

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
GOIÁS
Câmpus Goiânia

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia.

Departamento de áreas acadêmicas II

Graduação Licenciatura em Matemática

Sarah Elias Moreira Wehbe

SUPERFÍCIES REGULARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Goiânia

2022



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Sarah Elias Moreira Wehbe
Matrícula: 20181010940121
Título do Trabalho: Superfícies Regulares no Espaço Euclidiano

Autorização - Marque uma das opções

- ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
- ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
- ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais incluídos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 10/02/2022.

Sarah Elias Moreira Wehbe

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Sarah Elias Moreira Wehbe

SUPERFÍCIES REGULARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Programa de Licenciatura em Matemática - De-
partamento II - IFG, como requisito parcial para
obtenção do título de Graduado em Matemática.

Goiânia

2022

W413s Wehbe, Sarah Elias Moreira.

Superfícies regulares no espaço euclidiano / Sarah Elias Moreira Wehbe. – Goiânia : Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2022.
67f.

Orientadora: Dra. Karoline Victor Fernandes.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Matemática. 2. Geometria euclidiana. 3. Superfícies esféricas. I. Fernandes, Karoline Victor (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III. Título.

CDD 516.3



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

SUPERFÍCIES REGULARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

por

SARAH ELIAS MOREIRA WEHBE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador (a): Dr.^a Karoline Victor Fernandes

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 26 de janeiro de 2022, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof.^a. Dra. Karoline Victor Fernandes (Presidente da Banca/ IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Me. Wesley Pinheiro Barreto (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Wesley Pinheiro Barreto, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 27/01/2022 16:17:42.
- Karoline Victor Fernandes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 26/01/2022 20:04:04.
- Jose Eder Salvador de Vasconcelos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 26/01/2022 20:02:32.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 26/01/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 239872

Código de Autenticação: f2103c4171



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Rua 75, nº 46, Centro, GOIÂNIA / GO, CEP 74055-110
(62) 3227-2805 (ramal: 2805)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me dar saúde, força e capacidade para conseguir chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais, Flávio e Eliene, que nunca mediram esforços para me oferecerem o melhor estudo que podiam, por me apoiarem nos momentos de fraqueza e incapacidade, por me ensinarem a lutar e pela educação e caráter que é fruto de tanto empenho durante minha vida.

Aos meus irmãos Fernando, Flávia e Júlia e aos meus familiares agradeço pelo carinho, pela amizade, orações e cuidado.

Ao meu noivo Renato, agradeço pelo companheirismo, proteção, incentivo e amizade durante os últimos anos da minha graduação.

Agradeço aos amigos que fiz durante a graduação, que fizeram deste um momento mais especial.

Por fim, agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha história como estudante e em especial à minha orientadora, Prof. Dra. Karoline Victor Fernandes pela inspiração, pelo apoio, disponibilidade, instrução e atenção sempre que me foi necessário.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento, e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”

(Carl Friedrich Gauss)

Resumo

Neste trabalho, estudaremos as superfícies parametrizadas regulares no espaço euclidiano, cujas equações são escritas na forma $F(x, y, z) = 0$, onde $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável. Para isso, iremos analisar essas equações e o que elas mostram sobre as superfícies. Estudaremos as superfícies esféricas, cilíndricas, cônicas, regradas, de revolução e quádricas, analisando as interseções dessas superfícies com os eixos e planos coordenados, as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados, utilizaremos também as simetrias com os planos, eixos coordenados e com a origem, além de analisar a extensão da superfície ao longo do espaço euclidiano.

Palavras-chave: Superfícies esféricas, cilíndricas, cônicas, regradas, de revolução, quádricas, gráficos.

Abstract

In this work, we will study the regular parameterized surfaces in Euclidean space, whose equations are written in the form $F(x, y, z) = 0$, where $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is a differentiable application. For this, we will analyze these equations and what they show about the superfaces. We will study the spherical superfaces, cylindrical, conical, ruled surfaces, of revolution and quadrics, analyzing the intersections of these surfaces with the axes and coordinate planes, the intersections with planes parallel to the coordinate planes, also using the symmetries with the planes, coordinate axes, and with the origin, besides analyze the extension of the surface along the Euclidean space.

Keywords: Spherical superfaces, cylindrical, conical, ruled surfaces, of revolution, quadrics, Graphics.

Sumário

1	Introdução	9
2	Preliminares	11
2.1	Cálculo Vetorial no Espaço Euclidiano	11
2.2	Cálculo Diferencial no Espaço Euclidiano	15
2.3	Curvas no Espaço	18
2.4	Superfícies no Espaço	19
3	Estudo de Superfícies	26
3.1	Introdução	26
3.2	Construção de uma superfície	26
3.3	Equação de uma Superfície Esférica	32
3.4	Equação de uma Superfície Cilíndrica	35
3.5	Equação de uma Superfície Cônica	42
3.6	Superfície de Revolução	46
3.7	Superfícies Regradas	50
3.8	Transformação de Coordenadas Retangulares no Espaço	52
3.9	Equação Geral do Segundo Grau com Três variáveis	56
3.10	Quádricas com centro	57
3.11	Quádricas sem centro	63
4	Conclusão	67
	Referências	68

1 Introdução

A Geometria diferencial teve seu início com o estudo de curvas, iniciada pelos gregos Euclides, Arquimedes e Apolônio. No século XVII, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) criam o método das coordenadas, o qual chamamos hoje de Geometria Analítica. Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727) descobriram os algoritmos do cálculo infinitesimal, os quais permitiram o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais, fazendo com que durante o século XVIII até o século XIX, se desenvolvesse os fundamentos da teoria de curvas e superfícies no espaço tridimensional através do Cálculo Diferencial Integral. Leonhard Euler (1707-1783), contribuiu com Geometria diferencial estudando a curvatura das seções planas de uma superfície. Em 1772, Euler escreveu sobre o problema de se determinar quando uma superfície pode ser desenvolvida isometricamente sobre um plano, que é o caso do cilindro e do cone, e descobriu que a condição necessária para que isso ocorra é que a superfície seja regradada, ou seja, folheada por retas. Uma das mais significativas observações de Euler acerca da teoria de superfícies, é o reconhecimento do fato de que coordenadas (x, y, z) dos pontos de uma superfície poderem ser representadas como funções de duas variáveis independentes, mas somente Gauss seguiu essa ideia e estudou as superfícies através da representação das coordenadas x, y, z em termos de funções de duas variáveis independentes u, v , chamadas de coordenadas “curvilíneas” sobre a superfície.

A Geometria diferencial clássica estuda as propriedades das curvas e superfícies no espaço euclidiano, propriedades locais as quais dependem somente de seus comportamentos na vizinhança de um ponto, por isso recebe o nome de teoria local de curvas e superfícies.

Neste trabalho iremos estudar o comportamento e as propriedades das superfícies no espaço euclidiano, para isso, dividimos o trabalho em duas partes: Preliminares e Estudo de Superfícies.

Nas Preliminares traremos as definições de curvas e superfícies no espaço. Para isso utilizaremos os conceitos fundamentais do cálculo vetorial e do cálculo diferencial

de funções de uma ou mais variáveis, dando ênfase às propriedades de produto escalar, vetorial e aos conceitos básicos de cálculo diferencial no espaço euclidiano, lembrando algumas propriedades de derivadas. Na seção 2.3 destacamos a teoria local das curvas, falando sobre curvas parametrizadas diferenciáveis. Em 2.4, iremos destacar a teoria local de superfícies, falando acerca das superfícies parametrizadas regulares e suas propriedades.

No Capítulo 3, estudaremos a construção de uma superfície, as equação de superfícies esféricas, cilíndricas e cônicas, superfícies de revolução, superfícies regradas e superfícies quádricas com centro e sem centro, analisando suas propriedades e características.

Para isso, nosso estudo foi embasado em Lehmann [2], e para o desenvolvimento dos conceitos preliminares, utilizamos como referência [1], [3], [4] e [5].

2 Preliminares

Neste capítulo, abordaremos conceitos, definições e exemplos, considerados pré-requisitos para que o leitor tenha uma melhor compreensão deste trabalho, no qual estudaremos especificamente Superfícies. Por isso enunciaremos as definições, teoremas e exemplos relacionados a Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo Diferencial retirados dos livros [1], [3], [4], [5], os quais permitiram entender os capítulos estudados no livro [2].

2.1 Cálculo Vetorial no Espaço Euclidiano

Definição 2.1.1. *Seja X um conjunto qualquer. Uma métrica definida sobre X é uma aplicação*

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

O par (X, d) é chamado espaço métrico.

Exemplo 2.1.2. *O conjunto $\mathbb{R}^3$ munido da aplicação $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$*

$$(P, Q) \mapsto \|P - Q\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

é um espaço métrico.

Dados dois pontos quaisquer $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ no $\mathbb{R}^3$, o segmento orientado de P_1 a P_2 é chamado vetor e o comprimento desse segmento é denominado módulo do vetor.

Assim sendo, para cada vetor existente, podemos determinar seu módulo, direção e sentido. Se v é o vetor dado pelo segmento de P_1 e P_2 , então as componentes de v são $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Dois vetores são iguais se possuem o mesmo módulo, direção e sentido, ou seja, se, e somente se tiverem as mesmas componentes. Dizemos que um vetor é nulo se todas suas componentes são nulas, ou seja, $0 = (0, 0, 0)$.

Definimos a soma de dois vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ como sendo o vetor de componentes $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Se λ é uma constante real, então definimos o produto λv_1 pelo vetor de componentes $\lambda v_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

A soma de vetores satisfaz

- i) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
- ii) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
- iii) $0 + v_1 = v_1$
- iv) $v_1 + (-v_1) = 0$

onde v_1, v_2 e v_3 são vetores e $-v_1 = -(v_1) = (-x_1, -y_1, -z_1)$.

Se λ_1 e λ_2 são números reais, então o produto de um vetor por um escalar satisfaz

- i) $\lambda_1(\lambda_2 v_1) = (\lambda_1 \lambda_2) v_1$
- ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) v_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_1$
- iii) $\lambda_1(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2$
- iv) $1 v_1 = v_1$

Neste caso, dizemos que $\mathbb{R}^3$ com as operações definidas é um espaço vetorial real. Qualquer conjunto com duas operações satisfazendo essas oito propriedades é um espaço vetorial, para mais detalhes veja [6].

Podemos calcular o módulo de um vetor da seguinte maneira:

Seja $v = (x, y, z)$ um vetor, seu módulo é dado por $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Se $|v| = 1$, dizemos que esse vetor é unitário.

Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, são ditos linearmente dependentes se existirem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, nem todos nulos, tais que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ serão linearmente independentes se para qualquer combinação linear desses vetores na forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, tivermos $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exemplo 2.1.3. Os vetores $\alpha_1 = (2, 4, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)$ e $\alpha_3 = (2, 6, 4)$ são linearmente dependentes, pois $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$.

Exemplo 2.1.4. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são linearmente independentes.

Todo vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser expresso de forma única como combinação linear de e_1, e_2 e e_3 , da seguinte forma:

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Definição 2.1.5. Definimos o produto interno ou produto escalar de dois vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pelo número real dado por

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Assim, podemos afirmar que $\langle v, v \rangle = |v|^2$ qualquer que seja o vetor v . Podemos verificar facilmente que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$
- 2) $\langle \lambda v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda v_2 \rangle = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle$
- 3) $\langle v_1, v_2 + v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle$
- 4) $\langle v_1, v_1 \rangle \geq 0$
- 5) $\langle v_1, v_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$

onde v_1, v_2 e v_3 são vetores de $\mathbb{R}^3$ e λ é um número real.

Sejam os vetores $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, o ângulo θ entre v_1 e v_2 é a solução da equação $\langle v_1, v_2 \rangle = |v_1||v_2| \cos \theta$, satisfazendo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Dois vetores são ortogonais se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, ou seja, se $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$ ou o ângulo θ entre eles é igual a $\frac{\pi}{2}$.

Definição 2.1.6. *Uma base ortonormal é aquela formada por vetores unitários e dois a dois ortogonais. Por exemplo, a base canônica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ é formada por vetores ortonormais.*

Considere as bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ $\{t_1, t_2, t_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$, e

$$w_1 = a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + a_{31}t_3$$

$$w_2 = a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + a_{32}t_3$$

$$w_3 = a_{13}t_1 + a_{23}t_2 + a_{33}t_3$$

As bases $\{t_1, t_2, t_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ têm a mesma orientação se o determinante de mudança de base é positivo, ou seja,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Caso contrário, as bases têm orientação oposta. Quando temos duas bases ortonormais, o determinante da mudança de base é igual a ± 1 .

Definição 2.1.7. *Dados os vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, o produto vetorial entre eles é denotado por $v_1 \times v_2$, e forma o vetor de componentes*

$$v_1 \times v_2 = (y_1z_2 - y_2z_1, -x_1z_2 + x_2z_1, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Um produto vetorial satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $|v_1 \times v_2| = |v_1||v_2|\sin\theta$, sendo θ o ângulo formado entre os vetores v_1 e v_2 ;
- 2) $\langle v_1 \times v_2, v_1 \rangle = \langle v_1 \times v_2, v_2 \rangle = 0$;
- 3) $v_1 \times v_2 = 0$, se, e somente se, v_1 e v_2 são linearmente dependentes;
- 4) $v_1 \times v_2 = -(v_2 \times v_1)$;
- 5) $v_1 \times (v_2 + v_3) = v_1 \times v_2 + v_1 \times v_3$;
- 6) $(\lambda v_1) \times v_2 = \lambda(v_1 \times v_2)$;

$$7) \ v_1 \times (v_2 \times v_3) = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3.$$

sendo v_1, v_2 e v_3 vetores e λ um número real.

De maneira geral $v_1 \times (v_2 \times v_3) \neq (v_1 \times v_2) \times v_3$, ou seja, o produto vetorial não é associativo. Da propriedade 1) segue que $|v_1 \times v_2|$ é a área de um paralelogramo determinado por v_1 e v_2 .

Definição 2.1.8. *Dados os vetores v_1, v_2 e v_3 de componentes $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$, o número real $\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle$ é denominado Produto Misto de v_1, v_2 e v_3 , e é representado da seguinte maneira:*

$$\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Pelas propriedades de determinantes, temos que,

$$\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \times v_1 \rangle = \langle v_3, v_1 \times v_2 \rangle = -\langle v_3, v_2 \times v_1 \rangle = -\langle v_2, v_1 \times v_3 \rangle = -\langle v_1, v_3 \times v_2 \rangle.$$

Em particular,

$$\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle.$$

Além disso, $\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = 0$ se, e somente se, v_1, v_2 e v_3 são linearmente dependentes.

Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal então $\langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \pm 1$.

2.2 Cálculo Diferencial no Espaço Euclidiano

Uma função vetorial f de um subconjunto X de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$, denotada por $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma correspondência em que, para cada $p \in X$ associa-se $f(p) \in \mathbb{R}^3$.

Considere a função vetorial $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ela pode ser representada por:

$$f(p) = (x(p), y(p), z(p))$$

onde as funções reais $x, y, z : X \rightarrow \mathbb{R}$ são denominadas funções coordenadas de f .

Consideraremos daqui por diante o intervalo aberto X de $\mathbb{R}$ para as funções vetoriais. Seja f uma função real, onde α e β são funções vetoriais em X , portanto as funções $\alpha + \beta$, $f\alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \times \beta$ são definidas para todo $p \in X$ como,

- 1) $(\alpha + \beta)(p) = \alpha(p) + \beta(p)$;
- 2) $(f\alpha)(p) = f(p)\alpha(p)$;
- 3) $\langle \alpha, \beta \rangle(p) = \langle \alpha(p), \beta(p) \rangle$;
- 4) $(\alpha \times \beta)(p) = \alpha(p) \times \beta(p)$.

Definição 2.2.1. *Seja a função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, X um intervalo de $\mathbb{R}$ e o ponto $p_0 \in X$. Dizemos que f é diferenciável em p_0 se existir,*

$$f'(p_0) = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p) - f(p_0)}{p - p_0} = \left(\lim_{p \rightarrow p_0} \frac{x(p) - x(p_0)}{p - p_0}, \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{y(p) - y(p_0)}{p - p_0}, \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{z(p) - z(p_0)}{p - p_0} \right)$$

Ou seja, $f(p) = (x(p), y(p), z(p))$ é diferenciável em p_0 se, e somente se, as funções coordenadas de f forem diferenciáveis em p_0 . Assim, $f'(p_0) = (x'(p_0), y'(p_0), z'(p_0))$.

Dizemos que f é diferenciável se f é diferenciável em todo ponto $p \in X$.

Definição 2.2.2. *A função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ em que para todo $p \in X$ associa um $f'(p)$ será uma função vetorial chamada de derivada de primeira ordem de f . Se $f'(p)$ também for diferenciável, teremos então $f''(p)$, que definiremos como derivada de segunda ordem.*

Quando uma função vetorial tem derivadas, de todas as ordens, contínuas essa função será de classe C^∞ .

Se α e β são funções diferenciáveis em X e f é uma função real diferenciável em X , então $\alpha + \beta$, $f\alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \times \beta$ são diferenciáveis.

Definição 2.2.3. *Uma função ou aplicação F de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, denotada por $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma correspondência que, para cada $p \in A$, associa um único ponto $F(p) \in \mathbb{R}^m$. Uma tal função pode ser representada por*

$$F(p) = (F_1(p), F_2(p), \dots, F_m(p)),$$

ou, considerando $p = (x_1, \dots, x_n)$,

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)).$$

As funções $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ são ditas funções coordenadas de F .

Dadas duas funções $F, G : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir as funções $F + G$, fG , $\langle F, G \rangle$ e $F \times G$, (essa última para $m = 3$), de forma análoga às das funções vetoriais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$.

Uma função F diferenciável de classe C^k (resp. C^∞), que tem uma função inversa F^{-1} também é diferenciável de classe C^k (resp. C^∞), é denominada um difeomorfismo de classe C^k (resp. C^∞).

Dizemos que uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear se, para todo par de pontos p e q em $\mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$F(p + q) = F(p) + F(q),$$

$$F(\lambda p) = \lambda F(p).$$

Para concluir esta secção iremos enunciar um resultado de fundamental importância no Cálculo Diferencial, o Teorema da Função Inversa.

Teorema 1. *Seja $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável de classe C^k (resp. C^∞) e $p_0 \in A$ tal que dF_{p_0} é injetora. Então, existe uma vizinhança U de p_0 , contida em A , tal que $F(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e a restrição de F a U é um difeomorfismo de classe C^k (resp. C^∞), de U sobre $F(U)$.*

Como $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear, então as seguintes condições são equivalentes:

- a) dF_{p_0} é injetora;
- b) Se $dF_{p_0}(w) = 0$, então $w = 0$;
- c) A matriz jacobiana de F em p_0 tem posto n ;
- d) O jacobiano de F em p_0 é não-nulo.

Outro resultado importante, obtido em consequência do teorema anterior, é o Teorema da Função Implícita.

Teorema 2. *Sejam $F : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável de classe C^k (resp. C^∞) e $F_1, \dots, F_n$ as funções coordenadas de F . Denotaremos por $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ e $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ os pontos de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^{n+m}$, respectivamente. Fixados $(a, b) \in A$ e $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(a, b) = c$, se a matriz determinada por $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a, b)$, $i, j = 1, \dots, n$ tem posto n , ou seja, determinante não-nulo, então existe uma vizinhança U de b em $\mathbb{R}^m$ e uma função $G : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciável de ordem C^k (resp. C^∞), tal que $G(b) = a$ e $F(G(y), y) = c$ para todo $y \in U$.*

2.3 Curvas no Espaço

Definição 2.3.1. Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável α , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. A variável $t \in I$ é o parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $\alpha(t), t \in I$, é o traço da curva.

Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, onde $x(t), y(t), z(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ .

Exemplo 2.3.2. A aplicação,

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), t \in \mathbb{R},$$

onde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é uma linha reta passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e paralela ao vetor de coordenadas (a, b, c) .

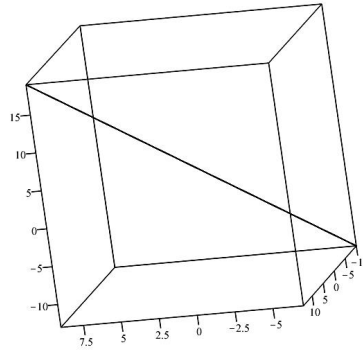


Figura 1: Linha Reta

Exemplo 2.3.3. A curva parametrizada diferenciável

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, b t)$$

$t \in \mathbb{R}, a > 0, b \neq 0$ é a hélice circular. O traço desta curva está contido no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Se $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ são dois pontos que têm as duas primeiras coordenadas respectivamente iguais, então as terceiras coordenadas diferem por um múltiplo de $2\pi b$.

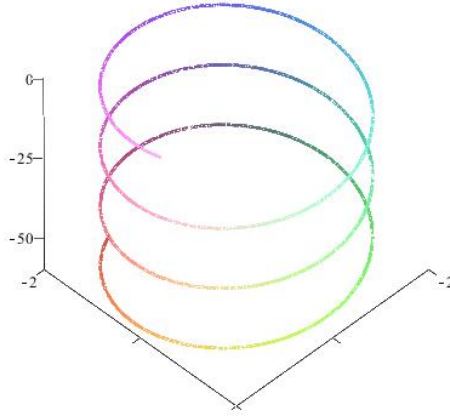


Figura 2: Hélice Circular

2.4 Superfícies no Espaço

Sobre o ponto de vista geométrico, toda curva é descrita por uma parametrização, sendo que existe sempre uma parametrização natural (parametrização por comprimento de arco). Já para as superfícies não existem essas parametrizações que descrevem a totalidade da própria superfície. Pegando como exemplo uma esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ e um par de parâmetros qualquer, sempre existirá pelo menos um ponto que não poderá ser descrito por eles.

Assim entendemos como superfície um dado conjunto em $\mathbb{R}^3$ que “se assemelha” à uma parte de $\mathbb{R}^2$, “numa vizinhança” de qualquer ponto, por exemplo, a superfície da Terra, mesmo que esférica, pareça plana a um observador nela colocado que consegue ver somente até a linha do horizonte.

Neste capítulo iremos relembrar algumas propriedades geométricas de Superfícies no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. O conceito de superfície parametrizada será trabalhado de modo análogo ao de curvas e assumiremos o sistema de coordenadas cartesianas x, y, z em $\mathbb{R}^3$.

Considere a função:

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

de duas variáveis u e v que variam em um intervalo aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, para cada par ordenado $(u, v) \in U$, $X(u, v)$ será um ponto em $\mathbb{R}^3$. Chamamos de S ao subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $X(u, v)$.

Definição 2.4.1. *Uma superfície parametrizada regular ou simplesmente uma superfície*

é uma aplicação $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que:

- a) X é diferenciável de classe C^∞ ;
- b) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferenciável de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

Denominamos u e v por parâmetros da superfície, e traço de X ao subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ obtido pela imagem da aplicação X .

É importante que façamos algumas observações:

- a) A aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é diferenciável de classe C^∞ quando as funções x, y, z tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas.
- b) Sejam e_1, e_2 a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Para cada $q = (u_0, v_0) \in U$, sabemos que a matriz associada a dX_q nas bases canônicas é a matriz jacobiana.

$$J(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$

pois,

$$\begin{aligned} dX_q(e_1) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \\ dX_q(e_2) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \end{aligned}$$

A condição b) da Definição 2.4.1 garante a existência de plano tangente em cada ponto da superfície. São formas equivalentes de expressar essa condição as seguintes afirmações:

- b.1) dX_q é injetora;
- b.2) a matriz $J(u_0, v_0)$ tem posto 2;
- b.3) os vetores $X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;
- b.4) $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$

Considere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada, então se fixarmos um ponto $(u_0, v_0) \in U$, as curvas

$$\begin{aligned} u &\mapsto X(u, v_0), \\ v &\mapsto X(u_0, v), \end{aligned}$$

serão chamadas curvas coordenadas de X em (u_0, v_0) . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são vetores tangentes às curvas coordenadas.

Exemplo 2.4.2. *Sejam $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, e $b = (b_1, b_2, b_3)$ vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$. Consideremos a aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, associa $X(u, v) = p_0 + ua + vb$, isto é*

$$X(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3).$$

Então, X é uma superfície parametrizada regular, pois X é diferenciável e os vetores $X_u \equiv a, X_v \equiv b$ são linearmente independentes. A aplicação X descreve um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto p_0 , ortogonal ao vetor $a \times b$. As curvas coordenadas de X descrevem retas do plano, paralelas aos vetores a e b respectivamente.

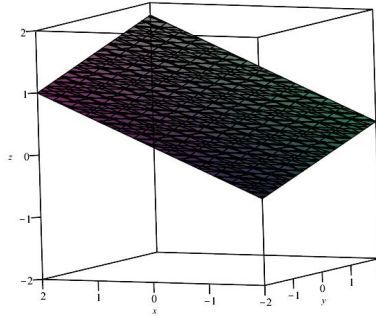


Figura 3: Plano de $\mathbb{R}^3$

Exemplo 2.4.3. *Consideremos a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$X(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v),$$

onde $a > 0$ e $U = \mathbb{R} \times (0, \pi) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$

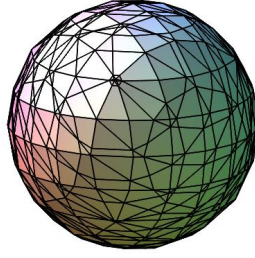


Figura 4: Esfera

A aplicação X é diferenciável e os vetores

$$\begin{aligned} X_u &= (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \operatorname{sen} v \cos u, 0) \\ X_v &= (a \cos v \cos u, a \cos v \operatorname{sen} u, -a \operatorname{sen} v) \end{aligned}$$

são linearmente independentes, para todo $(u, v) \in U$. De fato,

$$|X_u \times X_v| = a^2 \operatorname{sen} v \neq 0,$$

já que $v \in (0, \pi)$. A imagem de X é a esfera centrada na origem de raio a , menos os dois polos. As curvas coordenadas são os meridianos e os paralelos da esfera.

Exemplo 2.4.4. Seja

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

onde a e b são constantes não-nulas. A aplicação X é diferenciável e os vetores $X_u = (1, 0, \frac{2u}{a^2})$, $X_v = (0, 1, \frac{2v}{b^2})$ são linearmente independentes para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, X é uma superfície parametrizada regular, cuja imagem é o Parabolóide elíptico.

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

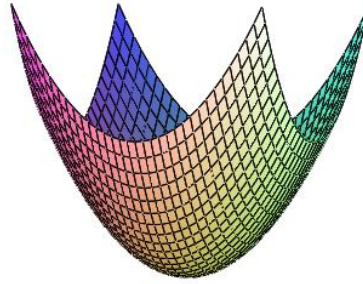


Figura 5: Paraboloide Elíptico

As curvas coordenadas descrevem as parábolas obtidas pela intersecção de S com os planos paralelos a xz e yz .

Proposição 2.4.5. Se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de $\mathbb{R}^2$, então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f .

Demonstração: A diferenciabilidade de X decorre do fato de que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. A matriz jacobiana de X é igual a

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix},$$

que tem posto 2, para todo (u, v) .

□

Exemplo 2.4.6. Dessa proposição temos que a aplicação

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

onde a e b são constantes não-nulas, é uma superfície parametrizada regular, cujo traço é o Paraboloide hiperbólico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

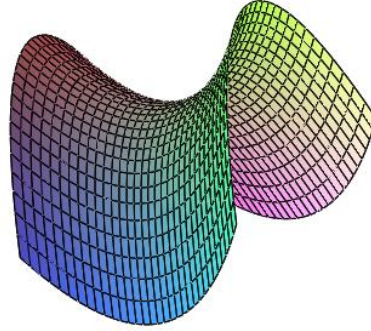


Figura 6: Paraboloide Hiperbólico

Proposição 2.4.7. *Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular tal que $f(u)$ não se anula. Então, a aplicação*

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde $u \in I$ e $v \in \mathbb{R}$ é uma superfície parametrizada regular chamada superfície de rotação, ou superfície de revolução, da curva α em torno do eixo Oz

Demonstração Como α é uma aplicação diferenciável, temos que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. Os vetores

$$\begin{aligned} X_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \\ X_v &= (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

são linearmente independente, pois

$$|X_u \times X_v|^2 = f^2(u)[(g')^2 + (f')^2] \neq 0,$$

já que α é uma curva regular e f não se anula. Portanto, concluímos que X é uma superfície parametrizada regular. $\square$

No próximo capítulo estudaremos as superfícies que satisfazem a seguinte condição:

Proposição 2.4.8. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Consideremos o conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = c\}$ onde c é um número real. Se $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ é tal que $\nabla F(p_0) \neq 0$, então o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in S$, suficientemente próximos de p_0 é o traço de uma superfície parametrizada regular.*

Demonstração: Suponhamos que $F_z(p_0) \neq 0$. Então, a matriz

$$\begin{bmatrix} F_x(p_0) & F_y(p_0) & F_z(p_0) \end{bmatrix}$$

tem posto 1. Segue-se do Teorema da função implícita que existe uma aplicação diferenciável $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, em que U é um aberto do plano xy que contém (x_0, y_0) , tal que $\phi(x_0, y_0) = z_0$ e, para todo $(x, y) \in U$, $F(x, y, \phi(x, y)) = c$. Portanto, pela proposição 2.4.5, a aplicação

$$X(x, y) = (x, y, \phi(x, y)), (x, y) \in U$$

é uma superfície parametrizada regular, cujo traço descreve pontos de S próximos de p_0 . De forma análoga, podemos provar os casos em que $F_x(p_0) \neq 0$ e $F_y(p_0) \neq 0$.

□

3 Estudo de Superfícies

3.1 Introdução

Nesse capítulo estudaremos superfícies que satisfazem a equação

$$F(x, y, z) = 0, \quad (3.1)$$

onde $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável.

Por exemplo, todo e qualquer plano pode ser representado de forma analítica pela equação $Ax + By + Cz + D = 0$ e de forma geral, se existir uma representação analítica de uma figura geométrica que seja superfície, então essa representação consiste em uma única equação como a (3.1).

Ainda que a equação (3.1) tenha três variáveis, não necessariamente a equação de uma superfície obrigatoriamente terá três variáveis. Há casos em que possui apenas uma ou duas. Por exemplo:

- A equação $x = k$, em que k é uma constante qualquer, representa um plano paralelo ao plano yz , ou seja, embora só apareça a variável x na equação, que é a variável dependente, as variáveis y e z são independentes e assim as chamamos de variáveis livres, por isso, a equação $x = k, y \text{ e } z \in \mathbb{R}$ representa uma superfície.
- Embora no plano a equação $x^2 + y^2 = 16$ represente uma circunferência de raio 4, no espaço euclidiano a equação representa um cilindro circular reto, que é uma superfície, ainda que contendo em sua equação somente duas variáveis.

3.2 Construção de uma superfície

Antes de construir uma superfície, é sempre importante que se faça uma discussão sobre os aspectos que a sua equação mostram sobre ela. Para isso, faremos o uso de cinco

passos aconselhados por Lehmann em [2], os quais serão descritos nos itens abaixo:

- 1) Analisar quais os pontos ou lugares em que a equação intersecta os eixos coordenados.
- 2) Estudar quais são os traços que são gerados em cada plano, isto é, calcular as intersecções com os planos coordenados.
- 3) Entender a simetria que a superfície apresenta com os planos, eixos coordenados e com a origem.
- 4) Encontrar quais as secções ou “cortes” que são apresentados por planos paralelos aos planos coordenados.
- 5) Indicar qual a extensão da superfície em relação ao espaço euclidiano.

Para que o leitor tenha melhor conhecimento a cerca dos casos de simetria, definiremos abaixo dois casos.

Definição 3.2.1. *Dois pontos diferentes são simétricos a um plano se, e somente se, o plano for perpendicular ao segmento que os une em seu ponto médio. Nesse caso o plano é chamado de Plano de Simetria.*

Definição 3.2.2. *Dizemos que uma superfície é simétrica a um plano de simetria δ se o simétrico de cada ponto da superfície é também um ponto da superfície.*

A partir da Definição 3.2.2 podemos tirar algumas conclusões que se resumem em três Teoremas.

Teorema 3. *Se a equação da superfície não se altera quando muda-se o sinal de uma das variáveis, a superfície é simétrica com relação ao plano coordenado que é ortogonal ao eixo que representa essa variável e reciprocamente.*

Teorema 4. *Se a equação da superfície não se altera quando muda-se o sinal de duas variáveis, a superfície é simétrica em relação ao eixo de coordenadas que não teve seu sinal trocado e reciprocamente.*

Teorema 5. *Se a equação da superfície não se altera quando muda-se o sinal das três variáveis, então a superfície é simétrica em relação à origem, e reciprocamente.*

Para expressar os dados acima de forma mais clara, podemos construir a seguinte tabela.

Tabela 1: Casos de simetria de uma superfície

Se a equação da superfície não se altera quando trocamos o sinal de	Então a superfície é simétrica em relação
x	ao plano YZ
y	ao plano XZ
z	ao plano XY
x e y	ao eixo Z
x e z	ao eixo Y
y e z	ao eixo X
x, y e z	à origem

Supondo que a equação de uma superfície é dada por (3.1), se estudarmos a natureza de suas secções planas determinadas através de cortes na superfície por uma série de planos paralelos aos planos coordenados, então poderemos entender a forma da superfície.

Por exemplo, dada a equação $z = k$, sendo k uma constante qualquer, temos um conjunto de planos paralelos ao plano XY. Assim, da equação (3.1), temos que

$$F(x, y, k), \quad z = k \quad (3.2)$$

são as equações das curvas obtidas pela interseção do plano com a superfície; cada valor de k , corresponde a uma curva diferente.

Considerando a equação (3.1) como equação da superfície podemos, sempre que possível, escrevê-la colocando uma das variáveis em função das outras duas, da seguinte forma:

$$z = F(x, y).$$

Denominamos essa forma, de equação na forma explícita, a qual nos permite obter intervalos de variação dos valores reais que as variáveis podem tomar, permitindo realizar a localização geral da superfície no espaço coordenado e a indicação de que a superfície seja ou não fechada em certa extensão.

Agora que sabemos como proceder ao discutir a equação de uma superfície, fica mais fácil realizar a construção. Utilizamos o software Maple para gerar o gráfico das superfícies. Para demonstrarmos o processo utilizaremos alguns exemplos.

Exemplo 3.2.3. *Superfície de equação $x^2 + y^2 - 5z = 0$.*

Discutiremos sua equação através dos cinco passos mencionados anteriormente.

- 1) Intersecções: Se $x = y = 0$, então $z = 0$; portanto a intersecção com o eixo Z é zero. Analogamente, todas as intersecções com os eixos coordenados estão no ponto $(0, 0, 0)$, ou seja, na origem.
- 2) Traços: O único traço sobre o plano XY é a origem. No plano XZ é a parábola de equação $x^2 = 5z$, $y = 0$. No plano YZ é a parábola de equação $y^2 = 5z$, $x = 0$.
- 3) Simetria: A superfície é simétrica ao plano YZ e XZ e ao eixo Z , pois se trocarmos o sinal de X e Y , a equação não altera seu valor.
- 4) Secções: Os planos $z = k$ cortam a superfície nas curvas $x^2 + y^2 = 5k$, que constituem uma família de circunferências para todos os valores de $k > 0$. Os planos $y = k$ intersectam a superfície nas parábolas $x^2 = 5\left(z - \frac{k^2}{5}\right)$. E os planos $x = k$ possuem sua intersecção com a superfície nas parábolas $y^2 = 5\left(z - \frac{k^2}{5}\right)$.
- 5) Extensão: A equação nos mostra que as variáveis x e y podem assumir todos os valores reais, e que z está restrita à valores positivos, ou seja, $z > 0$. Assim, concluímos que nenhuma parte da superfície está abaixo do plano XY e ela se estende indefinidamente acima do plano XY .

Agora, com os dados que conseguimos através do estudo da equação, construímos o gráfico da superfície, denominada Paraboloide de revolução.

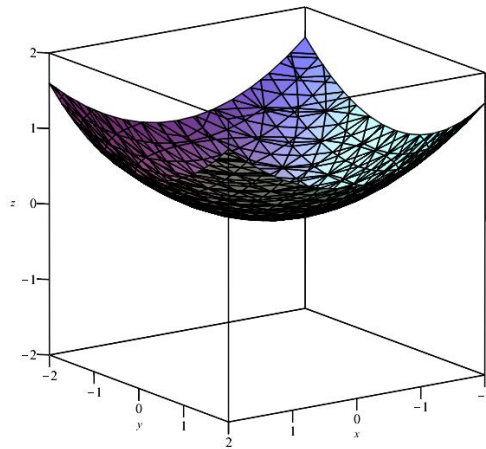


Figura 7: Paraboloide de revolução

□

Exemplo 3.2.4. Superfície de equação $y^2 - 4x = 0$.

- 1) Intersecções: Com o eixo X as intersecções são dadas por $-4x = 0$, logo em $x = 0$. Com os eixo Y , as intersecções são dadas por $y = 0$. Quando $x = y = 0$ obtemos o próprio eixo Z .
- 2) Traços: O único traço é sobre o plano XY e ele é a parábola $x = \frac{y^2}{4}$, $z = 0$.
- 3) Simetria: A superfície é simétrica ao plano XZ , pois se trocarmos o sinal de y , a equação não altera seu valor.
- 4) Secções: Os planos $z = k$ cortam a superfície nas curvas $y^2 = 4x$, que constituem uma família de parábolas para todos os valores de k . Os planos $y = k$ intersectam a superfície na reta $\left(x = \frac{k^2}{4}\right)$. E os planos $x = k$, $k > 0$ possuem sua intersecção com a superfície nas retas $y = \pm\sqrt{4k}$.
- 5) Extensão: A equação nos mostra que a variável y e a variável z pode tomar qualquer valor real, porém, x está restrita a valores positivos.

Com os itens acima podemos montar o gráfico da superfície que é denominada Cilindro parabólico.

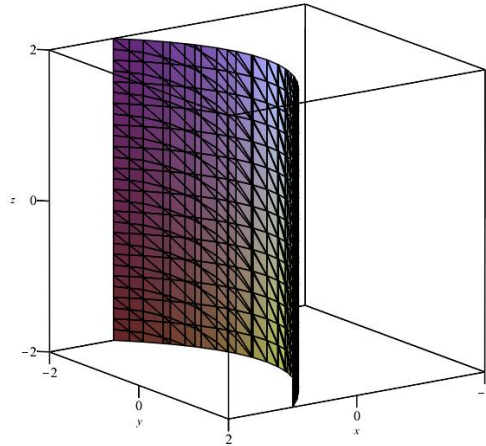


Figura 8: Cilindro Parabólico

□

Exemplo 3.2.5. Superfície de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

- 1) Intersecções: Todas as intersecções dessa superfície com os eixos estão na origem.
- 2) Traços: O traço sobre o plano XY é a origem. Sobre o plano XZ são as retas $x = \pm z$ e no plano YZ são as retas $y = \pm z$.
- 3) Simetria: A superfície é simétrica em relação à origem, pois se trocarmos o sinal de x , y e z na equação dada, ainda assim a equação da superfície não se altera.
- 4) Secções: Os planos de equação $z = k$ cortam a superfície nas curvas $x^2 + y^2 = k^2$, que formam um conjunto de circunferências para todos os valores reais de k . Os planos de equação $y = k$ cortam a superfície nas curvas $z^2 - x^2 = k^2$, que formam um conjunto de hipérboles para todos os valores reais de k . Os planos $x = k$, cortam a superfície nas curvas $z^2 - y^2 = k^2$ que formam um conjunto de hipérboles para todos os valores reais de k .
- 5) Extensão: A equação mostra que não há restrições para os valores de x , y e z , ou seja, todas as variáveis podem assumir qualquer valor real.

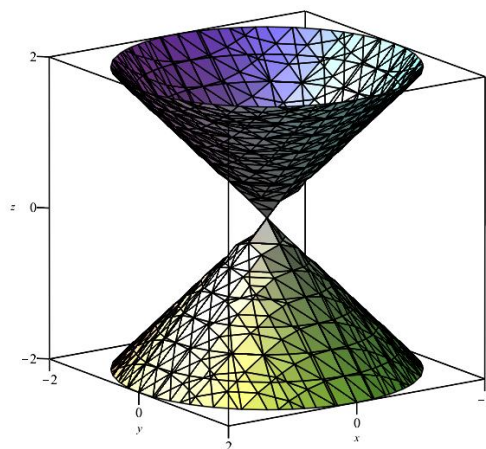


Figura 9: Cone Elíptico

Podemos ver que a superfície é um Cone elíptico.

□

3.3 Equação de uma Superfície Esférica

Nessa seção estudaremos as superfícies esféricas.

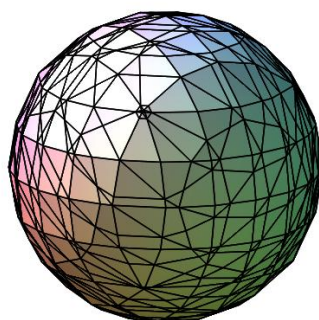


Figura 10: Superfície Esférica

Uma superfície esférica é definida como o lugar geométrico dos pontos do espaço que possuem a mesma distância em relação a um ponto fixo. À essa distância damos o nome de raio, e o ponto fixo é denominado de centro da esfera.

Através dessa definição e sabendo que podemos medir a distância entre dois pontos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P(x, y, z)$, no espaço euclidiano pela fórmula $d(P_0, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, então podemos obter o seguinte teorema:

Teorema 6. A equação da superfície esférica cujo centro é o ponto (h, k, l) e cujo raio é um valor constante r , é $(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$.

Como corolário deste teorema, temos que a superfície esférica cujo centro é a origem e raio é um valor constante r , tem por equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

A equação do Teorema 6 é chamada de equação reduzida da esfera. Quando a desenvolvemos obtemos a equação geral: $x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0$. Essa equação contém quatro constantes arbitrárias independentes, logo uma esfera pode ser determinada por quatro pontos não coplanares.

Coordenadas Esféricas

As coordenadas esféricas são estudadas e consideradas como um sistema de coordenadas no espaço que está estritamente associado a uma superfície esférica.

Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer em uma superfície de centro na origem e raio r . A equação da superfície é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (3.3)$$

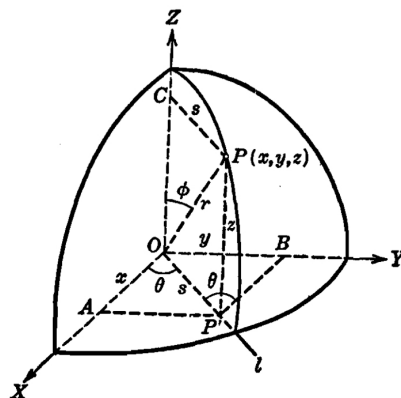


Figura 11: Primeiro Octante da Esfera

Fonte: (Lehmann, 1989)

Na imagem acima vemos que pelo ponto P e pelo eixo Z passa um plano que corta

o plano XY na reta l . θ é o ângulo formado entre l e a parte positiva do eixo X e ϕ o ângulo formado pelo raio da esfera, OP , e a parte positiva do eixo Z . Designemos por P' , A , B e C , respectivamente as projeções do ponto P sobre o plano XY e sobre os eixos X , Y e Z . Seja $|\overline{OP'}| = |\overline{CP}| = s$.

Dos triângulos OPC , OAP' , OBP' e $OP'P$ temos respectivamente as seguintes relações:

$$\begin{aligned} s &= r \sin \phi. \\ x &= s \cos \theta = r \sin \phi \cos \theta \\ y &= s \sin \theta = r \sin \phi \sin \theta \\ z &= P'P = r \sin(90 - \phi) = r \cos \phi \end{aligned} \tag{3.4}$$

Utilizando as relações acima, as quais chamamos de coordenadas esféricas do ponto $P(r, \phi, \theta)$ podemos localizar qualquer ponto P sobre a superfície esférica quando se conhece os valores de r , ϕ e θ .

Se considerarmos um ponto P sobre a superfície terrestre ele se localiza por sua latitude $(90 - \phi)$ e longitude θ medidas a partir do eixo X como uma reta no plano do meridiano, podemos dizer que as coordenadas ϕ e θ chamam-se respectivamente Colatitude e Longitude do ponto P e r chama-se Raio vetor de P .

Para que as coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) representem um único ponto no espaço, seus valores ficam restritos aos intervalos

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Se eliminarmos ϕ e θ de (3.4) obtemos a equação (3.3). Como r é uma constante fixa, então as relações (3.4) representam as equações paramétricas de uma superfície de centro na origem e raio r , sendo ϕ e θ os parâmetros.

As relações (3.4) podem ser implementadas como equações de transformação entre sistemas de coordenadas retangulares e esféricas.

Teorema 7. *As coordenadas retangulares (x, y, z) e as coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) de um ponto no espaço, estão relacionadas da seguinte maneira*

$$x = r \sin \phi \cos \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \phi.$$

As transformações entre os dois sistemas de coordenadas podem efetuar-se por meio das equações e relações obtidas por elas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

3.4 Equação de uma Superfície Cilíndrica

Uma superfície cilíndrica é determinada através de uma reta que se move mantendo-se sempre paralela à uma reta fixa dada, a qual denominamos geratriz, e passa sempre por uma curva fixa dada, chamada diretriz. Para o estudo da superfície cilíndrica iremos considerar que a diretriz é uma curva contida em um dos planos coordenados. Por exemplo, seja C parte da diretriz contida no plano YZ , e seja $v = (a, b, c)$ o vetor diretor da geratriz da superfície cilíndrica. Podemos escrever então as equações de C da forma

$$F(y, z) = 0, \quad x = 0. \quad (3.5)$$

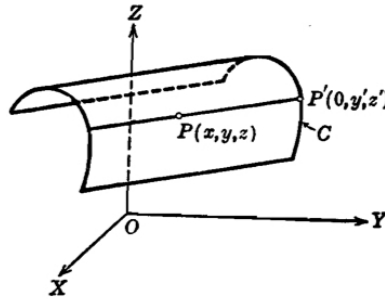


Figura 12: Cilindro

Fonte: (Lehmann, 1989)

Sejam $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície e supondo que a geratriz que passa por P corta C no ponto $P'(0, y', z')$. Assim as equações simétricas da reta geratriz são

$$\frac{x}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c} \quad (3.6)$$

Além disso, como P' está sobre C , suas coordenadas satisfazem as equações (3.5), e temos

$$F(y', z') = 0, \quad x' = 0 \quad (3.7)$$

Pela definição de superfície cilíndrica, o ponto P' pode estar sobre a superfície se, e

somente se, as coordenadas (x', y', z') satisfizerem as equações (3.6) e (3.7), que constituem um sistema de quatro equações independentes, das quais podemos eliminar as variáveis x' , y' e z' , considerando-as parâmetros. A eliminação dessas variáveis resulta em uma única equação, que é a equação buscada para a superfície cilíndrica.

Exemplo 3.4.1. *Encontrar a equação de uma superfície cilíndrica cuja diretriz é a parábola*

$$x^2 = 4y, z = 0 \quad (3.8)$$

contida no plano XY e cujas geratrizes tem vetor diretor $v = (1, 1, 3)$.

Solução: Suponhamos que a geratriz que passa por um ponto qualquer $P(x, y, z)$ da superfície corta a diretriz no ponto $P'(x', y', 0)$. Então, de forma análoga a equação (3.6), a equação simétrica da geratriz é

$$\frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{1} = \frac{z}{3}. \quad (3.9)$$

Como o ponto P' está sobre a parábola, temos que

$$x'^2 = 4y', z' = 0. \quad (3.10)$$

Da equação 3.9 temos que: $x' = x - \frac{z}{3}$ e $y' = y - \frac{z}{3}$.

Substituindo os valores dados para x' , y' encontrados pelas equações (3.9) em (3.10), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} (x')^2 &= 4y' \\ \left(x - \frac{z}{3}\right)^2 &= 4\left(y - \frac{z}{3}\right) \\ x^2 - \frac{2xz}{3} + \frac{z^2}{9} &= 4y - \frac{4z}{3} \\ 9x^2 - 6xz + z^2 &= 36y - 12z \\ 9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z &= 0 \end{aligned}$$

que é a equação da superfície cilíndrica.

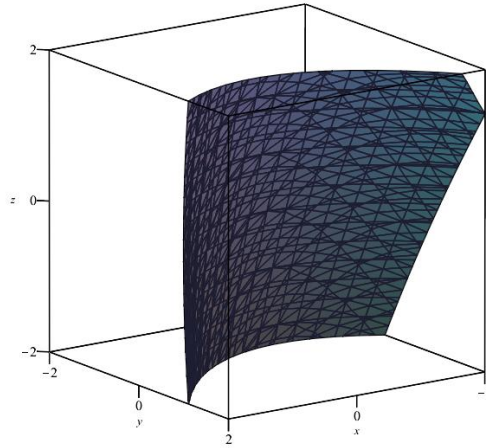


Figura 13: Superfície Cilíndrica

□

No exemplo acima, encontramos equação de uma superfície cilíndrica a partir da equações de sua diretriz e do vetor diretor de sua geratriz. Quando quisermos encontrar as equações da diretriz e o vetor diretor da geratriz a partir da equação da superfície, devemos proceder como no exemplo a seguir.

Exemplo 3.4.2. *Demonstrar que a equação*

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1 \quad (3.11)$$

representa uma superfície cilíndrica e achar as equações de sua diretriz e o vetor diretor de sua geratriz.

Solução: Da definição de superfície cilíndrica, se deduz que as secções feitas pelos planos paralelos ao plano da diretriz são curvas congruentes com a diretriz. Assim, as secções da superfície (3.11) feitas pelo plano $z = k$ são as curvas

$$x^2 + y^2 + 2k^2 + 2kx - 2ky = 1, z = k$$

as quais podem ser escritas na forma

$$(x + k)^2 + (y - k)^2 = 1, z = k \quad (3.12)$$

As equações de (3.12) representam todas as circunferências de raio 1 para qualquer

valor assumido por k . De forma particular, para $k = 0$ temos a circunferência

$$x^2 + y^2 = 1, z = 0. \quad (3.13)$$

Logo, (3.11) é a equação de uma superfície cilíndrica circular cuja diretriz é a circunferência (3.13).

A reta que une o centro $(-k, k, k)$ de qualquer das circunferências e o centro $(0, 0, 0)$ da diretriz é paralela à geratriz. Como o vetor diretor desta reta é $v(-1, 1, 1)$ então este também é o vetor diretor da geratriz.

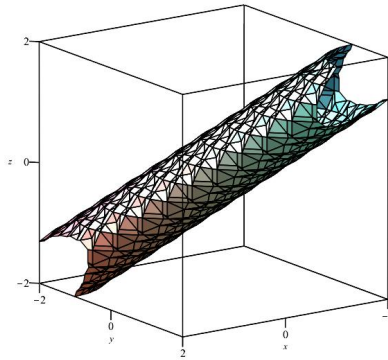


Figura 14: Superfície Cilíndrica oblíqua

□

Se as geratrizes de uma superfície cilíndrica são perpendiculares ao plano de sua diretriz, então essa superfície é chamada reta, caso contrário se chama oblíqua.

Através do método usado no Exemplo 3.4.1 podemos demonstrar que a equação de uma superfície cilíndrica reta cujas geratrizes são as perpendiculares ao plano coordenado de sua diretriz, precisa da variável não medida nesse plano coordenado. Além disso, o lugar geométrico plano desta equação é a geratriz. Por exemplo, a superfície cilíndrica reta cuja diretriz é a circunferência $y^2 + z^2 = 9, x = 0$ se representa pela equação $y^2 + z^2 = 9$.

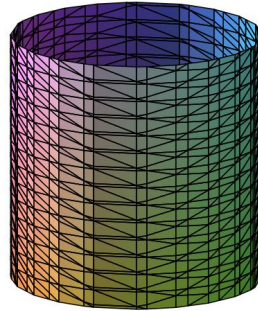


Figura 15: Cilindro circular reto

De forma recíproca, pelo método do Exemplo 3.4.2, podemos demonstrar que uma equação que não tem uma variável representa uma superfície cilíndrica reta cujas geratrizes são perpendiculares ao plano coordenado no qual não se mede a variável ausente e cuja diretriz é o lugar geométrico plano desta equação. Por exemplo, a equação $x^2 - y^2 = 4, z = k$ representa uma superfície cilíndrica reta, cujas geratrizes são perpendiculares ao plano XY e cuja diretriz é a hipérbole $x^2 - y^2 = 4, z = 0$. Podemos resumir os dados acima no Teorema abaixo:

Teorema 8. *Uma equação representa uma superfície cilíndrica, cujas geratrizes são perpendiculares ao plano coordenado que contém a diretriz se, e somente se, carece da variável não medida nesse plano. O lugar geométrico plano dessa equação é a diretriz.*

Caracterizamos uma superfície cilíndrica pela sua diretriz da seguinte forma. Se a diretriz for:

- Uma circunferência: a superfície cilíndrica é chamada circular;
- Uma parábola: a superfície cilíndrica é chamada parabólica;
- Uma elipse: a superfície cilíndrica é chamada elíptica;
- Uma hipérbole: a superfície cilíndrica é chamada hiperbólica;
- Uma reta: a superfície cilíndrica é chamada plano.

Coordenadas Cilíndricas

Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer de uma superfície cilíndrica circular reta de raio r , pertencente ao eixo Z . Fica claro que a equação dessa superfície é

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3.14)$$

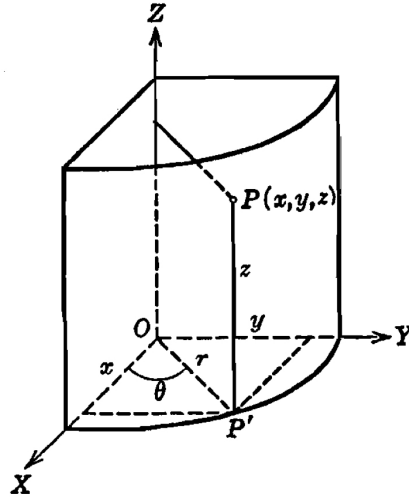


Figura 16: Coordenadas Cilíndricas

Fonte:(Lehmann, 1989)

Pelo ponto P dessa superfície e pelo eixo Z iremos passar um plano que corta a superfície numa geratriz cujo ponto de intersecção com o plano XY é o ponto $P'(x', y', 0)$. Seja $|OP'| = r$ e θ o ângulo formado entre OP' e a parte positiva do eixo X , então temos as relações abaixo:

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; z = z. \quad (3.15)$$

Tais relações permitem a localização de qualquer ponto pertencente à (3.14), quando se conhece os valores de r, θ e z . Por isso, chamamos essas variáveis de coordenadas cilíndricas e as escrevemos como $P(r, \theta, z)$.

De forma geral, se tivermos um ponto e uma reta fixos e um plano dado, tomando-os como referência, conseguimos localizar qualquer ponto no espaço, através das coordenadas cilíndricas.

Usando a Trigonometria, pode-se medir o ângulo θ com a parte positiva do eixo X como lado inicial. Para que as (r, θ, z) representem um ponto único no espaço, restringimos

os valores de r e θ aos intervalos

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

A variável z não possui nenhuma restrição, ou seja, pode assumir qualquer valor real. Se eliminarmos z e θ das relações (3.15), teremos como resultado a equação (3.14), logo (3.15) são equações paramétricas da superfície (3.14) e as variáveis z e θ são os parâmetros.

Podemos empregar as equações das relações (3.15) em transformações entre o sistema de coordenadas retangulares e cilíndricas. Das duas primeiras relações, obtemos as relações:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}; \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Podemos resumir os resultados anteriores no Teorema abaixo:

Teorema 9. *As coordenadas retangulares (x, y, z) e as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de um ponto no espaço se relacionam do seguinte modo:*

$$x = r \cos \theta; y = r \operatorname{sen} \theta; z = z.$$

Podemos efetuar as transformações entre os sistemas de coordenadas por meio destas equações e das seguintes relações obtidas delas.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}; \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

3.5 Equação de uma Superfície Cônica

A superfície gerada por uma linha reta que se move de tal maneira que passa sempre por uma curva fixa e por um ponto fixo não contido no plano dessa curva, se chama Superfície Cônica.

Essa reta móvel é denominada geratriz; a curva fixa, diretriz; e o ponto fixo se chama vértice, o qual divide a superfície em duas partes distintas, cada parte sendo uma folha da superfície cônica.

Veremos que se conhecemos as equações da diretriz e as coordenadas do vértice, então podemos obter a equação da superfície, como fizemos para as superfícies cilíndricas, pelo método dos parâmetros.

Exemplo 3.5.1. *Encontrar a equação da superfície cônica cuja diretriz é a elipse*

$$4x^2 + z^2 = 1, y = 4 \quad (3.16)$$

e vértice no ponto $V(1, 1, 3)$.

Solução: Supondo que a geratriz que passa por um ponto qualquer $P(x, y, z)$ da superfície corta a diretriz no ponto $P'(x', y', z')$.

As equações simétricas da geratriz são:

$$\frac{x-1}{x'-1} = \frac{y-1}{y'-1} = \frac{z-3}{z'-3} \quad (3.17)$$

Como P' está sobre a elipse (3.16), temos que:

$$4(x')^2 + (z')^2 = 1, y' = 4. \quad (3.18)$$

Podemos eliminar os parâmetros x', y' e z' das equações (3.17) e (3.18) substituindo o valor $y' = 4$ em (3.17). A partir disto, colocamos x' em função de x e y e z' em função de y e z e substituímos os valores na primeira das equações de (3.18), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x'-1} &= \frac{y-1}{y'-1} \Rightarrow \frac{x-1}{x'-1} = \frac{y-1}{4-1} \\ &\Rightarrow 3x-3 = (y-1)(x'-1) \\ &\Rightarrow 3x-3 = x'y - y - x' + 1 \\ &\Rightarrow 3x-3-1 = x'(y-1) - y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3x - 4 + y}{y - 1} = x'. \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{z - 3}{z' - 3} &= \frac{y - 1}{y' - 1} \Rightarrow \frac{z - 3}{z' - 3} = \frac{y - 1}{4 - 1} \\ &\Rightarrow 3z - 9 = (z' - 3)(y - 1) \\ &\Rightarrow 3z - 9 = z'y - z' - 3y + 3 \\ &\Rightarrow 3z - 9 - 3 + 3y = z'(y - 1) \\ &\Rightarrow \frac{3z - 12 + 3y}{y - 1} = z' \end{aligned} \quad (3.20)$$

Substituindo (3.19) e (3.20) em (3.18):

$$\begin{aligned} 4 \left(\frac{3x - 4 + y}{y - 1} \right)^2 + \left(\frac{3z - 12 + 3y}{y - 1} \right)^2 &= 1 \Rightarrow \\ 4(9x^2 - 24x + 6xy + y^2 - 8y + 16) + (9z^2 - 72z + 18zy + 9y^2 - 72y + 144) &= y^2 - 2y + 1 \Rightarrow \\ 36x^2 - 96x + 24xy + 4y^2 - 32y + 64 + 9z^2 - 72z + 18zy + 9y^2 - 72y + 144 - y^2 + 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ordenando os termos, encontramos a equação da superfície:

$$36x^2 + 12y^2 + 9z^2 + 24xy + 18yz - 96x - 102y - 72z + 207 = 0$$

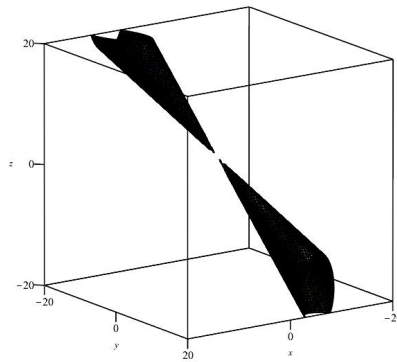


Figura 17: Superfície Cônica

□

Se diz que um polinômio algébrico de duas ou mais variáveis é homogêneo se todos os

seus termos são do mesmo grau. Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 \quad (3.21)$$

é homogênea de grau dois. Podemos verificar a homogeneidade de uma função de forma simples. Dada uma função $f(x, y, z)$, basta substituir as variáveis x, y e z por kx, ky e kz , respectivamente, sendo k uma constante não nula. Se a igualdade

$$f(kx, ky, kz) = k^n \cdot f(x, y, z)$$

for verdadeira, então $f(x, y, z)$ é uma função homogênea de grau n .

Dessa forma, para a função (3.21) temos:

$$\begin{aligned} f(kx, ky, kz) &= (kx)^2 + 2(ky)^2 - 3(kz)^2 \\ &= k^2(x^2 + 2y^2 - 3z^2) = k^2 f(x, y, z). \end{aligned}$$

Isso nos mostra que esta é uma função homogênea de grau 2.

Chamamos de Equação Homogênea à uma função homogênea igualada a zero, ou seja, $f(x, y, z) = 0$ é uma equação homogênea, e considerando os resultados obtidos acima, temos que se uma equação tem solução não nula, $x = x_1$, $y = y_1$ e $z = z_1$ também tem soluções $x = kx_1$, $y = ky_1$ e $z = kz_1$, sendo k uma constante qualquer.

Quando tomamos o vértice sobre a origem, o estudo das superfícies cônicas não perde a generalidade. No teorema abaixo observaremos que a equação de uma superfície cônica é homogênea nas variáveis x, y, z .

Teorema 10. *Uma equação representa uma superfície cônica com vértice na origem, se e somente se, é homogênea nas variáveis x, y e z .*

Demonstração: Se considerarmos uma superfície cônica com vértice na origem e cuja diretriz seja a curva

$$F(x, y) = 0, z = c, \quad (3.22)$$

e $c \neq 0$ uma constante qualquer. Supondo que a geratriz que passa por um ponto qualquer $P(x, y, z)$ da superfície corta a diretriz no ponto $P'(x', y', z')$. Como esta geratriz passa pela origem, suas equações simétricas são

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}. \quad (3.23)$$

Além disso, como P' está sobre a geratriz, temos que

$$F(x', y') = 0, z' = c. \quad (3.24)$$

Substituindo $z' = c$ em (3.23) temos

$$x' = \frac{cx}{z}, y' = \frac{cy}{z}.$$

Substituindo x' e y' em (3.24) teremos a seguinte equação para a superfície cônica:

$$F\left(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}\right) = 0. \quad (3.25)$$

Se na equação (3.25) substituirmos x, y e z por kx, ky e kz , respectivamente, sendo k uma constante qualquer diferente de zero, a equação permanece invariável, ou seja, é homogênea. Assim, demonstramos que a equação de uma superfície cônica com vértice na origem se representa por uma equação homogênea nas variáveis x, y e z .

De forma recíproca, como $F(x, y, z) = 0$ é homogênea nas três variáveis, a origem está sobre esta superfície. Seja $P(x_1, y_1, z_1)$ um ponto qualquer superfície, então suas coordenadas satisfazem a equação dada. Como esta equação é homogênea, tem solução (kx_1, ky_1, kz_1) , com $k \neq 0$, de maneira que o ponto $P'(kx_1, ky_1, kz_1)$ está sobre a superfície e sobre a reta OP , para todos os valores de k , conseqüentemente, OP está também sobre a superfície. Por isso, $F(x, y, z) = 0$ representa uma superfície cônica com vértice na origem e uma das geratrizes dessa superfície é a reta OP .

□

Exemplo 3.5.2. *Identificar e construir a superfície de equação*

$$x^2 + yz = 0.$$

Solução: A solução $x = y = z = 0$ é trivial, mas além desta, a equação dada no exercício tem infinitas soluções reais, basta atribuiremos a y e z um par qualquer de valores reais diferentes de zero que sejam de sinais contrários. Para x , a solução terá dois valores reais, logo pelo Teorema 10 a equação representa uma superfície cônica de centro na origem.

Logo, para construir a superfície, precisamos apenas de uma diretriz. Se $z = 2$ então

$$x^2 = -2y, z = 2,$$

representa uma parábola no plano $z = 2$. Traçando varias geratrizes obtemos a figura que representa a superfície cônica. Para obter a outra folha da superfície cônica basta trocar o sinal de z , ou seja,

$$x^2 = 2y, z = -2.$$

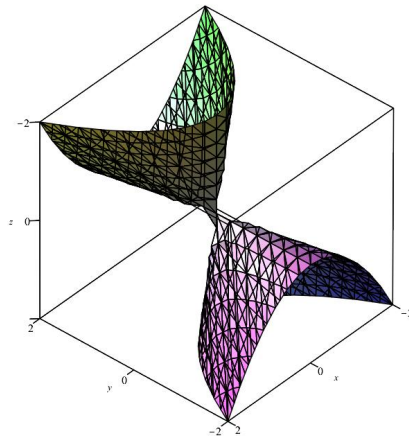


Figura 18: Superfície Cônica Exemplo 3.5.2

□

3.6 Superfície de Revolução

Definição 3.6.1. *Uma superfície gerada através de uma rotação de uma curva plana (geratriz) em torno de uma reta fixa (eixo de revolução) contida no plano da curva, é chamada de Superfície de Revolução ou Superfície de Rotação. Às posições da geratriz damos o nome de Meridianos, ou secção meridiana e às circunferências descritas por um ponto da geratriz, nomeamos paralelo da superfície.*

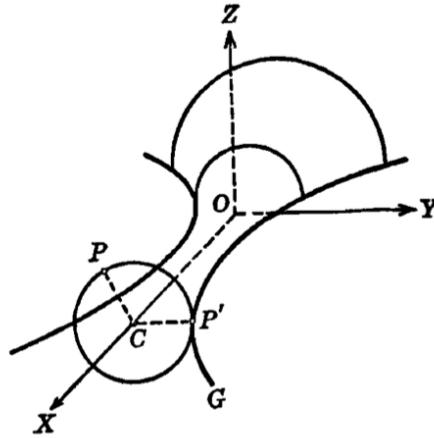


Figura 19: Superfície de Revolução

Fonte: (Lehmann, 1989)

Da definição acima temos dois resultados inicialmente:

- 1) Todo meridiano é congruente com a geratriz e é a intersecção da superfície com um plano que passa pelo eixo.
- 2) Todo paralelo tem seu centro sobre o eixo e está contido no plano perpendicular ao eixo.

Na determinação de uma superfície de revolução, não se perde a generalidade tomando a geratriz em um dos planos coordenados e como eixo de revolução um dos eixos coordenados contidos nesse plano.

Teorema 11. *Seja S a superfície de revolução que tem por geratriz a curva G contida no plano coordenado δ e por eixo de revolução ao eixo coordenado l contido em δ . Então a equação de S é obtida substituindo na equação plana de G a raiz quadrada da soma dos quadrados das duas variáveis não medidas ao longo de l , no lugar daquela destas variáveis que aparecem na equação plana de G .*

Demonstração: Supondo que a geratriz G contida no plano XY tem por equação

$$F(x, y) = 0, z = 0 \quad (3.26)$$

e supondo que o eixo X é o eixo de revolução. A partir disso, determinaremos a equação da superfície pelo método dos parâmetros.

Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície. O paralelo que passa por P corta G em $P'(x', y', z')$ do plano XY e seu centro C está sobre o eixo X . A distância entre C e P e C e P' , são iguais, pois são raios do mesmo paralelo, logo $|CP| = |\overline{CP'}|$. Como P, P' e C estão no mesmo plano, P' tem coordenadas $(x, y', 0)$ e C tem coordenadas $(x, 0, 0)$, logo $|\overline{CP}| = \sqrt{y^2 + z^2}$ e $|\overline{CP'}| = |y'|$, e

$$y' = \pm \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (3.27)$$

Como P' está sobre G , então

$$F(x', y') = 0, z' = 0 \quad (3.28)$$

Utilizando (3.27) e sabendo que $x' = x$, eliminamos os parâmetros x', y' e z' em (3.28), e obtemos:

$$F(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0,$$

que é a equação buscada para a superfície de revolução.

Caso o eixo de revolução fosse o eixo Y , então encontraríamos outra equação para a superfície

$$F(\pm \sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0.$$

□

Se obtém equações análogas quando a geratriz está em cada um dos outros planos coordenados e seu eixo de rotação está contido nesse plano.

Por exemplo: Se a geratriz está no plano YZ e o eixo de rotação é o eixo Z , sua equação é dada por $f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

Exemplo 3.6.2. *Encontrar a equação da superfície gerada pela rotação da hipérbole*

$$y^2 - 4x^2 = 4, z = 0 \quad (3.29)$$

em torno do eixo Y .

Solução: As variáveis não medidas ao longo do eixo Y são x e z . Portanto, de acordo com o Teorema 11, devemos substituir $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$ no lugar de x na primeira das equações de (3.29). Assim teremos

$$y^2 - 4x^2 - 4z^2 = 4,$$

que é a equação procurada para a superfície, a qual se denomina Hipérbole de Revolução de duas folhas.

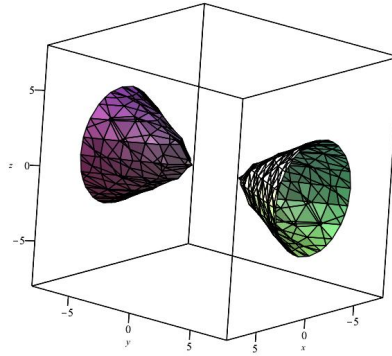


Figura 20: Hiperboloide de Revolução de Duas Folhas

□

Exemplo 3.6.3. *Demonstrar que a equação*

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 = 9 \quad (3.30)$$

representa uma superfície de revolução. Encontrar seu eixo de revolução e as equações da geratriz em um dos planos coordenados que contenha o eixo.

Solução: Os planos $z = k$ cortam a superfície (3.30) nas circunferências

$$9x^2 + 9y^2 = 9 + k^2, z = k,$$

cujos centros, para todos valores de k , estão sobre o eixo Z . Logo, a equação (3.30) representa uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo Z , e o traço da geratriz está contido no plano YZ , isto é,

$$9y^2 - z^2 = 9, x = 0. \quad (3.31)$$

Aqui podemos ver que a superfície (3.30) gera a hipérbole (3.31) em torno do eixo Z . Essa superfície é chamada Hiperboloide Revolução de uma folha.

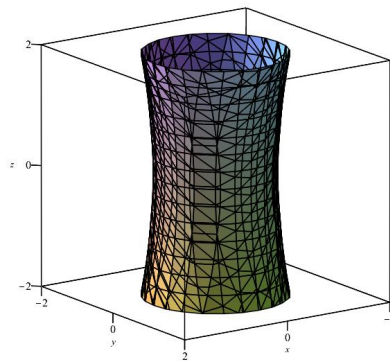


Figura 21: Hiperbolóide Revolução de Uma Folha

□

3.7 Superfícies Regradas

Definição 3.7.1. *Uma superfície regrada é aquela que pode ser gerada pelo movimento de uma linha reta, chamada geratriz.*

Podemos citar alguns exemplos de superfícies regradas:

- O plano;
- Cilindro;
- Cone.

As equações das superfícies regradas podem ser obtidas pelo método do parâmetro, como no caso das superfícies cilíndricas e cônicas.

Exemplo 3.7.2. *Encontrar a equação da superfície regrada gerada pela família de retas*

$$2x - y + kz = 0, 2kx + ky - 4z = 0. \quad (3.32)$$

Solução: Qualquer que seja o valor de k , a reta correspondente de (3.32) deve estar totalmente sobre a superfície, ou seja, todos os pontos que satisfazem as equações (3.32) devem estar sobre a superfície. Assim, as equações da superfície devem ser independentes

de k e podem ser obtidos a partir da equação (3.32) eliminando o parâmetro k . Fazendo isso, iremos encontrar os seguintes resultados:

$$k = \frac{y - 2x}{z}, k = \frac{4z}{zx + y},$$

então

$$\frac{y - 2x}{z} = \frac{4z}{2x + y},$$

ou seja, a equação buscada é

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0.$$

Essa é uma superfície cônica circular reta com vértice na origem e cujo eixo se estende por todo eixo Y .

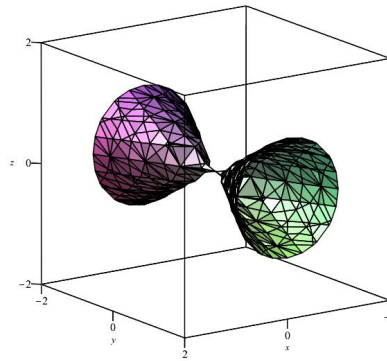


Figura 22: Superfície Cônica Circular Reta

□

Considerando agora o problema recíproco, dada a equação de uma superfície determinar se ela representa uma superfície regrada.

Exemplo 3.7.3. *Demonstrar que a equação*

$$yz + 2x - 2z = 0 \tag{3.33}$$

representa uma superfície regrada.

Solução: Se fizermos $z = k$ em (3.33), então encontraremos que as interseções da superfície com o plano são as linhas retas dadas pelas equações reduzidas

$$2x + ky - 2k = 0, z = k. \tag{3.34}$$

Como as retas do tipo (3.34) estão sobre a superfície (3.33), qualquer que seja k , então esta superfície é regrada e tem as retas (3.34) como geratrizes.

Para construir a superfície devemos determinar a direção das diretrizes. Para determinar o vetor diretor, consideramos os pontos $(k, 0, k)$ e $(0, 2, k)$, pertencentes à reta, neste caso o vetor diretor será $(k, -2, 0)$, o que nos mostra que todas as geratrizes são paralelas ao eixo XY , mas que não são paralelos entre si, pois o vetor diretor depende dos valores atribuídos à k .

Através destes dados podemos seguir um método para construir a superfície. Primeiro encontramos as interseções da superfície sobre os planos XZ e YZ , as quais são representadas pelas equações abaixo:

$$x = z, y = 0 \quad (3.35)$$

$$y = 2, x = 0 \quad e \quad z = 0, x = 0$$

Esta superfície é chamada de Parabolóide Hiperbólico.

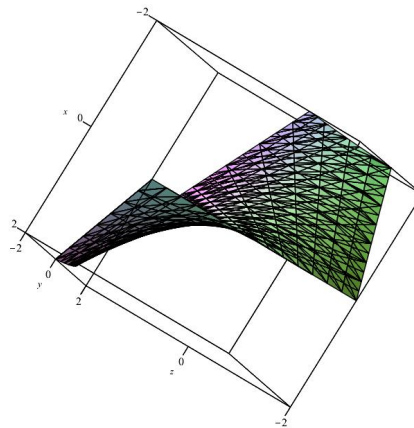


Figura 23: Parabolóide Hiperbólico

□

3.8 Transformação de Coordenadas Retangulares no Espaço

Na Geometria Analítica Plana, estudamos a possibilidade de simplificar a equação de uma superfície através da transformação de coordenadas, facilitando o estudo de suas

características. De forma semelhante, podemos simplificar as equações de superfícies no espaço, realizando a translação e rotação dos eixos coordenados.

Uma translação dos eixos coordenados retangulares no espaço nada mais é que mover os eixos coordenados de forma que os novos eixos sejam paralelos aos eixos originais, respectivamente, e com a mesma direção.

Podemos ver na figura abaixo, uma translação dos eixos coordenados, de maneira que a origem $O(0,0,0)$ toma uma nova posição $O'(l,m,n)$, e os eixos X, Y e Z tomem as novas posições X', Y' e Z' . Um ponto qualquer P , terá por coordenadas (x, y, z) nos eixos originais e (x', y', z') nos eixos paralelos.

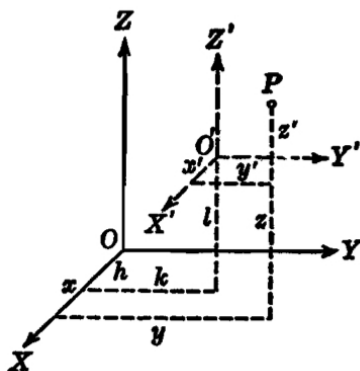


Figura 24: Translação

Fonte: Lehmann, 1989

Os resultados obtidos dessa translação podem ser resumidos no Teorema abaixo:

Teorema 12. *Se os eixos retangulares são trasladados a uma nova origem $O'(l, m, n)$ e se as coordenadas de um ponto qualquer P do espaço antes e depois da translação são respectivamente (x, y, z) e (x', y', z') , as equações de transformação das coordenadas originais às novas são*

$$x = x' + l, y = y' + m, z = z' + n.$$

Uma rotação dos eixos coordenados retangulares no espaço é a operação de mover os eixos coordenados girando-os em torno da origem, de forma que permaneçam mutuamente perpendiculares entre si.

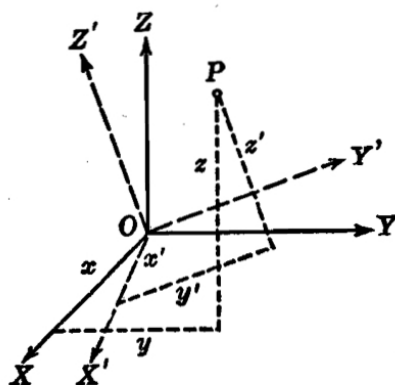


Figura 25: Rotação

Fonte: (Lehmann, 1989)

Na Figura 21, vemos uma rotação dos eixos coordenados tal que a origem O permanece fixa, mas os eixos originais X, Y e Z , tomam novas posições, representadas por X', Y' e Z' , respectivamente. Um ponto qualquer P de coordenadas originais (x, y, z) , também tomara novas coordenadas com a rotação, representados por (x', y', z') . Os ângulos formados entre a nova posição dos eixos e a posição original, são chamados de ângulos diretores de X', Y' e Z' , e são representados respectivamente por $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, os quais aparecem ordenados na tabela abaixo:

Eixo	X	Y	Z
X'	α_1	β_1	γ_1
Y'	α_2	β_2	γ_2
Z'	α_3	β_3	γ_3

Teorema 13. *A forma normal da equação de um plano é*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

sendo p um número positivos numericamente igual a longitude da reta normal traçada da origem ao plano e α, β e γ são os ângulos diretores da reta normal, direcionados da origem ao plano.

Os ângulos diretores do eixo X em relação aos novos eixos são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e como o eixo X é normal ao plano YZ . Segue pelo Teorema 13, que a equação do plano YZ em

relação aos novos eixos é dada por

$$x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 = 0.$$

O primeiro membro desta equação representa a distância do ponto P ao plano YZ , a qual também é dada pela coordenada x , logo temos a seguinte relação:

$$x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3.$$

De maneira análoga, podemos obter expressões similares para cada uma das coordenadas y e z em função das coordenadas x', y' e z' , descritas no sistema abaixo:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3. \\ y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3. \\ z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3. \end{cases}$$

Teorema 14. *A soma dos quadrados dos cossenos diretores de qualquer reta é igual a 1.*

Do Teorema acima temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1 \\ \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1 \\ \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

Teorema 15. *O ângulo θ formado por duas retas direcionais quaisquer no espaço, cujos ângulos diretores são $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ e $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, respectivamente, se determina pela relação $\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$.*

Corolário: *Para que duas retas direcionais sejam perpendiculares é necessário e suficiente que a soma dos produtos de seus cossenos diretores correspondentes seja igual a zero.*

Como os novos eixo X', Y' e Z' são perpendiculares entre si, pelo corolário do Teorema 14, temos que:

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0 \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 = 0 \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

De forma análoga à utilizada para encontrar as equações das coordenadas originais

em função das novas, podemos encontrar a equação das novas coordenadas em função das originais, da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3, \\ y' = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3, \\ z' = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3. \end{cases}$$

Os resultados acima se resumem no seguinte Teorema:

Teorema 16. *Se girarmos os eixos coordenados retangulares em torno de sua origem O como ponto fixo, de forma que os ângulos diretores dos novos eixos X', Y', Z' em relação aos eixos originais X, Y, Z sejam $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ e $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, respectivamente, e as coordenadas de um ponto qualquer P do espaço antes e depois da rotação são (x, y, z) e (x', y', z') , respectivamente, então as equações das transformações de coordenadas originais para as novas são:*

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3. \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3. \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{cases}$$

e as equações de transformação das coordenadas novas para as originais são:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3, \\ y' = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3, \\ z' = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3. \end{cases}$$

3.9 Equação Geral do Segundo Grau com Três variáveis

Uma das equações de maior importância dentro da Geometria Analítica de três dimensões é a equação geral de segundo grau com três variáveis:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \quad (3.36)$$

na qual, pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E e F é diferente de zero. Uma superfície que possui equação da forma (3.36), ou seja, do segundo grau, é chamada de Quádrica. Qualquer superfície que possua equação do segundo grau é uma quádrica, logo de maneira geral existem os cones quádracos, cilindros quádracos, superfícies regradas quádricas e além dessas superfícies já estudadas, as esferas também são superfícies

quádricas.

As quádricas possuem uma propriedade importantes, a qual nos atentaremos nessa sessão. Supondo que cortemos a quádrica (3.36) por um plano qualquer paralelo ao plano XY , $z = k$, em que k é uma constante real qualquer. A equação da curva da intersecção se obtém substituindo z por k , na equação (3.36), da seguinte forma

$$Ax^2 + By^2 + Ck^2 + Dxy + Exk + Fyk + Gz + Hy + Ik + K = 0, z = k.$$

Essa equação representa uma curva, que é uma secção cônica contida no plano $z = k$. Assim, se uma superfície quádrica é cortada por um plano qualquer, a curva formada pela intersecção é uma secção cônica, ou uma forma limite de uma secção cônica.

A equação geral de uma quádrica (3.36), ocupa entre as superfícies, na Geometria analítica espacial, um lugar semelhante ao lugar das curvas na Geometria analítica plana, pela equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (3.37)$$

que é a definição analítica de Secção Cônica. Em estudos mais aprofundados, demonstra-se que mediante uma transformação de coordenadas, podemos transformar a equação (3.36) de modo que assuma uma das duas formas abaixo:

$$\text{I) } Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$$

$$\text{II) } Mx^2 + Ny^2 = Sz$$

As superfícies do tipo I) tem a origem como centro de simetria, por isso são chamadas de Quádricas com centro, ao contrário das superfícies do tipo II), que não possuem centro de simetria e por esse motivo são chamadas de Quádricas sem centro.

Iremos aprofundar o estudos das duas formas nas sessões a seguir.

3.10 Quádricas com centro

As quádricas com centro são aquelas representadas pelas equações do tipo

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R,$$

em que M, N e P são diferentes de zero. Outra forma de escrever a equação de uma quádrlica com centro é em sua forma canônica

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.38)$$

da qual é possível deduzir que cada quádrlica com centro tem três planos de simetria, três eixos de simetria e um centro de simetria, chamados respectivamente de, planos principais, eixos principais e centro da superfície.

Se todos os coeficientes da equação (3.13) forem negativos, isso significa que a equação não representa uma superfície, pois não há lugar geométrico. Dessa forma, para que a equação represente uma superfície quádrlica com centro, ela deve ter pelo menos um dos seus coeficientes positivo. Desta forma, de acordo com o número de coeficientes maiores que zero temos as seguintes classificações:

a) **Elipsoide:**(Possui todos os coeficientes positivos.)

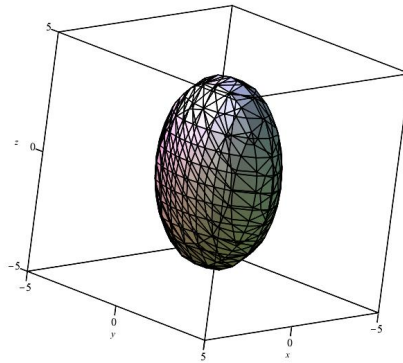


Figura 26: Elipsoide

A forma canônica da equação do Elipsoide é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.39)$$

Para discutirmos essa equação iremos utilizar os cinco métodos da seção 3.2.

- 1) Intersecções: As intersecções com os eixos X, Y, Z são $\pm a, \pm b$ e $\pm c$, respectivamente, os quais recebem o nome de vértices e marcando esses pontos no gráfico, sendo os pontos A, A', B, B', C, C' , respectivamente. Se $a > b > c$, então os segmentos AA' ,

BB' e CC' são chamados respectivamente de eixo maior, eixo médio e eixo menor do elipsoide.

- 2) Traços: Todos os traços sobre os planos coordenados são elipses.
- 3) Simetria: O elipsoide é simétrico à todos os planos e eixos coordenados, e também à origem.
- 4) Secções: As secções feitas pelos planos paralelos aos coordenados são elipses dentro dos limites da superfície, a qual está totalmente contida no paralelepípedo de faces iguais aos planos $x = \pm a$, $y = \pm b$ e $z = \pm c$.
- 5) Extensão: Se qualquer dos coeficientes da equação (3.39) tiverem o mesmo valor, então a superfície é chamada de elipsoide de revolução. Se:
 - $a > b$ e $c = b$, o elipsoide é alargado e é obtido com a revolução da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$, em torno de seu maior eixo.
 - $a > b$ e $c = a$, então o elipsoide é um esferóide, que é obtido girando a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ em torno do seu eixo menor.
 - $a = b = c$, a superfície é uma esfera de raio a , o que a torna um caso especial de elipsoide.

□

- b) **Hiperboloide de uma folha:** (Possui dois coeficientes positivos e um negativo.)

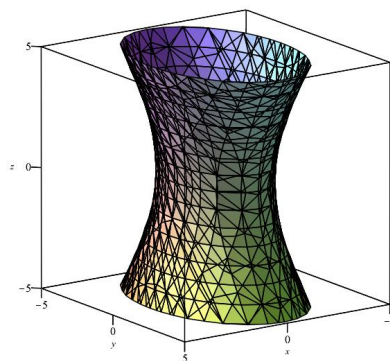


Figura 27: Hiperboloide de Uma Folha

O hiperboloide de uma folha pode obter três equações na forma canônica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.40)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.41)$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.42)$$

Para analisarmos as suas características, iremos utilizar o Hiperboloide da equação (3.40), porém, todos os resultados são análogos para as outras equações, pois se diferem somente em suas posições.

- 1) Intersecções: As intersecções com os eixos X e Y são, respectivamente, $\pm a$ e $\pm b$, não existem intersecções com o eixo Z .
- 2) Traços: Os traços sobre os planos XY , XZ e YZ são respectivamente a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$, a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$ e a hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$.
- 3) Simetria: A superfície é simétrica em relação a todos os planos e eixos coordenados e à origem.
- 4) Secções: As secções feitas pela superfície pelos planos paralelos a XY são as elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}, z = k. \quad (3.43)$$

- 5) Extensão: Da equação (3.43) podemos ver que quanto maior o valor de k , maior o tamanho das elipses, ou seja, ela se estende indefinidamente ao longo de todo o eixo Z . Qualquer hipérbole de uma folha se estende ao longo do eixo coordenado da variável cujo coeficiente é negativo na equação da forma canônica. Se na equação (3.15) $a = b$, o hiperboloide de uma folha pode ser gerado girando a hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$ em torno do eixo Z .

Se compararmos a equação (3.40) com a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (3.44)$$

que é a equação de uma superfície cônica do segundo grau com eixo no eixo Z , veremos que:

Se cortarmos cada uma das superfícies (3.40) e (3.44) pelo plano $y = mx$, a curva

de interseção para a superfície da equação (3.40) é a hipérbole:

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = mx \quad (3.45)$$

e para a superfície de equação (3.44), são as retas:

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} x \pm \frac{z}{c} = 0, y = mx. \quad (3.46)$$

Quaisquer que sejam os valores de m , as retas (3.46) são assíntotas da hipérbole (3.45), que está sobre o hiperboloide (3.40), e as retas (3.46) estão sobre a superfície (3.44). Logo, a superfície da equação (3.44) se relaciona com o hiperboloide (3.40) de forma semelhante à relação existente entre as retas assíntotas e a hipérbole. Assim, quanto mais o hiperboloide se aproxima do cone, mais a superfície cônica e o hiperboloide se distanciam da origem. Por esse motivo, a superfície (3.44) se chama cone assintótico do hiperboloide (3.40).

Reescrevendo a equação (3.40) na forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad (3.47)$$

e decompondo os membros em fatores, teremos:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right). \quad (3.48)$$

Dessa forma, fica mais fácil perceber que a equação (3.48) pode ser obtida eliminando o parâmetro k de qualquer um dos conjuntos de retas abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= k \left(1 + \frac{y}{b}\right); k \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= k \left(1 + \frac{y}{b}\right); k \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned}$$

Portanto, o hiperboloide de uma folha é uma superfície regradada gerada por um dos conjuntos de retas acima.

□

c) **Hiperboloide de duas folhas:**(Possui um coeficiente positivo e dois negativos.)

Assim como no hiperboloide de uma folha, o de duas folhas possui três formas canônicas, porém iremos utilizar a equação abaixo pra a discussão neste item:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3.49)$$

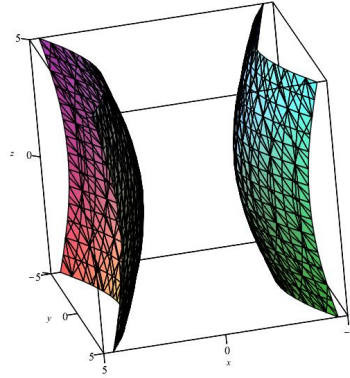


Figura 28: Hiperboloide de Duas Folhas

- 1) Intersecções: As intersecções com o eixo X são $\pm a$ e não existem intersecções com os eixos Y e Z .
- 2) Traços: Os traços sobre os planos XY , XZ são, respectivamente as hipérboles $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ e a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$. Sobre o plano YZ não há nenhum traço.
- 3) Simetria: A superfície é simétrica em relação a todos os planos e eixos coordenados e à origem.
- 4) Secções: As secções da superfície pelos planos paralelos a YZ são as elipses

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1, x = k. \quad (3.50)$$

sempre que $|k| > a$. Para $k = \pm a$, teremos somente os pontos de intersecção com o eixo X , representados por $(\pm a, 0, 0)$. Quando $-a < k < a$, então a equação não representa uma superfície. Assim, a superfície não é fechada mas é composta de duas folhas diferentes que se estendem indefinidamente.

- 5) Extensão: A superfície se estende ao longo do eixo X , e qualquer hiperboloide de duas folhas se estende indefinidamente ao longo do eixo cuja coordenada corresponde a variável cujo coeficiente é positivo na forma canônica de sua equação. Se na equação $b = c$, a superfície é um hiperboloide de revolução de duas folhas que pode ser gerado girando a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$, em torno do eixo X .

Assim como no hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas também possui um cone assintótico, o qual para a superfície (3.49) é representado pela

equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Para o hiperboloide de duas folhas cuja equação canônica é

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.51)$$

a equação do seu cone assintótico é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

que é o cone assintótico do hiperboloide de uma folha (3.40). Quando um cone assintótico é comum a um hiperboloide de uma folha e a um hiperboloide de duas folhas, dizemos que esses hiperboloides são conjugados. $\square$

3.11 Quádricas sem centro

As quádricas sem centro são aquelas representadas pelas equações do tipo

$$Mx^2 + Ny^2 = Sz,$$

em que todos os coeficientes são diferentes de zero.

Podemos escrever essa equação de uma quádrlica sem centro em sua forma canônica, que é representada por

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz. \quad (3.52)$$

Da equação (3.52), deduzimos que as quádrlicas sem centro possuem dois planos de simetria (YZ e XZ), um eixo de simetria (eixo Z), chamados respectivamente de, planos principais e eixo principal. Em contrapartida, as quádrlicas sem centro não possuem nenhum centro de simetria, por isso recebem o nome de Quádricas sem Centro.

Existem apenas dois tipos diferentes de superfícies a serem estudadas nessa seção, que são os Paraboloides elípticos e os Paraboloides hiperbólicos.

- a) **Paraboloides Elípticos:** (Os coeficientes dos termos de grau dois tem o mesmo sinal.)

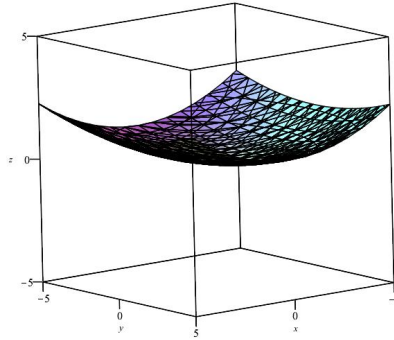


Figura 29: Paraboloide Elíptico

A forma canônica da equação do Paraboloide Elíptico é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (3.53)$$

Ele possui duas outras formas de equação canônica, representadas por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy$$

e

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx.$$

Porém, iremos analisar a equação (3.53), pois os resultados podem ser obtidos para as outras equações de forma análoga.

- 1) Intersecções: Não existem intersecções com os eixos X, Y, Z além da origem.
- 2) Traços: Todos os traços sobre os planos coordenados XY, XZ e YZ são respectivamente, a origem, a parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz, y = 0$ e a parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz, x = 0$.
- 3) Simetria: A superfície é simétrica em relação com os eixos YZ e XZ e em relação ao eixo Z .
- 4) Secções: As secções da superfície pelos planos paralelos ao plano XY são as curvas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck, z = k, \quad (3.54)$$

que são elipses se c e k possuírem o mesmo sinal, caso contrário, não há lugar geométrico. Se c for positivo, k deve ser também positivo, quando k tiver seu valor aumentado, as elipses consequentemente tem seu tamanho aumentado e os planos

de corte se distanciam do plano XY . Nos planos paralelos aos planos XZ e YZ , as secções são as parábolas cujos vértices se afastam do plano XY , a medida que os planos de corte se afastam dos planos coordenados.

- 5) Extensão: A superfície se estende indefinidamente, se afastando do plano XY . Se c for negativo, a superfície se localiza totalmente abaixo do plano XY e o parabolóide se estende ao longo do eixo Z . Qualquer parabolóide elíptico se estende ao longo do eixo cuja variável possui grau um na equação da forma canônica.

Se $a = b$, a superfície é um parabolóide de revolução gerado através de uma rotação da parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz, x = 0$ em torno do eixo Z .

□

- b) **Parabolóide Hiperbólico:** (Os coeficientes dos termos de grau dois tem sinais contrários.)

Uma das formas canônicas do parabolóide hiperbólico, e a que iremos analisar neste item é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz. \quad (3.55)$$

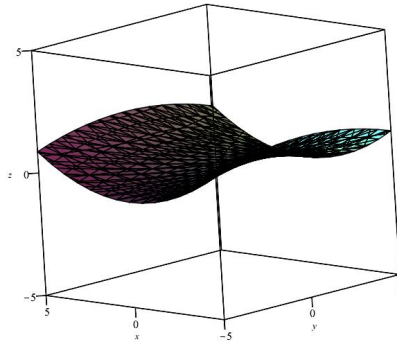


Figura 30: Parabolóide Hiperbólico

- 1) Intersecções: A única intersecção da superfície com os eixos coordenados X, Y e Z é a origem.
- 2) Traços: Os traços sobre os planos coordenados XY, XZ e YZ são respectivamente, as retas, que se interceptam, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, z = 0$ e $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, z = 0$ e as parábolas $\frac{x^2}{a^2} = cz, y = 0$ e $\frac{y^2}{b^2} = -cz, x = 0$.

- 3) Simetria: A superfície é simétrica em relação com os eixos YZ e XZ e em relação ao eixo Z .
- 4) Secções e Extensão: As secções da superfície pelos planos paralelos, mas não coincidentes, ao plano XY são as hipérbolés

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck, z = k \neq 0.$$

Quanto maior o valor numérico de k , mais afastado as partes da hipérbole ficam do eixo Z , sendo assim, ela se estende indefinidamente.

As secções da superfície pelos planos paralelos aos planos XZ e YZ , são respectivamente, as parábolas

$$\frac{x^2}{a^2} = cz + \frac{k^2}{b^2}, y = k$$

e

$$\frac{y^2}{b^2} = -cz + \frac{k^2}{a^2}, x = k,$$

que se abrem para cima ou para baixo, de acordo com o sinal de c .

Pela figura, podemos ver que um parabolóide hiperbólico não pode ser uma superfície de revolução. Podemos escrever a equação (3.55) na forma

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = cz,$$

e vemos que a equação da superfície pode ser obtida eliminando o parâmetro k de qualquer uma das seguintes retas abaixo,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = k, k \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = cz$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = k, k \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = cz.$$

Portanto, o parabolóide hiperbólico é uma superfície regrada gerada por qualquer uma das retas acima. $\square$

(Veja o exemplo 3.7.3).

4 Conclusão

Finalizamos este trabalho analisando o comportamento e propriedades das superfícies regulares parametrizadas no espaço euclidiano que satisfazem a Proposição 2.4.8, as quais podem ser representadas por uma equação da forma (3.1). Assim, analisamos na Seção 3.3 as superfícies esféricas, que podem ser representadas pelas equação $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$, em que o ponto (h, k, l) é o centro e r é o raio. Na Seção 3.4, estudamos as superfícies cilíndricas, cujas equações podem ser encontradas a partir dos vetores diretores das geratrizes e através da diretriz, utilizando o método dos parâmetros. No estudo das Superfícies Cônicas, na Seção 3.5, vimos que conhecendo as equações da diretriz e as coordenadas do vértice, podemos encontrar a equação da superfície através do método dos parâmetros. Na Seção 3.6, pelo mesmo método utilizado para as superfícies ditas acima, vimos que a equação das superfícies de revolução satisfazem a equação (3.1). Na Seção 3.7, estudamos as superfícies regradas, que são aquelas que podem ser geradas pelo movimento de uma linha reta, que também podem ter suas equações obtidas pelo método dos parâmetros, assim como as superfícies cilíndricas e cônicas. Além destas superfícies, estudamos as superfícies quádricas, com e sem centro, as quais possuem as respectivas equações, $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$ e $Mx^2 + Ny^2 = Sz$, com todos os coeficientes diferentes de zero. Nas quádricas com centro, podemos destacar três tipos de superfícies: o elipsoide, cuja equação possui todos os coeficientes positivos; o hiperboloide de uma folha, cuja equação possui dois coeficientes positivos e um negativo; e o hiperboloide de duas folhas, cuja equação possui um coeficiente positivo e dois negativos. Nas quádricas sem centro destacamos o parabolóide elíptico, cuja equação possui todos os coeficientes de grau dois com o mesmo sinal e o parabolóide hiperbólico, cuja equação possui os coeficientes dos termos de grau dois com sinais contrários.

Referências

- [1] Carmo, P. Manfredo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM, 5^o edição, Rio de Janeiro, (2012).
- [2] Lehmann, C. H., *Geometria Analítica*, Editorial Limusa, Mexico, 1989.
- [3] Picado, Jorge *Apostamentos de Geometria Diferencial*, Universidade de Coimbra, São Paulo, (2006).
- [4] Struik, J. Dirk *Lectures on Classical Differential Geometry*, DOVER PUBLICATIONS, INC, second edição, New York, (2014).
- [5] Tenenblat, Ketí, *Introdução à Geometria Diferencial*, Blucher, 2^o edição, São Paulo, (2012).
- [6] Lima, L. Elon, *Álgebra Linear*, IMPA, 10^o edição, Rio de Janeiro, (2020).
- [7] Gorodski, Cláudio. ALGUNS ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~gorodski/ps/geom.doc>.