

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (TCC)

Integração Múltipla: Uma Ferramenta para Resolução de Problemas

Mariana Oliveira Soares

GOIÂNIA - GO
2022

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Mariana Oliveira Soares

Matrícula: 20171010940132

Título do Trabalho: Integração Múltipla: Uma Ferramenta para Resolução de Problemas

Autorização - Marque uma das opções

1. (☒) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. (☐) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. (☐) Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- (☐) O documento está sujeito a registro de patente.
(☐) O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
(☐) Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia (GO)
Local

, 04 / 07 / 2022.
Data

Mariana Oliveira Soares

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Mariana Oliveira Soares

Integração Múltipla: Uma Ferramenta Para Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás – IFG – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Prof(a). Dr(a). Regina Célia Bueno da Fonseca

Goiânia - GO
2022

S676i Soares, Mariana Oliveira.

Integração múltipla: uma ferramenta para resolução de problemas / Mariana Oliveira Soares. –
Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2022.
64f. : il.

Orientação: Prof(a). Dr(a). Regina Célia Bueno da Fonseca.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Cálculo numérico. 2. Cálculo integral. 3. Teoria da integral múltipla. I. Fonseca, Regina
Célia Bueno da (orientação). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III.
Título.

CDD 518.6

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Lana Cristina Dias Oliveira CRB1/ 2.631
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA: UMA FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

por

MARIANA OLIVEIRA SOARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientadora: Dr^a. Regina Célia Bueno da Fonseca

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 27 de junho de 2022, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof^a. Dr^a. Regina Célia Bueno da Fonseca (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Jolivê Mendes de Santana Filho (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Esp. José Maria de Urzêda (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Jolive Mendes de Santana Filho, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 27/06/2022 11:17:45.
- Regina Celia Bueno da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 27/06/2022 11:17:22.
- Jose Maria de Urzed, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 27/06/2022 11:17:04.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 22/06/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 295480

Código de Autenticação: aed7d2c01c



Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por proporcionar-me essa experiência e ter saúde e força para ultrapassar todos os obstáculos enfrentados durante o curso.

A minha mãe Maria Rita, que sempre acreditou em mim e nos meus sonhos, e que lutou e batalhou para realizá-los.

Ao meu namorado Danilo, que incentivava-me a lutar, passar e superar cada obstáculo encontrado durante minha jornada.

As minhas amigas da faculdade Amanda, Larissa e Maria Angélica que sempre estão ao meu lado, ajudando-me nas horas difíceis e escutando minhas reclamações.

A minha orientadora Regina, que quando eu estava mais perdida que cego em tiroteio, ela chegou brilhando, dando várias idéias sobre os conteúdos que gosto de estudar e auxiliando-me durante todo o projeto.

A todos os professores do IFG por instruir-me a crescer cada dia mais e a estudar e organizar meus estudos, e pelos ensinamentos, que proporcionou a minha chegada aqui. Ao professor karluz que fez-me apaixonar pela matemática e mostrar que, a educação é a melhor forma de mudar o mundo para melhor.

Resumo

Esta proposta de TCC propõe fazer um estudo de ferramentas matemáticas que definem as integrais múltiplas de funções de duas e três variáveis e limites de somas de modo análogo ao da integral definida de uma variável real. O objetivo deste trabalho consiste em analisar e mostrar a importância da teoria da integral múltipla como ferramenta matemática na resolução de problemas nas áreas de conhecimento e obter suas soluções analíticas, numéricas e analisar os resultados.

Palavras-chave: Integral dupla; Integral tripla; Ferramentas para resolução de problemas; Solução analítica; Solução Numéricas.

Sumário

	INTRODUÇÃO	8
1	FUNDAMENTOS TEÓRICOS - MATEMÁTICA	11
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS - ÁREAS DO CONHECIMENTO	15
2.1	Área da Física - Teoria Básica	15
2.1.1	Massa e Centro de Massa de uma Lâmina no $\mathbb{R}^2$	15
2.1.2	Massa e Centro de Massa de um Corpo no $\mathbb{R}^3$	16
2.1.3	Momentos de Inércia no $\mathbb{R}^2$	16
2.1.4	Momentos de Inércia no $\mathbb{R}^3$	17
2.2	Área da Probabilidade - Teoria Básica	17
2.2.1	Função densidade conjunta	17
2.3	Área no Cálculo Numérico - Teoria Básica	19
2.3.1	Fórmulas de Newton-Cotes	19
2.3.2	Regra do Trapézio Simples e Repetida	19
2.3.3	Primeira Regra do Simpson Simples e Composta	20
2.3.4	Segunda Regra de Simpson Simples e Composta	20
3	APLICAÇÕES DA INTEGRAL MÚLTIPLA NA RESOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS NAS ÁREAS DO CONHECIMENTO	22
3.1	Aplicações na Área da Física	22
3.2	Aplicações na Área Probabilidade	34
3.3	Aplicações na Área Cálculo Numérico	45
4	RESULTADOS OBTIDOS E CONCLUSÃO	64
	REFERÊNCIAS	65

Introdução

A teoria do Cálculo diferencial e integral (Cálculo infinitesimal) vem contribuindo para a área da Matemática e também para diversas áreas do conhecimento como uma ferramenta matemática na resolução de problemas ([DOMINGUES, 2011](#)).

Os primeiros registros de estudo a respeito do Cálculo datam de 1.800 a.C. com as contribuições dos matemáticos, que nos séculos XVII e XVIII também eram físicos, filósofos e astrologos, como o matemático grego Arquimedes (287- 212 a.C.), o matemático alemão Johann Kepler (1571–1630) e francês Pierre de Fermat (1601–1665). No século XVII, O físico inglês Isaac Newton (1642–1727) e o matemático e filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 -1716) chegaram, independentemente¹, as fórmulas para utilizar o cálculo de maneira funcional, de modo serem considerados como os "criadores" do cálculo pela importância e aplicabilidade dos seus trabalhos entre 1673 e 1676 ([MELCHORS; SOARES, 2013](#)).

Após a segunda metade do século, no estudo do cálculo aparecem a colaboração de outros nomes, que trabalharam para aprimorar a ferramenta, como os dois irmãos italianos Jacques Bernoulli (1654–1705) e Johann Bernoulli (1667–1748), o matemático francês Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hospital (1661–1704), o matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736–1813), o matemático francês Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783), o francês Augustin Louis Cauchy (1789–1857), alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), e o alemão Bernhard Riemann (1826- 1866) responsável pela definição de integral, conhecida como “integral de Riemann” ([MELCHORS; SOARES, 2013](#); [NASCIMENTO et al., 2013](#)).

Foram Newton e Leibniz que deram importância e aplicabilidade em seus trabalhos, com intuito de desenvolver problemas na área da física e matemática como, calcular a distância de um corpo percorrido num intervalo, determinar a aceleração e a velocidade desse corpo, determinar a área de figuras planas, calcular volumes de sólido e encontrar a reta tangente a uma curva no intervalo.

No século XVII, os matemáticos costumavam utilizar limites para calcular a área de figuras com contornos curvos. Newton e Leibniz mostraram que era possível obter o mesmo resultado, usando a integração relacionando com as antiderivadas, cuja resultado é denominado Teorema Fundamental do Cálculo. Este resultado do cálculo contribuiu para o desenvolvimento de resolução de problemas em várias áreas do conhecimento, como na Física-Matemática, Economia, Engenharia, Medicina, Química e Astronomia

¹ Sendo que, alguns anos antes Newton tinha elaborado uma teoria análoga à de Leibniz ([DOMINGUES, 2011](#)).

([NASCIMENTO et al., 2013](#)).

Um dos principais conceitos fundamental do cálculo é a integral definida, é aplicado para determinar os volumes de sólidos, calcular a massa, o centro de massa e o momento de inércia de um sólido. A noção de integral definida é dada pelo somatório da divisão de infinitos retângulos, que juntos forma a região delimitada, ou seja ,cada vez que essas medidas ficarem menores melhor será o resultado obtido (área, massa, centro de massa, $\dots$). Sua impotência tornando-se cada vez mais impactante, em que auxilia no desenvolvimento de pesquisa nas áreas do conhecimento.

Outro conceito fundamental do cálculo é a integral por Substituição, em que é um método que transcreve uma integral em uma outra integral que possa ser integrável, facilitando a resolução de um problema de integração.

Logo, as ferramentas matemática são extramente importantes para desenvolvimento nas áreas dos conhecimentos, pois ajudam na modelagem matemática e na análise de cálculos. Por exemplo, na Física essas ferramentas auxiliam no cálculo de distância percorrida por um objeto, e em localizar o centro de massa de um objeto a cada instante. Já na Matemática a integral vem facilitando no cálculo de área indefinida dada por uma curva, no cálculo de comprimento de um arco e de volume. Na Engenharia, a integral ajuda a obter o tempo exato em que um avião decola e sua distância percorrida; o volume de uma garrafinha de água; o volume de uma caixa-d'água, e outros ([STEWART, 2007](#); [HALLIDAY, 2014](#); [CHAVES, 2001](#)).

Dessa forma, nas disciplinas de Cálculos (I, II e III), tivemos a oportunidade de observar a dificuldade dos colegas (alunos) em entender a teoria de integral múltipla, bem como, em aplicá-la, seja na forma implícita ou explícita, na resolução de problemas em várias áreas de conhecimento e em tecnologias para obter as soluções analíticas. Por exemplo, nas áreas da física, engenharias, química, e outras. A interpretação da definição de integral (indefinida ou definida) e o entendimento de como utilizar as regras (propriedades) de integração, está diretamente ligado no tipo de função no integrando ([BUSS; FLEMMING, 2006](#); [STEWART, 2012](#)).

Outro fato observado é na interpretação de texto da teoria de integral, que dificulta os desenvolvimentos de relacionar, interpretação e aplicar na prática de resolução de problemas. Assim, sempre surgia as perguntas, *como compreender e desenvolver os métodos de integração múltipla?* e *como relacionar a teoria de calcular volume, área de superfície, massa, momentos e centróides de regiões com duas variáveis ou três variáveis?*

Por esse motivo, propomos a pesquisar sobre integração múltiplas como uma ferramenta matemática na resolução de problemas da área do conhecimento, buscando compreender a importância dessa teoria como modelagem matemática, mostrando a importância da teoria da integral múltipla como ferramenta na resolução de problemas nas áreas de

conhecimento e obter suas soluções analíticas, geométricas, numéricas e analisar os resultados. Isto constitui a base desta proposta de trabalho, uma vez que a principal motivação da pesquisa é explicitar como aplicar a integração múltipla para obter as soluções analíticas, geométricas e numéricas em problemas nas áreas do conhecimento, observamos a necessidade de entender a teoria de integral múltipla.

Esta pesquisa de TCC está distribuída na seguinte forma: no Capítulo 1 apresentamos os Fundamentos Teóricos da Matemática em relação aos conceitos e propriedades das integrais múltiplas, necessários no Capítulo 3. No Capítulo 2 apresentamos alguns Fundamentos Teóricos de algumas áreas de conhecimento como: Física, Probabilidade e Cálculo Numérico em relação aos conceitos e propriedades necessários para o entendimento, quando aplicados na resolução de problemas. No Capítulo 3 apresentamos alguns problemas das áreas de conhecimento, em que as integrais múltipla são aplicadas como ferramentas nas resoluções analíticas. E no Capítulo 4 apresentamos os resultados obtidos.

1 Fundamentos Teóricos - Matemática

Definição 1.1 Seja f uma função definida no intervalo $[a,b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a,b]$. A integral definida de f de a até b , denotada por (BUSS; FLEMMING, 2006)

$$\int_a^b f(x)dx,$$

é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

As definições abaixo, usamos as referências (LARSON et al., 2006; SWOKOWSKI, 1983; SIMMONS, 1996; LEITHOLD, 1994).

Definição 1.2 Seja f uma função definida numa região retangular fechada R . O número L será o limite das samas da forma $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \Delta_i y$ se L satisfazer a propriedade de que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que para toda partição Δ , para a qual $\|\Delta\| < \delta$ e para todas possíveis seleções do ponto (ξ_i, γ_i) no i -ésimo retângulo $i=1,2,3,\dots,n$, temos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \Delta_i y - L \right| < \epsilon.$$

Se tal número L existir, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \Delta_i y = L.$$

Definição 1.3 Uma função f de duas variáveis será integrável numa região retangular fechada R se f estiver definida em R e o número L (Definição 1.2) se existir. Esse número L será chamado de integral dupla de f em R , e escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \Delta_i y = \iint_R f(x, y) dA.$$

Teorema 1.1 Se uma função de duas variáveis for contínua numa região retangular fechada R , então R será integrável em R .

Teorema 1.2 Seja f uma função de duas variáveis, contínua numa região fechada R , no plano xy e $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) em R . Se V for a medida do volume de um sólido S

tendo a região R como base e considerando uma altura cuja medida seja $f(x,y)$ no ponto (x,y) em R , então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \Delta_i y = \iint_R f(x, y) dA.$$

Teorema 1.3 Se c for uma constante e a função f for integrável numa região fechada R , então cf será integrável em R e

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

Teorema 1.4 Se as funções f e g forem integráveis numa região fechada R , então a função $f+g$ será integrável em R , e teremos

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

Proposição 1.1 (Iterando a Região $D \subseteq \mathbb{R}^2$) Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2$ funções contínuas no retângulo compacto D e λ é uma constante real, então

1. Linearidade: $\iint_D [f(x, y) + \lambda g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \lambda \iint_D g(x, y) dA$.
2. Aditividade: $\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$, sendo $D = D_1 \cup D_2$, sendo D_1 e D_2 têm apenas pontos de fronteira em comum.
3. Valor médio: Existe ao menos um ponto $P(a,b)$ no retângulo D tal que $\iint_D f(x, y) dA = f(a, b) A(D)$, onde $A(D)$ é a área de região D .

Teorema 1.5 (Teorema de Fubini) Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$ $\{D=(x,y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$. Então

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Definição 1.4 (Primitiva da Função) Uma função $F(x)$ é chamada de uma primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I (ou simplesmente uma primitiva de $f(x)$), se para todo $x \in I$, temos $F'(x) = f(x)$.

Teorema 1.6 Seja f é contínua sobre $[a,b]$ e se F é uma primitiva de f neste intervalo, então

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Definição 1.5 (Volume Regiões $\mathbb{R}^3$) Seja $dv = dxdydz$ o diferencial. O cálculo do volume na região limitada $S \subseteq \mathbb{R}^3$ é

$$V = \iiint_S dv$$

.

Definição 1.6 (Retângulo polar) Região delimitada pelas inequações

$$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$$

e

$$\tan(\alpha)x \leq y \leq \tan(\beta)x,$$

com $b > a > 0$ e $\pi \geq \beta \geq \alpha \geq -\pi$,

$$R^* = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b : \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Teorema 1.7 Toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

Teorema 1.8 Toda função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

Teorema 1.9 (Mudança de variável) Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ com derivada contínua e $g([c, d]) \subset [a, b]$. Então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)).g'(t)dt.$$

Teorema 1.10 (Integração por parte) Se $f.g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas contínuas então.

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = \left[f.g \right]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx.$$

Teorema 1.11 Seja g definida por

$$g(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

com x e y funções de classe C^1 em $A \subset \mathbb{R}^2$. Seja $B \subset A$ limitado e fechado, então

1. g é injetora em B .
2. O determinate Jacobiano da aplicação g é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

não se anula em B . Se f é integrável em $g(B)$, então

$$\iint_{g(B)} f(x, y) dx dy = \iint_B f(x(u, v), y(u, v)) \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv.$$

Observação 1.1 Para as integrais triplas podemos definir para uma função $f = f(x, y, z)$ de três variáveis reais, e contínua em toda uma região em forma de paralelepípedo $Q = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; m \leq z \leq n\}$, utilizando procedimentos análogos apresentados para integrais duplas.

A seguir, apresentamos alguns problemas para exemplificar a importância da ferramenta integral múltipla no desenvolvimento das resoluções e obtenções das soluções analíticas.

2 Fundamentos Teóricos - Áreas do Conhecimento

Apresentamos alguns fundamentos teóricos importantes para resolver problemas de algumas áreas do conhecimento como: Física, Probabilidade, Cálculo Numérico, em relação aos conceitos e propriedades necessários para o entendimento, quando aplicados na resolução de problemas no Capítulo 3.

2.1 Área da Física - Teoria Básica

A teoria em relação aos conceitos de massa e centro de massa, normalmente é apresentada nas referências de Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas e três variáveis reais apresentadas nas referências [Stewart \(2013\)](#), [Buss e Flemming \(2007\)](#), [Swokowski \(1983\)](#).

Nas Seções 2.1.1- 2.1.4 apresentamos notações simplificadas que só são possíveis através do entendimento dos conceitos físicos, por exemplo, o centro de massa ou centro de gravidade é o ponto de aplicação do peso de um corpo, ou seja, é “o ponto de equilíbrio de um sistema”.

2.1.1 Massa e Centro de Massa de uma Lâmina no $\mathbb{R}^2$

Suponha uma lâmina colocada em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ com função densidade (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\delta(x, y)$ contínua sobre D . Então, a massa total da lâmina é dada por:

$$m = \iint_D \delta(x, y) dA. \quad (2.1)$$

As coordenadas do centro de massa¹ de uma lâmina são denotadas por

$$x_{c.m.} = \frac{M_y}{m} \quad \text{e} \quad y_{c.m.} = \frac{M_x}{m}, \quad (2.2)$$

onde m é a massa total da lâmina (Equação(2.1)), e M_x e M_y são os momentos de massa em relação aos eixos x e y , definidos por

$$M_x = \iint_D y \delta(x, y) dA \quad \text{e} \quad M_y = \iint_D x \delta(x, y) dA. \quad (2.3)$$

¹ Por simplicidade, abreviamos o centro de massa por c.m.

Definição 2.1 A função densidade de massa por área é dada por:

$$\delta(x, y) = \lim_{\|\Delta A_k \Rightarrow 0\|} \frac{\Delta m_k}{\Delta A_k}.$$

2.1.2 Massa e Centro de Massa de um Corpo no $\mathbb{R}^3$

As propriedades para as integrais triplas são análogas às integrais duplas, conforme dadas na Seção(2.1.1).

A seguir, apresentamos as definições de massa total (m), de momentos de massa em relação aos planos xy , yz , xz (M_{xy} , M_{yz} , M_{xz}), e das coordenadas do centro de massa ($x_{C.M.}$, $y_{C.M.}$, $z_{C.M.}$) no $\mathbb{R}^3$, respectivamente,

$$m = \iiint_D \delta(x, y, z) dx dy dz, \quad (2.4)$$

$$M_{xy} = \iiint_D z \delta(x, y, z) dx dy dz, \quad (2.5)$$

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta(x, y, z) dx dy dz, \quad (2.6)$$

$$M_{xz} = \iiint_D y \delta(x, y, z) dx dy dz, \quad (2.7)$$

$$x_{C.M.} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad (2.8)$$

$$y_{C.M.} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad (2.9)$$

$$z_{C.M.} = \frac{M_{xy}}{m}. \quad (2.10)$$

Definição 2.2 A função densidade de massa por unidade de volume é dada por:

$$\delta(x, y, z) = \lim_{\|\Delta V_k \Rightarrow 0\|} \frac{\Delta m_k}{\Delta V_k}.$$

2.1.3 Momentos de Inércia no $\mathbb{R}^2$

Pelo conceito da Física sabemos que, o momento de inércia é definido por $m r^2$, em que, m é a massa da partícula, r é distância da partícula ao eixo de rotação, no qual essa partícula está em movimento constante.

A seguir, apresentamos as definições dos momentos de inércia em torno dos eixos x e y (I_x , I_y); e o momento de inércia em torno da origem (I_0) no $\mathbb{R}^2$, respectivamente,

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) dx dy; \quad (2.11)$$

$$I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dx dy; \quad (2.12)$$

$$I_0 = I_x + I_y, \quad (2.13)$$

onde usamos as Equações (2.11) e (2.12), obtendo

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D y^2 \delta(x, y) dx dy + \iint_D x^2 \delta(x, y) dx dy \\ I_0 &= \iint_D (y^2 + x^2) \delta(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.1.4 Momentos de Inércia no $\mathbb{R}^3$

As propriedades dos momentos de inércia no $\mathbb{R}^3$ são análogas aos dos momentos de inércia no $\mathbb{R}^2$, conforme dadas Seção 2.1.3.

A seguir, apresentamos as definições dos momentos de inércia em torno dos eixos x, y, z (I_x, I_y, I_z), respectivamente,

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz; \quad (2.15)$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz; \quad (2.16)$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dx dy. \quad (2.17)$$

Definição 2.3 (Momento de inércia) O momento de inércia de uma partícula de massa m tem unidade de medida em $kg - m^2$, em torno de um eixo cartesiano, e é definido como sendo $(m r)^2$, onde r é a distância entre a partícula e o eixo coordenado.

2.2 Área da Probabilidade - Teoria Básica

2.2.1 Função densidade conjunta

Considere as variáveis aleatórias X e Y . A função densidade conjunta de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$, tal que (SCHWARZLANDER, 2011)

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y) dA, \quad (2.18)$$

onde $f(x, y)$ satisfaz as condições:

$$f(x, y) \geq 0 \quad \text{e} \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = 1, \quad (2.19)$$

e

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy. \quad (2.20)$$

Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com funções densidades f_X e f_Y , respectivamente. Dizemos que X e Y são **variáveis aleatórias independentes** se a função densidade conjunta for o produto das densidades individuais, ou seja,

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y). \quad (2.21)$$

Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta f , definimos a média de X e de Y , denominadas por **valores esperados (médias)** de X e Y , e definidas por (SZÉKELY, 1986; SKOROKHOD; PROKHOROV; SECKLER, 2005)

$$\mu_x = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y) dA \quad \text{e} \quad \mu_y = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y) dA. \quad (2.22)$$

Definição 2.4 A função densidade de uma variável aleatória t com distribuição normal (Gaussiana) é

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad (2.23)$$

em que μ é sua média e σ é seu desvio padrão (BUTKOV, 1988; JAYMES, 1974; PETROV, 1995).

Definição 2.5 Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes bidimensional. As variáveis X e Y são independentes se, e somente se,

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y). \quad (2.24)$$

Definição 2.6 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com distribuição de probabilidade conjunta $f(x, y)$ e distribuição de probabilidade marginais $g(x)$ e $h(y)$, respectivamente. As variáveis aleatórias X e Y são independentes se, e somente se,

$$f(x, y) = g_X(x) \cdot h_Y(y) \quad \forall (X, Y). \quad (2.25)$$

Definição 2.7 A variável aleatória contínua X segue uma distribuição Exponencial, denotada por $X \sim \exp(\lambda)$, se a sua função densidade probabilidade é

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \text{ com } \lambda > 0. \quad (2.26)$$

2.3 Área no Cálculo Numérico - Teoria Básica

Integração numérica surgiu da necessidade de resolver integrais definidas impossível de ser calculada.

Com isso, quando a forma analítica da antiderivada for difícil obtenção ou se forem conhecidos somente valores discretos de f , se faz necessário o uso de métodos numéricos para avaliar a integral de f . Os métodos numéricos consistem em aproximar a função f por um polinômio interpolador e determinar analiticamente a integral desse polinômio no intervalo $[a, b]$. A seguir, definimos alguns tipos de integração numéricas.

2.3.1 Fórmulas de Newton-Cotes

Nas fórmulas fechadas de Newton-Cotes, $f(x)$ é interpolada por um polinômio no intervalo $[a, b]$ igualmente espaçados, tendo h como a distância dos subintervalos. Dividindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos (FRANCO, 2006)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + \dots + A_nf(x_n) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i). \quad (2.27)$$

A suas principais fórmulas Newton-Cotes são as Regras dos Trapézios e de Simpson.

2.3.2 Regra do Trapézio Simples e Repetida

- Regra do Trapézio Simples: tem a idéia de, aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio $p(x)$ de grau 1 no intervalo $[a, b]$, onde $x_0 = a$ e $x_1 = b$, e usando a fórmula Lagrange para $P_1(x)$, então a fórmula da Regra do Trapézio é dada por (BARROSO et al., 1987)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)),$$

onde $h = x_1 - x_0$.

- Estimativa para o Erro da Regra do Trapézio:

$$E_1 = -\frac{f^2(x)}{12}h^3, \quad a < x < b. \quad (2.28)$$

- Regra do Trapézio Repetida: Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos em espaçamento igual, logo, aplicamos a regra dos trapézios em cada subintervalo (BARROSO et al., 1987):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)),$$

onde $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, e n é o número de subintervalos.

- Estimativa para o Erro da Regra do Trapézio Repatida:

$$E_1 = -\frac{(x_n - x_0)^3 f''(x)}{12n^2}, \quad a < x < b. \quad (2.29)$$

2.3.3 Primeira Regra do Simpson Simples e Composta

- Primeira Regra do Simpson Simples: Considerando que $f(x)$ se aproxima-se por um polinómio $P_2(x)$ de ordem 2. O valor numérico da integral Segundo Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson será dada por (BARROSO et al., 1987),(CUNHA; CASTRO, 2010):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)),$$

onde $h = x_2 - x_0$.

- Estimativa para o erro da Primeira Regra de Simpson Simples:

$$E_3 = \frac{-h^5}{90}f''''(x), \quad a < x < b. \quad (2.30)$$

- Primeira Regra do Simpson Composta: Realizando o mesmo processo da Regra do Trapézio e aplicando $\frac{1}{3}$ na Primeira Regra de Simpson, obtemos o valor numérico da integral

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2i-1}) + f(x_m)),$$

onde $h = \frac{x_m - x_0}{m}$, e m é o número de subintervalos.

- Estimativa para o Erro da Primeira Regra de Simpson Composta:

$$E_4 = \frac{-(b-a)^5}{180n^4}f''''(x), \quad a < x < b. \quad (2.31)$$

2.3.4 Segunda Regra de Simpson Simples e Composta

De modo análogo, a Segunda Regra de Simpson é obtida por uma aproximação da função $f(x)$ por um polinómio interpolador $P_3(x)$ de ordem 3 (BARROSO et al., 1987), (FRANCO, 2006):

- Segunda Regra de Simpson Simples:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_n)),$$

onde $h = \frac{x_m - x_0}{3}$.

- Estimativa para o Erro da Segunda Regra de Simpson Simples:

$$E_5 = -\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(x), \quad a < x < b. \quad (2.32)$$

- Segunda Regra do Simpson Composta:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + \\ &+ 2f(x_{m-3}) + 3f(x_{m-2}) + 3f(x_{m-1}) + f(x_m)), \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde, $h = \frac{x_m - x_0}{m}$, com m múltiplo de 3.

- Estimativa para o Erro da Segunda Regra de Simpson Composta:

$$E_6 = -\frac{(b-a)^5}{80m^4}f^{(4)}(x), \quad a < x < b. \quad (2.34)$$

No Cap. 3 apresentamos alguns problemas, onde as integrais múltiplas são ferramentas necessárias para obter suas soluções.

3 Aplicações da Integral Múltipla na Resolução de Alguns Problemas nas Áreas do Conhecimento

Neste capítulo, apresentamos alguns problemas que mostram a importância da ferramenta *integral múltipla* no desenvolvimento das resoluções para obter as soluções analíticas dos problemas em algumas áreas do conhecimento como Física, Probabilidade e Cálculo numérico.

3.1 Aplicações na Área da Física

Nesta Seção apresentamos alguns problemas da área da física, em que as teorias das integrais múltiplas são necessárias, para obter as soluções.

Problema 3.1 Seja uma lâmina triangular com vértices nos pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,2)$ no plano xy que descreve a região D , como mostra a Figura 1, e a função densidade é $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$. Obtenha as coordenadas do centro de massa dessa lâmina triangular, e mostre sua posição no interior da lâmina (SWOKOWSKI, 1983).

Solução 3.1 Iteração da Região D (lâmina triangular): Seja $f(x) = ax + b$ a função que descreve o segmento de reta que liga os pontos $(1,0)$ e $(0,2)$ na lâmina triangular

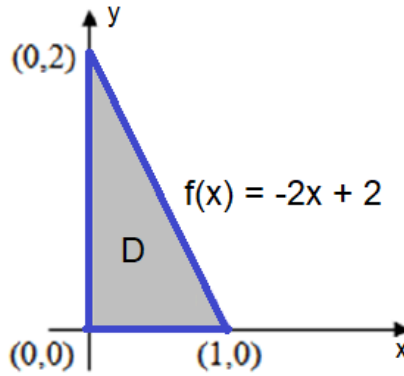
$$\begin{aligned} \text{Para o ponto } (1,0) &\implies f(1) = a + b \implies 0 = a + b. \\ \text{Para o ponto } (0,2) &\implies f(0) = b \implies 2 = b \implies a = -2 \\ \implies f(x) &= -2x + 2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Região D:

Da Equação (3.1), observamos as limitações dadas pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = -2x + 2$, como mostra a Figura 1, e expressamos algebricamente por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq -2x + 2\}. \tag{3.2}$$

Massa total da lâmina:

Figura 1 – Lâmina triangular.

Usando a Equação (2.1) e $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$, obtemos

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA = \iint_D [1 + 3x + y] \, dA \stackrel{\text{Eq. (3.2)}}{=} \int_0^1 \int_0^{-2x+2} [1 + 3x + y] \, dy \, dx \\
 m &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{-2x+2} dx \stackrel{\text{T.F.C.}}{=} \int_0^1 [4 - 4x^2] \, dx \\
 &= \left[4x - \frac{4x^3}{3} \right]_0^1 \stackrel{\text{T.F.C.}}{=} \Rightarrow m = \frac{8}{3} \text{ u.m..} \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Observação: T.F.C. é a abreviação do Teorema Fundamental do Cálculo, dado no Teorema 1.6.

Momentos em relação ao eixos: Usando a Equação (2.3) e $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_D y \rho(x, y) \, dA = \iint_D y [1 + 3x + y] \, dA = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} [y + 3xy + y^2] \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^{-2x+2} dx \\
 &\stackrel{\text{T.F.C.}}{=} \int_0^1 \left[\frac{(-2x+2)^2}{2} + 3x \frac{(-2x+2)^2}{2} + \frac{(-2x+2)^3}{3} \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{14}{3} - 6x - 2x^2 + \frac{10}{3}x^3 \right] dx \\
 &= \left[\frac{14x}{3} - 3x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^4}{6} \right]_0^1 \\
 &\stackrel{\text{T.F.C.}}{=} \left[\frac{14}{3} - 3 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \right] = \frac{28 - 18 - 4 + 5}{6} \\
 M_x &= \frac{11}{6} \text{ u.m..} \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

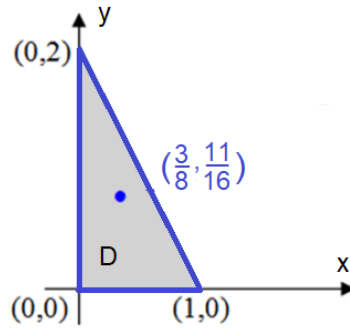
$$\begin{aligned}
M_y &= \iint_D x \rho(x, y) dA = \iint_D x [1 + 3x + y] dA = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} [x + 3x^2 + yx] dy dx \\
&= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} + 3x^2 y + yx \right]_0^{-2x+2} dx \\
&\stackrel{T.F.C.}{=} \int_0^1 \left[2x + 4x^2 - 6x^3 + x \frac{(2-2x)^2}{2} \right] dx \\
&= \int_0^1 [4x - 4x^3] dx = [2x^2 - x^4]_0^1 \\
M_y &= 1 \text{ u.m..} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Coordenadas do centro de massa: usando as Equações (3.3), (3.4) e (3.5) na Equação (2.2), obtemos

$$x_{c.m.} = \frac{M_y}{m} = \frac{3}{8} \quad e \quad y_{c.m.} = \frac{M_x}{m} = \frac{11}{16}. \tag{3.6}$$

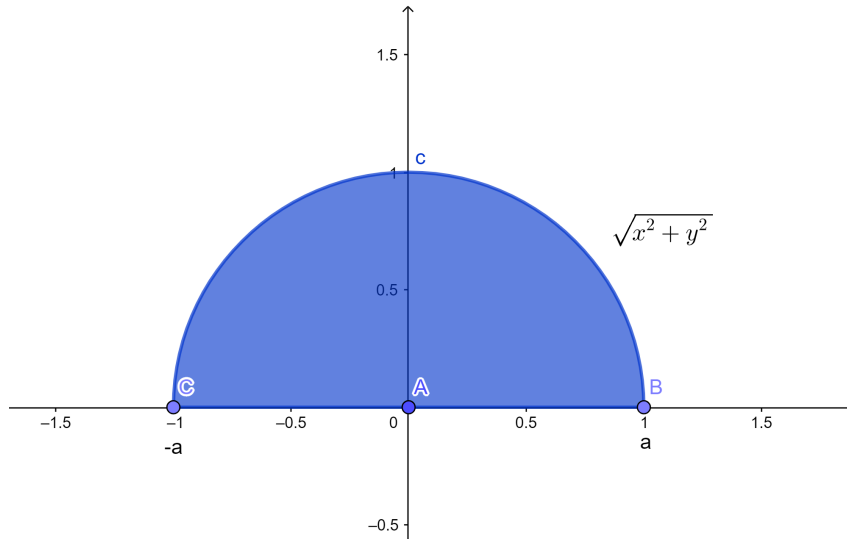
Da Equação (3.6), obtemos as coordenadas do centro de massa da lâmina triangular, localizado no ponto $\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Lâmina triangular e o centro de massa.



Observação 3.1 O Problema 3.1 pode ser calculado em $\mathbb{R}^3$ para um sólido (um paralelepípedo), pois a integral tripla tem propriedades análogas às das integrais duplas, podemos usar o Teorema de Fubini para Integrais Triplas (Teo.1.5) e fazer as iterações sobre o paralelepípedo em regiões elementares no $\mathbb{R}^3$, sendo de três tipos I, II e III, ou seja, analogamente às integrais duplas (SIMMONS, 1996; LARSON et al., 2006).

Problema 3.2 Calcule o centro de massa da região R de um semicírculo de raio a , sendo a densidade superficial no ponto $P(x,y)$ proporcional à distância de $P(x, y)$ até o centro do semicírculo. A Figura 3 mostra a região R do semicírculo.

Figura 3 – Semicírculo de raio r .

Solução 3.2 Sabemos da teoria de coordenadas polares que a circunferência é dada por $x^2 + y^2 = r^2$ e a distância da origem do plano cartesiano até um ponto $P(x,y)$ da circunferência é dado por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, que normalmente, é denominada por raio da circunferência.

A função que descreve a região R do semicírculo de raio a , mostrado na Figura 3, é dada por

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.7)$$

Massa Total da Região R: Sabemos que a densidade superficial no ponto $P(x,y)$ proporcional à distância de $P(x, y)$ até o centro do semicírculo, então

$$m = \iint_R k f(x, y) dA, \quad (3.8)$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Iterando a região R do semicírculo em coordenadas polares, obtemos

$$x = r \cos(\theta) \implies x = x(r, \theta) \quad (3.9)$$

$$y = r \sin(\theta) \implies y = y(r, \theta) \quad (3.10)$$

$$0 \leq r \leq a \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi \implies R. \quad (3.11)$$

Usando as Equações (3.9) e (3.10) na Equação (3.8):

$$m = k \iint_R f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta, \quad (3.12)$$

onde $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ é o determinante Jacobiano de x e y em relação a r e θ . Agora

vamos substituir a Equação(3.7) na Equação(3.12), obtendo

$$\begin{aligned}
 m &= k \iint_R \sqrt{r^2 \underbrace{[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]}_{=1}} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} dr d\theta \\
 &= k \iint_R r \{r \cos^2(\theta) - [-r \sin^2(\theta)]\} dr d\theta \\
 &= k \iint_R r \{r \overbrace{[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]}^{=1}\} dr d\theta = k \iint_R r \{r\} dr d\theta \\
 &= k \iint_R r^2 dr d\theta \quad \xRightarrow{\text{Eq.(3.11)}} \quad m = k \int_0^\pi \int_0^a r^2 dr d\theta \\
 &= k \int_0^\pi \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^a d\theta \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad m = k \int_0^\pi \frac{a^3}{3} d\theta \\
 &= k \left. \frac{a^3}{3} \theta \right|_0^\pi \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad m = \frac{k \pi a^3}{3} \text{ u.m.}^1, \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

onde k é a constante de proporcionalidade e a é o raio do semicírculo da região R.

Momento da massa em relação ao eixo x:

$$M_x = \iint_R y \sqrt{x^2 + y^2} dA. \tag{3.14}$$

Substituindo as Equações (3.9) e (3.10) na Equação (3.14) :

$$\begin{aligned}
 M_x &= k \iint_R r \sin(\theta) \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} dr d\theta \\
 &= k \int_0^\pi \int_0^a r^3 \sin(\theta) dr d\theta \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad M_x = k \int_0^\pi \sin(\theta) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a d\theta \\
 &= k \int_0^\pi \frac{a^4}{4} \sin(\theta) d\theta \quad \xRightarrow{\text{Teo. (1.3)}} \quad M_x = k \frac{a^4}{4} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \\
 &= \frac{ka^4}{4} \left[-\cos(\theta) \right]_0^\pi \quad \Rightarrow \quad M_x = \frac{ka^4}{2} \text{ u.m.}.. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Momento da massa em relação ao eixo y:

$$\begin{aligned}
 M_y &= k \iint_R r \cos(\theta) \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} dr d\theta \\
 &= k \int_0^\pi \int_0^a r^3 \cos(\theta) dr d\theta \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad M_y = k \int_0^\pi \cos(\theta) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a d\theta \\
 &= k \int_0^\pi \frac{a^4}{4} \cos(\theta) d\theta \quad \xRightarrow{\text{Teo.(1.3)}} \quad M_y = k \frac{a^4}{4} \int_0^\pi \cos(\theta) d\theta \\
 M_y &= \frac{ka^4}{4} \left[\sin(\theta) \right]_0^\pi \quad \Rightarrow \quad M_y = 0. \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Coordenadas do centro de massa:

Substituindo as Equações (3.15) e (3.16) na Equação (2.2):

$$x_{c.m.} = \frac{M_y}{m} \implies x_{c.m.} = 0.$$

$$y_{c.m.} = \frac{M_x}{m} \implies y_{c.m.} = \frac{\left(\frac{ka^4}{2}\right)}{\left(\frac{ka^3\pi}{3}\right)} \implies y_{c.m.} = \frac{3a}{2\pi}.$$

Logo, o centro de massa é dado em coordenadas $\left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$.

Problema 3.3 Determine o centro de massa de um sólido com densidade constante que é limitado pelo cilindro parabólico $x = y^2$ e pelos planos $x = z$, $z = 0$ e $x = 1$ (VALLE,).

Figura 4 – Cilindro Parabólico.

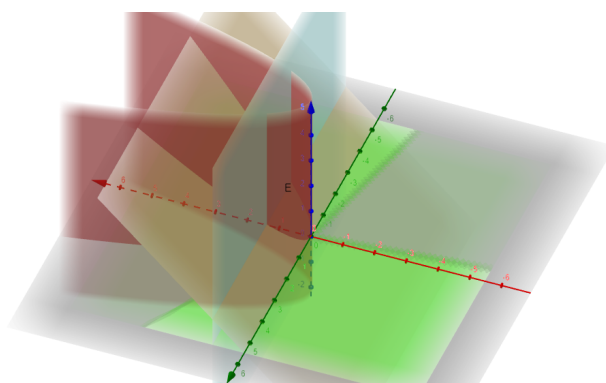
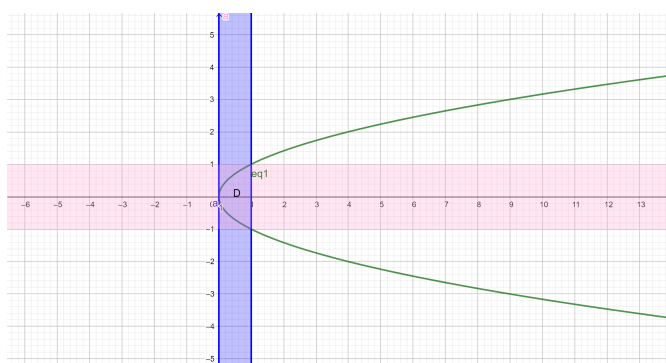


Figura 5 – Parábola.



Solução 3.3 Pela Figura 4 e 5, obtemos os seguintes intervalos:

$$D = \begin{cases} y^2 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq x. \end{cases}$$

Pela Definição 2.2 temos que, a densidade de massa é dada por :

$$\delta(x, y, z) = \lim_{\|\Delta V_k \Rightarrow 0\|} \frac{\Delta m_k}{\Delta V_k}.$$

Como a densidade é constante, logo o centro de massa do objeto será definido como centróide, ou seja, temos um sólido homogêneo. Dado P uma constante de densidade qualquer, temos que a função densidade é definida por

$$\delta(x, y, z) = P. \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação (3.17) na Equação (2.7), calculamos a massa

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D \delta(x, y, z) dV \quad \Rightarrow \quad m = \iiint_D P dz dx dy \\ &= P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x dz dx dy \quad \xRightarrow{\text{Teo.(1.3)}} \quad m = P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \left[z \right]_0^x dx dy \\ &= P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x dx dy \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad m = P \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{y^2}^1 dy \\ &= P \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{y^4}{2} \right] dy \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad m = P \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [1 - y^4] dy \\ &= \frac{P}{2} \int_{-1}^1 [1 - y^4] dy \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad m = \frac{P}{2} \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ m &= \frac{4P}{5} \text{ u.m..} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Usamos a Equação (2.7) para calcular os momentos de massa em relação aos planos x, y e z .

Momento de massa em relação aos planos x e y :

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_D z \delta(x, y, z) dV \quad \Rightarrow \quad M_{xy} = P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z dz dx dy \\ &= P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^x dx dy \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad M_{xy} = P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \frac{x^2}{2} dx dy \\ &= \frac{P}{2} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 dx dy \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad M_{xy} = \frac{P}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{y^2}^1 dy \\ &= \frac{P}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{3} - \frac{y^6}{3} \right] dy \quad \xRightarrow{\text{T.F.C.}} \quad M_{xy} = \frac{P}{2} \frac{1}{3} \int_{-1}^1 [1 - y^6] dy \\ &= \frac{P}{6} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_{-1}^1 \\ M_{xy} &= \frac{2P}{7}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Momento de massa em relação aos planos y e z:

$$\begin{aligned}
 M_{yz} &= \iiint_D x P dV \quad \xRightarrow{T_{eo.1.3}} \quad M_{yz} = P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x dz dx dy \\
 &= P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \left[xz \right]_0^x dx dy \quad \xRightarrow{T.F.C} \quad M_{yz} = P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 dx dy \\
 &= P \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{y^2}^1 dy \quad \xRightarrow{T.F.C} \quad = P \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{3} - \frac{y^6}{3} \right] dy \\
 &= \frac{P}{3} \int_{-1}^1 [1 - y^6] dy \quad \xRightarrow{T.F.C} \quad M_{yz} = \frac{P}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_{-1}^1 \\
 M_{yz} &= \frac{4P}{7}. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Momento de massa em relação aos planos x e z:

$$\begin{aligned}
 M_{xz} &= \iiint_D y \delta(x, y, z) dV \quad \Rightarrow \quad M_{xz} = P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x y dz dx dy \\
 &= P \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \left[yz \right]_0^x dx dy \quad \xRightarrow{T.F.C} \quad M_{xz} = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 yx dx dy \\
 &= P \int_{-1}^1 \left[y \frac{x^2}{2} \right]_{y^2}^1 dy \quad \xRightarrow{T.F.C} \quad M_{xz} = \frac{P}{2} \int_{-1}^1 y [1 - y^4] dy \\
 &= \frac{P}{2} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{6} \right]_{-1}^1 \quad \xRightarrow{T.F.C} \\
 M_{xz} &= 0. \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Coordenadas do Centro de Massa:

O centro de massa é denotadas por $C = (x_{C.M.}, y_{C.M.}, z_{C.M.})$, e são obtidas usando as Equações (2.4) e (2.8). Então, substituindo as Equações (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21) na Equação (2.8), obtemos

$$\begin{aligned}
 x_{C.M.} &= \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\left(\frac{4P}{7}\right)}{\left(\frac{4P}{5}\right)} \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{5}{7}. \\
 y_{C.M.} &= \frac{M_{xz}}{m} \quad \Rightarrow \quad y_C = 0. \\
 z_{C.M.} &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{2P}{7}}{\frac{4P}{5}} \quad \Rightarrow \quad z_C = \frac{5}{14}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o centro de massa é dada pelas coordenadas $\left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$.

Observação 3.2 Analizando os problemas 3.1, 3.2 e 3.3, observa-se, que o centro de massa é dado por um ponto qualquer, onde a massa total está concentrada, em que, a desidade de massa não será a mesma, podendo atribuir vários valores, podemos encontrar o centro de massa em vários objetos como por exemplo, bicicleta, o próprio corpo humano, uma mesa, edifícios e outros. Dessa forma, a integral múltipla entra como grande aliado no cálculo de centro de massa e a massa total do objeto, auxiliando os engenheiros com grandes estruturas como: edifício, navios, toboágua e outros.

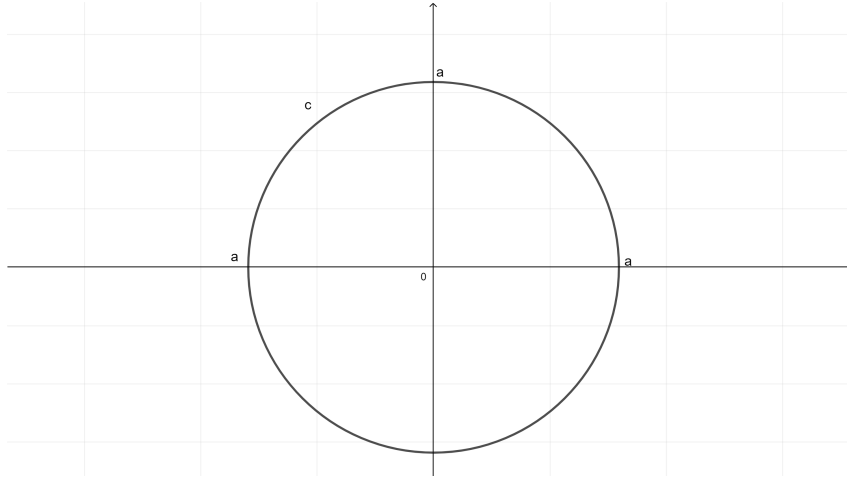
Problema 3.4 Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a (STEWART, 2013).

Solução 3.4 Dado uma região D delimitado por um círculo, sabemos que, a equação do círculo com origem no centro $(0,0)$ e raio a como mostra a Figura 6, e é denotado por:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Passando para coordenadas polares:

Figura 6 – Círculo de raio a .



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ 0 < r < a \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (3.22)$$

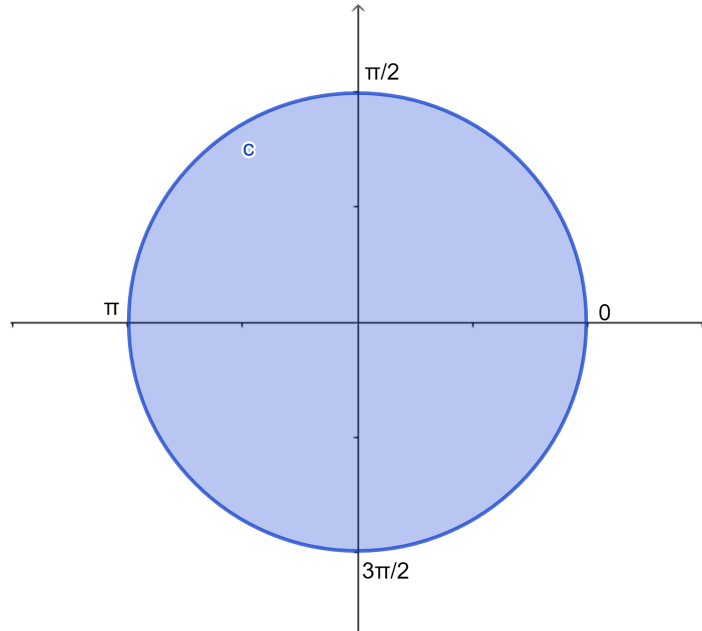
Pela Figura 7, obtemos os seguintes intervalos:

$$D = \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Utilizando a Equação (2.11) para calcular o momento de inércia em relação aos eixos x e y :

$$I_x = \iint_D y^2 P(x, y) \, dx \, dy \quad (3.23)$$

$$I_y = \iint_D x^2 P(x, y) \, dx \, dy. \quad (3.24)$$

Figura 7 – Círculo trigonométrico.

Substituindo a Equação (3.22) na Equação (3.23), obtemos

$$I_x = \iint_D (r^2 \cos^2 \theta) P(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \quad (3.25)$$

$$I_y = \iint_D (r^2 \sin^2 \theta) P(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta. \quad (3.26)$$

Momento de inércia em torno do eixo x:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D (r \sin \theta)^2 P(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= P \int_0^{2\pi} \int_0^a (r \sin \theta)^2 \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} dr d\theta \\ &= P \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 (\sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= P \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 (\sin^2 \theta) dr d\theta \\ &= P \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a d\theta \\ I_x &= P \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} (\sin^2 \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Usando a relação fundamental da trigonometria, $(2\text{sen}^2\theta) = 1 - \cos(2\theta)$:

$$\begin{aligned}
 I_x &= P \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} \frac{2}{2} (\text{sen}^2\theta) d\theta \quad \xRightarrow{\text{Teo.(1.3)}} \quad I_x = P \frac{a^4}{4} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \\
 I_x &= P \frac{a^4}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \quad \xRightarrow{\text{Teo.(1.4)}} \quad I_x = P \frac{a^4}{8} \left[\overbrace{\int_0^{2\pi} 1 d\theta}^m + \overbrace{\left[\int_0^{2\pi} -\cos(2\theta) d\theta \right]}^n \right] \\
 I_x &= P \frac{a^4}{8} [m + n]. \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Calculando m e n da Equação (3.27):

$$m = \int_0^{2\pi} 1 d\theta \quad \xRightarrow{\text{T.F.C}} \quad m = \left[\theta \right]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad m = 2\pi \tag{3.28}$$

$$n = \int_0^{2\pi} -\cos(2\theta) d\theta = \int_0^{\frac{u}{2}} -\cos(u) \frac{1}{2} du = \left[-\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) \right]_0^{2\pi} \quad \xRightarrow{\text{T.F.C}} \quad n = 0 \tag{3.29}$$

Substituindo as Equações (3.28) e (3.29) na Equação (3.27), obtemos

$$I_x = \frac{Pa^4}{8} [2\pi + 0] \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{Pa^4\pi}{4}. \tag{3.30}$$

Momento de inércia em torno do eixo y:

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_D (r \cos\theta)^2 P(r \cos\theta, r \text{sen}\theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\
 I_y &= P \int_0^{2\pi} \int_0^a (r \cos\theta)^2 \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} dr d\theta \\
 I_y &= P \int_0^{2\pi} \int_0^a (r \cos\theta)^2 \cdot r dr d\theta \quad \xRightarrow{\text{Teo.(1.3)}} \quad I_y = P \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 (\cos^2\theta) dr d\theta \\
 I_y &= P \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a d\theta \quad \xRightarrow{\text{(T.F.C)}} \quad I_y = P \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} (\cos^2\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

Pela relação trigonométrica $(2\cos^2\theta) = 1 + \cos(2\theta)$, temos que:

$$\begin{aligned}
 I_y &= P \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} \frac{2}{2} (\cos^2\theta) d\theta \quad \xRightarrow{\text{Teo.(1.3)}} \quad I_x = P \frac{a^4}{4} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta \\
 I_y &= P \frac{a^4}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta \quad \xRightarrow{\text{Teo.(1.4)}} \quad I_y = P \frac{a^4}{8} \left[\overbrace{\int_0^{2\pi} 1 d\theta}^{m_1} + \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta}^{n_1} \right] \\
 I_y &= P \frac{a^4}{8} [m_1 + n_1]. \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

Calculando os valores de m_1 e m_2 da Equação (3.31):

$$m_1 = \int_0^{2\pi} 1 d\theta \quad \xRightarrow{T.F.C} \quad m_1 = \left[\theta \right]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad m_1 = 2\pi \quad (3.32)$$

$$n_1 = \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \quad (\text{utilizando o método por substituição})$$

$$n_1 = \int_0^{2\pi} \cos(u) \frac{1}{2} du \quad \xRightarrow{T.F.C} \quad n_1 = \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad n_1 = 0 \quad (3.33)$$

Substituindo as Equações (3.32) e (3.33) na Equação (3.31), obtemos

$$I_y = \frac{Pa^4}{8} [2\pi + 0] \quad \Rightarrow \quad I_y = \frac{Pa^4\pi}{4}. \quad (3.34)$$

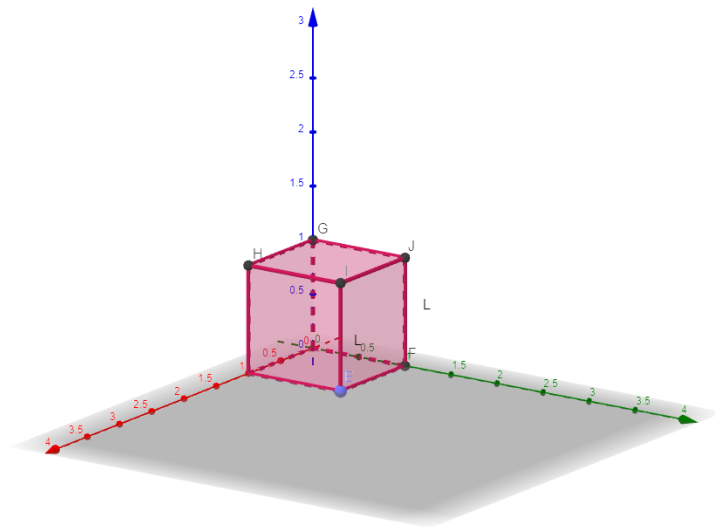
Calculando I_0 (substituindo as Equações (3.30) e (3.34) na Equação (2.14))

$$I_0 = I_x + I_y \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{ka^4\pi}{4} + \frac{ka^4\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{ka^4\pi}{2}. \quad (3.35)$$

Observação 3.3 Observando o problema 3.4 nota-se, pela simetria do disco e a densidade ainda ser constante temos que, o momento de inércia em torno do eixo x e o momento de inércia em torno do eixo y são equivalentes.

Problema 3.5 Suponha que o sólido tenha densidade constante k. Encontre os momentos de inércia para um cubo com comprimento de lado L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados

Figura 8 – Cubo.



Solução 3.5 Pela Figura 8, temos os seguintes intervalos:

$$E = \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq L \\ 0 \leq z \leq L \end{cases}.$$

Usando as Equações (2.15) para calcular o momento de inércia:

$$\begin{cases} I_x = \iiint_E (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) \, dx dy dz \\ I_y = \iiint_E (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) \, dx dy dz \\ I_z = \iiint_E (y^2 + x^2) \delta(x, y, z) \, dx dy dz \end{cases} \quad (3.36)$$

Sabemos que a função densidade é constante, então definimos por

$$\delta(x, y, z) = k \quad (3.37)$$

Substituindo a Equação (3.37) na Equação (3.36), obtemos

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^L \int_0^L \int_0^L k(y^2 + z^2) \, dx dy dz \xrightarrow{\text{Teo.(1.3)}} I_x = k \int_0^L \int_0^L \int_0^L (y^2 + z^2) \, dx dy dz \\ I_x &= k \int_0^L \int_0^L (y^2 L + z^2 L) \, dy dz \xrightarrow{(T.F.C)} I_x = k \int_0^L \left[\frac{y^3}{3} L + L z^2 \right]_0^L \, dy dz \\ I_x &= \int_0^L \frac{L^3}{3} L + L z^2 L \, dz \xrightarrow{(T.F.C)} I_x = k L \left[\frac{L^3}{3} z + L \frac{z^3}{3} \right]_0^L \\ I_x &= k L \left[\frac{L^3}{3} L + L \frac{L^3}{3} \right] \Rightarrow I_x = \frac{2}{3} k L^5. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Analisando a Figura 8 notamos que os planos, xy, xz e yz tem a mesma medida, logo podemos dizer que são simétricos, e teremos:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} k L^5,$$

que são as coordenadas do momento de inércia do cubo de comprimento de lado L, e um vértice localizado na origem e as três arestas localizadas nos eixos coordenados.

3.2 Aplicações na Área Probabilidade

A seguir mostraremos aplicações das integrais múltiplas na área da probabilidade.

Problema 3.6 Uma fábrica produz rolamentos de forma cilíndrica tais que

- O diâmetro X tem distribuição normal com média 4,0 cm e desvio padrão 0,01 cm;
- O comprimento Y tem distribuição normal com média 6,0 cm e desvio padrão 0,01 cm.

Supondo que X e Y sejam independentes. Determine a probabilidade de um rolamento escolhido aleatoriamente da linha de produção ter comprimento ou diâmetro que difiram dos valores médios em mais que 0,02 cm (ARFKEN, 2006).

Solução 3.6 A probabilidade que ambos X e Y difiram de seus valores médios por menos de 0,02 cm, e das Equações (2.20) e (2.23). Para resolver a integral por métodos numéricos, felizmente podemos recorrer ao uso de tabelas onde a integral da distribuição normal padrão de média nula e desvio padrão 1 para diferentes valores encontra-se tabulada. Assim,

$$\begin{aligned}
 P[3,98 \leq X \leq 4,02 ; 5,98 \leq Y \leq 6,02] &= \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} f(x, y) dy dx \\
 &= \frac{1}{(0,01)\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(0,01)\sqrt{2\pi}} \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} e^{-(x-4)^2/2(0,01)^2} e^{-(y-6)^2/2(0,01)^2} dy dx \\
 &= \frac{1}{[(0,01)\sqrt{2\pi}]^2} \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} e^{-5000 [(x-4)^2 + (y-6)^2]} dy dx \\
 &= \frac{5000}{\pi} \int_{3,98}^{4,02} \int_{5,98}^{6,02} e^{-5000 [(x-4)^2 + (y-6)^2]} dy dx \\
 &\approx (0.9544997)(0.9544997) \quad (\text{numericamente}) \\
 &\approx 0,91106967730009 \approx 0,91.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

A Equação (3.39) mostra o resultado obtido numericamente, calculadas no *R Commander* que *Run any R code online*, no site <https://rdr.io/snippets/>, que calculamos as duas probabilidades $P[5,98 \leq Y \leq 6,02]$ e $P[3,98 \leq X \leq 4,02]$, usando os comandos da programação R com o código (*scripts R externos*), respectivamente:

- *Start the code-block: <https://rdr.io/snippets/>*
- *`pnorm(6.02, mean=6, sd=0.01, lower.tail=TRUE) - pnorm(5.98, mean=6, sd=0.01, lower.tail=TRUE)`*
- *`pnorm(4.02, mean=4, sd=0.01, lower.tail=TRUE) - pnorm(3.98, mean=4, sd=0.01, lower.tail=TRUE)`*

Portanto, a probabilidade de X ou Y diferir de seu valor médio em mais de 0,02 cm, usando as Equações (2.19) e (3.39) é aproximadamente

$$1 - 0,91 = 0,09, \text{ ou seja, } 9\%. \tag{3.40}$$

Problema 3.7 Uma luminária tem duas lâmpadas de um tipo com tempo de vida médio de 1000 horas. Supondo que possamos modelar a probabilidade de falha dessas lâmpadas por uma função densidade exponencial com média $\mu = 1000$, determine a probabilidade de que ambas as lâmpadas venham a falhar dentro de um período de 1 000 horas (STEWART, 2013).

Solução 3.7 Sabemos que, a função exponencial é denotada por:

$$f(t, \lambda) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0 \\ 0, t \leq 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Como a média de distribuição exponencial é

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{\mu}.$$

Logo, a probabilidade de falha das lâmpadas por unidade de tempo será:

$$\lambda = \frac{1}{1000} \implies \lambda = 10^{-3}. \quad (3.42)$$

Seja x e y as lâmpadas, em que, tem um tempo de vida média individual. Pela Def. 2.25 temos que x,y são independentes, logo a função densidade conjunta de x e y é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda_x \lambda_y e^{-\lambda_x x} e^{-\lambda_y y}, x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, x < 0, y < 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Substituindo a Equação (3.42) na Equação (3.43), obtemos

$$\begin{aligned} f(t, \lambda) &= \begin{cases} 10^{-3} 10^{-3} e^{-10^{-3}x} e^{-10^{-3}y}, x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, x < 0, y < 0 \end{cases} \\ f(t, \lambda) &= \begin{cases} 10^{-6} e^{-10^{-3}x} e^{-10^{-3}y}, x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, x < 0, y < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Calculando a probabilidade que luminária venha a falhar no período de 1000 horas:

$$\begin{aligned} P(x \leq 1000; y \leq 1000) &= P(x \leq 10^3; y \leq 10^3) \\ P(x \leq 10^3; y \leq 10^3) &= \int_{-\infty}^{10^3} \int_{-\infty}^{10^3} f(x, y) dy dx. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Substituindo a Equação (3.44) na Equação (3.45), obtemos

$$\begin{aligned} P(x \leq 10^3; y \leq 10^3) &= \int_0^{10^3} \int_0^{10^3} 10^{-3} 10^{-3} e^{-x10^{-3}} e^{-y10^{-3}} dy dx \\ &= 10^{-6} \int_0^{10^3} \int_0^{10^3} e^{-x10^{-3}} e^{-y10^{-3}} dy dx \\ &= 10^{-6} \int_0^{10^3} e^{-x10^{-3}} dx \int_0^{10^3} e^{-y10^{-3}} dy. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Representando as integrais em relação x por P_1 e em relação a y por P_2 :

$$P_1 = \int_0^{10^3} e^{-x10^{-3}} dx \quad (3.47)$$

$$P_2 = \int_0^{10^3} e^{-y10^{-3}} dy \quad (3.48)$$

$$P(x \leq 10^3; y \leq 10^3) = 10^{-6} P_1 P_2. \quad (3.49)$$

Calculando $P_1 = \int_0^{10^3} e^{-x10^{-3}} dx$ da Equação (3.49). Utilizando o método integração polo método da substituição:

$$\begin{aligned} u &= -x10^{-3} \implies -10^3 du = dx \\ P_1 &= \int_0^{10^3} -e^u 10^3 dx \xRightarrow{T.eo.(1.3)} P_1 = -10^3 \int_0^{10^3} e^u dx \\ P_1 &= -10^3 [e^u]_0^{10^3} \xRightarrow{T.F.C} P_1 = -10^3 [e^{10^3} - 1]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Calculando $P_2 = \int_0^{10^3} e^{-y10^{-3}} dy$ da Equação (3.50). Utilizando o método integração por substituição

$$\begin{aligned} v &= -y10^{-3} \implies -10^3 dv = dy \\ P_2 &= \int_0^{10^3} -e^v 10^3 dy \xRightarrow{T.F.C} P_2 = -10^3 [e^v]_0^{10^3} \\ P_2 &= -10^3 [e^{10^3} - 1]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Substituindo as Equações (3.50) e (3.51) na Equação (3.49), obtemos

$$\begin{aligned} P(x \leq 10^3; y \leq 10^3) &= 10^{-6} P_1 P_2 \\ &= 10^{-6} [(-10^3 [e^{10^3} - 1]) (-10^3 [e^{10^3} - 1])] \\ &= 10^{-6} [10^6 ([e^{10^3} - 1]) ([e^{10^3} - 1])] \\ &= [e^{10^3} - 1] [e^{10^3} - 1] \\ &= [e^{10^3} - 1]^2 \simeq \left(\frac{1}{e} - 1\right)^2 \simeq (0,3678 - 1)^2 \simeq 0,3996 \\ P(x \leq 10^3; y \leq 10^3) &\simeq 39,96\%. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A probabilidade das lâmpadas vim a falhar no intervalo de 1000 horas é 39,96%.

Problema 3.8 Uma luminária tem três lâmpadas, cada uma com vida média de $\mu = 800$ horas. Se modelarmos a probabilidade de falha das lâmpadas por uma função densidade exponencial com média 800, determine a probabilidade das três lâmpadas virem a falhar dentro de um intervalo de 1 000 horas (STEWART, 2013).

Solução 3.8 Analogamente ao Problema 3.7 temos que, a média de distribuição será dada por:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{\mu} \\ \mu &= \frac{1}{800} \implies \mu = 800^{-1}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Lembrando que, a função exponencial é denotada por:

$$f(t; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}.$$

Tendo que, x, y e z são lâmpadas, em que, tem um tempo individual, e sendo que, x, y e z são termos independentes e pela Definição 2.5, a função densidade conjunta é dada por:

$$\begin{cases} \mu_x \mu_y \mu_z \exp\left\{-\frac{x+y+z}{\mu}\right\}, & \text{se } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}. \quad (3.54)$$

Substituindo a Equação (3.53) na Equação (3.54), obtemos

$$\begin{cases} 800^{-3} \exp\left\{-\frac{x+y+z}{800}\right\}, & \text{se } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}.$$

Calculando a probabilidade $P(x + y + z \leq 1000)$:

$$\begin{aligned} P(x, y, z \leq 1000) &= \int_0^{10^3} \int_0^{10^3-x} \int_0^{10^3-x-y} 800^{-3} e^{-x/800} e^{-y/800} e^{-z/800} dz dy dx \\ &\stackrel{T.F.C}{=} 800^{-3} \int_0^{10^3} \int_0^{10^3-x} e^{-x/800} e^{-y/800} \left[-800 e^{-z/800} \right]_0^{10^3-x-y} dz dy dx \\ &= -800^{-2} \int_0^{10^3} \int_0^{10^3-x} \left[e^{-800^{-1}x} e^{-800^{-1}y} e^{(-\frac{5}{4})} e^{800^{-1}x} e^{800^{-1}y} - e^{-800^{-1}x} e^{-800^{-1}y} \right] dy dx \\ &= -800^{-2} \int_0^{10^3} \int_0^{10^3-x} \left[e^{(-\frac{5}{4})} - e^{-800^{-1}x} e^{-800^{-1}y} \right] dy dx \\ &\stackrel{T.F.C}{=} -800^{-2} \int_0^{10^3} \left[e^{(-\frac{5}{4})} y + 800 e^{-800^{-1}x} \left[e^{-800^{-1}(10^3-3)} - 1 \right] \right]_0^{10^3-y} dy dx \\ &= -800^{-2} \int_0^{10^3} \left[e^{(-\frac{5}{4})} (10^3 - x) + 800 e^{-800^{-1}x} e^{-800(-\frac{5}{4})} e^{800^{-1}x} - 800 e^{-800^{-1}x} \right] dx \\ &= -800^{-2} \int_0^{10^3} \left[e^{(-\frac{5}{4})} (1800 - x) - 800 e^{-800^{-1}x} \right] dx \\ &\stackrel{T.F.C}{=} -800^{-2} \left[1800 e^{(-\frac{5}{4})} x - e^{(-\frac{5}{4})} \frac{x^2}{2} + 800^2 [e^{-800^{-1}x}] \right]_0^{10^3} \\ P(x, y, z \leq 1000) &= 0,1315.100\% \implies P(x, y, z \leq 1000) = 13,15\%. \quad (3.55) \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade das lâmpadas falharem no intervalo de 1000 horas é 13,15%.

Observação 3.4 Observando os Problemas 3.7 e 3.8 notamos que, existe até três variáveis aleatórias contínuas e uma probabilidade de uma função exponencial, em que todos os valores que foram aplicados pertencem a um intervalo na reta.

Problema 3.9 Sendo (x,y) uma variável aleatória contínua bidimensional que só se identifica a pontos do conjunto $S = (x, y) \mid 0 < y < x \text{ e } x + y < 1$ e sabendo-se que a densidade de probabilidade é constante em S , ou seja, $f(x, y) = c$ para todo $(x, y) \in S$, tem-se que o valor da contante c e da probabilidade do evento $x < 0,5$ e $y > 0,25$, respectivamente (MARINHA, 2007).

Solução 3.9 Calculando a constante c em S :

$$f(x, y) = c, \quad (3.56)$$

temos que os intervalos

$$\begin{cases} 0 < y < x \\ x + y < 1 \end{cases}. \quad (3.57)$$

Observando as intervalos 3.57 notamos que, $y > 0$ e $x > 0$. Tendo que o limite superior para y é x , da Equação (3.57):

$$x + x < 1 \implies x < \frac{1}{2}.$$

Logo, encontramos os seguintes intervalos:

$$\begin{cases} 0 < y < x < \frac{1}{2} \\ 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) dx dy = 1 & \implies \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} c dx dy = 1 \\ c \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x \right]_0^{\frac{1}{2}} dx = 1 & \stackrel{(T.F.C)}{\implies} c \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dy \\ c \left[\frac{1}{2} y \right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 & \stackrel{(T.F.C)}{\implies} c \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 1 \implies c = 4. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Substituindo a Equação (3.59) na Equação (3.57), temos que $f(x, y) = 4$.

$$P(x < 0,5; y > 0,25) \implies P(x < \frac{1}{2}; y > \frac{1}{4}).$$

Sabemos que o intervalo é dado por:

$$\begin{cases} 0 < y < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} > y > x \end{cases}.$$

Substituindo a Equação (3.56) na Equação (3.59), obtemos

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = c & \implies f(x, y) = 4 \\
 \iint_S c \, dydx & \implies \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^x 4 \, dydx \\
 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left[4y \right]_{\frac{1}{4}}^x dx & \xRightarrow{(T.F.C)} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4x - 1) dx \\
 \left[(2x^2 - 1) \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} & \implies \frac{1}{8}.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Portanto, os valores respectivamente, são: $C = 4$ e $P(x < \frac{1}{2}; y > \frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$.

Problema 3.10 Considere duas variáveis aleatórias X e Y , que representam a proporção de alunos aprovados nas disciplinas Estatística I e II, respectivamente, cuja função densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} kx(2 - x + y) \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}. \tag{3.61}$$

Qual o valor de k ? Qual a probabilidade de a proporção de alunos aprovados em Estatística I ser inferior à dos alunos (AFONSO; NUNES, 2019)?

Solução 3.10 Calculando o valor de k , dado na Equação (3.61), obtemos

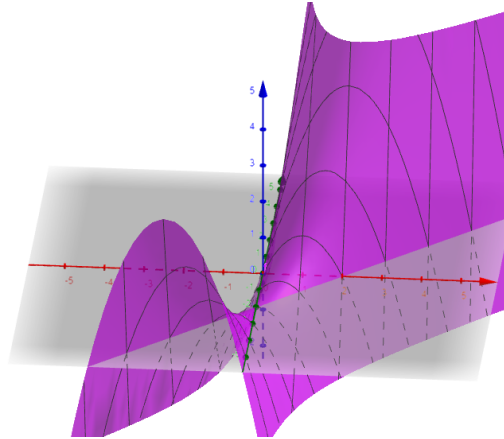
$$\begin{aligned}
 \iint_R f(x, y) \, dx dy = 1 & \implies \int_0^1 \int_0^1 kx(2 - x + y) \, dy dx = 1 \\
 k \int_0^1 \int_0^1 (2x - x^2 + xy) \, dy dx = 1 & \xRightarrow{(T.F.C)} k \int_0^1 \left[(2x - x^2 + \frac{xy^2}{2}) \right]_0^1 dx = 1 \\
 k \int_0^1 (2x - x^2 + \frac{x}{2}) \, dx = 1 & \xRightarrow{(T.F.C)} k \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = 1 \\
 k(1^2 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{4}) = 1 & \implies k = \frac{12}{11}.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Substituindo a Equação (3.62) na Equação (3.61), obtemos

$$f(x, y) = \frac{12}{11} x(2 - x + y). \tag{3.63}$$

A Figura 9 mostra o gráfico da função de densidade conjunta dada na Equação (3.63). Calculando a probabilidade de a proporção de alunos aprovados em Estatística I ser

Figura 9 – $f(x, y) = \frac{12}{11}x(2 - x + y)$.



inferior à dos alunos, da Equação (2.18):

$$\begin{aligned}
 P(x < y) &= \iint_R f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^y \frac{12}{11} x(2 - x + y) dx dy && \stackrel{(Teo.(1.3))}{\Rightarrow} P(x < y) = \frac{12}{11} \int_0^1 \int_0^y (2x - x^2 + xy) dx dy \\
 &= \frac{12}{11} \int_0^1 \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{yx^2}{2} \right]_0^y dy && \stackrel{(T.F.C)}{\Rightarrow} P(x < y) = \frac{12}{11} \int_0^1 \left(y^2 - \frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{2} \right) dy \\
 &= \frac{12}{11} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} + \frac{y^4}{2 \cdot 4} \right]_0^1 && \stackrel{(T.F.C)}{\Rightarrow} P(x < y) = \frac{12}{11} \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{24} \right]_0^1 \\
 P(x < y) &= \frac{12}{11} \left[\frac{1^3}{3} + \frac{1^4}{24} \right]_0^1 && \stackrel{(T.F.C)}{\Rightarrow} \\
 P(x < y) &\simeq 0,4090 \simeq 40,90\%.
 \end{aligned}$$

Problema 3.11 Suponha que os irmãos, Sam e Dean, trabalham atendendo casos supernaturais. Em um dia selecionado ao acaso, seja X a fração de tempo do Sam atendendo um caso de Lobisomem e Y a fração de tempo de Dean atendendo um caso de Metamorfo. Então X e Y tomam valores no intervalo $[0, 1]$. Se a função de densidade conjunta f do vetor (X, Y) é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y^2), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.64)$$

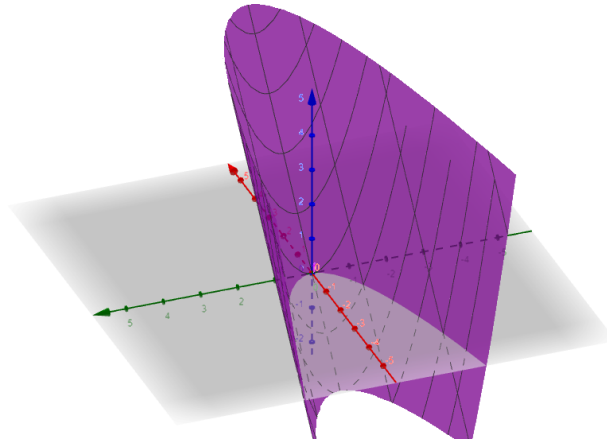
Qual o valor de c ? Qual a probabilidade de que nenhum dos irmãos esteja ocupado mais de uma quarta parte do tempo?

Solução 3.11 Usando a Equação (2.13) na Equação (3.64), obtemos

$$\begin{aligned}
 \iint_R f(x, y) dA &= 1 \\
 \int_0^1 \int_0^1 c(x + y^2) dx dy &= 1 \quad \Rightarrow \quad c \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + y^2 x \right]_0^1 dy = 1 dy \\
 c \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y^2 \right) dy &= 1 \quad \Rightarrow \quad c \left[\frac{y}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 1 \\
 c \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) &= 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{6}{5}.
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

A Figura 10 mostra o gráfico da função de densidade conjunta dada na Equação (3.65) com o valor $c = \frac{6}{5}$.

Figura 10 – $f(x, y) = \frac{6}{5}(x + y^2)$.



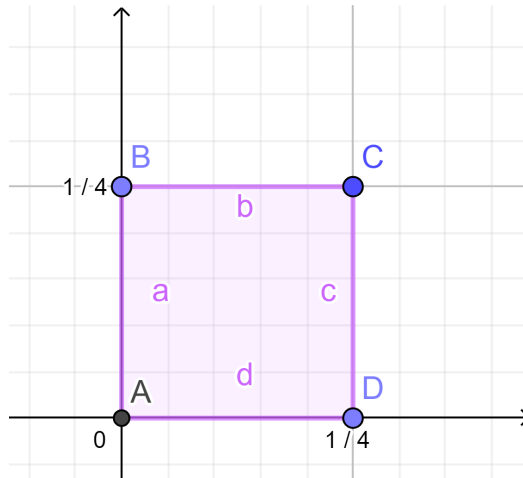
Calculando a probabilidade de que nenhum dos irmãos esteja ocupado mais de uma quarta parte do tempo:

Supondo que, x seja a fração de tempo ocupado do Sam e y a fração de tempo ocupado de Dean, assim temos que, $(0 \leq x \leq \frac{1}{4})$ e $(0 \leq y \leq \frac{1}{4})$. Logo, substituindo a Equação (3.65) na Equação (3.64) a função conjunta será dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x + y^2), & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Da Equação (2.18), temos

$$\begin{aligned}
 P(0 \leq x \leq \frac{1}{4}; 0 \leq y \leq \frac{1}{4}) &= \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{6}{5}(x + y^2) dx dy \\
 &= \frac{6}{5} \int_0^{\frac{1}{4}} \left[\frac{x^2}{2} + y^2 x \right]_0^{\frac{1}{4}} dy \\
 &= \frac{6}{5} \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{32} + \frac{y^2}{4} \right) dy \\
 &= \frac{6}{5} \left[\frac{y}{32} + \frac{y^3}{12} \right]_0^{\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{7}{640} \simeq 0,0109 \simeq 1,09\%.
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Figura 11 – Região Quadrangular da região D obtida na função conjunta acima 3.66.

Portanto, a probabilidade de que nenhum dos irmãos esteja ocupado mais de uma quarta parte do tempo é de 1,09%.

Problema 3.12 O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para as pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de dez minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de cinco minutos. Supondo que os tempos de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento (STEWART, 2013).

Solução 3.12 Suponha que, x é o tempo para comprar a entrada para o filme, y o tempo para comprar pipoca. Consideramos a função exponencial:

$$f(t, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}. \quad (3.67)$$

Temos que, a média de distribuição exponencial é determinada:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{\mu}. \quad (3.68)$$

Sabemos que:

$$\begin{cases} \mu_x = 10 \\ \mu_y = 5 \end{cases}, \quad (3.69)$$

e substituindo a Equação (3.69) na Equação (3.68), obtemos

$$\begin{cases} \lambda_x = \frac{1}{10} \\ \lambda_y = \frac{1}{5} \end{cases}. \quad (3.70)$$

Da Equação (3.68), as funções para x e y são:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{10} e^{(-\frac{1}{10}x)} \\ f(y) &= \frac{1}{5} e^{(-\frac{1}{5}y)}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Como x e y são independentes, usando a Equação (3.71) na Equação (2.21)

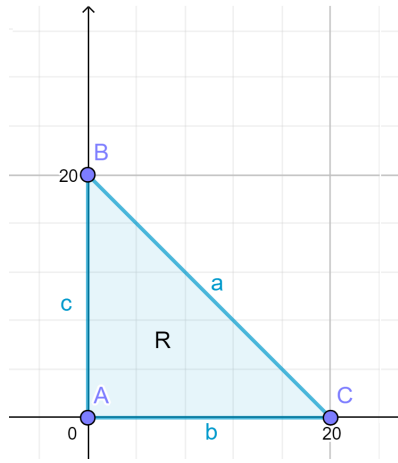
$$f(x, y) = \frac{1}{10}e^{(-\frac{1}{10}x)}\frac{1}{5}e^{(-\frac{1}{5}y)}.$$

Portanto, a função conjunto exponencial será dada:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{(-\frac{1}{10}x)}e^{(-\frac{1}{5}y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0, y < 0 \end{cases}. \quad (3.72)$$

Calculando a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento, temos que $P(x + y < 20)$. A Figura 12 mostra o gráfico da probabilidade $P(x + y < 20)$, tendo que x e y não poderá assumir valores negativos.

Figura 12 – Região triangular.



$$P(x + y < 20) = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{50}e^{(-\frac{1}{10}x)}e^{(-\frac{1}{5}y)}dydx, \quad (3.73)$$

aplicando o método de integração por substituição:

$$u = -\frac{1}{5}y \implies -5du = dy$$

$$\begin{aligned} P(x + y < 20) &= \frac{1}{50} \int_0^{20} \int_0^{20-x} e^{(-\frac{1}{10}x)}e^u(-5)dudx = -\frac{1}{10} \int_0^{20} \int_0^{20-x} e^{(-\frac{1}{10}x)}e^u dudx \\ &= -\frac{1}{10} \int_0^{20} e^{(-\frac{1}{10}x)} \left[e^{\frac{-y}{5}} \right]_0^{20-x} dx = -\frac{1}{10} \int_0^{20} e^{(-\frac{1}{10}x)} e^{(-\frac{20-x}{5})} - 1 dx \\ &= -\frac{1}{10} \int_0^{20} e^{(\frac{-x}{10})} e^{(\frac{-20+x}{5})} - e^{(\frac{-x}{10})} dx \\ &= -\frac{1}{10} \left[\int_0^{20} e^{(\frac{x}{10})} e^{-4} dx - \int_0^{20} e^{(\frac{-x}{10})} dx \right]. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Calculando $\int_0^{20} e^{\frac{x}{10}} e^{-4} dx$ dada na Equação (3.74). Aplicando o método de integração por substituição:

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{10}, \implies 10dv = dx \\ \int_0^{20} 10e^v e^{-4} dv &\stackrel{(T.F.C)}{\implies} 10e^{-4} \left[e^{\frac{x}{10}} \right]_0^{20} \implies 10(e^{-2} - e^{-4}). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Calculando $\int_0^{20} e^{\frac{-x}{10}} dx$ dada na Equação (3.74). Pelo método de integração por substituição:

$$\begin{aligned} z = -\frac{x}{10} &\implies -10dz = dx \\ -\int_0^{20} 10e^z dz &\stackrel{(T.F.C)}{\implies} 10\left[e^{\frac{-x}{10}}\right]_0^{20} \implies -10[e^{-2} - 1]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Substituindo as Equações (3.76) e (3.75) na Equação (3.74), obtemos

$$\begin{aligned} P(x + y < 20) &= -\frac{1}{10}[10(e^{-2} - e^{-4}) - (-10[e^{-2} + 1])] \\ &= -e^{-2} + e^{-4} - e^{-2} + 1 \\ &= -2e^{-2} + e^{-4} + 1 \simeq 0,7476 \simeq 74,76\% \end{aligned} \quad (3.77)$$

Portanto, a probabilidade de um expectador comprar a entrada do filme e comprar a pipoca é 74,76%.

Observação 3.5 Considerando os Problemas 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12, observamos diferentes funções contínuas para cada fenômeno ocorrido, dessa forma notamos que, a integral tem um peso fundamental na resolução dos problemas, sendo que algumas integrais eleva um nível maior de dificuldade, tendo que utilizar regra da substituição ou teorema de Fubini e outras. Nos Problemas 3.11 e 3.12 notamos que a integral definida está no nosso dia a dia, mesmo não percebendo.

3.3 Aplicações na Área Cálculo Numérico

Nesta seção, mostraremos alguns métodos para calcular a aproximação de uma integral duplas, definida por intervalo [a,b].

Problema 3.13 Calcule a integral $\int_0^3 \int_0^2 e^{(x+y)} dy dx$ utilizando a regra do trapézio com $n_x = n_y = 1$.

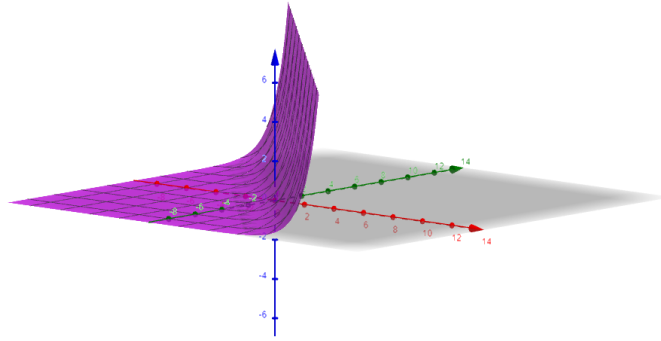
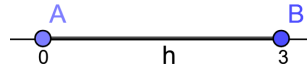
Solução 3.13 Considere $F(x) = \int_0^2 e^{(x+y)} dy$, então

$$I_t = \int_0^3 F(x) dx. \quad (3.78)$$

Usando a Equação (2.27) para calcular a integral pela regra do trapézio (Seção 2.3.2) e a distância dos subintervalos, então da Seção 2.3.2:

$$h = \frac{3 - 0}{1}.$$

A Figura 14 mostra a distância dos subintervalos com amplitude h, logo, h=3 no intervalo

Figura 13 – Região delimitada pela $F(x, y) = e^{(x+y)}$.**Figura 14** – Intervalo $[0, 3]$.

$[0, 3]$. Pela Figura (14), substituímos os subintervalos do intervalo $[a, b]$ na Equação (3.78), obtendo

$$I_t \approx \frac{3}{2} \{F(0) + F(3)\}. \quad (3.79)$$

Calculando $F(0)$ dada na Equação (3.79):

$$F(0) = \int_0^2 e^{0+y} dy,$$

onde $h = \frac{2-0}{1}$.

$$I_1 = e^0 + e^2 \implies I_1 \approx 8,3890560989 \quad (3.80)$$

Calculando $F(3)$ dada na Equação (3.79):

$$F(3) = \int_0^2 e^{3+y} dy. \quad (3.81)$$

A Figura 16 mostra a região delimitada pela $F(3)$ na Equação (3.81):

$$I_2 = e^3 + e^5$$

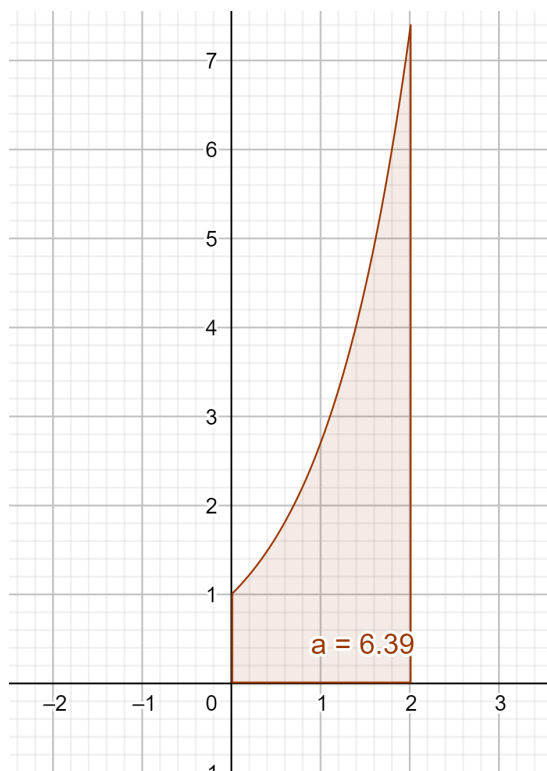
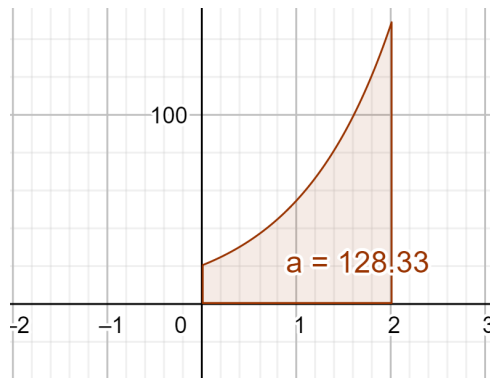
$$I_2 \approx 168.4986960257. \quad (3.82)$$

Substituindo as Equações (3.80) e (3.81) na Equação (3.79), obtemos:

$$I_t = \frac{3}{2} \{8,3890560989 + 168,4986960257$$

$$I_t \approx 265,331628187. \quad (3.83)$$

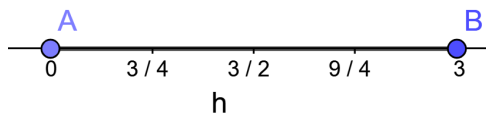
Problema 3.14 Calculando o problema 3.13 com $n_x = 4$ e $n_y = 6$.

Figura 15 – Região delimitada pela $F(0)$.**Figura 16** – Região delimitada pela $F(3)$.

Solução 3.14 Como o número de repartições em relação a x e y são maiores que 2 subintervalos, usaremos Equação (2.29) (regra do trapézio repedida) para calcular a integral:

$$h = \frac{3 - 0}{4}.$$

A Figura 17 mostra a distância dos subintervalos, no caso, $h = \frac{3}{4}$ no intervalo $[0, 3]$.

Figura 17 – Intervalos $[0, 3]$.

Temos que, $\int_0^3 \int_0^2 e^{(x+y)} dy dx \implies \int_0^3 F(x) dx$, assim substituímos os subinterva-

los da Figura 17 na Equação (3.78), obtemos

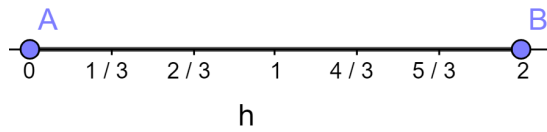
$$I_T \approx \frac{3}{8} \{F(0) + 2[F(\frac{3}{4}) + F(\frac{3}{2}) + F(\frac{9}{4})] + F(3)\}. \quad (3.84)$$

Calculando $F(0)$ dada na Equação (3.93):

$$F(0) = \int_0^2 e^{0+y} dy = I_1,$$

onde $h = \frac{2-0}{6}$. Como temos o intervalo da integral sendo definida por constantes, dessa forma o intervalo não sofrerá mudança, assim $h = \frac{1}{3}$ terá a mesma medida h em todas as substituições de x . A Figura 18 mostra os seis subintervalos $[0,2]$.

Figura 18 – Intervalo $[0,2]$ dividido em 6 subintervalos.



$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{6} \{e^0 + 2[e^{(\frac{1}{3})}] + e^{(\frac{2}{3})} + e^{(1)} + e^{(\frac{4}{3})} + e^{(\frac{5}{3})}\} + e^{(2)} \\ I_1 &\approx 6,4481047631. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Calculando $F(\frac{3}{4})$ dada na Equação (3.93):

$$\begin{aligned} F(\frac{3}{4}) &= \int_0^2 e^{(\frac{3}{4}+y)} dy = I_2 \\ I_2 &= \frac{1}{6} \{e^{(\frac{3}{4}+0)} + 2[e^{(\frac{3}{4}+\frac{1}{3})}] + e^{(\frac{3}{4}+\frac{2}{3})} + e^{(\frac{3}{4}+1)} + e^{(\frac{3}{4}+\frac{4}{3})} + e^{(\frac{3}{4}+\frac{5}{3})}\} + e^{(\frac{3}{4}+2)} \\ I_2 &= \frac{1}{6} \{e^{(\frac{3}{4})} + 2[e^{(\frac{13}{12})} + e^{(\frac{17}{12})} + e^{(\frac{7}{4})} + e^{(\frac{25}{12})} + e^{(\frac{29}{12})}] + e^{(\frac{11}{4})}\} \\ I_2 &\approx 13,6506378905. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Calculando $F(\frac{3}{2})$ dada na Equação (3.93):

$$\begin{aligned} F(\frac{3}{2}) &= \int_0^2 e^{(\frac{3}{2}+y)} dy = I_3 \\ I_3 &= \frac{1}{6} \{e^{(\frac{3}{2}+0)} + 2[e^{(\frac{3}{2}+\frac{1}{3})}] + e^{(\frac{3}{2}+\frac{2}{3})} + e^{(\frac{3}{2}+1)} + e^{(\frac{3}{2}+\frac{4}{3})} + e^{(\frac{3}{2}+\frac{5}{3})}\} + e^{(\frac{3}{2}+2)} \\ I_3 &= \frac{1}{6} \{e^{\frac{3}{2}} + 2[e^{\frac{11}{6}} + e^{\frac{13}{6}} + e^{\frac{5}{2}} + e^{\frac{17}{6}} + e^{\frac{19}{6}}] + e^{\frac{7}{2}}\} \\ I_3 &\approx 28,8984006411. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Calculando $F(\frac{9}{4})$ dada na Equação (3.93):

$$\begin{aligned} F(\frac{9}{4}) &= \int_0^2 e^{(\frac{9}{4}+y)} dy = I_4 \\ I_4 &= \frac{1}{6} \{e^{(\frac{9}{4}+0)} + 2[e^{(\frac{9}{4}+\frac{1}{3})}] + e^{(\frac{9}{4}+\frac{2}{3})} + e^{(\frac{9}{4}+1)} + e^{(\frac{9}{4}+\frac{4}{3})} + e^{(\frac{9}{4}+\frac{5}{3})}\} + e^{(\frac{9}{4}+2)} \\ I_4 &= \frac{1}{6} \{e^{\frac{9}{4}} + 2[e^{\frac{31}{12}} + e^{\frac{35}{12}} + e^{\frac{13}{4}} + e^{\frac{43}{12}} + e^{\frac{47}{12}}] + e^{\frac{17}{4}}\} \\ I_4 &\approx 61,1779146372. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Calculando $F(3)$ dada na Equação (3.93):

$$\begin{aligned}
 F(3) &= \int_0^2 e^{(3+y)} dy = I_5 \\
 I_5 &= \frac{1}{6} \{e^{(3+0)} + 2[e^{(3+\frac{1}{3})} + e^{(3+\frac{2}{3})} + e^{(3+1)} + e^{(3+\frac{4}{3})} + e^{(3+\frac{5}{3})}] + e^{(\frac{3}{2})}\} \\
 I_5 &= \frac{1}{6} \{e^3 + 2[e^{\frac{10}{3}} + e^{\frac{11}{3}} + e^4 + e^{\frac{13}{3}} + e^{\frac{14}{3}}] + e^5\} \\
 I_5 &\approx 129,5136463033.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Substituindo as Equações (3.85), (3.86), (3.87), (3.88) e (3.89) na Equação (3.84). Logo,

$$I_T \approx 128,7808715265. \tag{3.90}$$

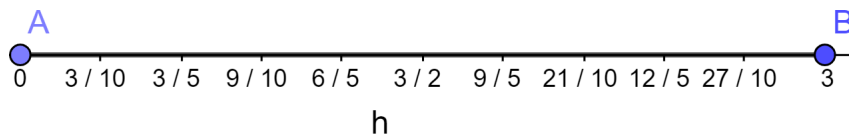
Problema 3.15 Resolvendo o Problema 3.13 com $n_x = 10$ e $n_y = 12$.

Solução 3.15 Desenvolvendo o problema de forma análoga com o problema anterior temos que:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^3 F(x) dx \\
 h &= \frac{3-0}{10}.
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

A Figura 19 mostra os dez subintervalos do intervalo $[0,2]$.

Figura 19 – Intervalo $[0,3]$ dividido em 10 subintervalos.



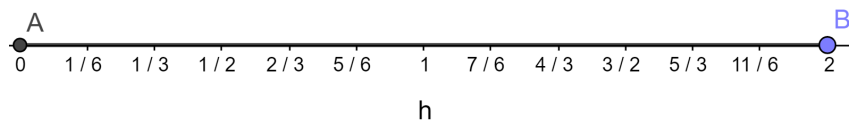
$$I_t = \frac{3}{20} \{F(0) + 2[F(\frac{3}{10}) + \dots + F(\frac{27}{10})] + F(3)\}. \tag{3.92}$$

Utilizando a regra do trapézio em relação a y :

$$h = \frac{2-0}{12} \tag{3.93}$$

A Figura 20 mostra os doze subintervalos do intervalo $[0,2]$.

Figura 20 – Intervalo $[0,2]$ dividido em 12 subintervalos.



Calculando $F(0)$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^2 e^{0+y} dy = I_1 \\ I_1 &= \frac{1}{12} \{e^0 + 2[e^{(\frac{1}{6})} + e^{(\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{11}{6})}] + e^2\} \\ I_1 &\approx 6,4038387382. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Calculando $F(\frac{3}{10})$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^2 e^{(\frac{3}{10})+y} dy = I_2 \\ I_2 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{3}{10}+0)} + 2[e^{(\frac{3}{10}+\frac{1}{6})} + e^{(\frac{3}{10}+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{3}{10}+\frac{11}{6})}] + e^{\frac{3}{10}+2}\} \\ I_2 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{3}{10})} + 2[e^{(\frac{7}{15})} + e^{(\frac{19}{30})} + \dots + e^{(\frac{32}{15})}] + e^{(\frac{23}{10})}\} \\ I_2 &\approx 8,6442781230. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Calculando $F(\frac{3}{5})$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned} F(\frac{3}{5}) &= \int_0^2 e^{(\frac{3}{5})+y} dy = I_3 \\ I_3 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{3}{5}+0)} + 2[e^{(\frac{3}{5}+\frac{1}{6})} + e^{(\frac{3}{5}+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{3}{5}+\frac{11}{6})}] + e^{\frac{3}{5}+2}\} \\ I_3 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{3}{5})} + 2[e^{(\frac{23}{30})} + e^{(\frac{14}{15})} + \dots + e^{(\frac{73}{30})}] + e^{(\frac{13}{5})}\} \\ I_3 &\approx 11,6685549595. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Calculando $F(\frac{9}{10})$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned} F(\frac{9}{10}) &= \int_0^2 e^{\frac{9}{10}+y} dy = I_4 \\ I_4 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{9}{10}+0)} + 2[e^{(\frac{9}{10}+\frac{1}{6})} + e^{(\frac{9}{10}+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{9}{10}+\frac{11}{6})}] + e^{(\frac{9}{10}+2)}\} \\ I_4 &= \frac{1}{12} \{e^{\frac{9}{10}} + 2[e^{\frac{16}{15}} + e^{\frac{37}{30}} + \dots + e^{\frac{41}{15}}] + e^{\frac{29}{10}}\} \\ I_4 &\approx 15,7509016838. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Calculando $F(\frac{6}{5})$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned} F(\frac{6}{5}) &= \int_0^2 e^{\frac{6}{5}+y} dy = I_5 \\ I_5 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{6}{5}+0)} + 2[e^{(\frac{6}{5}+\frac{1}{6})} + e^{(\frac{6}{5}+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{6}{5}+\frac{11}{6})}] + e^{(\frac{6}{5}+2)}\} \\ I_5 &= \frac{1}{12} \{e^{\frac{6}{5}} + 2[e^{\frac{41}{30}} + e^{\frac{23}{15}} + \dots + e^{\frac{91}{30}}] + e^{\frac{16}{5}}\} \\ I_5 &\approx 21,2614933651. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Calculando $F(\frac{3}{2})$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned}
 F(\frac{3}{2}) &= \int_0^2 e^{\frac{3}{2}+y} dy = I_6 \\
 I_6 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{3}{2}+0)} + 2[e^{(\frac{3}{2}+\frac{1}{6})} + e^{(\frac{3}{2}+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{3}{2}+\frac{11}{6})}] + e^{(\frac{3}{2}+2)}\} \\
 I_6 &= \frac{1}{12} \{e^{\frac{3}{2}} + 2[e^{\frac{5}{3}} + e^{\frac{11}{6}} + \dots + e^{\frac{10}{3}}] + e^{\frac{7}{2}}\} \\
 I_6 &\approx 28,7000140811.
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Calculando $F(\frac{9}{5})$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned}
 F(\frac{9}{5}) &= \int_0^2 e^{\frac{9}{5}+y} dy = I_7 \\
 I_7 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{9}{5}+0)} + 2[e^{(\frac{9}{5}+\frac{1}{6})} + e^{(\frac{9}{5}+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{9}{5}+\frac{11}{6})}] + e^{(\frac{9}{5}+2)}\} \\
 I_7 &= \frac{1}{12} \{e^{\frac{9}{5}} + 2[e^{\frac{59}{30}} + e^{\frac{32}{15}} + \dots + e^{\frac{109}{30}}] + e^{\frac{19}{5}}\} \\
 I_7 &\approx 38,7409667850.
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

Calculando $F(\frac{21}{10})$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned}
 F(\frac{21}{10}) &= \int_0^2 e^{\frac{21}{10}+y} dy = I_8 \\
 I_8 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{21}{10}+0)} + 2[e^{(\frac{21}{10}+\frac{1}{6})} + e^{(\frac{21}{10}+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{21}{10}+\frac{11}{6})}] + e^{(\frac{21}{10}+2)}\} \\
 I_8 &= \frac{1}{12} \{e^{\frac{21}{10}} + 2[e^{\frac{34}{15}} + e^{\frac{73}{30}} + \dots + e^{\frac{59}{15}}] + e^{\frac{41}{10}}\} \\
 I_8 &\approx 52,2948352287.
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Calculando $F(\frac{12}{5})$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned}
 F(\frac{12}{5}) &= \int_0^2 e^{\frac{12}{5}+y} dy = I_6 \\
 I_9 &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{12}{5}+0)} + 2[e^{(\frac{12}{5}+\frac{1}{6})} + e^{(\frac{12}{5}+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{12}{5}+\frac{11}{6})}] + e^{(\frac{12}{5}+2)}\} \\
 I_9 &= \frac{1}{12} \{e^{\frac{12}{5}} + 2[e^{\frac{77}{20}} + e^{\frac{41}{15}} + \dots + e^{\frac{127}{30}}] + e^{\frac{22}{5}}\} \\
 I_9 &\approx 70,5906439242.
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Calculando $F(\frac{27}{10})$ dada na Equação (3.92)

$$\begin{aligned}
 F(\frac{27}{10}) &= \int_0^2 e^{\frac{27}{10}+y} dy = I_{10} \\
 I_{10} &= \frac{1}{12} \{e^{(\frac{27}{10}+0)} + 2[e^{(\frac{27}{10}+\frac{1}{6})} + e^{(\frac{27}{10}+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(\frac{27}{10}+\frac{11}{6})}] + e^{(\frac{27}{10}+2)}\} \\
 I_{10} &= \frac{1}{12} \{e^{\frac{27}{10}} + 2[e^{\frac{43}{15}} + e^{\frac{91}{30}} + \dots + e^{\frac{68}{15}}] + e^{\frac{47}{10}}\} \\
 I_{10} &\approx 95,2874024335.
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

Calculando $F(3)$ dada na Equação (3.92):

$$\begin{aligned}
 F(3) &= \int_0^2 e^{3+y} dy = I_{11} \\
 I_{11} &= \frac{1}{12} \{e^{(3+0)} + 2[e^{(3+\frac{1}{6})} + e^{(3+\frac{1}{3})} + \dots + e^{(3+\frac{11}{6})}] + e^{(3+2)}\} \\
 I_{11} &= \frac{1}{12} \{e^3 + 2[e^{\frac{19}{6}} + e^{\frac{10}{3}} + \dots + e^{\frac{29}{6}}] + e^5\} \\
 I_{11} &\approx 128,6245394259.
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Sustituindo as Equações (3.94), (3.95), (3.96), (3.97), (3.98), (3.99), (3.100), (3.101), (3.102), (3.103), (3.104) na Equação (3.92), obtemos

$$I_T = 122,358772948. \tag{3.105}$$

Determinando a integral dada na Equação (3.105) analiticamente:

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \int_0^2 e^{x+y} dy dx &\implies \int_0^3 \int_0^2 e^x e^y dy dx \\
 \int_0^3 e^x dx \int_0^2 e^y dy &\implies \int_0^3 e^x [e^2 - e^0] dx \\
 [e^3 - 1][e^2 - 1] &\implies I \approx 121,9385661.
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Observação 3.6 Todos os cálculos foram desenvolvidos manualmente, considerando dez algarismo após a vírgula. Dessa forma, analisando os resultados obtidos nas Equações (3.83), (3.90) e (3.105) com a Equação (3.106), observamos que, quanto mais repartições no intervalo $[a,b]$, melhor será minha aproximação.

Problema 3.16 Utilizando a Primeira Regra de Simpson, calcule $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x+y) dy dx$ com $N_x = 4, N_y = 4$.

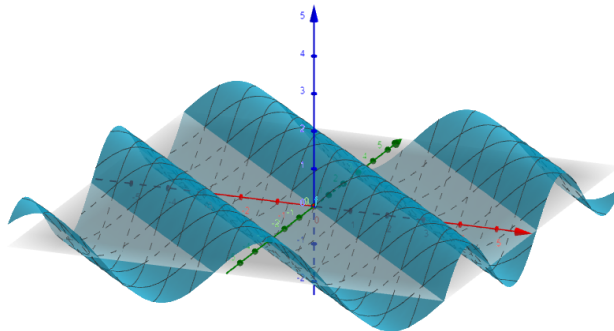


Figura 21 – $f(x,y)=\text{sen}(x+y)$.

Solução 3.16 Considerando $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy$, então temos que:

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x+y) dy \implies I_t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x) dx.$$

Utilizando Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson (2.31) em x. A Figura 21 mostra a superfície da função $f(x,y)$ definida no integrando de I.

Tendo $N_x = 4$ como o número de subintervalos, logo a distância h é dada por:

$$h = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} \implies h = \frac{\pi}{8} \quad (3.107)$$

A Figura 22 mostra os quatros subintervalos do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

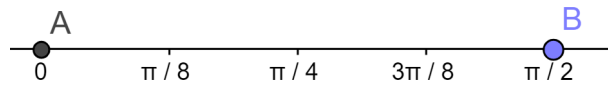


Figura 22 – Subintervalos em relação a x.

$$I_t = \frac{h_x}{3} \{f(0) + 4(f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{3\pi}{8})) + 2f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{2})\}. \quad (3.108)$$

Sustituindo a Equação (3.107) na Equação (3.108)

$$I_t = \frac{\pi}{24} \{f(0) + 4(f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{3\pi}{8})) + 2f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{2})\}. \quad (3.109)$$

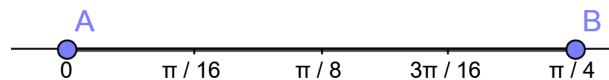
Utilizando a Primeira Regra de Simpson em relação a y:

O comprimento dos subintervalos é dado por

$$h = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} \implies h = \frac{\pi}{16}.$$

A Figura 23 mostra os quatros subintervalos do intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Figura 23 – Subintervalo em relação a x.

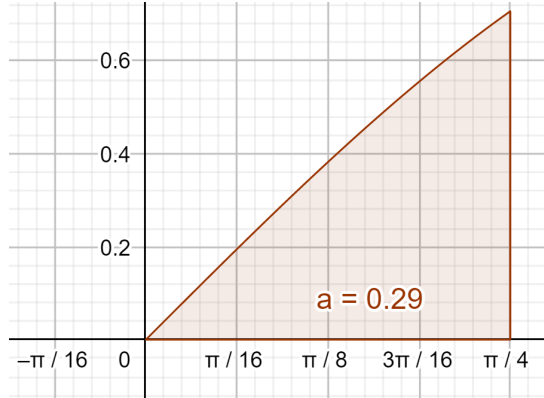


h

Calculando $f(0)$ dada na Equação 3.109:

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(y) dy.$$

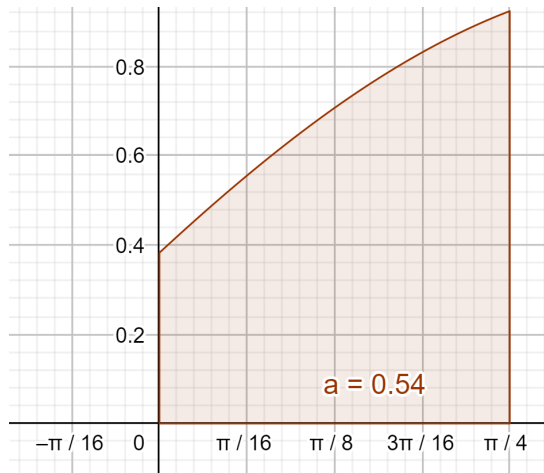
A Figura 24 mostra a região delimitada $f(0)$ dada na Equação (3.109), definida no inte-

**Figura 24** – Subintervalos $f(0)$.

grando de $f(0)$ dada na Equação (3.110) e os quatros subintervalos do intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\begin{aligned}
 F(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(0 + y) dy = I_1 \\
 I_1 &= \frac{\pi}{3} \left\{ \text{sen}0 + 4\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right) + 2\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \\
 I_1 &= 0,2928956485.
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Calculando $f(\frac{\pi}{8})$ dada na Equação (3.109):

**Figura 25** – Subintervalos $f(\frac{\pi}{8})$.

A Figura 25 mostra a região delimitada $f(\frac{\pi}{8})$ dada na Equação (3.109) definida no integrando de I_2 e os quatros subintervalos do intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{8} + y\right) dy = I_2 \\
 I_2 &= \frac{\pi}{48} \left\{ \text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{16}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. + 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\
 I_2 &= 0,5409263699.
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

Calculando $f(\frac{\pi}{4})$ dada na Equação (3.109):

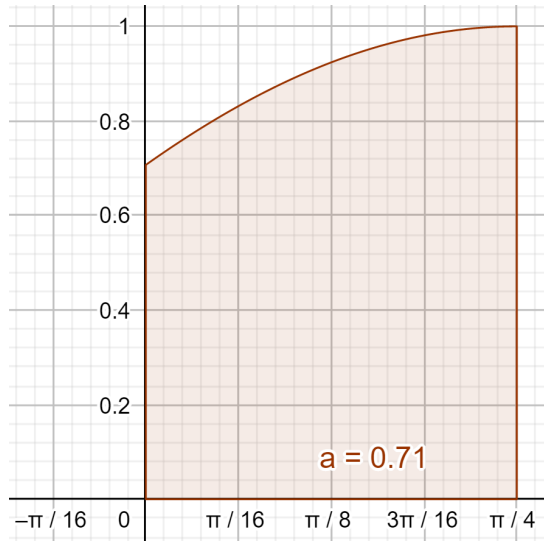


Figura 26 – Subintervalos $f(\frac{\pi}{4})$.

A Figura 26 mostra a região delimitada $f(\frac{\pi}{4})$ dada na Equação (3.109) definida no integrando de I_3 e os quatros subintervalos do intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, obtemos

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + y\right) dy = I_3 \\
 I_3 &= \frac{\pi}{48} \left\{ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{16}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. + 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\
 I_3 &= 0,7069293237.
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Calculando $f(\frac{3\pi}{8})$ dada na Equação (3.109):

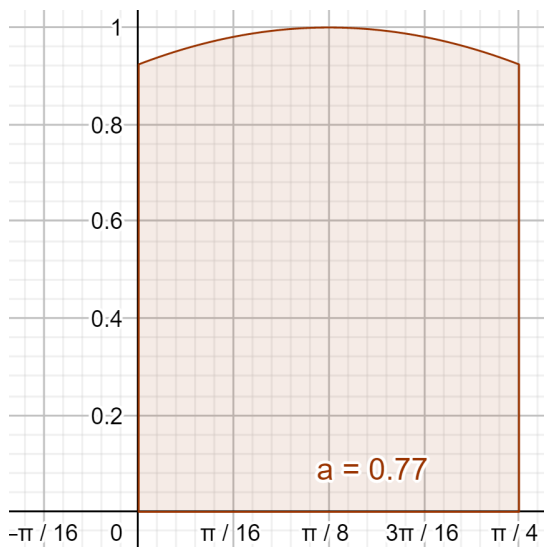


Figura 27 – Subintervalos $f(\frac{3\pi}{8})$.

A Figura 27 mostra a região delimitada pela $f(\frac{3\pi}{8})$ dada na Equação (3.109) definida no

integrando de I_4 e os quatros subintervalos do intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, obtemos

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\left(\frac{3\pi}{8} + y\right) dy = I_4 \\
 I_4 &= \frac{\pi}{48} \left\{ \text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 4\left(\text{sen}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{16}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{16}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. + 2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\
 I_4 &= 0,7653086963.
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

Calculando $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ dada na Equação (3.109):

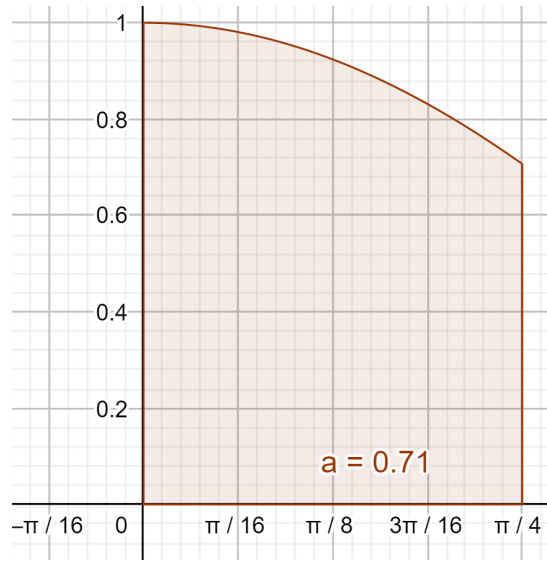


Figura 28 – Subintervalos $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A Figura 26 mostra a região delimitada pela $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ dada na Equação (3.109) definida no integrando de I_5 e os quatros subintervalos do intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, obtemos

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) dy = I_5 \\
 I_5 &= \frac{\pi}{48} \left\{ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{16}\right)\right) + 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\
 I_5 &= f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0,7071767574.
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

Substituindo as Equações (3.110), (3.111), (3.112), (3.113) e (3.114) na Equação (3.109), obtemos

$$I = 1,00014288161. \tag{3.115}$$

Desenvolvendo o problema acima analiticamente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x + y) dy dx. \tag{3.116}$$

Utilizando o método por substituição teremos que:

$$\begin{aligned} u = x + y &\implies du = dy \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(u) du dx &\implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos(x+y) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos(x) \right] dx &\implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx. \end{aligned}$$

Aplicando novamente a método por substituição:

$$\begin{aligned} v = x + \frac{\pi}{4} &\implies dv = dx \\ \left[-\operatorname{sen}(x+y) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\operatorname{sen}(x) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} &\implies I = 1. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Observação 3.7 Todos os cálculos acima foram desenvolvidos manualmente, considerando dez Algarismos após a vírgula. Observando o resultado na Equação (3.115) com o da Equação (3.117), observamos que o erro de integração numérica é muito pequeno, ou seja, se meu intervalo $[a,b]$ tivesse mais subintervalos, melhor seria minha aproximação.

Problema 3.17 Calcule a integral $I = \int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx$ utilizando a Segunda Regra de Simpson, para $m_x = m_y = 3$.

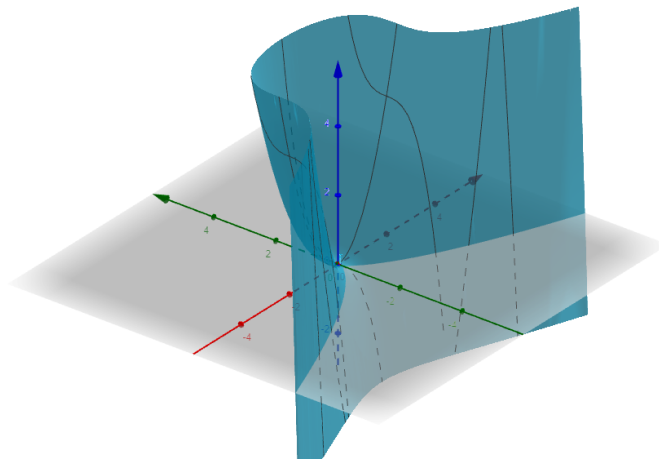


Figura 29 – $f(x,y) = (x^2 + y^3)$.

Solução 3.17 Utilizando a Equação (2.32) para calcular a Segunda Regra Simpson em relação a x , a figura 29 mostra a superfície da função $f(x,y)$ definida no integrando de I . Dessa forma temos que, os subintervalo em relação á x será dada por:

$$h = \frac{1-0}{3} \implies h = \frac{1}{3}.$$

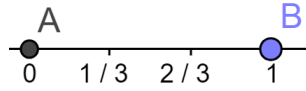


Figura 30 – Intervalo $[a,b]$ subdividido em $h = \frac{1}{3}$.

A Figura 30 mostra os três subintervalos do intervalo $[0,1]$:

$$F(x) = \int_x^{2x} x^2 + y^3 dy \implies \int_0^1 F(x) dx$$

$$I_t = \frac{3}{8} \frac{1}{3} \{F(0) + 3F(\frac{1}{3}) + 3F(\frac{2}{3}) + F(1)\}. \quad (3.118)$$

Como temos uma integral delimitada por uma função, logo o intervalo $[a,b]$ assumirá valores diferentes e como consequência a distância dos subintervalos terá valores distintos.

Calculando $F(0)$ dada na Equação (3.118):

$$F(0) = \int_0^0 0^2 + y^3 dy \implies I_0 = 0. \quad (3.119)$$

Calculando $F(\frac{1}{3})$ dada na Equação (3.118):

$$h = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{3} \implies h = \frac{1}{9}.$$

A Figura 31 mostra os três subintervalos do intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$:

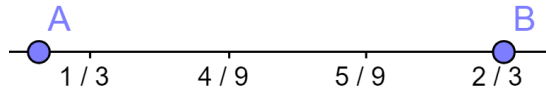


Figura 31 – Intervalo $[a,b]$ subdividido em $h = \frac{1}{9}$.

$$F(\frac{1}{3}) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (\frac{1}{3})^2 + y^3 dy$$

$$I_1 = \frac{3}{8} \frac{1}{9} \{ \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + 3[\frac{1}{9} + \frac{64}{729}] + 3[\frac{1}{9} + \frac{125}{729}] + \frac{1}{9} + \frac{8}{27} \}$$

$$I_1 \approx 0,0555555556. \quad (3.120)$$

Calculando $F(\frac{2}{3})$ dada na Equação (3.118):

$$h = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{3} \implies h = \frac{2}{9}.$$

A Figura 32 mostra os três subintervalos do intervalo $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$:

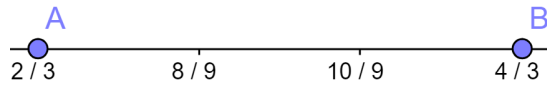


Figura 32 – Intervalo $[a,b]$ subdividido em $h = \frac{2}{9}$.

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{2}{3}\right) &= \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^3 dy \\
 I_2 &= \frac{3}{8} \frac{2}{9} \left\{ \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + 3\left[\frac{4}{9} + \frac{512}{729}\right] + 3\left[\frac{4}{9} + \frac{10^3}{9^3}\right] + \frac{4}{9} + \frac{64}{27} \right\} \\
 I_2 &\approx 1,037037037.
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Calculando $F(1)$ dada na Equação (3.118):

$$h = \frac{2-1}{3} \implies h = \frac{1}{3}.$$

A Figura 33 mostra os três subintervalos no intervalo $[1,2]$:

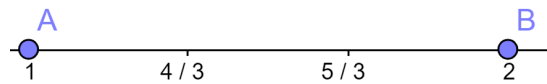


Figura 33 – Intervalo $[a,b]$ subdividido em $h = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
 F(1) &= \int_1^2 (1)^2 + y^3 dy \\
 I_3 &= \frac{3}{8} \frac{1}{3} \left\{ 2 + 3\left[1 + \frac{64}{27}\right] + 3\left[1 + \frac{125}{27}\right] + 9 + \right\} \\
 I_3 &\approx 4,2500000000.
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

Substituindo as Equações (3.119), (3.120), (3.121), (3.122) na Equação (3.124), obtemos

$$I_t = 0,9409722222. \tag{3.123}$$

Problema 3.18 Desenvolvendo de forma análogo o mesmo Problema 3.17 com $m_x = 6$ e $m_y = 9$.

Solução 3.18 Temos que

$$F(x) = \int_x^{2x} x^2 + y^3 dy \implies \int_0^1 F(x) dx. \tag{3.124}$$

Usando a Equação (2.33), teremos que a amplitude h será dada por:

$$h = \frac{1-0}{6}.$$

A Figura 34 mostra os seis subintervalos do intervalo $[0,1]$:

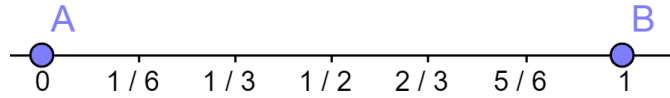


Figura 34 – Intervalo[a,b] subdividido em $h = \frac{1}{6}$.

$$I_T = \frac{3}{8} \frac{1}{6} \{F(0) + 3\frac{1}{6} + 3F(\frac{1}{3}) + 2F(\frac{1}{2}) + 3F(\frac{2}{3}) + 3F(\frac{5}{6}) + F(1)\} \quad (3.125)$$

Calculando $F(0)$ dada na Equação (3.125):

$$\int_0^0 0^2 + y^3 dy \implies I_0 = 0. \quad (3.126)$$

Calculando $F(\frac{1}{6})$ dada na Equação (3.125):

$$F(\frac{1}{6}) = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{36} + y^3 dy = I_1$$

$$h = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{9} \implies h = \frac{1}{54}.$$

A Figura 35 mostra os nove subintervalos do intervalo $[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$:

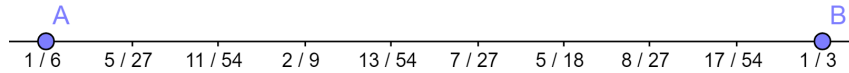


Figura 35 – Intervalo[a,b] subdividido em $h = \frac{1}{54}$.

$$I_1 = \frac{3}{8} \frac{1}{54} \{ \frac{7}{216} + 3[\frac{1}{36} + (\frac{5}{27})^3] + 3[\frac{1}{36} + (\frac{11}{54})^3] + 2[\frac{1}{36} + (\frac{2}{9})^3] + 3[\frac{1}{36} + (\frac{13}{54})^3] \\ + 3[\frac{1}{36} + (\frac{7}{27})^3] + 2[\frac{1}{36} + (\frac{5}{8})^3] + 3[\frac{1}{36} + (\frac{8}{27})^3] + 3[\frac{1}{36} + (\frac{17}{54})^3] + \frac{7}{108} \}$$

$$I_1 \approx 0,0075231481. \quad (3.127)$$

Calculando $F(\frac{1}{3})$ dada na Equação (3.125):

$$F(\frac{1}{3}) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{9} + y^3 dy = I_2$$

$$h = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{9} \implies h = \frac{1}{27}.$$

A Figura 36 mostra os nove subintervalos do intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$:

$$I_2 = \frac{3}{8} \frac{1}{27} \{ \frac{4}{27} + 3[\frac{1}{9} + (\frac{10}{27})^3] + 3[\frac{1}{9} + (\frac{11}{27})^3] + 2[\frac{1}{9} + (\frac{4}{9})^3] + 3[\frac{1}{9} + (\frac{13}{27})^3] \\ + 3[\frac{1}{9} + (\frac{14}{27})^3] + 2[\frac{1}{9} + (\frac{5}{9})^3] + 3[\frac{1}{9} + (\frac{16}{27})^3] + 3[\frac{1}{9} + (\frac{17}{27})^3] + \frac{11}{27} \}$$

$$I_2 \approx 0,0842097241. \quad (3.128)$$

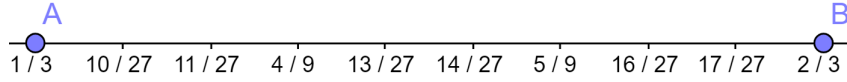


Figura 36 – Intervalo $[a,b]$ subdividido em $h = \frac{1}{27}$.

Calculando $F(\frac{1}{2})$ dada na Equação (3.125):

$$F(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4} + y^3 dy = I_3$$

$$h = \frac{1 - \frac{1}{2}}{9} \implies h = \frac{1}{18}.$$

A Figura 37 mostra os nove subintervalos do intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$:

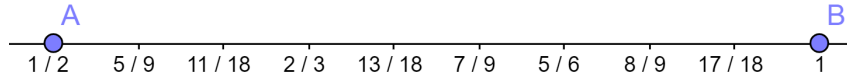


Figura 37 – Intervalo $[a,b]$ subdividido em $h = \frac{1}{18}$.

$$I_3 = \frac{3}{8} \frac{1}{18} \left\{ \frac{3}{8} + 3\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{9}\right)^3\right] + 3\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{11}{18}\right)^3\right] + 2\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] + 3\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{13}{18}\right)^3\right] \right.$$

$$\left. + 3\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{7}{9}\right)^3\right] + 2\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{6}\right)^3\right] + 3\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{8}{9}\right)^3\right] + 3\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{17}{18}\right)^3\right] + \frac{5}{4} \right\}$$

$$I_3 \approx 0,3593750000. \quad (3.129)$$

Calculando $F(\frac{2}{3})$ dada na Equação (3.125):

$$F(\frac{2}{3}) = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \frac{4}{9} + y^3 dy = I_4$$

$$h = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{9} \implies h = \frac{2}{27}.$$

A Figura 38 mostra os nove subintervalos do intervalo $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$:

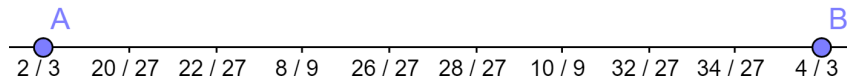


Figura 38 – Intervalo $[a,b]$ subdividido em $h = \frac{2}{27}$.

$$I_4 = \frac{3}{8} \frac{2}{27} \left\{ \frac{20}{27} + 3\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{20}{27}\right)^3\right] + 3\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{22}{27}\right)^3\right] + 2\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^3\right] + 3\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{26}{27}\right)^3\right] \right.$$

$$\left. + 3\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{28}{27}\right)^3\right] + 2\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{10}{9}\right)^3\right] + 3\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{32}{27}\right)^3\right] + 3\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{34}{27}\right)^3\right] + \frac{76}{27} \right\}$$

$$I_4 \approx 1,0370370370. \quad (3.130)$$

Calculando $F(\frac{5}{6})$ dada na Equação (3.125):

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6}\right) &= \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{3}} \frac{25}{36} + y^3 dy = I_5 \\ h &= \frac{\frac{5}{3} - \frac{5}{6}}{9} \implies h = \frac{5}{54}. \end{aligned}$$

A Figura 39 mostra os nove subintervalos do intervalo $[\frac{5}{6}, \frac{5}{3}]$.

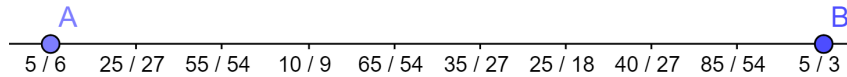


Figura 39 – Intervalo $[a,b]$ subdividido em $h = \frac{5}{54}$.

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{3}{8} \frac{5}{54} \left\{ \frac{275}{216} + 3\left[\frac{25}{36} + \left(\frac{25}{27}\right)^3\right] + 3\left[\frac{25}{36} + \left(\frac{55}{54}\right)^3\right] + 2\left[\frac{25}{36} + \left(\frac{10}{9}\right)^3\right] + 3\left[\frac{25}{36} + \left(\frac{65}{54}\right)^3\right] \right. \\ &\quad \left. + 3\left[\frac{25}{36} + \left(\frac{35}{27}\right)^3\right] + 2\left[\frac{25}{36} + \left(\frac{25}{18}\right)^3\right] + 3\left[\frac{25}{36} + \left(\frac{40}{27}\right)^3\right] + 3\left[\frac{25}{36} + \left(\frac{85}{54}\right)^3\right] + \frac{25}{36} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \right\} \\ I_5 &\approx 2,3871527778. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Calculando $F(1)$ dada na Equação (3.125):

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_1^2 1 + y^3 dy = I_6 \\ h &= \frac{2-1}{9} \implies h = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

A Figura 40 mostra os nove subintervalos do intervalo $[1, 2]$:

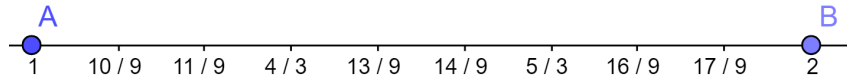


Figura 40 – Intervalo $[a,b]$ subdividido em $h = \frac{1}{9}$.

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{3}{8} \frac{1}{9} \left\{ 2 + 3\left[1 + \left(\frac{10}{9}\right)^3\right] + 3\left[1 + \left(\frac{11}{9}\right)^3\right] + 2\left[1 + \left(\frac{4}{3}\right)^3\right] + 3\left[1 + \left(\frac{13}{9}\right)^3\right] \right. \\ &\quad \left. + 3\left[1 + \left(\frac{14}{9}\right)^3\right] + 2\left[1 + \left(\frac{5}{3}\right)^3\right] + 3\left[1 + \left(\frac{16}{9}\right)^3\right] + 3\left[1 + \left(\frac{17}{9}\right)^3\right] + 9 \right\} \\ I_6 &\approx 4,7500000000. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Substituindo as Equações (3.126), (3.127), (3.128), (3.129), (3.130), (3.131) e 3.132) na Equação (3.125), obtemos:

$$I_t = 1,0010323788. \quad (3.133)$$

Desenvolvendo analiticamente $\int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx & \stackrel{(T.F.C)}{\Longrightarrow} \int_0^1 \left[yx^2 + \frac{y^4}{4} \right]_x^{2x} dx \\
 \int_0^1 \left[x^3 + \frac{15x^4}{4} \right] dx & \stackrel{(Teo. (1.4))}{\Longrightarrow} \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 \frac{15x^4}{4} dx \\
 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{15x^5}{20} \right]_0^1 & \Longrightarrow I = 1.
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

4 Resultados Obtidos e Conclusão

Entender a importância da teoria de integral múltipla como ferramenta na resolução de problemas nas áreas de conhecimento, e interpretar a modelagem matemática que envolvem intervalos, sólidos e superfícies, e que são casos mais gerais do que na teoria de revolução de uma região plana ou de uma curva plana em torno de uma reta ou um eixo coordenado.

Utilizar o método mais geral para mudança de variáveis em integrais múltiplas, mostrou que está relacionado com a transformação de coordenadas (correspondência) de um plano xy para outro plano uv , definido no *Jacobiano* de x e y em relação a u e v ; e sua extensão de x, y, z em relação a u, v, ω . Sendo assim, usar o método integração por substituição para facilitar a resolução dos problemas propostos.

No processo desenvolvimento do cálculo numérico, pude observar que, quanto maior o número de repartições, ou seja, quanto maior o número de subintervalos num intervalo $[a,b]$, melhor será os resultados obtidos, assim o resultante aproxima-se do valor exato da integral. Além que, compreender a teoria do Cálculo numérico como um método de resolução de integral e utilizando os métodos necessários para melhor a aproximação.

O cálculo integral teve grandes contribuições para ciências, como uma ferramenta matemática, para implementar novas formas de transposições de rios, de barragens mais seguras e outros.

No decorrer do desenvolvimento do trabalho observamos que o cálculo integral está no nosso dia a dia, por exemplo, em um copo de água, em um parque de diversão, ao dirigir um carro ou moto e outros. Logo, a teoria de integral proporciona o conhecimento para desenvolver os cálculos de área, volume, probabilidade, centro de massa e outros. Outra observação foi para um prédio não inclinar para um lado, temos que calcular o seu centro de massa, e a partir da definição de integral e das definições da física, o centro de massa pode ser calculado.

O software GeoGebra foi importante, pois auxiliou em obter os gráficos, que facilitam as análises nas resoluções de problemas.

Referências

- AFONSO, A.; NUNES, C. *Probabilidades e Estatística Aplicações e Soluções em SPSS*. Universidade de Évora, 2019. Disponível em: <<https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf>>. 40
- ARFKEN, G. *Física Matemática Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. São Paulo: Campus Elsevier, 2006. v. 1. 34
- BARROSO, L. C. et al. *Cálculo numérico (com aplicações)*. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987. 19, 20
- BUSS, G. M.; FLEMMING, D. M. *Cálculo A funções, limite, derivação, integração*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 9, 11
- BUSS, G. M.; FLEMMING, D. M. *Cálculo B funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. ISBN 978-85-7605-116-9. 15
- BUTKOV, E. *Física Matemática*. [S.l.]: Guanabara Koogan, 1988. 18
- CHAVES, A. S. *Física Mecânica*. Rio de Janeiro: Reichmann e Affonso, 2001. v. 1. 9
- CUNHA, G. M.; CASTRO, J. K. S. *Cálculo numérico*. Fortaleza: UAB/IFCE, 2010. 20
- DOMINGUES, H. H. *Introdução à história da matemática*. 5th. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 8
- FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. São Paulo: Pearson Pretice Hall, 2006. 19, 20
- HALLIDAY, D. *Fundamentos de Física Mecânica*. 4nd. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. v. 1. 9
- JAYMES, E. T. *Probability Theory with Applications in Science and Engineering - A Series of Informal Lectures*. Washington University - Missouri: Fragmentary Edition, 1974. v. 1. 18
- LARSON, R. et al. *Cálculo*. São Paulo: McGraw Hill, 2006. Vol. 2. 11, 24
- LEITHOLD, L. *Cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1. 11
- MARINHA, M. d. B. D. d. e. d. *Processo seletivo para ingresso no quadro técnico do corpo auxiliar da marinha/PS-t/2007*. 2007. Disponível em: <<https://www.concursosmilitares.com.br/provas-antiores/marinha/ciaw/quadro-tecnico/2007-estatistica.pdf>>. 39
- MELCHORS, A.; SOARES, M. História do cálculo diferencial e integral. *Revista Maiéutica Matemática*, Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI, Indaial, SC, v. 233, n. 556, 2013. 8

NASCIMENTO, E. G. A. et al. Redescobrimdo a história da matemática: Cálculo diferencial e integral dos gregos a newton e leibniz. Anais da Semana da Educação e Pesquisa em Matemática - Actas del VII CIBEM, 2013. ISSN 2301-0797. 8, 9

PETROV, V. V. *Limit theorems of probability theory: sequences of independent random variables*. [S.l.]: Clarendon Press; Oxford University Press, 1995. (Oxford studies in probability 4). ISBN 9780198534990,019853499-X. 18

SCHWARZLANDER, H. *Probability concepts and theory for engineers*. [S.l.]: Wiley, 2011. 17

SIMMONS, G. F. *Calculus with analytic geometry*. 2nd. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996. v. 2. 11, 24

SKOROKHOD, V.; PROKHOROV, Y.; SECKLER, B. *Basic Principles and Applications of Probability Theory*. [S.l.]: Springer, 2005. 18

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Thomson Learning, 2007. II. 9

STEWART, J. *Cálculo*. 7th. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012. Vol. 1. 9

STEWART, J. *Cálculo*. 7th. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Vol. 2. 15, 30, 35, 37, 43

SWOKOWSKI, E. W. *Calculus with Analytic Geometry*. 2. ed. New York: Prindle, Weber & Schmidt, 1983. Vol. 2. 11, 15, 22

SZÉKELY, G. J. *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1986. (Mathematics and its applications: East European series). 18

VALLE, M. E. *Aula 13 Integrais Triplas MA211 - Cálculo II*. Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MA211/Aula13.pdf>>. 27