mesmas proporções existentes na música e, como vimos, na Natureza, alcance uma harmonia superior, presente nas leis do mundo perfeito da geometria e da matemática que regem o Universo em que vivemos” (RABELO, 2007, p.36).

Além dos sistemas de proporções citados, o número de ouro, que foi bastante utilizado durante a antiguidade clássica como a razão que rege a natureza, seria um outro sistema que aparece nas obras de Alberti como ferramenta para alcançar as formas harmoniosas. Na composição da planta da Igreja de San Sebastiano, em Mântua, o espaço central foi projetado seguindo a proporção de 34:21, cujo resultado da divisão equivale aproximadamente a 1,618 (DE ANDRADE, 2008).

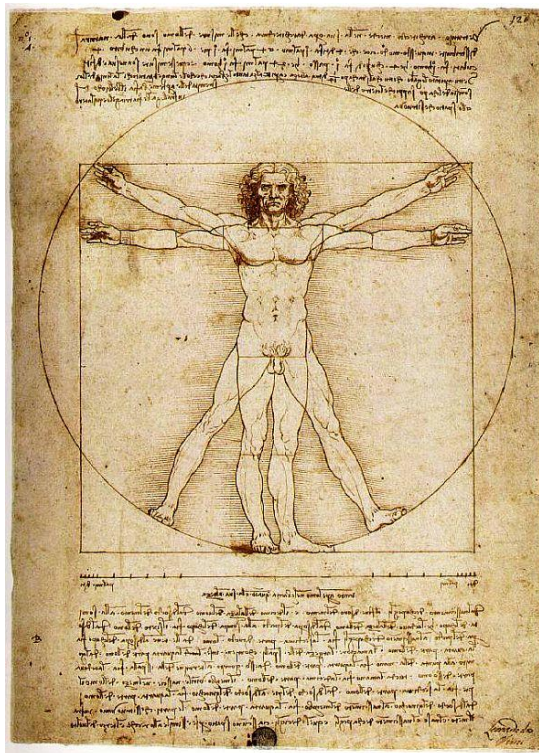
Destarte, após alguns estudos acerca de Alberti, ressalta-se que o objetivo da pesquisa não é demonstrar as aplicações de proporção nos projetos do autor, muito menos exaurir todas as passagens que evidenciam o uso da linguagem matemática no tratado arquitetônico. Se fez importante pesquisar, selecionar e mencionar algumas passagens da obra ou abordagens de teóricos acerca da relação entre o conhecimento matemático e a arquitetura.

4.2.2 O homem vitruviano

O tratado de arquitetura foi bastante estudado no período do Renascimento, a famosa obra “O Homem Vitruviano” do pintor Leonardo da Vinci (1452 - 1519) é derivada do manual de Vitruvius, no qual o arquiteto estabelece regras vinculadas ao raciocínio matemático para descrever as relações de proporção do corpo humano:

[...] no corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se um homem for colocado deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito, a partir desse ponto e, assim, como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois, se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça, e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas. (VITRUVIO apud SILVA, 2018, p.50)

Figura 17 - O Homem Vitruviano



Fonte: <<https://www.desenhoonline.com/site/o-que-e-o-homem-vitruviano/>>

Acesso em: 03 nov. 2021.

Vale ressaltar na passagem de Vitruvius a relação entre o corpo humano e as figuras geométricas do círculo e do quadrado (figura 17), que representavam a beleza da geometria sendo considerados figuras perfeitas e sagradas. O primeiro simbolizava as órbitas dos corpos celestes, o segundo a representação da estabilidade da terra e, ao inserir a figura humana nessa composição, o autor faz a alusão de que no corpo humano estaria presente a diversidade do céu e da terra (SILVA, 2018). Sobre essas relações entre a matemática e o homem, De Andrade escreve:

O renascimento da matemática grega via no homem a manifestação de Deus; consequentemente, da harmonia universal. O uso de círculos, quadrados e triângulos pitagóricos era a concretização da ciência matemática que expressava a razão divina, já que eram medidas perfeitas. Com o homem inscrito nas formas geométricas, tudo se harmonizou. (DE ANDRADE, 2008, p.9).

A partir do desenho de Da Vinci, previamente pode-se identificar uma das relações de proporção entre as partes do corpo de que o comprimento total dos braços estendidos é equivalente à altura. Essa relação é perceptível no desenho ao inserir o homem, com os braços estendidos na horizontal, dentro de um quadrado no qual a ponta dos dedos, a cabeça e a sola dos pés tocam as laterais da figura geométrica.

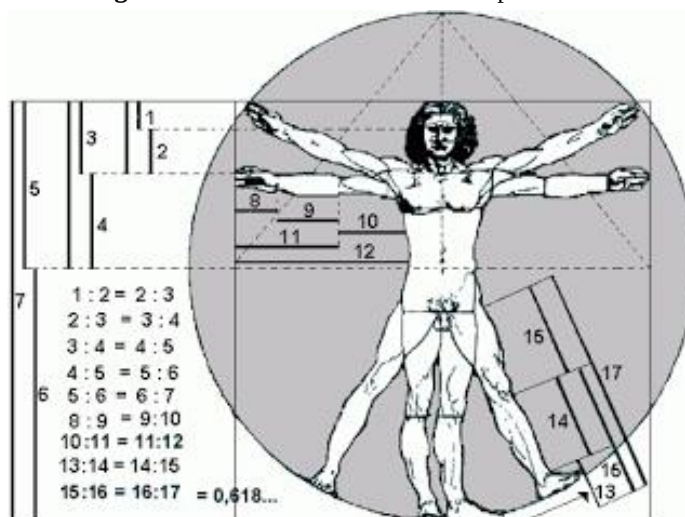
Silva descreve o desenho de da Vinci como representante do “ideal clássico do equilíbrio, da beleza, da harmonia e da perfeição das proporções do corpo humano” (SILVA, 2018, p.68). De fato, esse homem de proporções perfeitas foi descrito no terceiro livro da obra *De Architectura Libri Decem*, De Oliveira (2013) traz o registro de como o arquiteto romano relacionou as medidas do corpo humano, esquematizado da seguinte forma: um palmo é o equivalente à medida de quatro dedos; um pé corresponde a largura de quatro palmos; um côvado, que corresponde à distância da ponta do dedo médio ao cotovelo, é a medida de seis palmos; a altura de um homem corresponde a quatro côvados ou vinte e quatro palmos; a envergadura é igual à altura; a medida que compreende a linha do cabelo formada na testa e o fundo do queixo é um décimo da altura de um homem; a distância entre o cume da cabeça até a parte inferior do queixo equivale a um oitavo da altura de um homem; a distância entre o meio do peito até a medida que compreende a linha do cabelo formada na testa é um sétimo da altura de um homem; a medida do cume da cabeça até os mamilos equivale a um quarto da altura de um homem; a distância máxima entre os ombros é um quarto da altura de um homem; a medida do cotovelo até a axila corresponde a um oitavo da altura de um homem; o comprimento da mão corresponde a um décimo da altura de um homem; a medida do fundo do queixo ao nariz é o equivalente a um terço do comprimento da face; a distância entre a linha de nascimento do cabelo na testa até as sobrancelhas corresponde a um terço do comprimento do rosto; a dimensão orelha é um terço do comprimento da face.

No que se refere a representação gráfica do Homem Vitruviano, Silva (2018) relata que apesar do registro teórico descrevendo a composição, o arquiteto romano Vitruvius não conseguiu encaixar as proporções do corpo humano inscritas no círculo e no quadrado, apenas Da Vinci alcançou a representação nos padrões matemáticos esperados. Quanto as relações que obedecem a razão áurea, o autor expõe:

Leonardo da Vinci foi o primeiro a demonstrar que o corpo humano é formado por estruturas cujas raízes proporcionais sempre se aproximam ao Número de Ouro. O número Φ aparece de várias maneiras em nosso corpo: quando dividimos a altura total pela altura do umbigo; dividindo a distância que vai do ombro até as pontas dos dedos pela distância do cotovelo até as pontas dos dedos; dividindo a altura dos quadris pela altura do joelho. (SILVA, 2018, p.51)

A partir dos estudos de Da Vinci de que das medidas do corpo humano estão associadas ao número de ouro, desenvolveu-se outras relações de razão e proporção entre as partes do corpo, firmando-se a ideia de que a figura humana seria a correspondente física da perfeição divina. A figura 18 apresenta a ilustração do Homem Vitruviano e os respectivos cálculos de proporção cujo resultado é igual ao número Phi.

Figura 18 - O número de ouro e o corpo humano



Fonte: <<https://www.pinterest.es/pin/420171840212820326/>> Acesso em: 20 nov. 2021.

5 LE CORBUSIER E O MODULOR

5.1 BREVE BIOGRAFIA

Charles-Édouard Jeanneret Gris (1887-1965), mais conhecido pelo pseudônimo de Le Corbusier, foi um grande arquiteto e urbanista do século XX. Pioneiro no movimento denominado Modernismo, o arquiteto franco-suíço desenvolveu um sistema arquitetônico que se estruturava em cinco pilares da arquitetura moderna (fachada livre, janelas em fita, pilotis, terraço jardim, planta livre), tendo grande importância e influência para a geração de arquitetos modernistas do Brasil. Le Corbusier deixou como legado inúmeras publicações teóricas e práticas que serviriam como guia de projeto, dentre eles o sistema de proporções *Modulor*.

5.2 O MODULOR

No período de 1948 a 1954, Le Corbusier produziu as publicações sobre sua teoria geométrica em o *Modulor*. Na obra o arquiteto demonstra como desenvolveu o sistema de

medidas baseado no corpo humano e suas relações de proporção, bem como na matemática das dimensões da seção áurea e da série de Fibonacci. Tal fato nos remete às investigações matemáticas sobre corpo humano feitas por Vitruvius, Alberti e Da Vinci citadas anteriormente. Rabelo (2007) relata que esse método de projetar cujo alicerce é firmado nas leis matemáticas e nos princípios geométricos que regem o universo seria o legado deixado da antiguidade aos arquitetos modernos.

Diferentemente da Grécia Antiga na qual o módulo partia de uma forma, mais especificamente a dimensão do diâmetro médio da coluna, Le Corbusier desenvolveu uma escala antropométrica que se baseava na altura média do homem de 1,83 metros. Ao adotar o ser humano como ponto de partida do projeto, o módulo passa a ter um caráter funcional para a composição. Segundo Silva (2018), o arquiteto acreditava que o sistema de medidas desenvolvido supria tanto a necessidade funcional, quanto a exigência estética do projeto arquitetônico. O primeiro é consequência da aplicação da ideia de módulo, estabelecendo a harmonia na composição dos objetos, dos espaços ou da cidade, adequados às medidas do corpo humano. O segundo, por estar vinculado à proporção áurea, iria satisfazer as exigências do belo.

Em seu livro, Le Corbusier descreve o *Modulor* como:

Um homem com o braço erguido proporciona, entre os pontos determinantes da ocupação do espaço - o pé, o plexo solar, a cabeça, a extremidade dos dedos do braço levantado -, três intervalos que geram uma série de sessões de ouro, dita Fibonacci. Por outro lado, a matemática oferece a mais simples assim como a mais forte variação de um valor: a unidade, o dobro, as duas sessões de ouro. (LE CORBUSIER apud NEVES, 2016, p.27).

Figura 19 - O Modulor

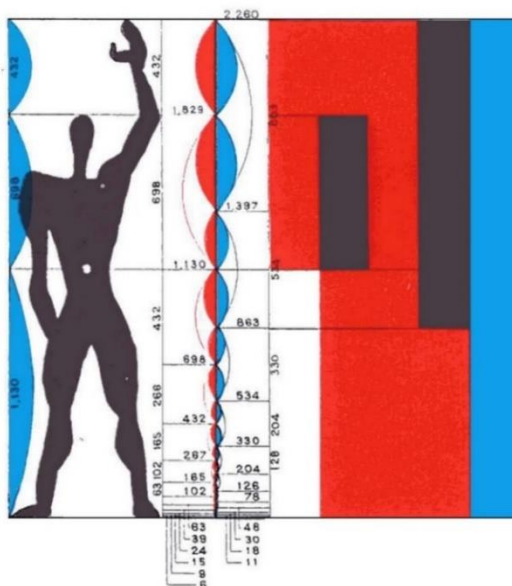
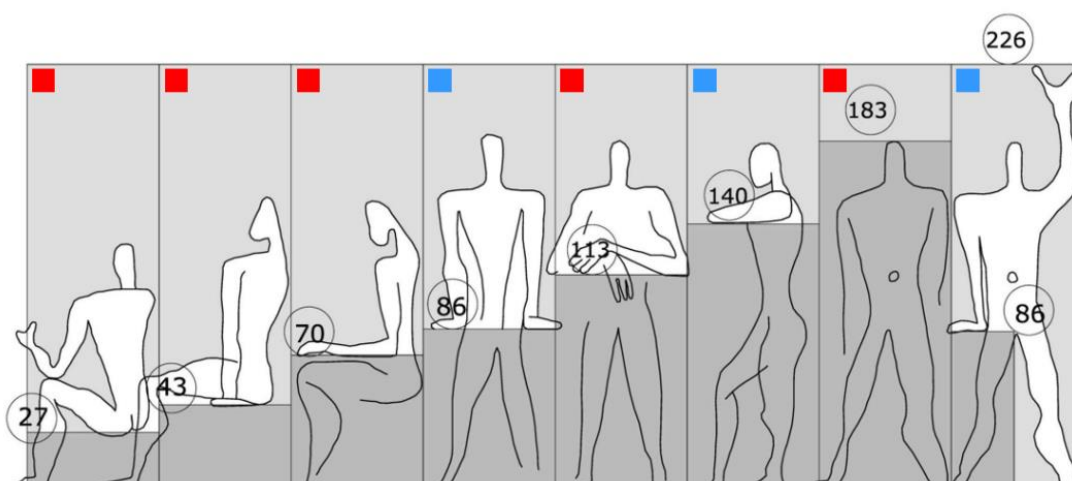


Figura 20 - Esquema de posicionamentos de acordo com as séries

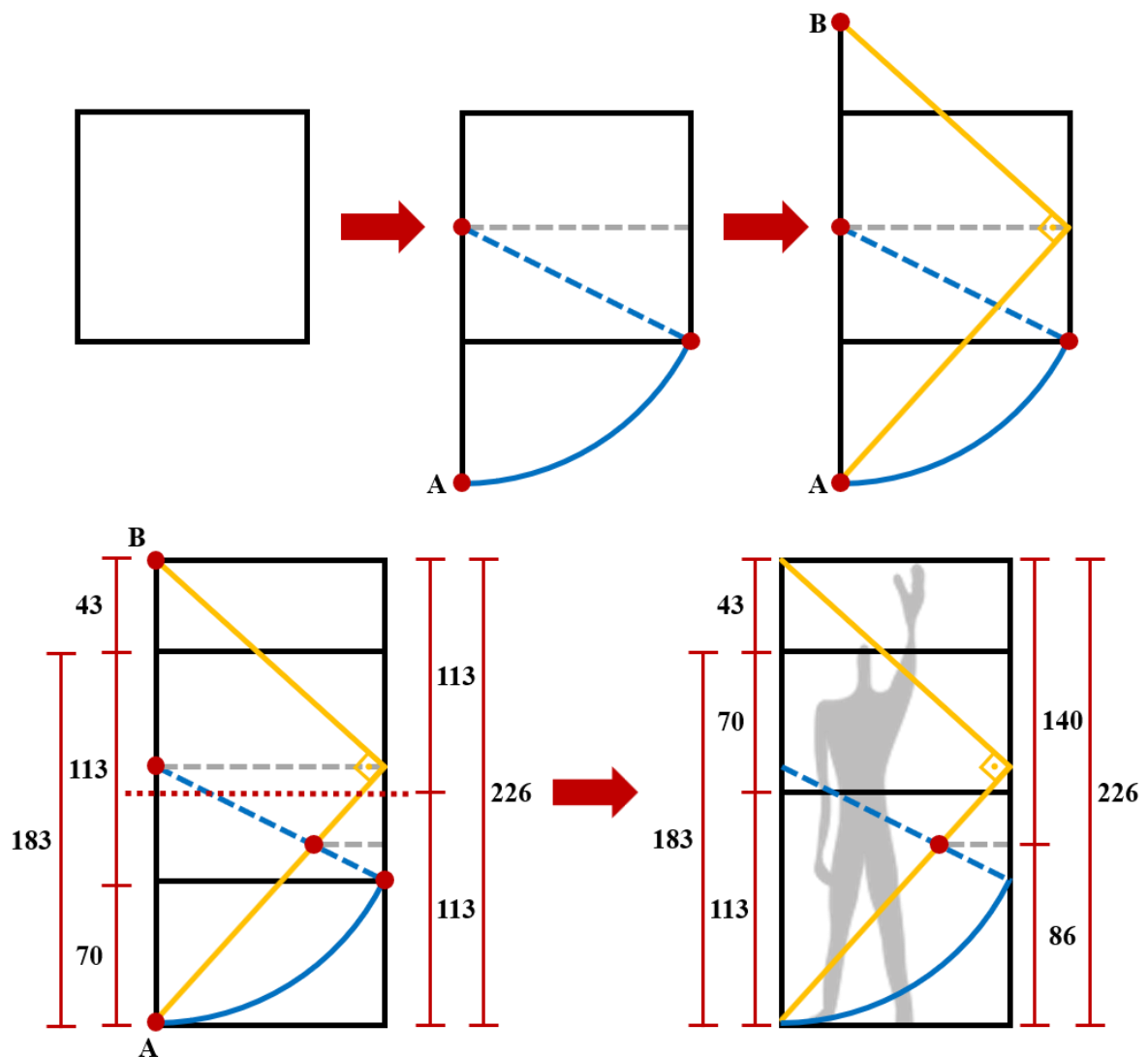


Fonte: <<https://www.pinterest.com.au/pin/56787645281510836/>> Acesso em: 11 out. 2021.

O desenho do corpo humano na configuração do *Modulor* se organiza em um quadrado de 2,26 por 2,26 metros, cuja composição surge a partir da medida total do corpo desde os pés à ponta dos dedos, o que dá origem a duas séries (figura 19). A série vermelha é proporcional à medida de 1,13 metros do quadrado inicial, a azul na de 2,26 metros da composição final. No sistema de medidas ilustrado na figura 20 nota-se que os termos 27, 43, 70, 113 e 183 da série vermelha obedecem a mesma lei de formação da sequência de Fibonacci, onde termo posterior é resultado da soma dos dois termos anteriores. O mesmo ocorre com os termos 86, 140 e 226 da série azul.

Na composição do sistema antropométrico de medidas, observa-se que o corpo humano foi dividido em três partes e inserido em dois quadrados de 1,13 por 1,13 metros com o ponto médio fixado exatamente no umbigo. A primeira parte corresponde a distância entre os pés e o umbigo, que seria de 1,13 metros. A segunda parte, dimensionada em 70 centímetros, seria a medida da cabeça ao umbigo. A terceira parte, de 43 centímetros, seria o correspondente à medida da cabeça até a ponta dos dedos com o braço estendido. A figura 21 corresponde a reprodução do esquema de formação e as respectivas medidas do *Modulor*. Observe nas ilustrações que para o processo de composição é necessário ao arquiteto o conhecimento matemático e o domínio da geometria, bem como da lei de formação do esquema geométrico do retângulo de ouro.

Figura 21 - Esquema de formação e medidas do Modulor



Fonte: A autora.

O *Modulor* tem origem da palavra francesa *module* que significa “algo que tanto gera módulos quanto pode ser modulado” (RABELO, 2007, p.49) ou “unidade de medida” (NEVES, 2016, p.26). De fato, para Le Corbusier esse sistema poderia ser aplicado no projeto de uma cadeira ou sofrer modulações e se adaptar ao projeto de uma cidade inteira (RABELO, 2007). Esse sistema de medidas proporcionais foi de extrema importância no período pós Segunda Guerra, sendo aplicado como escala humana nos projetos para se estabelecer harmonia na composição e também para resolver a questão do “grande número” na habitação, como exemplo, tem-se a construção da Unidade de Habitação de Marselha (1947-1952). O projeto da unidade habitacional localiza-se na França e foi a primeira oportunidade do arquiteto aplicar as proporções do *Modulor* (figuras 22 e 23).

Figura 22 - Unidade de Habitação de Marselha



Fonte: <<https://vitruvius.com.br/revistas/read/arquiteturismo/13.147/7398>>
Acesso em: 14 out. 2021.

Figura 23 - Referência ao modulator na composição arquitetônica



Fonte: <<https://vitruvius.com.br/revistas/read/arquiteturismo/13.147/7398>>
Acesso em: 14 out. 2021.

6 A TOPOLOGIA E A ARQUITETURA CONTEMPORÂNEA

6.1 CONCEITUANDO TOPOLOGIA

A primeira aparição do termo **topologia** é atribuída ao matemático alemão Johann Benedict Listing (1808-1882) no livro *Vorstudien zur Topologie* (1847) onde ele descreve:

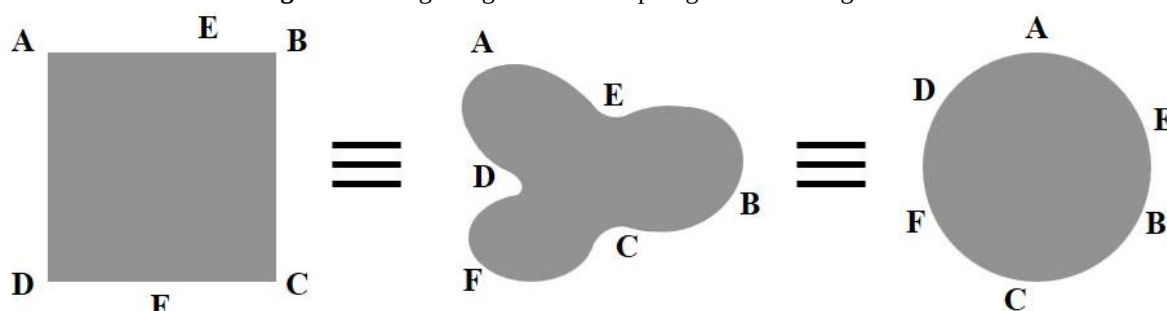
Por topologia nós entendemos a teoria das características modais dos objetos, ou das leis de conexão, de posições relativas e de sucessão de pontos, linhas, superfícies, corpos e suas partes, ou agregados no espaço, sempre sem considerar os problemas de medidas ou quantidade. (LISTING apud SPERLING, 2008, p.28).

A topologia recebeu outras denominações, uma delas é *analys situs* dada pelo matemático francês Jules Henri Poincaré, a outra é "geometria de posição" estabelecida por

Gottfried Wilhelm Leibniz. Trata-se de um ramo da geometria que, diferentemente da geometria euclidiana, não investiga a matemática quantitativa, uma vez que, não se fixa nas qualidades do objeto que possam ser mensuradas ou estabelecidas em números. A topologia trabalha com noções de vizinhança, dentro-fora, interior-exterior, alto-baixo, perto-longe, etc. Borges (2005) cita que, essas propriedades dos objetos que não podem ser medidas e, portanto, não podem ser representadas numericamente, denominamos de “propriedades qualitativas”.

A topografia estuda as características ligadas à forma, já a topologia estuda as propriedades que permanecem inalteradas ao se deformar um objeto, como por exemplo, as relações entre os pontos, o que torna similar figuras geométricas que a princípio não parecem ter algo em comum, como o círculo e o quadrado (figura 24). Essa manipulação da forma pressupõe que os objetos geométricos seriam constituídos de materiais elásticos, sendo possível realizar ações de encolher, esticar, deformar, etc (SPERLING, 2008). Por esse motivo, alguns autores referem-se à topologia por geometria da borracha, geometria elástica ou geometria de deformações (Borges, 2005).

Figura 24 - Regiões geométricas topologicamente congruentes



Fonte: A autora.

As regiões geométricas da figura 24, apesar das deformações sofridas na passagem de uma região para a outra, mantém fixas algumas propriedades. No quadrado, os pontos E, B, F e D estão fixados entre os pontos A e B, E e C, C e D, F e A, respectivamente. A mesma configuração da disposição dos pontos ocorre com a região de formato ameboide e com o círculo. Borges (2005) destaca que na transformação topológica não pode haver a fusão de regiões, pois nesse caso os pontos que eram distintos se tornariam pontos correspondentes e perderiam a noção de vizinhança; nem rompimentos, o que ocasionaria a destruição da noção do que é interno e externo. Observe que a transformação preservou as proximidades conservando a ordem dos pontos, embora tenha distorcido os ângulos e as formas retilíneas, a

essa propriedade na qual a superfície plana é modificada topograficamente mantendo intactas as características topológicas denominamos homeomorfismo.

As propriedades que permanecem inalteradas constituem, portanto, como objeto de estudo da topologia que, segundo Sperling, podem ser divididas em quatro agrupamentos:

[...] primeiramente às **Características** das Variedades ou Superfícies (variedades bidimensionais) que se pretendem **Invariantes**; em segundo lugar, às **Variedades** ou **Superfícies**, aos **Nós** e ao **Ambiente** ou **Espaço** onde se encontram- e ao relacionamento entre si. Em terceiro, à procedimentos ou **Operações** sob as quais se investiga a invariância; e, em quarto, às **Classificações de Superfícies** decorrentes de relações internas e externas (em relação ao Ambiente). (SPERLING, 2003, p.128, grifo do autor).

Dos agrupamentos citados pelo autor, descrever todos extrapolaria o objetivo do trabalho, tornando o conteúdo extenso e sem conexão entre os campos de conhecimento estudados. Os conceitos trabalhados na **Classificação de Superfícies** têm um maior destaque, pois esta classificação introduz as principais superfícies topológicas, por exemplo, o disco, a esfera, o toro, a faixa de Möbius, a garrafa de Klein, etc., abrangendo assim os conteúdos pertinentes ao enfoque da pesquisa. O grupo **Classificação de Superfícies** apresenta divisões e definições relacionadas às características particulares das superfícies sendo, portanto, separado nos subgrupos: superfície com bordo, superfície sem bordo, superfície fechada, superfície básica, superfície não orientável e superfície orientável.

A classificação da superfície quanto a presença ou não de bordo utiliza como critério a análise da vizinhança. No caso da **superfície sem bordo**, todos os pontos são interiores e a vizinhança está contida na superfície. Na **superfície com bordo**, observa-se a presença de uma linha de demarcação que corresponde à extremidade da superfície, na qual a vizinhança está contida apenas em parte, apresentando, portanto, os pontos interiores e os chamados pontos de bordo/fronteira.

A **superfície fechada** se caracteriza por não apresentar bordo e por ser compacta, ou seja, a superfície pode ser triangularizada por um número finito de triângulos compostos por arestas, vértices e faces. Uma amostra desta classificação é a esfera, o toro, a garrafa de Klein e o plano projetivo. Quanto às **superfícies não fechadas**, podemos citar a faixa de Möbius por constituir como uma de suas características a presença de bordo e, portanto, não satisfaz uma das condições que qualifica a superfície como fechada.

As **superfícies básicas** são qualificadas como superfícies fechadas cuja composição não é resultado da junção de outras superfícies fechadas. Pode-se citar, como exemplo de superfície básica, a esfera, o toro, a garrafa de Klein e o plano projetivo. A partir de um número

finito de adições - que em topologia recebe o nome de soma conexa - da esfera, do toro e do plano projetivo originam-se as demais superfícies fechadas.

A classificação em superfície orientável e não orientável se fixa na existência ou ausência de dois lados, o interno e o externo, em uma superfície. Na **superfície orientável** é possível discernir o lado interno do externo, a exemplo pode-se citar o toro. Já na superfície **não orientável** a dicotomia dentro - fora, direita - esquerda, em cima - embaixo, etc., não pode ser estabelecida ao objeto pois, o caminho fechado ao ser percorrido tem sua orientação invertida e o ponto final corresponde exatamente no ponto de partida. O principal exemplo de superfície não orientável é a faixa de Möbius, consequentemente, toda superfície cuja composição a contém também é não orientável.

Outro aspecto importante ao trabalho relativo ao estudo dos espaços topológicos está fixado em um dos invariantes topológicos que se denomina por **característica de Euler**. A característica de Euler classifica as superfícies topológicas através de uma fórmula matemática cujo resultado se constitui meramente por um número inteiro. Consideremos “S” uma superfície topológica qualquer, “V” o correspondente ao número de vértices, “A” ao número de arestas, “F” o número de faces e “ $\chi(S)$ ” a característica de Euler da superfície “S”, o cálculo desta invariante topológica é definido pela seguinte equação:

$$\chi(S) = V - A + F$$

(Equação 4)

Observa-se que o processo para calcular o valor da característica depende da quantidade de vértices, arestas e faces do objeto. Sendo assim, para que seja aplicado essa invariante às superfícies topológicas é necessário estabelecer a triangulação da superfície em um conjunto finito de componentes, como por exemplo, a esfera pode ser triangulada em quatro vértices, seis arestas e quatro faces que se constituem por superfícies triangulares curvas. Aplicando estes valores à fórmula, temos:

$$\chi(S) = V - A + F$$

$$\chi(S) = 4 - 6 + 4$$

$$\chi(S) = 8 - 6$$

$$\chi(S) = 2$$

Vale ressaltar que o processo de triangulação de uma superfície possui algumas propriedades, a primeira delas afirma que uma aresta é comum a exatos dois triângulos; a segunda leva em consideração um par de triângulos, estabelecendo que eles poderão ter em

comum uma aresta ou um vértice, ou ainda nada em comum; a terceira relata que, estabelecidos dois pontos na superfície separados por uma quantidade x de triângulos, ao selecionarmos dois triângulos consecutivos entre os pontos obtêm-se uma aresta em comum. Utilizou-se como exemplo para se estabelecer o número de vértices, arestas e faces a triangulação da superfície, porém, para o cálculo da característica de Euler podemos fazer a subdivisão da superfície em qualquer outro polígono que o resultado será sempre o mesmo, pois o valor está intrinsecamente relacionado à superfície analisada (quadro 2).

Quadro 2 - Superfície topológica e o respectivo valor da característica de Euler

Superfície topológica	Característica de Euler
Esfera	2
Plano projetivo	1
Disco	1
Toro	0
Garrafa de Klein	0
Faixa de Möbius	0

Fonte: A autora.

Dado o exposto, salienta-se que o trabalho tem por objetivo relacionar as áreas de conhecimento da matemática com a arquitetura, buscando pontos de convergência que, durante a pesquisa, teve um destaque no campo das superfícies topológicas. Explicado os conceitos gerais da topologia, pretende-se na próxima seção discorrer a respeito das principais superfícies topológicas cuja geometria curiosa se torna objeto de estudo de alguns arquitetos.

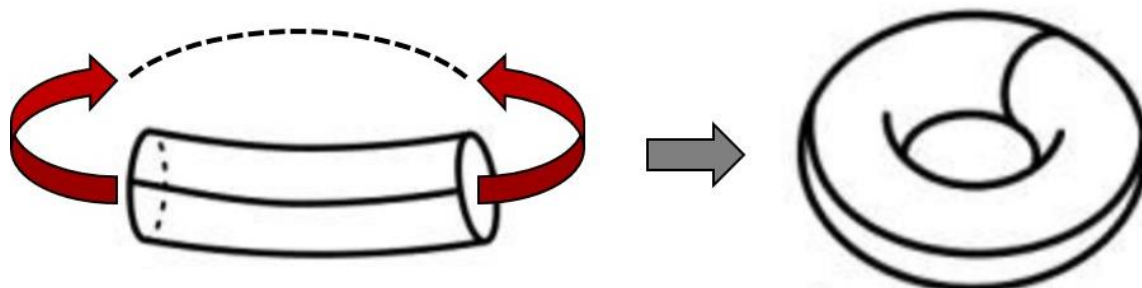
6.2 SUPERFÍCIES TOPOLÓGICAS

6.2.1 Toro

O toro ou toróide se caracteriza como uma superfície de revolução fechada e orientável, cuja estrutura corresponde à superfície de um donut ou à câmara de um pneu apresentando um vazio em sua centralidade. Quanto a construção formal, é possível partir da configuração inicial de um cilindro composto por um material elástico podendo deformá-lo até

a colagem das suas extremidades circulares (figura 25) ou pelo trajeto de um círculo de raio r ao redor de uma circunferência de raio R até que se complete uma volta.

Figura 25 - Construção do Toro ou Toróide

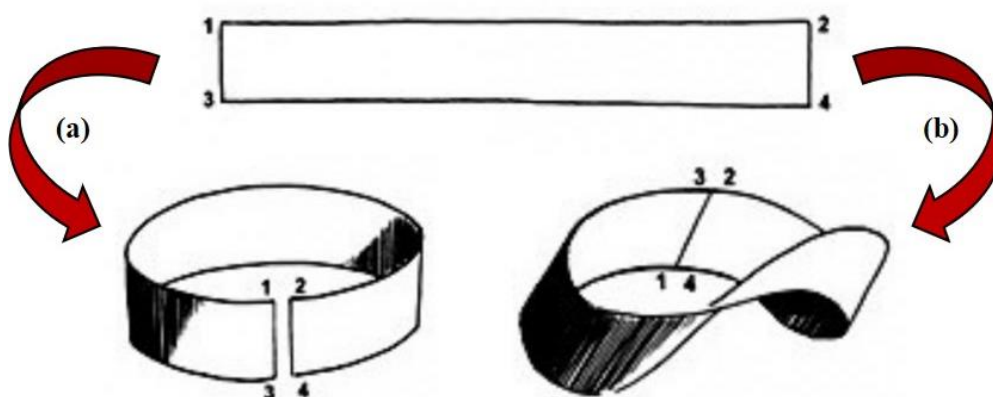


Fonte: A autora.

6.2.2 Faixa de Möbius

A faixa de Möbius é assim chamada em homenagem ao matemático e astrônomo August Ferdinand Möbius (1790-1868) que a apresentou no ano de 1858, porém a sua criação é atribuída 20 anos antes a Johann Benedict Listing. Caracterizada por sua geometria intrigante, a faixa de Möbius é uma superfície não orientável, ou seja, um objeto no plano bidimensional que possui apenas uma face contínua e uma borda. Constitui-se como o critério de determinação das superfícies que se caracterizam como não orientáveis, na qual, toda superfície que contém em sua composição a fita é, conseqüentemente, uma superfície não orientável.

Figura 26 - Confeção da fita de Möbius



Fonte: <<https://fcs.mg.gov.br/t-de-tesoura/>> Acesso em: 06 nov. 2021.

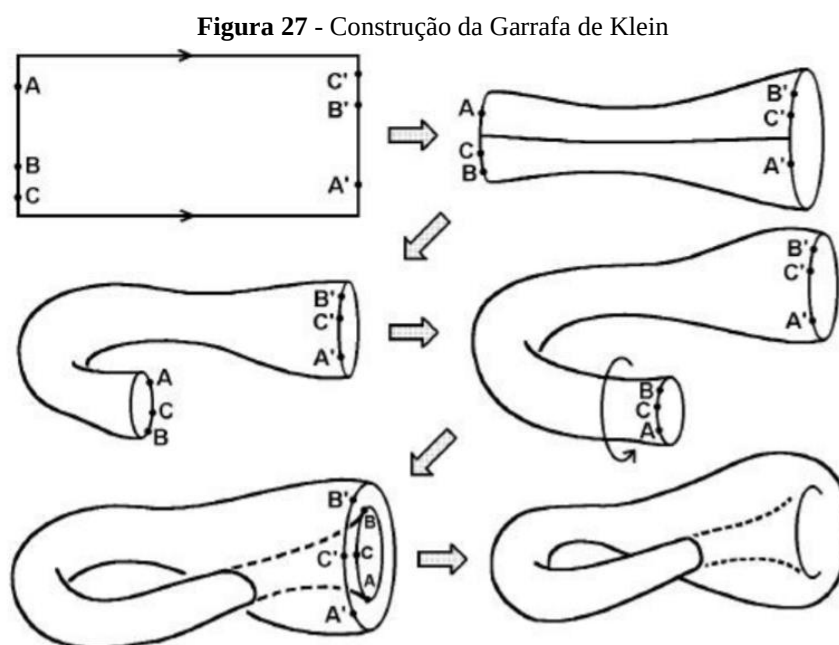
Observe que na figura 26 a fita de papel foi ilustrada com seus vértices numerados de um a quatro. O processo de confecção da superfície na figura 26-a consiste em ligar as

extremidades um com dois e três com quatro, como resultado temos a representação de uma superfície orientável, onde é possível se estabelecer a diferenciação do que é parte interna e externa. Na figura 26-b, a extremidade um liga-se com a quatro e a três com a dois, ou seja, foi feito uma torção equivalente a 180° em uma das extremidades, resultando na composição da superfície não orientável denominada faixa de Möbius.

Dentre as aplicações da fita de Möbius no cotidiano pode-se citar, por exemplo, as correias das máquinas industriais. Diferentemente da correia usual na qual apenas o lado interno sofre o desgaste por ser a superfície de contato permanecendo o lado externo intacto, ao aplicar a faixa de Möbius como superfície contínua tanto o lado interno quanto o lado externo sofrem o desgaste e consequentemente tem-se um maior aproveitamento da correia.

6.2.3 Garrafa de Klein

Apresentada pelo matemático alemão Felix Klein em 1884, a garrafa de Klein é a correspondente da faixa de Möbius no plano tridimensional. Ambos elementos geométricos assemelham-se por serem superfícies não orientáveis, porém, a garrafa se constitui em uma superfície fechada, se caracterizando por sua compacidade e a ausência de bordo, na qual as noções de interior e exterior se confundem e não podem ser estabelecidas ao objeto de maneira consistente.



Fonte: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94341/malaguetta_pc_me_rcla.pdf;jsessionid=DBB5D4B391EA14F326EFF017ED11F965?sequence=1> Acesso em: 07 nov. 2021.

Observe na figura 27 que, para construir a garrafa de Klein foi necessário fazer um giro de 180° em uma das extremidades, o que implica a presença da faixa de Möbius nessa superfície que se constitui como objeto elementar das superfícies não orientáveis.

6.3 A ARQUITETURA E AS SUPERFÍCIES TOPOLÓGICAS

O ramo da geometria que se dedica a estudar as superfícies topológicas é bastante intrigante aos arquitetos devido as novas relações descritas na configuração do espaço. Abascal e Bilbao (2011) destacam o Disco, a Esfera, o Toro, a Faixa de Möbius, a Garrafa de Klein e o Plano Projetivo como as principais superfícies topológicas que inspiram os arquitetos na composição do partido arquitetônico.

Os autores enfatizam também que quase a totalidade dessas superfícies possuem o resultado da característica de Euler diferente de dois e, conseqüentemente, geram planos não orientáveis e inabitáveis ao ser humano, somente a esfera teria estrutura compatível com a figura humana. A característica de Euler diferindo de dois significa dizer que, “se o ser humano pudesse viver em um Toro ou Fita de Möbius, haveria mais possibilidades de conexões entre espaços funcionais, e menos necessidade de elementos conectores como circulações e transições (ruas, corredores, etc...)” (ABASCAL e BILBAO, 2011). Elementos conectores que, na arquitetura, são limitados a permitirem o movimento humano em planos na horizontal e circulações verticais.

De fato, as superfícies topológicas são referenciadas analogicamente nos projetos arquitetônicos. A arquitetura não poderia se restringir apenas ao uso da topologia, uma vez que, a construção do espaço arquitetônico se caracteriza tanto pelo aspecto qualitativo, quanto o quantitativo da realidade física. Em seu texto, Sperling relata como se configura o vínculo entre a arquitetura e a topologia, descrevendo como:

Uma relação pode se configurar em um nível puramente conceitual e preservar na arquitetura os laços de significação que os conceitos têm na topologia. Outra pode apropriar-se de um conceito e utilizá-lo apenas como metáfora projetual. Outra ainda pode centrar a referência em operações de transformação em processo projeto. Conceito, metáfora e operação, e seus entrecruzamentos possíveis, são, portanto, os modos pelos quais estas convergências vêm se desenhando. (SPERLING, 2008, p.30)

Ao projetar o arquiteto procura estabelecer um sentido à sua obra, que corresponde associar nas estruturas topológicas os aspectos qualitativos e quantitativos resultantes de mediações. A construção desse complexo sentido se manifesta no processo projetual de forma indissociável com a composição estrutural por meio de expressões algébricas e dimensionais;

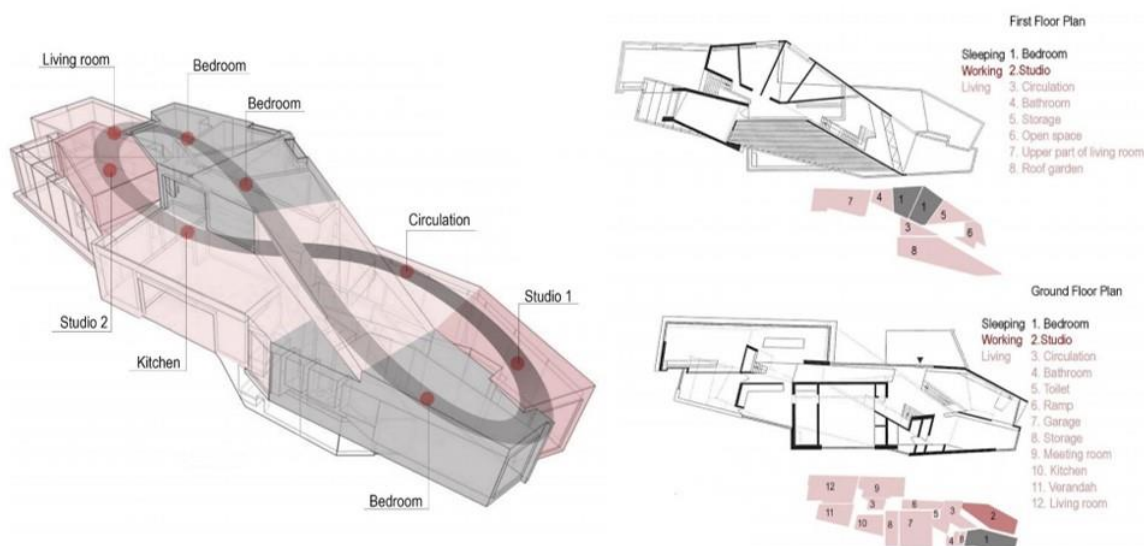
espacialidades que expressam quantidade e qualidade; da topologia; da matematização e de conceitos. O projeto arquitetônico seria uma manifestação da linguagem espacial resultado de um diálogo de aspirações, condicionantes e soluções (ABASCAL e BILBAO, 2011).

Na sequência, serão expostos alguns projetos arquitetônicos cuja escolha se pautou pela referência direta que os arquitetos fazem às características topológicas de alguns dos elementos geométricos, como por exemplo, a faixa de Möbius e a garrafa de Klein. O intento não é exaurir a quantidade de projetos que reportam à topologia, mas demonstrar como ocorre a interdisciplinaridade desses conceitos matemáticos aplicados à composição arquitetônica.

6.3.1 Möbius House (1998)

Localizada em Het Gooi na Holanda, a Möbius House (Casa Möbius) é um projeto dos arquitetos Ben van Berkel e Caroline Bos, do escritório de arquitetura UN Studio. O projeto corresponde a uma analogia ao espaço abstrato da faixa de Möbius e do bi-toro (soma conexa de dois toros) representados como proposta na organização dos espaços, através da definição das atividades, dos percursos, das circulações e dos ambientes de permanência.

Figura 28 - Esquematisação da Casa Möbius



Fonte: <<https://www.adesarquitectura.com/moebius-house/#!>> Acesso em: 10 nov. 2021.

Os espaços foram divididos em quatro áreas que constituem as atividades de um período de 24 horas, que são: trabalho, vida social, vida familiar e momento privado. Foi estabelecido uma estrutura temporal aos ambientes cuja proposta é que, ao longo do dia, os habitantes percorram todo o edifício completando um ciclo diário que se repete regularmente,

referenciando à característica de continuidade da faixa de Möbius. Quanto a referência às superfícies topológicas, o arquiteto explica:

O diagrama do bi-toro exprime a organização de dois caminhos interceptados, que desenham como duas pessoas podem viver juntas, e a mesmo tempo separadas, encontrando-se em certos pontos, que tornam-se espaços compartilhados. A ideia de duas entidades percorrendo suas próprias trajetórias mas compartilhando certos momentos, possivelmente também mudando papéis em certos pontos, é ampliado para incluir a materialização do edifício e sua construção. Como uma representação de 24 horas da vida familiar, o diagrama adquire uma dimensão espaço temporal, que conduz à implementação da faixa de Möbius. [...] O modelo matemático da faixa de Möbius não é literalmente transferido para o edifício, mas é conceitualizado e pode ser encontrado em ingredientes arquitetônicos, como a luz, as escadas, o modo como as pessoas movem-se ao longo da casa. (BERKEL, BOS apud SPERLING, 2003).

Outra menção à faixa está fixada na inversão do loop que, no projeto, ocorre quando a parte externa de concreto penetra o edifício transformando-se na mobília interna e as fachadas de vidro se tornam as divisórias internas. Ao fazer a inversão desses materiais os arquitetos dão uma nova interpretação às relações entre interior e exterior (figura 29).

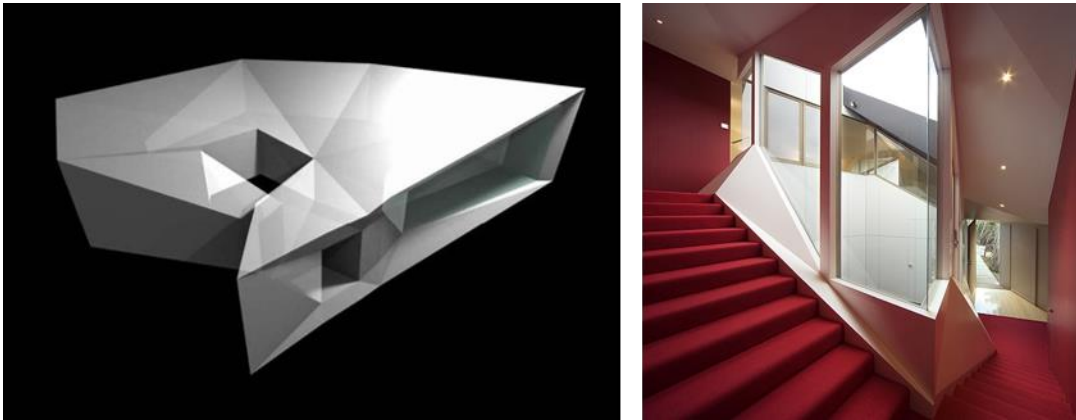
Figura 29 - Perspectiva externa e interna



Fonte: <<https://www.adesarquitectura.com/moebius-house/#!>> Acesso em: 10 nov. 2021.

6.3.2 Klein Bottle House (2008)

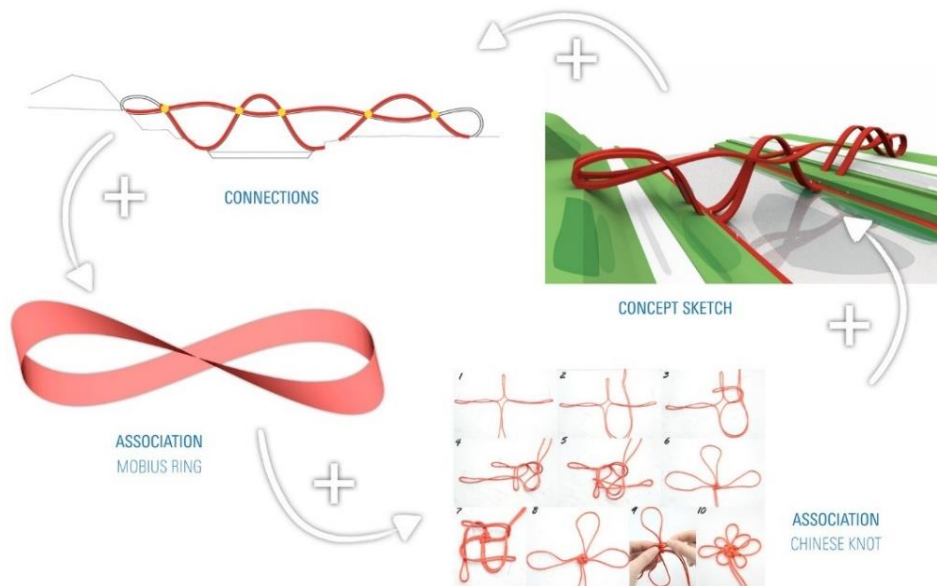
Localizada na península de Mornington, na Austrália, a Klein Bottle House (Casa Garrafa de Klein) é um projeto do arquiteto McBride Charles Ryan. O partido inicial consistia em uma espiral, mas evoluiu para uma forma mais complexa e resultou na Garrafa de Klein (figura 30 à esquerda). A disposição dos ambientes em diferentes níveis conectados por uma escadaria (figura 30 à direita), ao mesmo tempo que transmite a sensação de distância entre os espaços a quem transita, também os aproxima ao posicionar a edificação em torno de um pátio central cuja vedação é composta por vidro, o que possibilita a visualização dos diferentes níveis.

Figura 30 - Maquete eletrônica e perspectiva interna

Fonte: <<https://www.archdaily.com.br/br/01-17415/casa-garrafa-de-klein-mcbride-charles-ryan>>
Acesso em: 07 nov. 2021.

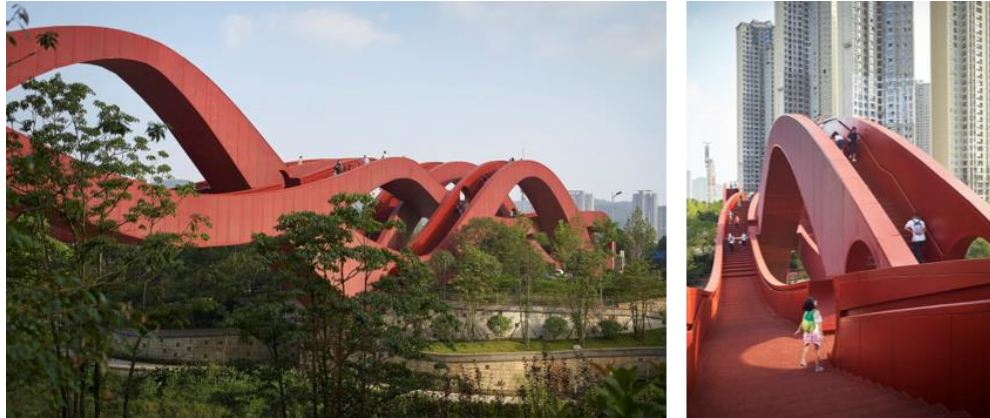
6.3.3 Lucky Knot (2016)

Localizada em Changsha na China, a Lucky Knot (Ponte Nó da Sorte) é uma passarela de pedestres projetada pelo escritório de arquitetura NEXT architects. O projeto teve como partido arquitetônico o conceito da faixa de Möbius e a arte chinesa dos nós (figura 31). A forma disposta por fitas alternadas e entrelaçadas transmite uma ideia de estrutura contínua conectando as diferentes alturas entre as margens do rio, a rua, o parque elevado e as interconexões dessas partes, possibilitando transitar por todos os níveis em uma mesma estrutura, característica semelhante à ideia de continuidade da faixa de Möbius (figura 32).

Figura 31 - O partido arquitetônico

Fonte: <<https://www.archdaily.com.br/br/805293/ponte-no-da-sorte-next-architects>>
Acesso em: 06 nov. 2021.

Figura 32 - Perspectiva dos diferentes níveis



Fonte: <<https://www.archdaily.com.br/br/805293/ponte-no-da-sorte-next-architects>>
Acesso em: 06 nov. 2021.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho se propôs a realizar um estudo abrangente sobre a relação da matemática com a arquitetura fazendo uma revisão histórica e temática. Foram abordados os aspectos mais importantes levando em conta a coesão com o tema, bem como a importância da construção dos conceitos matemáticos que convergem na aplicação da composição arquitetônica. Neste sentido, foi realizado um panorama histórico que representasse a evolução dessas duas grandes ciências para a construção da sociedade, ressaltando as interações que se desenvolvem dentro dos limites reconhecendo as especificidades de cada uma dessas áreas de conhecimento. Pode-se chegar, assim, a algumas considerações.

O primeiro momento da pesquisa introduziu o conceito de proporção áurea e alguns de seus desdobramentos, como o retângulo de ouro e a sequência de Fibonacci. O número de ouro é caracterizado por simbolismo e misticismo cujo significado, a presença nos fenômenos naturais e a utilização nas mais diversas áreas representava a perfeição divina na Terra. A produção arquitetônica que utilizou como ferramenta na sua composição a proporção áurea, o número Phi, o retângulo de ouro e sequência de Fibonacci, abrangeu um grande período temporal, passando pela antiguidade clássica da Grécia e de Roma; a produção teórica da Idade Média de Vitruvius; o tratadista Alberti no Renascimento; a arquitetura Moderna produzida a partir do *Modulor* de Le Corbusier; sendo que, a aplicação desta constante na arquitetura para explicar as relações de razão e de proporção perdura até os dias atuais.

A produção teórica de Vitruvius, importante arquiteto romano, que instaurou a arquitetura clássica como um modelo a ser implantado foi demasiadamente importante para a formação de arquitetos de diversas gerações. Evidenciou-se em seu tratado arquitetônico que a interdisciplinaridade é fundamental para uma formação mais completa do arquiteto, sendo que as relações matemáticas compõem um dos pilares do conhecimento na formação do homem erudito. Observa-se a semelhança do pensamento do autor com a proposta de educação da atualidade, na qual todas as áreas do saber devem ser conectadas formando um conjunto indispensável para uma formação pessoal integral e eficiente.

O segundo momento do trabalho se voltou para uma área mais recente da matemática, conceituando e caracterizando o tipo de geometria denominada por Topologia. Por apresentar superfícies topológicas com características intrínsecas instigantes, a Topologia chamou a atenção dos arquitetos que utilizam de conceitos e analogias a essas formas como processo projetual na produção da arquitetura contemporânea. Nesse caso, a relação

estabelecida entre essas duas áreas de conhecimento acontece de forma metafórica, respeitando a especificidade da arquitetura quanto ao caráter quantitativo exigido na composição formal.

De qualquer forma, seja desde aspectos mais simples até definições e aplicações mais complexas; seja por padrões puramente estéticos; seja por qualquer outro motivo que não foi citado no decorrer da pesquisa, a utilização da matemática e da geometria é de fundamental importância para a composição da arquitetura. O entendimento das características e do processo formal das figuras geométricas torna possível a aplicação na composição de fachadas, estruturas e ambientes; sendo também o uso da aritmética de fundamental importância, como por exemplo, no cálculo orçamentário das obras. Enfim, são várias as características e podemos encontrar diversos pontos de intersecção entre a matemática e a arquitetura.

8 REFERÊNCIAS

- ABASCAL, Eunice Sguizzardi; BILBAO, Carlos Abascal. Arquitetura e ciência. Topologia e intencionalidade em projeto, fronteiras. *Arquitextos*, São Paulo, ano 12, n. 137.01, Vitruvius, out. 2011 <<https://vitruvius.com.br/revistas/read/arquitextos/12.137/4091>>.
- ANZOLCH, Roni. Geometrias do estilo: genealogia da noção de estilo em arquitetura. 2009.
- ARELLANO, Mónica. Sobre o deslocamento do corpo na arquitetura: o Modulor de Le Corbusier. *Archdaily*, 2019. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/911962/sobre-o-deslocamento-do-corpo-na-arquitetura-o-modulor-de-le-corbusier>>. Acesso em: 12 de out. de 2021.
- BAIER, T. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ARQUITETO SEGUNDO A VISÃO FILOSÓFICA DE VITRUVIUS. *Educere et Educare*, [S. l.], v. 14, n. 33, p. DOI: 10.17648/educare.v15i33.22517, 2020. DOI: 10.17648/educare.v15i33.22517. Disponível em: <https://e-revista.unioeste.br/index.php/educereeteducare/article/view/22517>. Acesso em: 6 out. 2021.
- BORGES, Carloman Carlos. A topologia: considerações teóricas e implicações para o ensino matemática. *Caderno de Física da UEFS*, v. 3, não. 02, p. 15-35, 2005.
- CHING, Francis. D. K. **Arquitetura, forma, espaço e ordem**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.
- DA CÁS PEREIRA, Livia; FERREIRA, Marcio Violante. Sequência de Fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea. *Disciplinarum Scientia| Naturais e Tecnológicas*, v. 9, n. 1, p. 67-81, 2008.
- DA CUNHA, Macsuelber de Cássio Barros. A noção de arquitetura segundo Vitruvius e a prática construtiva em Roma. In: O FUTURO DO FUTURO DO ENSINO DE HISTÓRIA, 17., 2020, Maringá. *Anais*. Maringá: 2020.
- D'AGOSTINO, Mário Henrique Simão. A Obscuridade do Arquiteto Vitruvius e a Redação de os Dez Livros de Architettura. *Revista do programa de pós-graduação em Arquitetura e Urbanismo da FAUUSP*, v. 14, p. 26-47, 2003.
- DE ANDRADE ABREU, Fellipe et al. OS PRINCÍPIOS ARQUITETÔNICOS DO RENASCIMENTO ITALIANO. *Veredas Favip-Revista Eletrônica de Ciências*, v. 1, n. 1, 2008.
- DE CARVALHO, João Pitombeira. Um problema de Fibonacci. *RPM*. Disponível em: <<https://rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm>>. Acesso em: 11 de out. de 2021.
- DE LEÃO, Natália Munaro. Vitruvius: a escrita de um arquiteto antigo—século I ac. *Oficina do Historiador*, v. 11, n. 2, p. 183-198, 2018.

DE OLIVEIRA, Mônica Teixeira; ALVARENGA, André Martins; DA SILVA, Daniel. A Matemática do Corpo Humano: Relacionando conteúdos de Razão, Proporção e Regra de Três por meio de uma Unidade Didática. **Caçapava do Sul**, 2013.

DOS SANTOS, Maria Madalena. A MATEMATICA DA ARQUITETURA IDEAL, 2007.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H. **Domingues**, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FARRELLY, Lorraine. **Fundamentos de arquitetura**. Bookman Editora, 2014.

FRACALOSSI, Igor. Clássicos da Arquitetura: Capela de Ronchamp / Le Corbusier. **Archdaily**, 2012. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/01-16931/classicos-da-arquitetura-capela-de-ronchamp-le-corbusier>>. Acesso em: 25 de out. de 2021.

FRAZÃO, Dilva. Le Corbusier Arquiteto franco-suíço. **Ebiografia**, 2017. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/le_corbusier/>. Acesso em: 12 de out. de 2021.

GISOLDI, Denis Vanucci. A característica de Euler. 2013.

GLANCEY, Jonathan. **História da arquitetura**. Edições Loyola, 2007.

GREVEN, Hélio Adão. Introdução à coordenação modular da construção no Brasil. **Porto Alegre: Habitare**, 2007.

JUNIOR, Elias Feitosa de Amorim. Catedral de Notre-Dame. **Infoescola**. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/franca/catedral-de-notre-dame/>>. Acesso em: 25 de out. de 2021.

LIMA, Aryane. A regra áurea na arquitetura. **Projeto batente**, 2018. Disponível em: <<https://projetobatente.com.br/regra-aurea-na-arquitetura/>>. Acesso em: 23 de out. de 2021.

MARQUES, Janaina Carneiro. RELAÇÕES ENTRE PROPORÇÃO, ARQUITETURA E MATEMÁTICA: ABORDAGENS EM DESENHO TÉCNICO.

MATEMÁTICA e Arquitetura. **Histour arte cultura exposição**. Disponível em: <<https://www.hisour.com/pt/mathematics-and-architecture-17802/>>. Acesso em: 17 de out. de 2021.

NEVES, Maria Inês Teixeira. **Le Corbusier, o módulo e a Unidade de Habitação de Marselha: influências em Lisboa**. 2016. Dissertação de Mestrado.

RABELO, Frederico André. Arquitetura e música: interseções polifônicas. 2007.

SILVA, Alessandro Jose Da. O Número De Ouro Na Educação Básica. 2018.

SOUZA, Eduardo. A Reforma da icônica Sede da ONU. **Archdaily**, 2012. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/01-83027/a-reforma-da-iconica-sede-da-onu>>. Acesso em: 23 de out. de 2021.

SPERLING, David Moreno. **Arquiteturas Contínuas e Topologia: similaridades em processo**. 2003. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

SPERLING, David Moreno. Entre conceitos, metáforas e operações: convergências da topologia na arquitetura contemporânea. **Gestão & Tecnologia de Projetos**, v. 3, n. 2, p. 24-55, 2008.