

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL E APLICAÇÕES

NATÁLIA ARANTES ANDRADE AVELAR

**GOIÂNIA - GOIÁS
2022**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor:

Matrícula:

Título do Trabalho:

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 15/12/2022.

Natalia Arantes

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

NATÁLIA ARANTES ANDRADE AVELAR

PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Colegiado do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal de Goiás -
IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial
para obtenção do Diploma de Licenciado em
Matemática.

Área de Concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof^ª. Dra. Karoline Victor Fernandes

GOIÂNIA - GOIÁS
2022

Av32p Avelar, Natália Arantes Andrade.

Primeira forma fundamental e aplicações / Natália Arantes Andrade Avelar. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2022.
65 f.: il.

Orientadora: Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Geometria diferencial. 2. Álgebra linear. 3. Medidas de comprimento.
I. Fernandes, Karoline Victor (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 516.36

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva CRB1/ 2.740
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL E APLICAÇÕES

por

NATÁLIA ARANTES ANDRADE AVELAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Dr^a. Karoline Victor Fernandes

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 25 de novembro de 2022, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof^a. Dr^a. Karoline Victor Fernandes(Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Luciano Duarte da Silva (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- **Luciano Duarte da Silva**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 25/11/2022 17:02:12.
- **Jose Eder Salvador de Vasconcelos**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 25/11/2022 17:01:15.
- **Karoline Victor Fernandes**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 25/11/2022 17:00:44.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 18/11/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 346405

Código de Autenticação: 16f3a7d4b5



Agradecimentos

Primeiramente a Deus, Criador de toda a vida e o Único digno de toda honra, glória e adoração. Aos meus pais, Jardel Andrade Maranhão e Milene Alves Arantes Andrade, que me instruíram no caminho certo, se dedicando ao máximo na minha criação, ensinando e demonstrando valores e princípios que guardo comigo até hoje. Ao meu esposo, Guilherme de Avelar Silva Arantes, que foi abrigo, alívio e apoio no decorrer da minha graduação. À minha irmã, Vitória Arantes Andrade, que cumprindo o papel de irmã, me ensinou coisas que somente uma irmã pode ensinar. A toda a minha família e igreja, que de diferentes formas contribuíram na minha construção. Aos amigos que adquiri ao longo da vida, que ainda convivem comigo ou que ficaram marcados como uma boa lembrança na minha história. A todos vocês o meu profundo agradecimento.

Ao Instituto Federal de Goiás, IFG, que mais do que saberes técnicos – ensinados com excelência – agregou profunda e ricamente na minha visão de mundo, me proporcionando uma variedade de experiências formativas, teóricas e práticas, que vão além de um currículo profissional. Aos vários educadores pertencentes ao meu processo de formação acadêmica, profissional e pessoal que me ajudaram a chegar onde estou. A minha orientadora professora Dra. Karoline Victor Fernandes, que com muita paciência, sabedoria e competência tornou esse trabalho possível.

Muito obrigado!

Resumo

O presente trabalho discorre sobre a primeira forma fundamental, ou quadrática, de uma superfície. Esta é uma estrutura geométrica por meio da qual obtemos as medidas de comprimento de curvas, ângulo e área de regiões de uma superfície. Para essa tarefa, consideramos o plano tangente, e em cada ponto deste, calculamos o produto interno. Em decorrência disso, e através da primeira forma quadrática, podemos determinar os ditos aspectos geométricos tendo como único caminho possível a própria superfície, isto é, desconsiderando o espaço ambiente. Nesse estudo faremos aplicações da primeira forma fundamental de modo a demonstrar e exemplificar tais propriedades, bem como sua utilidade e importância para a matemática.

Palavras-chaves: Superfícies, primeira forma fundamental, comprimento, ângulo, área.

Abstract

The present work discusses the first fundamental, or quadratic, form of a surface. This is a geometric structure through which we obtain measurements of curve length, angle, and area of regions of a surface. For this task, we consider the tangent plane, and at each point of it, we calculate the inner product. As a result, and through the first quadratic form, we can determine the said geometric aspects having as the only possible way the own surface, in other words, disregarding the ambient space. In this study we will apply the first fundamental form in order to demonstrate and exemplify such properties, as well as its usefulness and importance for math.

Keywords: surfaces, first fundamental form, length, angle, area.

Conteúdo

Introdução	xii
1 Preliminares	1
1.1 Vetores Linearmente Independentes	1
1.2 Base e Dimensão	1
1.3 Transformação Linear	2
1.4 Forma Bilinear	3
1.5 Curvas Parametrizadas Definidas em $\mathbb{R}^3$	5
1.5.1 Definição	5
1.5.2 Exemplos	5
1.5.3 Vetor Tangente, Curva Regular e Mudança de Parâmetros	6
1.5.4 Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco	8
2 Teoria Local de Superfícies	11
2.1 Superfície Parametrizadas Regulares	11
2.1.1 Plano	13
2.1.2 Esfera	14
2.1.3 Paraboloide Elíptico	14
2.1.4 Paraboloide Hiperbólico	15
2.1.5 Superfícies de Rotação	16
2.1.6 Superfícies Regradas	20
2.2 Plano Tangente	23
2.3 Vetor Normal	24
2.4 Mudança de Parâmetros	25
3 Primeira Forma Fundamental e Aplicações	28
3.1 Primeira Forma Fundamental	29
3.2 Comprimento	32
3.3 Ângulos	32
3.4 Área	34

3.5 Aplicações	37
Conclusão	64
Referência Bibliográficas	65

Lista de Figuras

1.1	Hélice Circular	6
1.2	Vetor Tagente	8
1.3	Plano Osculador	9
2.1	Plano	13
2.2	Esfera	14
2.3	Paraboloide Elíptico	15
2.4	Paraboloide Hiperbólico	16
2.5	Cilindro Circular	17
2.6	Catenária	18
2.7	Catenoide	19
2.8	Toro	19
2.9	Tangente	20
2.10	Cilindro	21
2.11	Cone	21
2.12	Hiperboloide de Revolução	22
2.13	Helicoide	23
2.14	Vetor Normal	25
3.1	Primeira forma	28
3.2	Cilindro Circular S	30
3.3	Helicóide	31
3.4	Área de uma região	34
3.5	Elipsóide	37
3.6	Paraboloide Elíptico	38
3.7	Paraboloide Hiperbólico	39
3.8	Hiperbolóide de Duas Folhas	40
3.9	Parametrização da Esfera Unitária S^2	41
3.10	Projeção Estereográfica	42
3.11	Superfície Parametrizada Ex.4	44

3.12 Cone de Revolução 1	46
3.13 Cone de Revolução 2	47
3.14 Superfície de Revolução	51
3.15 Plano xy	52
3.16 Toro de Revolução 1	54
3.17 Toro de Revolução 2	55

Introdução

No decorrer deste trabalho, vamos estudar a Primeira Forma Fundamental, estrutura geométrica própria das superfícies, de grande importância para a compreensão da Geometria Diferencial em sua totalidade e de significativa utilidade para determinação de ângulos, comprimentos de curvas e áreas de regiões de superfícies.

Para tanto, aplicaremos os conhecimentos adquiridos de Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo Diferencial ao fazer o estudo local da geometria diferencial das superfícies no espaço euclidiano; abordaremos conceitos de curvas regulares parametrizadas, comprimento de arco e superfícies regulares; estudaremos exemplos de superfícies parametrizadas regulares e definiremos plano tangente e vetor normal. Além disso, de forma a sedimentar, exemplificar e agregar conhecimentos, apresentaremos diversas aplicações da Primeira Forma Fundamental.

Nesse estudo, nos baseamos nos livros que constam na referência bibliográfica, em especial o capítulo III, seção 5, do livro Introdução à Geometria Diferencial da autora Kettenblatt [Tenenblatt 2008] e o capítulo II do livro Geometria Diferencial Local do autor Manfredo Perdigão [Carmo 2012], do qual resolveremos alguns exercícios propostos. Além das imagens adquiridas por meio dos livros, o trabalho contará com figuras produzidas por meio do software maple.

Desde a infância, a matemática, de muitas formas, me cativou. Foi uma grande aliada na minha trajetória acadêmica e na minha relação com o mundo, visto que essa está presente em tudo. Durante o segundo ano do meu ensino médio, me decidi pelo curso de Licenciatura em Matemática e pela carreira acadêmica. Assim, escolhi a área de geometria diferencial para o presente estudo devido a sua grande relevância na matemática e, dessa forma, inicio minhas pesquisas na expectativa de continuar sedimentando os conhecimentos aqui articulados em projetos futuros. Espero igualmente contribuir nas trajetórias acadêmicas dos leitores do presente trabalho.

1

Preliminares

Neste capítulo são apresentadas definições e resultados importantes ao estudo da primeira forma fundamental. O texto ao longo do capítulo é baseado em Introdução à Geometria Diferencial de Ketí Tenenblat [Tenenblat 2008] e Álgebra Linear de Elon Lages Lima [Lima 2020].

1.1 Vetores Linearmente Independentes

Definição 1.1. Seja V um espaço vetorial, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ vetores são ditos linearmente independentes se toda equação vetorial da forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ tem solução única $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Consideramos nessa definição que os coeficientes pertencem ao conjunto dos reais.

Quando essa definição não se efetiva para quaisquer vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de um espaço vetorial V , eles são chamados linearmente dependentes. Ou seja, se existirem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, nem todos nulos, tais que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$.

1.2 Base e Dimensão

Definição 1.2. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. É chamada de *base* de V , um subconjunto B de V , que satisfaz:

- (i) B é linearmente independente;
- (ii) B gera V , isto é, qualquer vetor de V pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B .

Exemplo 1.3. Sendo $\mathbb{R}^3$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, pois é linearmente independente e gera, de fato, $\mathbb{R}^3$. Se $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, então $(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$ com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Um espaço vetorial pode contar com mais de uma base, todas elas com o mesmo número de vetores. A partir disso, temos que:

Definição 1.4. Seja V um espaço vetorial e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . A dimensão de V é igual ao número de vetores da base ($\dim V = n$).

Podemos considerar dois casos especiais:

- (i) Se V não possui base $\Rightarrow \dim V = 0$;
- (ii) Se V tem uma base com infinitos vetores $\Rightarrow \dim V = \infty$ (a dimensão de V é infinita).

Exemplo 1.5. Seja $V = \mathbb{R}^2$. O conjunto $B = [(1, 0), (0, 1)]$ é uma base de V . De fato,

$$B(x, y) \subset \mathbb{R}^2,$$

tem-se

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

e,

$$(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Logo, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Teorema 1.6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n . Então:*

- i) Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gera V então B é base de V ;*
- ii) Se $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é linearmente independente então B é base de V .*

1.3 Transformação Linear

Definição 1.7. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $T : U \rightarrow V$ é uma *Transformação Linear* se

- (1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \forall u_1, u_2 \in U$, e
- (2) $T(\lambda u) = \lambda T(u), \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in U$.

Exemplo 1.8. A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (5x + y, 3x - 2y)$$

é linear.

De fato, se $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ vetores de $\mathbb{R}^2$, então

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad T(u_1 + u_2) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
 &= T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) \\
 &= (5(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2)) \\
 &= (5x_1 + 5x_2 + y_1 + y_2, 3x_1 + 3x_2 - 2y_1 - 2y_2) \\
 &= (5x_1 + y_1, 3x_1 - 2y_1) + (5x_2 + y_2, 3x_2 - 2y_2) \\
 &= T(u_1) + T(u_2).
 \end{aligned}$$

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
 T(\lambda u_1) &= T(\lambda(x_1, y_1)) \\
 &= T(\lambda x_1, \lambda y_1) \\
 &= (5\lambda x_1 + \lambda y_1, 3\lambda x_1 - 2\lambda y_1) \\
 &= (\lambda(5x_1 + y_1), \lambda(3x_1 - 2y_1)) \\
 &= \lambda(5x_1 + y_1, 3x_1 - 2y_1) \\
 &= \lambda T(u_1).
 \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

1.4 Forma Bilinear

Definição 1.9. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de forma bilinear de $U \times V$ em $\mathbb{R}$ se satisfizer:

- (i) $f(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda f(u_1, v) + f(u_2, v)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$.
- (ii) $f(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda f(u, v_1) + f(u, v_2)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in U$ e $v_1, v_2 \in V$.

Dessa forma, uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear se, ao deixarmos uma variável fixa, for linear na outra variável. Vejamos agora os conceitos de forma bilinear simétrica e produto interno.

Definição 1.10. $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita simétrica se

$$B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Definição 1.11. Uma forma bilinear simétrica que satisfaz:

$$B(u, u) \geq 0 \text{ e } B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

é chamado de produto interno.

Exemplo 1.12. A forma $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$B(u, v) = x_u x_v + y_u y_v,$$

$$u = (x_u, y_u), v = (x_v, y_v)$$

é uma forma bilinear simétrica. Mais do que isso, B é, de fato, um produto interno.

Exemplo 1.13. A função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1y_2 - 2x_2y_1$, $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ é uma forma bilinear que não é um produto interno.

Quando uma forma bilinear $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno, denotamos $B(u, v)$ por $\langle u, v \rangle$. Neste caso, a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u) = (\langle u, u \rangle)^{\frac{1}{2}}$ é denominada uma norma em V proveniente do produto interno $\langle \cdot \rangle$ e satisfaz:

- i) $f(u) \geq 0$ e $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
- ii) $f(\lambda u) = |\lambda|f(u)$;
- iii) $f(u + v) \leq f(u) + f(v)$;

Ocorre que no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, fixando o produto interno dado no exemplo 1.12, temos

$$f(u) = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} = (x_u^2 + y_u^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2},$$

isto é,

$$f(u) = \sqrt{x_u^2 + y_u^2},$$

é o comprimento do vetor $\vec{u}$ (com origem no ponto $(0, 0)$ e extremidade u). Por simplicidade usamos, em ambos os casos, apenas u .

Finalmente, fazendo

$$\|u\| = f(u) = \sqrt{x_u^2 + y_u^2},$$

temos que a norma euclidiana ou comprimento de um vetor $u \in \mathbb{R}^2$ denotada por $\|u\|$ é dado pela expressão acima. Em geral, tem-se

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

É importante observar que existem normas que não são provenientes de produtos internos, mas estas não serão consideradas neste trabalho. Para mais detalhes veja [Hoffman e Kunze 1971](#) e [Lima 2020](#).

1.5 Curvas Parametrizadas Definidas em $\mathbb{R}^3$

Dados os conjuntos de ternos ordenados de números reais $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Podemos destacar alguns subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ nos quais possa ser aplicado o cálculo diferencial. Lembrando que uma função de variável real será diferenciável, se ela possuir em todos os pontos derivadas de todas as ordens (contínuas).

Nessa seção vamos introduzir os conceitos básicos para curvas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

1.5.1 Definição

Definição 1.14. Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável α , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. A variável $t \in I$ é o parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é o traço da curva.

Essa aplicação é da forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, na qual $x(t), y(t), z(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ .

1.5.2 Exemplos

Exemplo 1.15. A aplicação,

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), t \in \mathbb{R},$$

onde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é uma linha reta passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e paralela ao vetor de coordenadas (a, b, c) .

O Exemplo 1.15 representa uma família de curvas planas.

Exemplo 1.16. A curva parametrizada diferenciável

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

$t \in \mathbb{R}, a > 0, b \neq 0$ é a *hélice circular*.

Figura 1.1: Hélice Circular

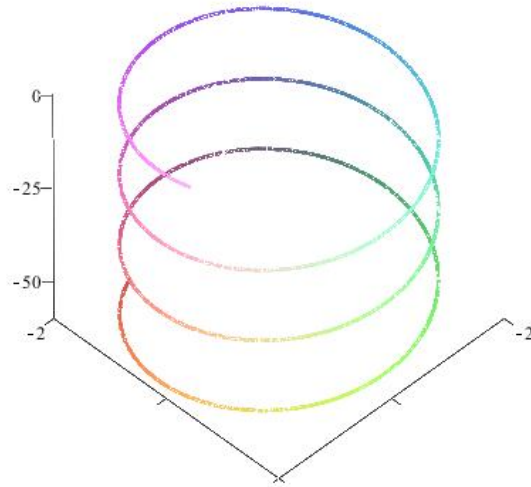


Imagem elaborada pela autora

O traço desta curva está contido no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Se $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ são dois pontos que têm as duas primeiras coordenadas respectivamente iguais, então as terceiras coordenadas diferem por um múltiplo de $2\pi b$.

Definição 1.17. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita plana se existe um plano de $\mathbb{R}^3$ que contém $\alpha(I)$

O exemplo 1.15 é uma curva plana.

1.5.3 Vetor Tangente, Curva Regular e Mudança de Parâmetros

Definição 1.18. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}^3$, uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente a α em $t \in I$ é o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. A curva α é regular se $\forall t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$. A reta tangente à curva regular α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, isto é, a reta dada pela função $g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0)$, $r \in \mathbb{R}$.

Definição 1.19. Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável C^∞ , cuja derivada de primeira ordem é não-nula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então, a função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço que α , chamada reparametrização de α por h . A função h é chamada mudança de parâmetro.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e fixemos t_0 e t_1 do intervalo I . Subdividindo o intervalo $[t_0, t_1]$ nos pontos $t_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = t_1$, e ligando retilinearmente os pontos $\alpha(a_0), \alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)$, obtemos uma linha poligonal inscrita à curva entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$. Esta poligonal tem um comprimento. Consideremos agora todas as poligonais inscritas à curva entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$. Como α é uma curva regular (na realidade, é suficiente que a derivada de primeira ordem da função α exista e seja contínua), pode-se verificar que existe o limite superior do conjunto dos comprimentos dessas linhas poligonais, e é igual a $\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$, que é chamado *comprimento de arco* da curva α de t_0 e t_1 .

Definição 1.20. A aplicação $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$ é denominada *função comprimento de arco* da curva α a partir de t_0 . Esta função é diferenciável de classe C^∞ , pois α é uma curva regular.

Definição 1.21. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita *parametrizada pelo comprimento de arco* se, para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 1.22. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $\forall t \in I, \|\alpha'\| = 1$.

Demonstração. Suponhamos um $\alpha(t)$ parametrizada pelo comprimento de arco, fixemos $t_0 \in I$. Considere a função $s(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada $t \in I$, associa $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$. Se $t_0 \leq t$, então por hipótese, $\int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$; se $t \leq t_0$, então $-s(t) = \int_t^{t_0} \|\alpha'(t)\| dt = t_0 - t$. Portanto, para todo $t \in I, s(t) = t - t_0$ e $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, concluímos que $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$. A recíproca é verdadeira. $\square$

Proposição 1.23. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então, existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Exemplo 1.24. Consideremos $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Seja $s(t)$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$, isto é,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

A função inversa de s é dada por $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, s \in \mathbb{R}$. Portanto, $\beta = \alpha \circ h$, que a cada s associa

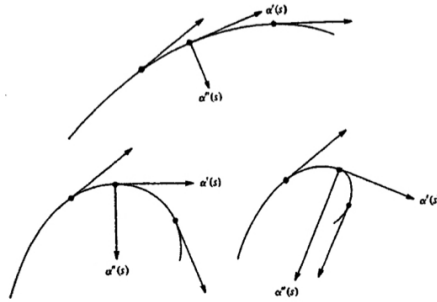
$$\beta(s) = \left(a \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right),$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

1.5.4 Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

Considere uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s , $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Temos que $\alpha'(s)$ é um vetor tangente unitário e o módulo da derivada segunda $|\alpha''(s)|$ mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente de s . Ou seja, $|\alpha''(s)|$ mede quão rápido a curva se afasta da tangente de s em uma vizinhança de s .

Figura 1.2: Vetor Tangente



Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies: [Carmo 2012]

Definição 1.25. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ chama-se curvatura de α em s .

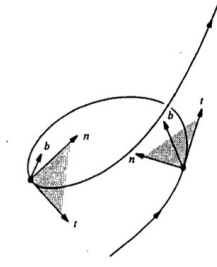
É possível observar que ao mudar a orientação, o vetor tangente muda de sentido.

$$\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow \frac{d\beta}{d(-s)}(-s) = -\frac{d\alpha}{ds}(s).$$

Além disso, em uma mudança de orientação, $\alpha''(t)$ e a curvatura não variam.

Analisemos agora os pontos nos quais $k(s) \neq 0$. Pela equação $\alpha''(s) = k(s)n(s)$, fica bem definido um vetor unitário $n(s)$ na direção de $\alpha''(s)$. Observe que $\alpha''(s)$ é normal a $\alpha'(s)$, pois ao derivarmos $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ obtemos $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. Dessa forma, $n(s)$ é normal a $\alpha(s)$ e recebe o nome de vetor normal em s . O plano dado por $n(s)$ e $\alpha(s)$ por sua vez, recebe o nome de plano osculador em s .

Figura 1.3: Plano Osculador



Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies: [Carmo 2012]

O vetor normal e o plano osculador não estão definidos nos pontos em que $k(s) = 0$ e para a análise das curvas é necessário o plano osculador. Convenientemente, dizemos que $s \in I$ é um ponto singular de ordem 1 se $\alpha''(s) = 0$.

Nos voltemos para as curvas parametrizadas pelo comprimento do arco sem pontos singulares de ordem 1. Indicaremos o vetor unitário de α em s por $t(s) = \alpha'(s)$ e teremos que $t'(s) = k(s)n(s)$. O vetor unitário $b(s) = t(s) \times n(s)$ é normal ao plano osculador e receberá o nome de vetor binormal em s .

Faremos uma análise semelhante a feita para $\alpha'(s)$ no primeiro parágrafo desse tópico. Uma vez que $b(s)$ é unitário, o módulo $|b'(s)|$ medirá a taxa de variação do ângulo do plano osculador em s com os planos osculadores vizinhos. Ou seja, $|b'(s)|$ mede quão rápido a curva se afasta do plano osculador em s em uma vizinhança de s .

No que tange os cálculos de $b'(s)$, devemos observar que, por um lado, que $b'(s)$ é normal a $b(s)$, e por outro, normal a $t(s)$:

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = t(s) \times n'(s);$$

A partir disso, temos que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$ e vale

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

para alguma função $\tau(s)$.

Definição 1.26. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que $|\alpha''(s)| \neq 0, s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é chamado de torção de α em s .

A torção (τ), diferentemente da curvatura (k), pode ser positiva ou negativa. Ao mudarmos a orientação, o vetor binormal muda de sinal, uma vez que $b = t \times n$. Assim, $b'(s)$ e, conseqüentemente, a torção τ , não variam em uma mudança de orientação.

Em síntese, para cada valor do parâmetro s é associado três vetores unitários e ortogonais $t(s), n(s), b(s)$. Eles constroem o chamado triedro de Frenet em s . É possível

obter informações sobre o comportamento de α em uma vizinhança de s a partir das entidades geométricas (curvatura k e torção τ) que as derivadas dos vetores $t(s)$ e $b(s)$ (respectivamente, $t'(s) = kn$, $b'(s) = \tau n$) nos fornecem ao serem expressas na base $\{t, n, b\}$.

Vale destacar as fórmulas de Frenet:

$$\begin{aligned}t' &= kn, \\n' &= -kt - \tau b, \\b' &= \tau n.\end{aligned}$$

Omitimos o s por comodidade. Vejamos também algumas denominações comumente utilizadas:

- O plano tb : plano retificante;
- O plano nb : plano normal;
- A reta que passa por $\alpha(s)$ e contém $n(s)$: normal principal em s ;
- A reta que passa por $\alpha(s)$ e contém $b(s)$: binormal em s ;

Fisicamente, é possível pensar em uma curva em $\mathbb{R}^3$ como originada a partir de uma reta entortada (curvatura) ou torcida (torção). Dessa forma, é possível descrever completamente o comportamento local de uma curva por k e τ .

2

Teoria Local de Superfícies

As definições usadas nesse capítulo são advindas dos livros Introdução à Geometria Diferencial de Ketten Tenenblat e Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies de Manfredo Perdigão do Carmo.

2.1 Superfície Parametrizadas Regulares

As Superfícies Parametrizadas Regulares podem ser compreendidas de modo análogo as Curvas Parametrizadas Diferenciáveis. Uma curva é uma aplicação diferenciável α que pode ser vista tanto em $\mathbb{R}^2$ como em $\mathbb{R}^3$. No entanto, em ambos os casos, os domínios estão sempre contidos em $\mathbb{R}$. Dessa forma, a parametrização das Curvas sempre ocorre em função de uma única variável, chamada parâmetro da curva e geralmente denotado por t .

Nas Superfícies, o domínio por sua vez, é o $\mathbb{R}^2$ e, portanto, a aplicação se dá em função de duas variáveis, as quais representaremos por u e v . Assim, denotamos S o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $X(u, v)$.

Definição 2.1. Uma Superfície Parametrizada Regular é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, na qual U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que:

- a) X é diferenciável de classe C^∞ ;
- b) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

As variáveis u, v são os parâmetros da superfície. O subconjunto S de $\mathbb{R}^3$, obtido pela imagem da aplicação X é denominado traço de X .

Para melhor compreensão do conceito de Superfície Parametrizada Regular, vamos destrinchar as restrições a e b da definição.

- a) Ao mencionar que X é diferenciável de classe C^∞ significa que na aplicação $X(u, v) =$

$(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

b) O item b é equivalente a algumas outras afirmações. Veja:

b.1) dX_q é injetora $\Leftrightarrow$ a matriz $J(u_0, v_0)$ tem posto 2;

$J(u_0, v_0)$ é a matriz jacobiana associada a dX_q nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$. Denotamos essa base por e_1 e e_2 .

$$J(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix}.$$

Dizer que uma matriz tem posto 2 é o mesmo que dizer que ela tem duas linhas e duas colunas linearmente independentes (L.I). Temos também que uma matriz tem duas linhas L.I se, e somente se, ela tem duas colunas L.I. Desse modo, basta verificarmos que suas linhas, ou suas colunas, são linearmente independentes, para concluirmos que a matriz tem posto 2. Na matriz jacobiana acima, as colunas são dadas por dois vetores, o qual denotaremos por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ e exigiremos que sejam linearmente independentes.

$$\begin{aligned} dX_q(e_1) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right), \\ dX_q(e_2) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right). \end{aligned}$$

O que acarreta no próxima afirmação:

b.2) dX_q é injetora $\Leftrightarrow$ os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;

Sabemos também que dois vetores linearmente independentes só podem ser considerados assim se e somente se o produto vetorial deles é não nulo. A partir disso, chegamos na última equivalência:

b.3) dX_q é injetora $\Leftrightarrow X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$

Todas essas afirmativas garantem a existência de um plano tangente em cada ponto da superfície.

Considere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada, então se fixarmos um ponto $(u_0, v_0) \in U$, as curvas

$$\begin{aligned} u &\mapsto X(u, v_0), \\ v &\mapsto X(u_0, v), \end{aligned}$$

serão curvas com coordenadas de X em (u_0, v_0) . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são vetores tangentes às curvas coordenadas.

Apresentaremos agora alguns exemplos de superfícies parametrizadas regulares.

2.1.1 Plano

Exemplo 2.2. Sejam $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, e $b = (b_1, b_2, b_3)$ vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$. Consideremos a aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, associa $X(u, v) = p_0 + ua + vb$, isto é

$$X(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3).$$

Figura 2.1: Plano

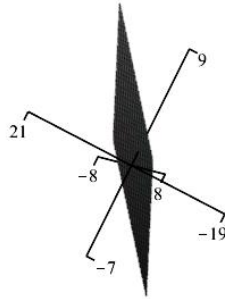


Imagem elaborada pela autora

Então, X é uma superfície parametrizada regular, pois X é diferenciável e os vetores $X_u = a$, $X_v = b$ são linearmente independentes. A aplicação X descreve um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto p_0 , ortogonal ao vetor $a \times b$. As curvas coordenadas de X descrevem retas do plano, paralelas aos vetores a e b respectivamente.

2.1.2 Esfera

Exemplo 2.3. Consideremos a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \cos v),$$

na qual $a > 0$ e $U = \mathbb{R} \times (0, \pi) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$.

A aplicação X é diferenciável e os vetores

$$X_u = (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \operatorname{sen} v \cos u, 0)$$

$$X_v = (a \cos v \cos u, a \cos v \operatorname{sen} u, -a \operatorname{sen} v)$$

são linearmente independentes, para todo $(u, v) \in U$. De fato,

$$X_u \times X_v = (-a^2 \operatorname{sen}^2 v \cos u, -a^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} u, -a^2 \operatorname{sen} v \cos v) \text{ e}$$

$$|X_u \times X_v| = a^2 \operatorname{sen} v \neq 0,$$

já que $v \in (0, \pi)$. A imagem de X é a esfera centrada na origem de raio a , menos os dois polos. As curvas coordenadas são os meridianos e os paralelos da esfera.

Figura 2.2: Esfera

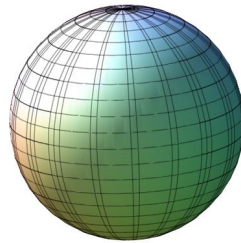


Imagem elaborada pela autora

2.1.3 Paraboloide Elíptico

Exemplo 2.4. Seja

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right); \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

onde a e b são constantes não-nulas. A aplicação X é diferenciável e os vetores $X_u = (1, 0, \frac{2u}{a^2})$, $X_v = (0, 1, \frac{2v}{b^2})$ são linearmente independentes para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, X é uma superfície parametrizada regular, cuja imagem é o *parabolóide elíptico*.

Figura 2.3: Parabolóide Elíptico

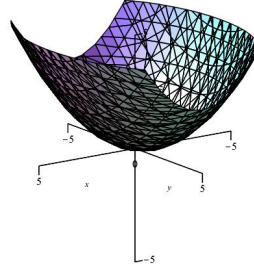


Imagem elaborada pela autora

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

As curvas coordenadas descrevem as parábolas obtidas pela intersecção de S com os planos paralelos a xz e yz .

2.1.4 Parabolóide Hiperbólico

Proposição 2.5. *Se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de $\mathbb{R}^2$, então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f .*

Demonstração. A diferenciabilidade de X decorre do fato de que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. A matriz jacobiana de X é igual a

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix},$$

que tem posto 2, para todo (u, v) . □

Exemplo 2.6. Dessa proposição temos que a aplicação

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

na qual a e b são constantes não-nulas, é uma superfície parametrizada regular, cujo traço é o parabolóide hiperbólico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Essa é uma superfície de revolução em torno do eixo x .

Figura 2.4: Parabolóide Hiperbólico

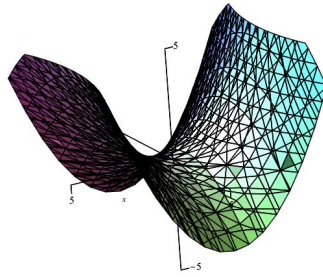


Imagem elaborada pela autora

2.1.5 Superfícies de Rotação

Cilindro Circular

Esta superfície é uma dos muitos exemplos de superfície de rotação. Elas são criadas pela rotação de um traço de uma curva regular plana em torno de uma reta de $\mathbb{R}^3$ que não intersepta a curva.

Exemplo 2.7. A superfície

$$X(u, v) = (a \cos v, a \sin v, u),$$

na qual $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, descreve o cilindro circular, que é obtido pela rotação da reta $\alpha(u) = (a, 0, u)$ em torno do eixo $0z$.

Figura 2.5: Cilindro Circular



Imagem elaborada pela autora

Proposição 2.8. *Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular tal que $f(u)$ não se anula. Então, a aplicação*

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde $u \in I$ e $v \in \mathbb{R}$ é uma superfície parametrizada regular chamada “superfície de rotação” da curva α em torno do eixo $0z$.

Demonstração. Como α é uma aplicação diferenciável, temos que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. Os vetores

$$\begin{aligned} X_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \\ X_v &= (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

são linearmente independente, pois

$$|X_u \times X_v|^2 = f^2(u)[(g')^2 + (f')^2] \neq 0,$$

já que α é uma curva regular e f não se anula. Portanto, concluímos que X é uma superfície parametrizada regular. $\square$

Os dois exemplos de Superfícies Parametrizadas Regulares a seguir também são exemplos de Superfícies de Rotação.

Catenóide

Exemplo 2.9. Consideremos a catenária

$$\alpha(u) = \left(u, a \cosh \frac{u}{a}, 0\right), u \in \mathbb{R},$$

onde $a > 0$ é constante.

Figura 2.6: Catenária

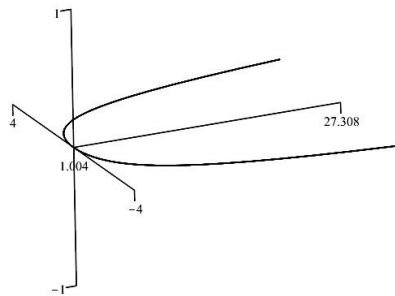


Imagem elaborada pela autora

A superfície

$$X(u, v) = \left(u, a \cosh \frac{u}{a} \cos v, a \cosh \frac{u}{a} \sin v\right),$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$, descreve o catenoide, que é obtido pela rotação da catenária α em torno do eixo $0x$.

Figura 2.7: Catenoide

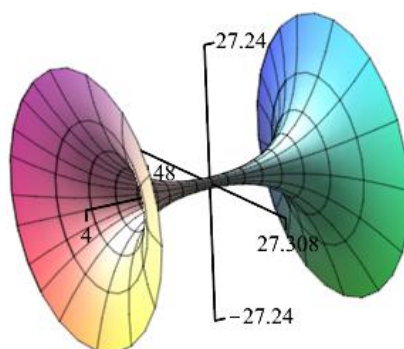


Imagem elaborada pela autora

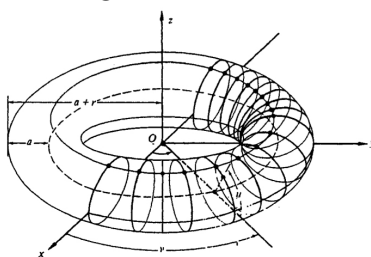
Toro

Exemplo 2.10. Seja $\alpha(u) = (a + r \cos u, 0, r \sin u)$, $u \in \mathbb{R}$, com $0 < r < a$, a curva que descreve a circunferência contida no plano $x \circ y$, centrada no ponto $(a, 0, 0)$, de raio r . Considerando a rotação de α em torno do eixo $0z$, obtemos a superfície de rotação

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$, que descreve o toro.

Figura 2.8: Toro



Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies: [Carmo 2012]

2.1.6 Superfícies Regradas

Definição 2.11. Uma família (diferenciável) a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $w(t) \in \mathbb{R}^3, w(t) \neq 0$, tais que ambos $\alpha(t)$ e $w(t)$ sejam diferenciáveis em t . Para cada $t \in I$, a reta L_t passando por $\alpha(t)$ e que é gerada por $w(t)$ é chamada a reta da família em t . Assim, chamamos a superfície parametrizada

$$X(t, v) = \alpha(t) + v w(t), \quad t \in I, v \in \mathbb{R},$$

de superfície regradada gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$.

As retas L_t são as geratrizes, e a curva $\alpha(t)$ é uma diretriz da superfície X . Em alguns casos a expressão *superfície regradada* é usada significando o traço de X .

Os exemplos mais simples de superfícies regradadas são as superfícies tangentes a uma curva regular, os cilindros e os cones.

Superfície tangente

Exemplo 2.12. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular. A superfície definida por $X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t)$ é a superfície tangente de α .

Figura 2.9: Tangente



Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies: [Carmo 2012]

Cilindro

Vimos anteriormente um cilindro circular criado como uma superfície de rotação. Veja agora um cilindro obtido no âmbito das superfícies regradadas.

Exemplo 2.13. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva plana e $w(t)$ é paralelo a uma direção fixa em $\mathbb{R}^3$ obtemos um cilindro. Em particular se $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ e $\alpha(t) = (0, 0, 1)$, a superfície $X(t, v) = (a \cos t, a \sin t, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $a > 0$ descreve um cilindro circular.

Figura 2.10: Cilindro

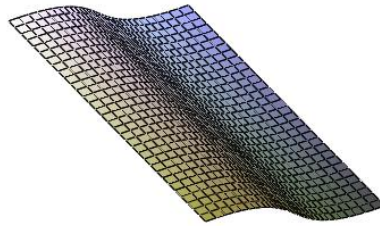


Imagem elaborada pela autora

Cone

Exemplo 2.14. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva plana e todas as retas geratrizes L_t passam por um ponto $p \in P$. Obtemos um cone.

Figura 2.11: Cone

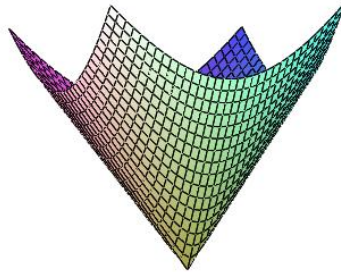


Imagem elaborada pela autora

Hiperbolóide de Revolução

Exemplo 2.15. Sejam S^1 o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy , e $\alpha(s)$ uma parametrização de S^1 pelo comprimento de arco. Para cada s , seja $w(s) = \alpha'(s) + e_3$, onde e_3 é o vetor unitário do eixo Oz . Então

$$x(s, v) = \alpha(s) + v(\alpha'(s) + e_3)$$

é uma superfície regrada. Podemos colocá-la em uma forma mais familiar escrevendo

$$x(s, v) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v);$$

e observando que $x^2 + y^2 - z^2 = 1 + v^2 - v^2 = 1$. Isto mostra que o traço de x é um hiperboloide de revolução.

Figura 2.12: Hiperboloide de Revolução

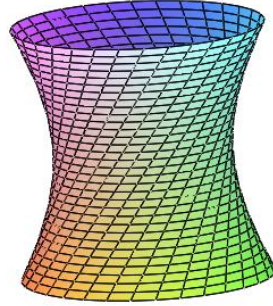


Imagem elaborada pela autora

Helicóide

Exemplo 2.16. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

A descrição geométrica dessa superfície é dada da seguinte forma: Seja $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, bu)$ uma hélice circular. Para cada u existe uma única reta ortogonal ao eixo $0z$, que passa por $\alpha(u)$. O traço de X é o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$, obtido pela união dessas retas, que é denominada *helicoide*.

Figura 2.13: Helicoide

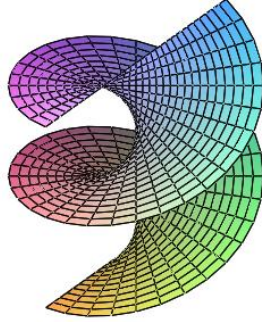


Imagem elaborada pela autora

2.2 Plano Tangente

Para definirmos e compreendermos plano tangente, usaremos os conceitos de vetor tangente e curva parametrizada diferenciável.

No início desse capítulo fizemos um paralelo entre Superfícies Parametrizadas Regulares e Curvas Parametrizadas Diferenciáveis, reforçando a diferença do domínio entre elas, visto que as duas podem ter como imagem um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Dessa forma, vamos considerar a superfície parametrizada regular $X(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Seja u e v funções diferenciáveis de um parâmetro t , $t \in I \subset \mathbb{R}$, obtemos uma curva diferenciável $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ com o traço contido na nossa superfície $X(u, v)$. Ou seja, a partir de α , uma curva parametrizada da nossa superfície em $\mathbb{R}^3$, determinaremos um vetor tangente e, posteriormente, o plano tangente.

Definição 2.17. Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor w de $\mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

Uma vez que os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são tangentes às curvas coordenadas de X , temos também que eles são vetores tangentes a X .

Definição 2.18. O plano tangente a X em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , que denotamos por $T_q X$, onde $q = (u_0, v_0)$.

Assim sendo, a partir dos vetores tangentes às curvas $X_u(q)$ e $X_v(q)$, linearmente independentes pela definição de superfície parametrizada regular, chegaremos ao plano tangente à superfície $T_q X \subset \mathbb{R}^3$. Observe:

Proposição 2.19. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. Então, $T_q X$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.*

Demonstração. Se $w \in T_q X$, então $w = \alpha'(t_0)$, em que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(t_0) = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) \big|_{t=t_0} \\ &= X_u(u_0, v_0) u'(t_0) + X_v(u_0, v_0) v'(t_0), \end{aligned}$$

isto é, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v em (u_0, v_0) . Reciprocamente, suponhamos que

$$w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0),$$

então existe uma curva $\alpha(t)$ da superfície tal que $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$. De fato, basta considerar

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $u(t) = u_0 + at$, e $v(t) = v_0 + bt$, com $t \in \mathbb{R}$. □

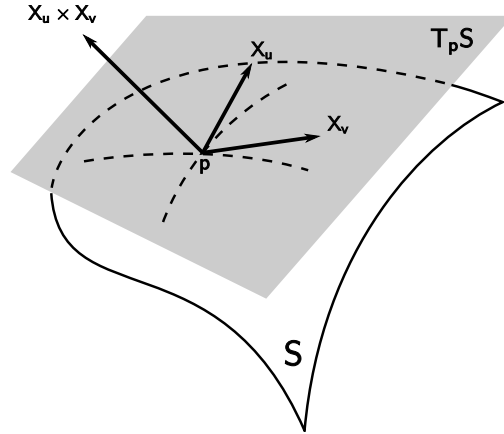
2.3 Vetor Normal

Definição 2.20. Se $X(u, v)$ é uma superfície e $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de $\mathbb{R}^3$ é normal a X em q se é ortogonal a $T_q X$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q .

Considerando o ponto $q = (u_0, v_0)$ e o plano tangente a qual pertence, passará por ele uma única reta ortogonal ao plano. Essa reta pode conter somente dois vetores unitários, em sentidos opostos. Assim fixaremos o vetor unitário normal a X em q como sendo o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Figura 2.14: Vetor Normal



Introdução à Geometria Diferencial: [Tenenblat 2008]

2.4 Mudança de Parâmetros

Ao longo desse capítulo, é possível observar um cilindro circular sendo escrito de duas maneiras diferentes: como superfície de rotação e como superfície regrada. Isso é possível pois duas superfícies parametrizadas podem ter o mesmo traço. Para uma superfície parametrizada regular X pode-se obter diversas superfícies parametrizadas com o mesmo traço. Observe:

Proposição 2.21. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $h : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ é uma aplicação diferenciável, cujo determinante da matriz jacobiana não se anula e $h(\bar{U}) = U$, então $Y = X \circ h$ é uma superfície parametrizada regular que tem o mesmo traço de X .*

Demonstração. A aplicação Y é diferenciável, pois é composta de funções diferenciáveis. Seja

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ h(\bar{u}, \bar{v}) &= (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})). \end{aligned}$$

Vamos verificar que $Y(\bar{u}, \bar{v}) = X \circ h(\bar{u}, \bar{v}) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ satisfaz a condição $Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} \neq 0$. Como

$$Y_{\bar{u}} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right),$$

$$Y_{\bar{v}} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right),$$

temos que:

$$\begin{aligned} Y_{\bar{u}} &= \left(X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \right. \\ Y_{\bar{v}} &= \left. \left(X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} = X_u \times X_v \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)$$

Como $X_u \times X_v \neq 0$ e o determinante da matriz jacobiana de h não se anula, concluímos que $Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} \neq 0$.

A aplicação Y é chamada reparametrização de X por h , sendo h a mudança de parâmetros.

Uma mudança de parâmetros não precisa ser injetora, mas o determinante da matriz jacobiana de h deve ser obrigatoriamente não nulo.

Exemplo 2.22. A superfície

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}^2 - \bar{v}^2), (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma reparametrização de

$$X(u, v) = (u + v, u - v, 4uv), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

por $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ na qual $h(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} - \bar{v})$.

Proposição 2.23. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Para cada $(u_0, v_0) \in U$ existe um aberto V , $(u_0, v_0) \in V \subset U$ e uma mudança de parâmetros $h : \bar{U} \rightarrow V$, tal que o traço de $Y = X \circ h$ é o gráfico de uma função diferenciável.*

Demonstração. Consideremos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, então, segue-se do teorema da função inversa que existe um aberto $V, (u_0, v_0) \in V \subset U$, tal que F restrita a V admite inversa F^{-1} diferenciável. Seja $\bar{U} = F(V)$ e denotemos por $h : \bar{U} \rightarrow V$ a inversa de F . Vamos verificar que a reparametrização $Y = X \circ h$ descreve o gráfico de uma função diferenciável.

De fato, se $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$, então

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (x \circ h(\bar{u}, \bar{v}), y \circ h(\bar{u}, \bar{v}), z \circ h(\bar{u}, \bar{v})) = (F \circ h(\bar{u}, \bar{v}), z \circ h(\bar{u}, \bar{v})).$$

Como h é inversa de F , concluímos que

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, z \circ h(\bar{u}, \bar{v}));$$

isto é, Y descreve o gráfico da função diferenciável $z \circ h$. □

Exemplo 2.24. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

que descreve o cilindro circular. Fixado o ponto $(\frac{\pi}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$, consideremos a vizinhança desse ponto $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < \pi, v \in \mathbb{R}\}$. Então, a restrição de X ao aberto V admite uma reparametrização

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \sqrt{1 - \bar{u}^2}, \bar{v}), \text{ na qual } -1 < \bar{u} < 1, \bar{v} \in \mathbb{R},$$

que descreve o gráfico da função $\sqrt{1 - \bar{u}^2}$.

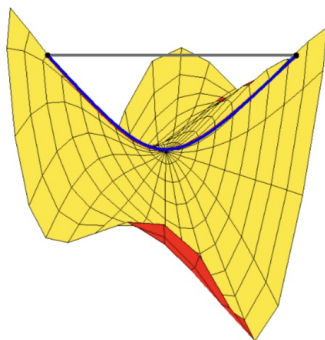
3

Primeira Forma Fundamental e Aplicações

A primeira forma fundamental, também conhecida como primeira forma quadrática, é de grande valor no estudo da teoria local das superfícies. Ela está diretamente relacionada com o comprimento das curvas em uma superfície, o ângulo entre vetores tangentes e a área de regiões da superfície.

É esperado que ao concluir o ensino básico no Brasil, o aluno saiba como calcular a distância entre dois pontos em um plano bidimensional. No entanto, esse caminho já não se faz tão útil quando estamos no $\mathbb{R}^3$ e queremos considerar a superfície como o único caminho possível de um ponto a outro. Na figura 3.1, podemos ver a diferença entre as duas possibilidades.

Figura 3.1: Primeira forma



Apontamentos de Geometria Diferencial: [Picado 2006]

Assim, no teorema fundamental das superfícies, a primeira forma fundamental, assim como a segunda - a qual não abordaremos -, nos permite resolver essa questão e determinar uma superfície sem considerar o espaço a que pertence.

Dada a importância e utilidade da mencionada Primeira Forma Fundamental, a analisaremos no decorrer desse capítulo, estudando sobre os ditos comprimentos, ângulos e áreas e fazendo as devidas aplicações.

3.1 Primeira Forma Fundamental

Definição 3.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $\forall q \in U$, a aplicação

$$\begin{aligned} I_q & : T_q X \longrightarrow \mathbb{R} \\ w & \longrightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \end{aligned}$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em q .

Nessa definição, recobramos o conceito de plano tangente $T_q X$. Dessa forma, podemos definir o vetor $w \in T_q X$ para uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$ como:

$$w = a X_u(u_0, v_0) + b X_v(u_0, v_0),$$

Sendo a e $b \in \mathbb{R}$. Fazendo as devidas substituições na definição, obtemos:

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Adotaremos uma nova notação a partir de agora. Seja:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0), \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0), \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

Temos que:

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Esta é a primeira forma fundamental ou quadrática. Variando (u, v) temos as funções diferenciáveis $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ como coeficientes da primeira forma quadrática.

As funções E, F, G satisfazem as seguintes propriedades:

- a) $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v) , pois os vetores X_u e X_v são não nulos;

b) $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$. De fato, como

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2,$$

temos que

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0$$

Exemplo 3.2. Seja $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, onde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e w_1, w_2 são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$, isto é, X descreve o plano ortogonal a $w_1 \times w_2$ que passa por p_0 . Então, $X_u(u, v) = w_1$ e $X_v(u, v) = w_2$. Como w_1 e w_2 são ortonormais, obtendo que os coeficientes da primeira forma quadrática são as funções constantes $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$, $G(u, v) = 1$.

Exemplo 3.3. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que descreve o cilindro circular $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$.

Figura 3.2: Cilindro Circular S



Imagem elaborada pela autora

Os coeficientes da primeira forma quadrática são dados por $E(u, v) = G(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$. De fato:

$$X_u(u, v) = (\sin u, -\cos u, 0) \text{ e } X_v(u, v) = (0, 0, 1);$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = \text{sen}^2 u + \cos^2 u + 0 = 1, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 + 0 + 0 = 0, \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 0 + 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

E portanto, temos a primeira forma quadrática:

$$I_q(w) = a^2 + b^2.$$

Exemplo 3.4. Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

A descrição geométrica dessa superfície é dada da seguinte forma. Seja $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, bu)$ uma hélice circular. Para cada u existe uma única reta ortogonal ao eixo $0z$, que passa por $\alpha(u)$. O traço de X é o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$, obtido pela união dessas retas, que é denominado helicóide.

Figura 3.3: Helicóide

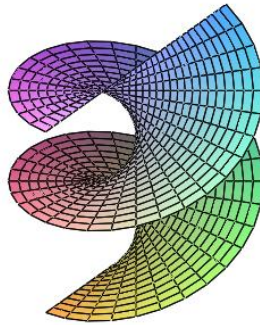


Imagem elaborada pela autora

Visto que:

$$X_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, b) \text{ e } X_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 0);$$

Os coeficientes da primeira forma quadrática de X são dados por

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = v^2 \operatorname{sen}^2 u + v^2 \cos^2 u + b^2 = v^2 + b^2, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = v \operatorname{sen} u \cos u - v \operatorname{sen} u \cos u + 0 = 0, \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = \cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u + 0 = 1. \end{aligned}$$

E portanto, temos a primeira forma quadrática:

$$I_q(w) = (v^2 + b^2)a^2 + b^2.$$

3.2 Comprimento

Definição 3.5. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superfície, então, para $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))} dt,$$

em que usamos o fato de que $\alpha'(t)$ é um vetor tangente à superfície em $q(t) = (u(t), v(t))$.

3.3 Ângulos

O ângulo entre dois vetores não é um segredo da geometria diferencial. Considere dois vetores não nulos, tangentes a X em $q = (u, v)$, w_1 e w_2 . O ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$ determinado por w_1 e w_2 é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1||w_2|}.$$

Essa equação por si só não necessita da teoria local de superfícies, mas vamos expressar $\cos \theta$ em termos da primeira forma fundamental e nos aprofundar no assunto. Temos que a primeira forma fundamental é dada por: $I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$ e $w_1 + w_2$ é um vetor tangente a X em q .

Assim sendo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} I_q(w_1) &= \langle w_1, w_1 \rangle = |w_1|^2, \\ I_q(w_2) &= \langle w_2, w_2 \rangle = |w_2|^2 \text{ e} \\ I_q(w_1 + w_2) &= \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle = |w_1|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle + |w_2|^2. \end{aligned}$$

Fazendo as devidas manipulações algébricas, temos que:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{|w_1|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle + |w_2|^2 - |w_1|^2 - |w_2|^2}{2} \text{ e}$$

$$|w_1||w_2| = \sqrt{|w_1|^2|w_2|^2};$$

Portanto,

$$\cos \theta = \frac{I_q(w_1 + w_2) - I_q(w_1) - I_q(w_2)}{2\sqrt{I_q(w_1)I_q(w_2)}}.$$

Para curvas, usaremos do mesmo raciocínio. Dada duas curvas da superfície $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $\beta(r) = X(u(r), v(r))$ tais que $(u(t_0), v(t_0)) = (u(r_0), v(r_0))$, então o ângulo θ com que as curvas se intersectam é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(r_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)||\beta'(r_0)|}.$$

Em particular, o ângulo formado pelas curvas coordenadas de $X(u, v)$ em (u_0, v_0) é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u||X_v|}(u_0, v_0).$$

Escreveremos a mesma afirmação com os coeficientes da primeira forma fundamental. Sejam eles:

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Temos que:

$$\cos \theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}.$$

Assim, concluímos que as curvas coordenadas de uma superfície $X(u, v)$ se intersectam ortogonalmente se, e somente se, $F(u, v) = 0$ para todo (u, v) .

3.4 Área

O intuito desse tópico é abordar nocões de área de regiões de uma superfície. Para tal, vamos começar definindo o que seriam essas tais regiões.

Definição 3.6. Uma região D do plano é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ fechado e limitado, cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta de $\mathbb{R}^2$ e cujo bordo, homeomorfo a uma circunferência, é formado por um número finito de traços de curvas regulares.

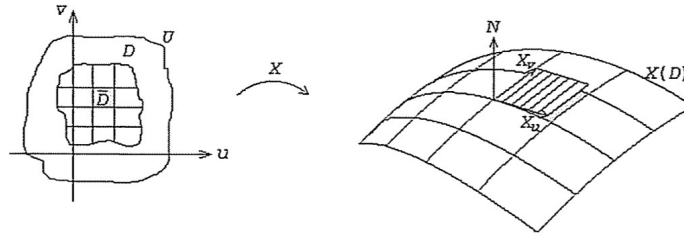
Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e uma região $D \subset U$ de $\mathbb{R}^2$. Denominamos $X(D)$ como a região da superfície X .

Definição 3.7. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de $\mathbb{R}^2$, tal que X restrita ao interior de D é injetiva. A área da região $X(D)$ é dada por

$$A(X(D)) = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv;$$

em que E, F, G são coeficientes da primeira forma quadrática.

Figura 3.4: Área de uma região



Introdução à Geometria Diferencial: [Tenenblat 2008]

Geometricamente, fixemos um ponto $(u_0, v_0) \in D$. A área do paralelogramo formado pelos vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ é dada por $|X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)|$. Este valor é aproximadamente igual a área de uma região em $X(\bar{D})$ em que $\bar{D} \subset D$ é um retângulo com vértice em (u_0, v_0) e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados u e v . Além disso, lembramos que $|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}$.

A área de uma região da superfície é invariante por mudança de coordenadas. Para melhor compreensão, vamos considerar uma reparametrização $X(u, v) = X \circ h(\bar{u}, \bar{v})$ de X por h , na qual $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $h : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ é uma mudança de coordenadas. Sejam $\bar{D} \subset \bar{U}$ e $D \subset U$ regiões do plano tais que $D = h(\bar{D})$. Assim, $A(X(D)) = A(\bar{X}(\bar{D}))$.

De fato, se $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$, então

$$\int \int_{\bar{D}} |X_{\bar{u}} \times X_{\bar{v}}| d\bar{u} d\bar{v} = \int \int_{\bar{D}} |X_u \times X_v| |\det J(h)| d\bar{u} d\bar{v} = \int \int_D |X_u \times X_v| du dv,$$

em que $J(h)$ se refere a matriz jacobiana de h e a última igualdade decorre do teorema de mudança de variáveis para integrais duplas.

Ao trabalharmos decomposição de áreas, podemos proceder de maneira semelhante à matemática básica. Assim, a área total é a soma das áreas decompostas, independente da decomposição. Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular e Q um subconjunto de $X(U)$ que pode ser decomposto em um número finito de regiões, então definimos a área de Q como soma das áreas das regiões da decomposição.

Exemplo 3.8. Seja S uma esfera de raio r cuja parametrização é dada por:

$$\begin{aligned} X(\theta, \varphi) &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta), \\ V &= \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}. \end{aligned}$$

Para a superfície em questão, temos

$$\begin{aligned} X_\theta &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta), \\ X_\varphi &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Calculando os coeficiente E, F e G , obtemos

$$\begin{aligned} E(\theta, \varphi) &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2, \\ F(\theta, \varphi) &= \langle X_\theta, X_\varphi \rangle = -r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0, \\ G(\theta, \varphi) &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} = r^2 \sin \theta.$$

Sabemos que $0 < \theta < \pi$ e $0 < \varphi < 2\pi$, então a área total de S^2 é dada por:

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \right] d\varphi \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^\pi d\varphi \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} [-\cos\pi - (-\cos 0)] d\varphi \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} 2 d\varphi \\
&= 2r^2 (\varphi)_0^{2\pi} \\
&= 4\pi r^2.
\end{aligned}$$

3.5 Aplicações

Os exercícios resolvidos nesse tópico são do livro Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies de Manfredo Perdigão do Carmo (2012).

1. Calcule, para os pontos regulares, a primeira forma fundamental das seguintes superfícies parametrizadas:

a) $X(u, v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos u)$; **elipsóide**.

Figura 3.5: Elipsóide

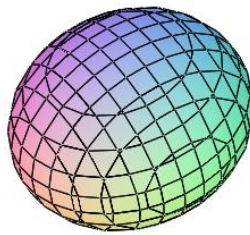


Imagem elaborada pela autora

Solução:

Seja w um vetor tangente à superfície em um ponto $X(u, v)$, dado na base X_u, X_v por

$$w = AX_u + BX_v.$$

A primeira forma fundamental da superfície parametrizada é:

$$\begin{aligned} I(w) = |w|^2 &= \langle AX_u + BX_v, AX_u + BX_v \rangle \\ &= A^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2AB \langle X_u, X_v \rangle + B^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= A^2 E + 2ABF + B^2 G. \end{aligned}$$

Para o elipsóide em questão, temos:

$$X_u = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, -c \sin u),$$

$$X_v = (-a \sin u \sin v, b \sin u \cos v, 0).$$

Sendo os coeficientes:

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u,$$

$$F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = b^2 \sin u \cos u \sin v \cos v - a^2 \sin u \cos u \sin v \cos v,$$

$$G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \sin^2 u \sin^2 v + b^2 \sin^2 u \cos^2 v.$$

E, portanto:

$$I(w) = A^2(a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v - c \sin^2 u)$$

$$+ 2AB(b^2 - a^2)(\sin u \cos u \sin v \cos v) + B^2 \sin^2 u(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v).$$

b) $X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$; **parabolóide elíptico.**

Figura 3.6: Parabolóide Elíptico

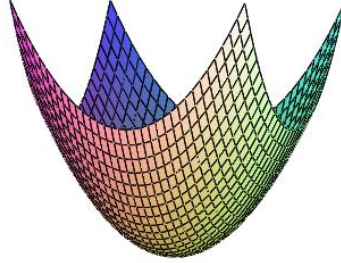


Imagem elaborada pela autora

Solução:

$$X_u = (a \cos v, b \sin v, 2u),$$

$$X_v = (-a \sin v, b \cos v, 0).$$

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 4u^2, \\
F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = -a^2 u \sin v \cos v + b^2 u \sin v \cos v, \\
G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = a^2 u^2 \sin^2 v + b^2 u^2 \cos^2 v.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a primeira forma fundamental da superfície é:

$$\begin{aligned}
I(w) &= A^2(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 4u^2) + 2AB(b^2 - a^2)(u \sin v \cos v) \\
&+ B^2 u^2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v).
\end{aligned}$$

c) $X(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$; **parabolóide hiperbólico.**

Figura 3.7: Parabolóide Hiperbólico

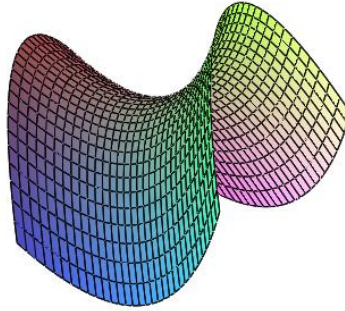


Imagem elaborada pela autora

Solução:

$$\begin{aligned}
X_u &= (a \cosh v, b \sinh v, 2u), \\
X_v &= (au \sinh v, bu \cosh v, 0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v + 4u^2, \\
F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = a^2 u \sinh v \cosh v + b^2 u \sinh v \cosh v, \\
G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = a^2 u^2 \sinh^2 v + b^2 u^2 \cosh^2 v.
\end{aligned}$$

E assim, temos a primeira forma fundamental:

$$I(w) = A^2(a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v + 4u^2) + 2AB(a^2 + b^2)(u \sinh v \cosh v) + B^2 u^2(a^2 \sinh^2 v + b^2 \cosh^2 v).$$

- d) $X(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$; **hiperbolóide de duas folhas.**

Figura 3.8: Hiperbolóide de Duas Folhas

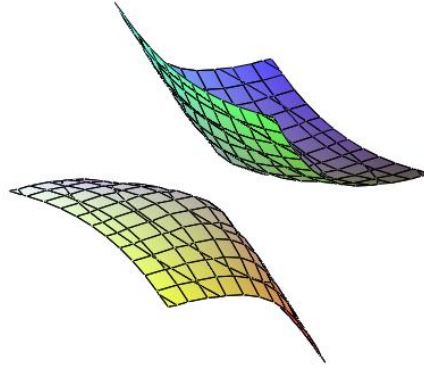


Imagem elaborada pela autora

Solução:

$$X_u = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u),$$

$$X_v = (-a \sinh u \sin v, b \sinh u \cos v, 0).$$

Sendo os coeficientes:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 u \cos^2 v + b^2 \cosh^2 u \sin^2 v + c^2 \sinh^2 u,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = b^2 \sinh u \cosh u \sin v \cos v - a^2 \sinh u \cosh u \sin v \cos v,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \sinh^2 u \sin^2 v + b^2 \sinh^2 u \cos^2 v.$$

E, portanto:

$$I(w) = A^2(a^2 \cosh^2 u \cos^2 v + b^2 \cosh^2 u \sin^2 v + c^2 \sinh^2 u) + 2AB(b^2 - a^2)(\sinh u \cosh u \sin v \cos v) + B^2 \sinh^2 u(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v).$$

2. **Seja $X(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ uma parametrização da esfera**

unitária S^2 . Seja P o plano $x = z \cotg \alpha, 0 < \alpha < \pi$ e β o ângulo agudo que a curva $P \cap S^2$ faz com o semi-meridiano $\varphi = \varphi_0$. Calcule $\cos \beta$.

Figura 3.9: Parametrização da Esfera Unitária S^2

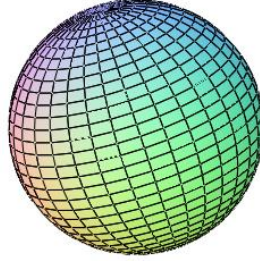


Imagem elaborada pela autora

Solução:

$$P = \{(z \cotg \alpha, y, z), y, z \in \mathbb{R}\};$$

A interseção $P \cap S^2$ ocorre quando

$$z^2 \cotg^2 \alpha + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - z^2(\cotg^2 \alpha + 1)}.$$

Seja

$$\alpha(t) = (\sen t \cos \varphi_0, \sen t \sen \varphi_0, \cos t)$$

uma parametrização do semimeridiano $\varphi = \varphi_0$ e

$$\beta(t) = (t \cotg \alpha, \sqrt{1 - t^2(\cotg^2 \alpha + 1)}, t)$$

uma parametrização de $P \cap S^2$. Tais curvas se intersectam quando

$$\begin{cases} t_0 \cotg \alpha = \sen t_0 \cos \varphi_0 \\ \sqrt{1 - t_0^2(\cotg^2 \alpha + 1)} = \sen t_0 \sen \varphi_0 \\ t_0 = \cos t_0 \end{cases}$$

$$1 = \cos^2 t_0 + \sen^2 t_0 \Rightarrow 1 = t_0^2 + \frac{t_0^2 \cotg^2 \alpha}{\cos^2 \varphi_0} \Rightarrow t_0^2 = \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cotg^2 \alpha + \cos^2 \varphi_0}.$$

Portanto,

$$\cos \beta = \cos \left(\frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|} \right).$$

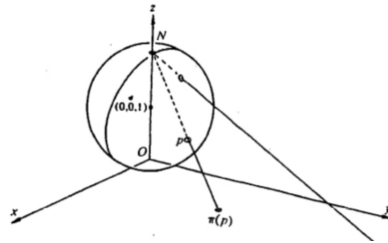
3. Obtenha a primeira forma fundamental da esfera na parametrização dada pela projeção estereográfica.

Solução:

Uma maneira de definir um sistema de coordenadas para a esfera S^2 , dada por $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$, é considerar a chamada projeção estereográfica $\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, que leva um ponto $p = (x, y, z)$ da esfera S^2 menos o pólo norte $N = (0, 0, 2)$ sobre o plano xy . Seja $(u, v) = \pi(x, y, z)$, onde $(x, y, z) \in S^2 - \{N\}$ e $(u, v) \in \text{plano } xy$. Observe que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ é dada por

$$\pi^{-1} \begin{cases} x = \frac{4u}{u^2+v^2+4}, \\ y = \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \\ z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}. \end{cases}$$

Figura 3.10: Projeção Estereográfica



Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies: [Carmo 2012]

Além disso, utilizando a projeção estereográfica, é possível cobrir a esfera com duas vizinhanças coordenadas.

Considerando essas informações, temos:

$$X(u, v) = \pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right).$$

Sendo as derivadas parciais

$$\begin{aligned} X_u &= \left(\frac{4(u^2 + v^2 + 4) - 8u^2}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{4u(u^2 + v^2 + 4) - 4u(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right) \\ &= \left(\frac{-4u^2 + 4v^2 + 16}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{16u}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_v &= \left(\frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{4(u^2 + v^2 + 4) - 8v^2}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{4v(u^2 + v^2 + 4) - 4v(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right) \\ &= \left(\frac{-8uv}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{4u^2 - 4v^2 + 16}{(u^2 + v^2 + 4)^2}, \frac{16v}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \right). \end{aligned}$$

E os coeficientes

$$\begin{aligned} E &= \frac{(-4u^2 + 4v^2 + 16)^2 + 64u^2v^2 + 256u^2}{(u^2 + v^2 + 4)^4}, \\ F &= \frac{-8uv(-4u^2 + 4v^2 + 16) - 8uv(4u^2 - 4v^2 + 16) + 256uv}{(u^2 + v^2 + 4)^4} = 0, \\ G &= \frac{64u^2v^2 + (4u^2 - 4v^2 + 16)^2 + 256v^2}{(u^2 + v^2 + 4)^4}. \end{aligned}$$

Logo, se w é um vetor tangente a $X(u, v)$, dado na base $\{X_u, X_v\}$ por $w = AX_u + BX_v$, temos que:

$$\begin{aligned} I(w) &= A^2 \left[\frac{(-4u^2 + 4v^2 + 16)^2 + 64u^2v^2 + 256u^2}{(u^2 + v^2 + 4)^4} \right] \\ &\quad + B^2 \left[\frac{64u^2v^2 + (4u^2 - 4v^2 + 16)^2 + 256v^2}{(u^2 + v^2 + 4)^4} \right]. \end{aligned}$$

4. Dada a superfície parametrizada

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log \cos v + u), \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2},$$

mostre que as duas curvas $X(u_1, v)$ e $X(u_2, v)$ determinam segmentos com comprimentos iguais sobre todas as curvas $X(u, \text{const.})$.

Figura 3.11: Superfície Parametrizada Ex.4

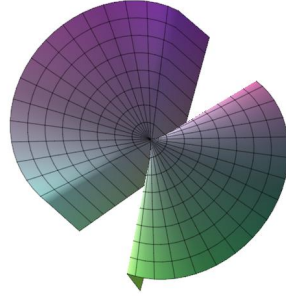


Imagem elaborada pela autora

Solução:

Observe que

$$\begin{aligned}X_u &= (\cos v, \sin v, 1), \\X_v &= (-u \sin v, u \cos v, -tg v).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}E &= \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2, \\F &= -u \cos v \sin v + u \sin v \cos v - tg v = -tg v, \\G &= u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + tg^2 v = u^2 + tg^2 v.\end{aligned}$$

Assim, para v_0 fixado, temos

$$E(u, v_0) = 2, \quad F(u, v_0) = -tg v_0 \text{ e } G(u, v_0) = u^2 + tg^2 v_0.$$

Consideramos $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, onde $u(t) = t$ e $v(t) = v_0$. Assim, $u'(t) = 1$ e $v'(t) = 0$. Logo, o comprimento de arco de α , entre u_1 e u_2 é dado por

$$\begin{aligned}S(t) &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(t, v_0)(u')^2 + 2F(t, v_0)u'v' + G(t, v_0)(v')^2} dt \\&= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(t, v_0)} dt = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{2} dt = \sqrt{2}(u_2 - u_1).\end{aligned}$$

Provamos, portanto, que o comprimento de arco de α entre u_1 e u_2 independe de v . Logo, tais comprimentos são todos iguais sobre $X(u, \text{const.})$.

5. Mostre que a área A de uma região limitada R da superfície $z = f(x, y)$ é

$$A = \int \int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy,$$

onde Q é a projeção ortogonal de R sobre o plano xy .

Solução:

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dado por $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$, em que $U \subset D_f$ (domínio de f) e $R \subset X(U)$. Assim, a área de R é dada por

$$A(R) = \int \int_Q |X_x \times X_y| \, dx \, dy,$$

e $Q = X^{-1}(R) = \pi(R)$, sendo $\pi(x, y, z) = (x, y)$;

Mas $X_x = (1, 0, f_x)$ e $X_y = (0, 1, f_y)$. Logo,

$$\begin{aligned} |X_x \times X_y| &= \left| \text{Det} \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix} \right| \\ &= |(-f_x, -f_y, 1)| \\ &= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$A(R) = \int \int_Q |X_x \times X_y| \, dx \, dy = \int \int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy;$$

em que Q é a projeção ortogonal de R sobre o plano xy .

6. Mostre que

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u \operatorname{sen} \alpha \cos v, u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v, u \cos \alpha), \\ 0 &< u < \infty, \quad 0 < v < 2\pi, \quad \alpha = \text{const.}, \end{aligned}$$

é uma parametrização do cone tendo 2α como ângulo do vértice. Na vizinhança coordenada correspondente, prove que a curva

$$X(c \exp(v \operatorname{sen} \alpha \cotg \beta), v), \quad c = \text{const.}, \beta = \text{const.},$$

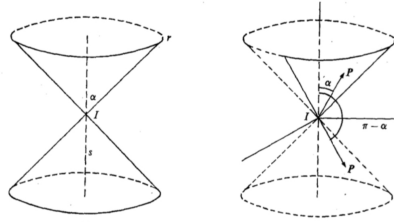
intersecta as geratrizes do cone ($v = \text{const.}$) sob o ângulo constante β .

Solução:

Primeiramente, vamos fazer considerações a respeito da superfície em questão.

Definição 3.9. Chama-se de cone de revolução a superfície gerada pela rotação de uma reta em torno de outra que a intercepta. Na figura abaixo, consideramos a reta r girando em torno da reta s . O ponto I , intercessão de r e s , é o vertice do cone e a reta s é chamada de eixo do cone.

Figura 3.12: Cone de Revolução 1



Geometria Analítica: [Reis e Silva 1996]

A equação do cone pode ser obtida considerando um sistema de coordenadas em que o eixo z coincide com o eixo do cone e a reta r está contida no plano yz . Dessa forma, temos para o plano yz uma equação de r é da forma

$$y = mz, \quad x = 0,$$

em que m é a tangente do ângulo α dado pelas retas r e s . Assim,

$$F(y, z) = y - mz = 0.$$

Considerando que a rotação acontece em torno do eixo z , temos que

$$F(y_1, z) = y_1 - mz = 0.$$

Sendo

$$y_1^2 = x^2 + y^2 \text{ ou } x^2 + y^2 = m^2 z^2.$$

Figura 3.13: Cone de Revolução 2

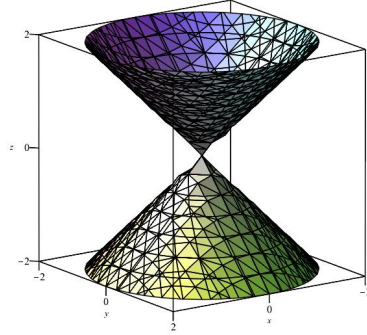


Imagem elaborada pela autora

Dessa forma, temos que a parametrização fornecida satisfaz a equação do cone. Além disso:

- I) X é diferenciável pois todas as funções coordenadas são;
- II) X é contínua, e sejam

$$\begin{cases} x = u \operatorname{sen} \alpha \cos v \\ y = u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v \\ z = u \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \Rightarrow u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = u \operatorname{sen} \alpha, \text{ sendo } u \operatorname{sen} \alpha > 0. \\ \Rightarrow \cos v &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \operatorname{sen} v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Logo, a inversa X^{-1} é contínua.

III)

$$dX_q = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha \cos v & -u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v & u \operatorname{sen} \alpha \cos v \\ \cos \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = u \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 v + u \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 v = u \operatorname{sen}^2 \alpha \neq 0$$

Logo, dX_q é injetiva e, portanto, X é parametrização. Queremos provar agora que a curva

$$X(c \exp(v \operatorname{sen} \alpha \cotg \beta), v), \quad c = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

intersecta as geratrizes do cone ($v = \text{const.}$) sob o ângulo constante β . Definimos

$$\begin{aligned} f(v) &= c \exp(v \operatorname{sen} \alpha \cotg \beta), \\ \bar{\alpha}(v) &= (f(v), v), \\ \bar{\beta}(u) &= (u, v_0), \\ \Rightarrow \bar{\alpha}'(v) &= (f'(v), 1) \text{ e } \bar{\beta}'(u) = (1, 0). \end{aligned}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} X_u &= (\operatorname{sen} \alpha \cos v, \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v, \cos \alpha), \\ X_v &= (-u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v, u \operatorname{sen} \alpha \cos v, 0), \\ E &= 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Seja a curva $\alpha = X \circ \bar{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \alpha' &= X_u \cdot f' + X_v \cdot 1 \text{ e} \\ \beta' &= X_u \cdot 1 + X_v \cdot 0. \\ \langle \alpha', \beta' \rangle &= \langle X_u f' + X_v, X_u \rangle = f', \\ \langle \alpha', \alpha' \rangle &= (f')^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha, \\ \langle \beta', \beta' \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Observe que $f' = \operatorname{sen} \alpha \cotg \beta f$. Na interseção temos $u = f(v)$ e $v = v_0$. Assim,

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{|\alpha'| |\beta'|} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cotg \beta f(v_0)}{\sqrt{f^2(v_0) \operatorname{sen}^2 \alpha (\cotg^2 \beta + 1)}}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} \sqrt{f^2(v_0) \operatorname{sen}^2 \alpha (\cotg^2 \beta + 1)} &= \sqrt{f^2(v_0) \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \beta}} \\ &= \pm c \exp(v_0 \operatorname{sen} \alpha \cotg \beta) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \\ \Rightarrow \cos \theta &= \pm \cos \beta. \end{aligned}$$

7. As curvas coordenadas de uma parametrização $X(u, v)$ constituem uma

rede de Tchebyshef se os comprimentos dos lados opostos de qualquer quadrilátero formado por elas são iguais. Mostre que uma condição necessária e suficiente para que isso aconteça é

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Solução:

($\Rightarrow$) Sejam $(u_0, v_0) \in U$ fixo e $(u, v) \in U$ fixo porém arbitrário. Sejam $\alpha_1(t) = X(t, v_0)$ e $\alpha_2(t) = X(t, v)$ curvas coordenadas da parametrização X . Sabemos que os comprimentos de arcos de α_1 e α_2 , entre u_0 e u , são dados por

$$\int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v_0)} dt \quad \text{e} \quad \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v)} dt,$$

respectivamente. Como estamos supondo que as curvas coordenadas constituem uma rede de Tchebychef, segue que

$$\int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v_0)} dt = \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v)} dt, \quad \forall (u, v) \in U.$$

Diferenciando com respeito a u , temos

$$\sqrt{E(u, v_0)} = \sqrt{E(u, v)}, \quad \forall (u, v) \in U.$$

Logo $E(u, v_0) = E(u, v)$, para todo $(u, v) \in U$, e, portanto,

$$\frac{\partial E}{\partial v}(u, v) = 0 \quad \forall (u, v) \in U.$$

De maneira análoga teremos $\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = 0$.

($\Leftarrow$) Se $\frac{\partial E}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = 0$, então $E = E(u)$ e $G = G(v)$. Portanto, os comprimentos dos lados opostos do quadrilátero formado pelas curvas coordenadas são iguais, já que

$$\int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v_0)} dt = \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v)} dt,$$

e

$$\int_{v_0}^v \sqrt{G(u_0, t)} dt = \int_{v_0}^v \sqrt{G(u, t)} dt,$$

$(u_0, v_0), (u, v) \in U$. Logo as curvas coordenadas constituem uma rede de Tchebyshef.

8. Prove que sempre que as curvas coordenadas constituem uma rede de Tchebyshef (ver exercício 7) é possível reparametrizar a vizinhança coordenada de tal maneira que os novos coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = 1, \quad F = \cos \theta, \quad G = 1.$$

onde θ é o ângulo formado pelas curvas coordenadas.

Solução:

Pelo exercício anterior, os comprimentos dos lados opostos de qualquer quadrilátero formado pelas curvas coordenadas de uma parametrização $X(u, v)$ são iguais (Rede de Tchebyshef) se, e somente se, $\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$. E,

$$\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \Rightarrow E = E(u) \text{ e } G = G(v).$$

Reparametrizamos a vizinhança coordenada pela mudança de coordenada $h(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$, em que

$$\bar{u}(u, v) = \int_0^u \sqrt{E(\bar{u})} d\bar{u} \text{ e } \bar{v}(u, v) = \int_0^v \sqrt{G(\bar{v})} d\bar{v}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \bar{X}(h(u, v)) = \bar{X}(\bar{u}, \bar{v}), \\ X_u &= \bar{X}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \bar{X}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = \bar{X}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}, \\ X_v &= \bar{X}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \bar{X}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \bar{X}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = \sqrt{E(u)}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \sqrt{G(v)},$$

Portanto,

$$\begin{aligned} X_u &= \bar{X}_{\bar{u}} \sqrt{E(u)}, \\ \Rightarrow |X_u|^2 &= |\bar{X}_{\bar{u}}|^2 E \\ \Rightarrow E &= \bar{E} E \Rightarrow \bar{E} = 1. \end{aligned}$$

Obs.: E não pode ser zero pois $E = |X_u|^2$ e X_u é a coluna da derivada de X , que é injetiva.

Analogamente, $\bar{G} = 1$. Finalmente,

$$\bar{F} = \langle \bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}} \rangle = \left\langle \frac{X_u}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u||X_v|} = \cos \theta,$$

em que θ é o ângulo formado pelas curvas coordenadas. Portanto, descobrimos uma nova parametrização da vizinhança coordenada tal que

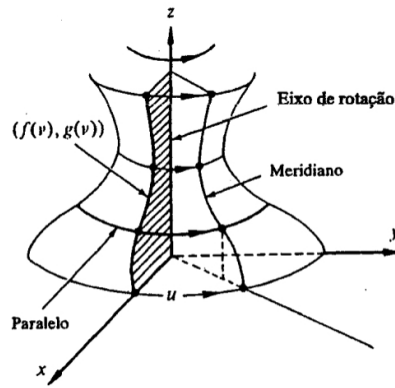
$$\bar{E} = 1, \quad \bar{F} = \cos \theta \text{ e } \bar{G} = 1.$$

9. **Mostre que uma superfície de revolução sempre pode ser parametrizada de modo que**

$$E = E(v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Solução:

Figura 3.14: Superfície de Revolução



Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies: [Carmo 2012]

Seja S uma superfície de revolução. Então S é o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana C em torno de um eixo no plano que não encontra curva. Consideremos o plano xz como o plano da curva e o eixo O_z como o eixo de rotação. Seja

$$\begin{cases} x = f(v) \\ z = g(v) \end{cases}; \alpha(v) = (f(v), g(v)), v \in I$$

parametrização de C pelo comprimento de arco, isto é, $f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1$. Seja θ o

ângulo de rotação em torno do eixo O_z . Assim, obtemos a parametrização de S

$$X(\theta, v) = (f(v) \cos \theta, f(v) \sen \theta, g(v)), v \in I, \theta \in (0, 2\pi)$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-f(v) \sen \theta, f(v) \cos \theta, 0), \\ X_v &= (f'(v) \cos \theta, f'(v) \sen \theta, g'(v)). \end{aligned}$$

Corroborando na nossa afirmação inicial:

$$\begin{aligned} E &= f^2(v) \sen^2 \theta + f^2(v) \cos^2 \theta = f^2(v) = E(v), \\ F &= -f(v)f'(v)\sen \theta \cos \theta + f(v)f'(v)\sen \theta \cos \theta = 0, \\ G &= f'(v)^2 \cos^2 \theta + f'(v)^2 \sen^2 \theta + g'(v)^2 = f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1. \end{aligned}$$

10. **Seja $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ o plano xy e seja $X : U \rightarrow P$ uma parametrização de P dada por**

$$X(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sen \theta),$$

onde

$$U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental de P nesta parametrização.

Solução:

Figura 3.15: Plano xy

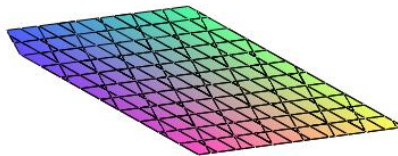


Imagem elaborada pela autora

Calculemos E, F e G . Observe que

$$X_\rho = (\cos \theta, \sin \theta) \text{ e } X_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta).$$

Assim,

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \\ F &= -\rho \sin \theta \cos \theta + \rho \sin \theta \cos \theta = 0, \\ G &= \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2. \end{aligned}$$

Portanto, $E = 1$, $F = 0$ e $G = \rho^2$.

11. **Seja S uma superfície de revolução e C a sua curva geratriz. Seja s o comprimento de um arco de C e denote por $\rho = \rho(s)$ a distância do ponto correspondente a s em C ao eixo de rotação.**

- a) **(Teorema de Pappus.) Mostre que a área de S é**

$$2p \int_0^l \pi(s) ds,$$

onde l é o comprimento de C .

Solução:

Seja

$$\begin{cases} x = f(s) \\ z = g(s) \end{cases}; \alpha(s) = (f(s), g(s)), s \in I$$

parametrização de C pelo comprimento de arco. Seja

$$X(\theta, s) = (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, g(s)), s \in I, \theta \in (0, 2\pi)$$

parametrização de S . Assim,

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-f(s) \sin \theta, f(s) \cos \theta, 0), \\ X_s &= (f'(s) \cos \theta, f'(s) \sin \theta, g'(s)). \end{aligned}$$

e $E = f(s)^2$, $F = 0$ e $G = 1$. Logo $|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}$.

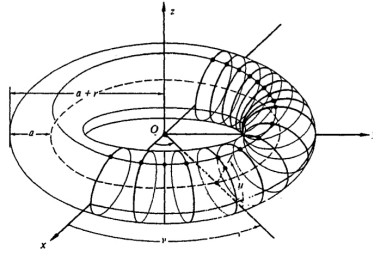
$$A(S) = \int \int_Q |X_\theta \times X_s| d\theta ds = \int \int_Q \sqrt{EG - F^2} d\theta ds = \int \int_Q \sqrt{f^2(s)} d\theta ds.$$

Observe que $\rho(s) = |f(s)| = \sqrt{f^2(s)}$. Assim,

$$A(S) = \int_0^l \int_0^{2\pi} \rho(s) \, d\theta ds = \int_0^l \rho(s) \theta \Big|_0^{2\pi} ds = 2\pi \int_0^l \rho(s) \, ds.$$

b) **Aplique a parte a para calcular a área de um toro de revolução.**

Figura 3.16: Toro de Revolução 1



Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies: [Carmo 2012]

Solução:

Considere o círculo de raio r e centro $(a, 0)$ no plano xz .

$$\alpha(u) = (a + r \cos u, r \sin u), \quad 0 < u < 2\pi.$$

Temos que

$$\begin{aligned} |\alpha'(u)| &= |(-r \sin u, r \cos u)| = \sqrt{r^2(\sin^2 u + \cos^2 u)} = r \\ S(u) &= \int_0^u |\alpha'(u)| du = \int_0^u r \, du = ru \\ \Rightarrow u(s) &= \frac{s}{r}. \end{aligned}$$

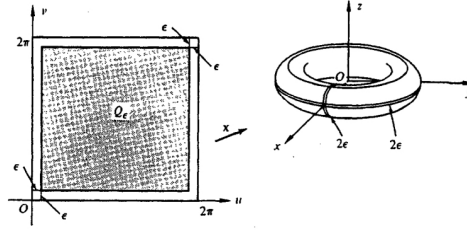
Assim, reparametrizando $\alpha(u)$ pelo comprimento de arco, temos

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \left(a + r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}\right), \quad 0 < s < 2\pi r \\ \Rightarrow p(s) &= a + r \cos \frac{s}{r}. \end{aligned}$$

Logo, por a), temos

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_0^{2\pi r} p(s) \, ds = 2\pi \int_0^{2\pi r} \left(a + r \cos \frac{s}{r}\right) ds \\ &= 2\pi \left(as + r^2 \sin \frac{s}{r}\right) \Big|_0^{2\pi r} = 4\pi r^2 a. \end{aligned}$$

Figura 3.17: Toro de Revolução 2



Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies: [Carmo 2012]

12. **Mostre que a área de um tubo de raio r em torno de uma curva α é $2\pi r$ multiplicado pelo comprimento de α .**

Solução:

Inicialmente, faremos algumas considerações sobre superfícies tubulares.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular com curvatura diferente de zero em todos os pontos e parametrizada pelo comprimento de arco. Seja

$$X(s, v) = \alpha(s) + r(n(s) \cos v + b(s) \sin v),$$

$$r = \text{const.} \neq 0, s \in I, v \in (0, 2\pi).$$

uma superfície parametrizada (o tubo de raio r em torno de α), onde n é o vetor normal e b é o vetor binormal de α .

Lembrando que

$$\begin{aligned} t' &= kn, \\ n' &= -kt - \tau b, \\ b' &= \tau n. \end{aligned}$$

Então temos,

$$\begin{aligned}
X_s &= \alpha'(s) + r[n'(s)\cos v + b'(s)\sin v] \\
&= t + r \cos v(-kt - \tau b) + r \sin v(\tau n) \\
&= t(1 - kr \cos v) + \tau rn \sin v - \tau rb \cos v, \\
X_v &= r[-n(s)\sin v + b(s)\cos v],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_s \times X_v &= -(1 - kr \cos v)rb \sin v - (1 - kr \cos v)rn \cos v \\
&\quad + \tau tr^2 \sin v \cos v - \tau tr^2 \sin v \cos v \\
&= -r(1 - kr \cos v)(b \sin v + n \cos v).
\end{aligned}$$

Assim,

$$|X_s \times X_v| = |r(1 - r \cos v k(s))| = r(1 - r \cos v k(s)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int_0^s \int_0^{2\pi} r(1 - r \cos v k(s)) dv ds \\
&= \int_0^s \left[\int_0^{2\pi} r dv - r k(s) \int_0^{2\pi} \cos v dv \right] ds \\
&= \int_0^s \left[\int_0^{2\pi} rv \Big|_0^{2\pi} - r k(s) \sin v \Big|_0^{2\pi} \right] ds \\
&= 2\pi r \int_0^s |\alpha'(s)| ds.
\end{aligned}$$

13. (Helicóides Generalizados) Uma generalização natural, tanto de superfícies de revolução como de helicóides, é obtida da seguinte maneira. Suponha que uma curva plana regular C , que não intersecta uma reta E no plano C , seja deslocada por um movimento rígido helicoidal em torno de E ; isto é, de forma que cada ponto de C descreva uma hélice (ou círculo) tendo E como eixo. O conjunto S gerado pelo deslocamento de C é chamado um helicóide generalizado com eixo E e geratriz C . Se o movimento helicoidal é uma rotação pura em torno de E , S é uma superfície de revolução; se C é uma reta perpendicular a E , S é um (pedaço do) helicóide canônico. Escolha os eixos coordenados de modo que E seja o eixo Oz e C esteja contida no plano yz . Prove que

- a) Se $(f(s), g(s))$ é uma parametrização de C pelo comprimento de arco s ,

$a < s < b, f(s) > 0$, então $X : U \rightarrow S$, onde:

$$U = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2; a < s < b, 0 < u < 2\pi\}$$

e

$$X(s, u) = (f(s) \cos u, f(s) \sin u, g(s) + cu), \quad c = \text{const.},$$

é uma parametrização de S . Conclua que S é uma superfície regular.

Solução:

Provemos que $X : U \rightarrow S$ é uma parametrização de S .

I) Vamos provar inicialmente que $X(U) \subset S$. De fato, fixado s_0 , devemos demonstrar que

$$\alpha(u) = X(s_0, u) = (f(s_0) \cos u, f(s_0) \sin u, g(s_0) + cu),$$

é uma hélice.

$$\alpha'(u) = (-f(s_0) \sin u, f(s_0) \cos u, c).$$

Assim, $\langle \alpha'(u), (0, 0, 1) \rangle = c = \text{const.}$ e, portanto, as retas tangentes de α fazem um ângulo constante com o eixo z . Logo, pelo exercício 17 da seção 1.5, α é uma hélice. Logo, $\alpha(u) \subset S$.

II) $X : U \rightarrow S$ é diferenciável.

III) $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

IV) X é contínua.

Se

$$X(s, u) = X(t, v) \Rightarrow \begin{cases} f(s) \cos u = f(t) \cos v \\ f(s) \sin u = f(t) \sin v \\ g(s) + cu = g(t) + cv \end{cases} \Rightarrow g(s) - g(t) = c(v - u)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f^2(s)\cos^2 u + f^2(s)\sin^2 u = f^2(t)\cos^2 v + f^2(t)\sin^2 v \\
&\Rightarrow f^2(s) = f^2(t) \\
&\Rightarrow f(s) = f(t) \\
&\Rightarrow s = t \\
&\Rightarrow u = v \\
&\Rightarrow X \text{ é injetiva e, portanto, sobrejetiva sobre sua imagem.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} x &= f(s) \cos u \\ y &= f(s) \sin u \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x^2 + y^2 = f^2(s) \Rightarrow s = f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}) \\
z = g(s) + cu &\Rightarrow u = \frac{z - g(\sqrt{x^2 + y^2})}{c} \\
\Rightarrow x^{-1}(x, y, z) &= \left(f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}), \frac{z - g(\sqrt{x^2 + y^2})}{c} \right).
\end{aligned}$$

Portanto, x é homeomorfismo. Logo, X é parametrização de S .

Tomando $y : V \rightarrow S$, $V = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2; a < s < b, -\pi < u < \pi\}$ por $Y(s, u) = (f(s)\cos u, f(s)\sin u, g(s) + cu)$, temos, de maneira análoga, que Y é parametrização de S e que, além disso, $S \subset X(U) \cup Y(V)$. Logo, S é superfície regular.

- b) **As curvas coordenadas da parametrização acima são ortogonais ($F = 0$) se e somente se $X(U)$ é uma superfície de revolução ou um (pedaço do) helicóide canônico.**

Solução:

$$\begin{aligned}
F(s, u) &= \langle X_s, X_u \rangle \\
&= \langle (f'(s) \cos u, f'(s) \sin u, g'(s)), (-f(s) \sin u, f(s) \cos u, c) \rangle \\
&= g'(s) \cdot c = 0.
\end{aligned}$$

Se $c = 0$, S é uma superfície de revolução, pois teríamos

$$X(s, u) = (f(s) \cos u, f(s) \sin u, g(s)).$$

Se $g'(s) = 0$ para todo s , ou seja, $g(s) = k = \text{const.}$

$$X(s, u) = (f(s) \cos u, f(s) \sin u, ku + c).$$

Assim, S é um pedaço do helicóide canônico.

14. **(Gradiente em Superfícies)** O gradiente de uma função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável $\text{grad } f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada ponto $p \in S$ um vetor $\text{grad } f(p) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle_p = df_p(v) \text{ para todo } v \in T_p S.$$

Mostre que

- a) Se E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental em uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, então $\text{grad } f(p)$ em $X(U)$ é dado por

$$\text{grad } f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} X_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} X_v.$$

Em particular, se $S = \mathbb{R}^2$ com coordenadas x, y ,

$$\text{grad } f = f_x e_1 + f_y e_2,$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ (assim, a definição dada coincide com a definição usual do gradiente no plano).

Solução:

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrização. Queremos calcular $\text{grad } f(p)$ em $X(U)$. Como $\text{grad } f(p) \in T_p S$ e $\{X_u, X_v\}$ é uma base de $T_p S$, considere $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\text{grad } f(p) = AX_u(q) + BX_v(q).$$

Assim,

$$\langle \text{grad } f(p), X_u(q) \rangle = A \langle X_u(q), X_u(q) \rangle + B \langle X_v(q), X_u(q) \rangle = AE + BF$$

$$\text{Analogamente, } \langle \text{grad } f(p), X_v(q) \rangle = AF + BG$$

Observe que $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Assim $d(f \circ X)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Logo $d(f \circ X)_q(e_1) = (f \circ X)_u(q) \cdot 1 + (f \circ X)_v(q) \cdot 0 = (f \circ X)_u(q)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} f_u(p) &= (f \circ X)_u(q) = d(f \circ X)_q(e_1) \\ &= df_p(dX_q \cdot e_1) = df_p(X_u(q)) \\ &= \langle \text{grad } f(p), X_u(q) \rangle = AE + BF, \\ f_u(p) &= AE + BF. \end{aligned}$$

Analogamente, $f_v(p) = AF + BG$ Logo,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} f_u G & -f_v F \\ -f_u F & f_v E \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow A &= \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \text{ e } B = \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \\
 \Rightarrow \text{grad } f &= \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} X_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} X_v.
 \end{aligned}$$

Em particular, se $S = \mathbb{R}^2$ (com coordenadas x, y), temos que $X(x, y) = (x, y, 0)$

$$\begin{aligned}
 X_x(x, y) &= (1, 0, 0) = e_1 \\
 X_y(x, y) &= (0, 1, 0) = e_2
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} E = 1 \\ F = 0 \\ G = 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\text{grad } f = \frac{f_x \cdot 1 - f_y \cdot 0}{1 \cdot 1 - 0^2} e_1 + \frac{f_y \cdot 1 - f_x \cdot 0}{1 \cdot 1 - 0^2} e_2 = f_x e_1 + f_y e_2.$$

- b) **Fixando $p \in S$ e deixando v variar no círculo unitário $|v| = 1$ em $T_p S$, então $df_p(v)$ é máximo se e somente se $v = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$ (assim, $\text{grad } f(p)$ fornece a direção de variação máxima de f em p).**

Solução:

Observe que

$$df_p(v) \text{ máximo} \Rightarrow \langle \text{grad } f(p), v \rangle = |\text{grad } f(p)| |v| \cos \theta \text{ máximo}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \text{grad } f(p) \text{ e } v \text{ são L.D}$$

$$\Rightarrow v \text{ é unitário na direção de } \text{grad } f(p)$$

$$v = \frac{\text{grad } f(p)}{|\text{grad } f(p)|}.$$

- c) **Se $\text{grad } f \neq 0$ em todos os pontos da curva de nível $C = \{q \in S; f(q) =$**

$const.\}$, então C é uma curva regular em S e $\text{grad } f$ é normal a C em todos os pontos de C .

Solução:

$$\text{grad } f \neq 0 \text{ em } C = \{q \in S; f(q) = \text{const.}\} = f^{-1}(\text{const.}).$$

Como $\text{grad } f \neq 0$, segue que const. é um valor regular de f . Pelo exercício 28b da Seção 2.4 (Página 109), C é uma curva regular em S por ser imagem inversa de um valor regular por uma função diferenciável.

15. (Famílias de Curvas Ortogonais)

- a) **Sejam E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície regular S na parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Sejam $\varphi(u, v) = \text{const.}$ e $\psi(u, v) = \text{const.}$ duas famílias de curvas regulares em $X(U) \subset S$. Prove que essas duas famílias são ortogonais (i.e., sempre que duas curvas de famílias distintas se intersectam, as suas retas tangentes são ortogonais) se e somente se**

$$E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u = 0.$$

Solução:

Seja $f : X(U) \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f = \varphi \circ X^{-1}$. Seja C_1 uma curva da família $\varphi(u, v) = \text{const.}$, isto é,

$$\begin{aligned} C_1 &= f^{-1}(c), c = \text{const.} \\ &= (\varphi \circ X^{-1})^{-1}(c) \\ &= \{p \in X(U); \varphi(X^{-1}(p)) = c\}. \end{aligned}$$

Seja $\alpha : I \rightarrow X(U)$ uma parametrização de C_1 , ou seja, $\alpha(t) = X(\bar{\alpha}(t))$, onde $\bar{\alpha} : I \rightarrow U$, $\bar{\alpha}(t) = (u_1(t), v_1(t))$, é uma curva $\bar{C}_1$ em U dada por $\varphi^{-1}(c)$. Assim, temos que $\langle \bar{\alpha}', \nabla \varphi \rangle = 0$ e, portanto,

$$\bar{\alpha}' = \lambda_1(-\varphi_v, \varphi_u).$$

Considere agora $C_2 \perp C_1$ uma curva da família $\psi(u, v) = \text{const.}$ De forma análoga, considere $\beta : J \rightarrow X(U)$, dada por

$$\beta(s) = X(\bar{\beta}(s)) = X(u_2(s), v_2(s)),$$

parametrização de $\bar{C}_2$ na qual $\bar{\beta} = (u_2, v_2)$ é parametrização de $\bar{C}_2$. Portanto $\langle \bar{\beta}', \nabla \psi \rangle = 0$ e, assim,

$$\bar{\beta}' = \lambda_2(-\psi_v, \psi_u).$$

Logo,

$$\begin{aligned} C_1 \perp C_2 &\Leftrightarrow \langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle dX_q \bar{\alpha}', dX_q \bar{\beta}' \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 \langle dX_q(-\varphi_v, \varphi_u), dX_q(-\psi_v, \psi_u) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle -X_u \varphi_v + X_v \varphi_u, -X_u \psi_v + X_v \psi_u \rangle = 0, \end{aligned}$$

Portanto,

$$C_1 \perp C_2 \Leftrightarrow E\varphi_v \psi_v - F(\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u) + G\varphi_u \psi_u = 0;$$

como queríamos demonstrar.

- b) **Aplique a parte a para mostrar que na vizinhança coordenada $X(U)$ do helicóide do $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ com $0 < u < 2\pi$ e $-\infty < v < \infty$, as duas famílias de curvas regulares**

$$\begin{aligned} v \cos u &= \text{const.}, & v &\neq 0, \\ (v^2 + a^2) \sin^2 u &= \text{const.}, & v &\neq 0, \quad u \neq \pi, \end{aligned}$$

são ortogonais.

Solução:

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Tome

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= v \cos u = \text{const.}, \quad v \neq 0, \text{ e} \\ \psi(u, v) &= (v^2 + a^2) \sin^2 u = \text{const.}, \quad v \neq 0, \quad u \neq \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_u &= (-v \sin u, v \cos u, a), \\ X_v &= (\cos u, \sin u, 0). \end{aligned}$$

Assim, temos que $E = v^2 + a^2$, $F = 0$ e $G = 1$.

$$\varphi_u = -v \operatorname{sen} u,$$

$$\varphi_v = \cos u,$$

$$\psi_u = 2(v^2 + a^2) \operatorname{sen} u \cos u,$$

$$\psi_v = 2v \operatorname{sen}^2 u.$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u = \\ &2v(v^2 + a^2) \operatorname{sen}^2 u \cos u - 2v(v^2 + a^2) \operatorname{sen}^2 u \cos u = 0. \end{aligned}$$

Logo, por a), as duas famílias de curvas regulares são ortogonais.

Conclusão

Nesse trabalho conhecemos diversas superfícies regulares e um meio eficaz de calcularmos suas medidas de comprimento, ângulo e área desconsiderando o espaço em que esta se encontra: a primeira forma fundamental. Esta estrutura geométrica possui interessantes aplicações, as quais verificamos ao resolver os exercícios propostos por Manfredo Perdigão em seu livro Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies [Carmo 2012]. De tal forma, o estudo da primeira forma fundamental e suas aplicações é de grande importância para a matemática.

As superfícies que tratamos são subconjuntos S de $\mathbb{R}^3$ para os quais é possível trabalhar com funções diferenciáveis. Assim, em cada ponto $p \in S$ definimos um plano tangente $T_p S$. Em torno do ponto desenvolvemos a geometria diferencial a partir da variação do plano tangente. Ao aprofundarmos na geometria intrínseca, observamos que todas as noções (curvatura Gaussiana, geodésicas, completitude, etc.) dependem exclusivamente da escolha de um produto interno em cada $T_p S$.

Como desdobramento do trabalho, podemos estudar as superfícies abstratas (variedade diferenciável de dimensão 2). Neste caso, definiremos abstratamente (isto é, sem referência ao $\mathbb{R}^3$) um conjunto S no qual faça sentido falar de funções diferenciáveis. Podemos estender a geometria intrínseca a tais conjuntos.

Bibliografia

Carmo 2012 CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Hoffman e Kunze 1971 HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. Second. New Jersey: Prentice Hall, 1971.

Lima 2020 LIMA, E. L. *Linear Algebra*. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. ISBN 9786599052835.

Picado 2006 PICADO, J. *Apostamentos de Geometria Diferencial*. São Paulo: Universidade de Comibra, 2006.

Reis e Silva 1996 REIS, G. L. dos; SILVA, V. V. da. *Geometria Analítica*. Second. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

Tenenblat 2008 TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. São Paulo: Blucher, 2008.