

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**UMA ALTERNATIVA RIGOROSA PARA O ENSINO DAS
SÉRIES DE FOURIER**

DANILO FREITAS ESTEVES

**Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca
(Orientadora)**

**GOIÂNIA - GO
2022**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☒ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Danilo Freitas Esteves

Matrícula: 20181010940067

Título do Trabalho: UMA ALTERNATIVA RIGOROSA PARA O ENSINO DAS SÉRIES DE FOURIER

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

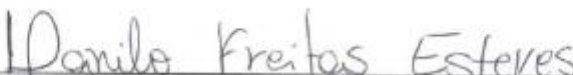
- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 08/12/2022.



Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Danilo Freitas Esteves

**UMA ALTERNATIVA RIGOROSA PARA O ENSINO
DAS SÉRIES DE FOURIER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Licenciatura em Matemática do
Instituto Federal de Goiás – IFG – Câmpus
Goiânia, como requisito parcial para obten-
ção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof(a). Dr(a). Regina Célia Bueno da Fonseca

Goiânia - GO
2022

Es858a Esteves, Danilo Freitas.

Uma alternativa rigorosa para o ensino das séries de Fourier / Danilo Freitas Esteves. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2022.
63 f.: il.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca.

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

1. Séries de Fourier. 2. Matemática - ensino. 3. Decomposições ortogonais.
I. Fonseca, Regina Célia Bueno da (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. III. Título.

CDD 510.07

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva CRB1/ 2.740
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

UMA ALTERNATIVA RIGOROSA PARA O ENSINO DAS SÉRIES DE FOURIER

por

DANILO FREITAS ESTEVES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Dr^a. Regina Célia Bueno da Fonseca

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado, em 08 de dezembro de 2022, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Prof^a. Dr^a. Regina Célia Bueno da Fonseca (Presidente da Banca/IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Marcos Roberto Batista (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Claudio José da Silva (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Marcos Roberto Batista, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 10/12/2022 06:09:51.
- Claudio Jose da Silva, COORDENADOR DE CURSO - FUC1 - GYN-CCLF, em 09/12/2022 08:00:36.
- Regina Celia Bueno da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 09/12/2022 07:46:06.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 29/11/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 350186
Código de Autenticação: 77d9681db4



Agradecimentos

Agradeço primeiramente e unicamente a tudo aquilo que me apoiou durante a produção do mesmo, apesar das dificuldades. Em primeira instância, claro, isso inclui familiares e amigos, sempre presentes, mas também não poderia me esquecer da paciência e ajuda que obtive não só nestes momentos, mas em todo o curso, de todo o corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática. Por fim, e mais importante, eu não teria todas essas oportunidades, se Deus não tivesse as disponibilizado para mim.

"Profound study of nature is
the most fertile source of
mathematical discoveries."

Jean Baptiste Joseph Fourier

Resumo

As séries de Fourier podem representar uma variedade de funções periódicas. Há uma diferença entre estudar séries de Fourier e séries de potências, pois, respectivamente, uma funciona como processo global e a outra como processo local. E assim, em alguns problemas não é viável aplicar as séries de potências, ao contrário, tem-se a necessidade de aplicar as séries de Fourier. Nesta pesquisa apresentamos uma alternativa rigorosa para o ensino de séries de Fourier sobre diferentes decomposições ortogonais de uma função, relacionando-as matematicamente em determinados espaços métricos que são chamados de Transformada Discreta de Fourier e Transformada de Fourier, de modo que o leitor interessado possa continuar seus estudos sob o âmbito que preferir, seja este de caráter teórico ou prático.

Palavras-chave: Alternativa para o ensino. Séries de Fourier. Decomposições ortogonais. Transformada de Fourier. Transformada Discreta de Fourier.

Abstract

Fourier series can represent a variety of periodic functions. There is a difference between studying Fourier series and power series, because, respectively, one works as a global process and the other as a local process. And so, in some problems it is not feasible to apply the power series, on the contrary, it is necessary to apply the Fourier series. In this research we present a rigorous alternative for teaching Fourier series on different orthogonal decomposition's of a function, relating them mathematically in certain metric spaces that are called Discrete Fourier Transform and Fourier Transform, so that the interested reader can continue your studies under the scope you prefer, be it theoretical or practical.

Keywords: Alternative to teaching. Fourier series. Orthogonal decomposition's. Fourier Transform. Discrete Fourier Transform.

Sumário

	INTRODUÇÃO	1
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	5
1.1	Funções Periódicas	5
1.2	Relações Trigonométricas	6
1.3	Resultados do Cálculo	7
1.4	Resultados da Álgebra Linear	8
1.5	Tópicos de Análise	9
1.6	Resultados da Análise Complexa	12
2	CONSTRUINDO AS SÉRIES DE FOURIER	15
2.1	Métricas, Normas e Produto Interno Hermitiano	17
2.2	Decompondo vetores através do Produto Interno	25
2.3	Definindo a Série de Fourier em espaços de Hilbert	27
3	OBSERVANDO AS DIFERENTES DECOMPOSIÇÕES NA PRÁTICA	39
3.1	Bases para Séries de Fourier à luz de frequências	39
3.2	Transformada Discreta de Fourier (TDF)	46
3.3	Transformada de Fourier	53
4	RESULTADOS OBTIDOS E CONCLUSÃO	61
	REFERÊNCIAS	62

Lista de ilustrações

Figura 1 – Manuscrito de 1807, <i>Théorie Analytique de la Chaleur dans les solide</i> (Teoria Analítica do Calor em Sólidos).	2
Figura 2 – Obtenção do valor absoluto de u	9
Figura 3 – Periodização de um intervalo qualquer.	15
Figura 4 – Gráfico de $f(x)$	16
Figura 5 – Da curva de cima para baixo: $S_n = S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_5 \rightarrow S_{10} \rightarrow S_{17}$	17
Figura 6 – Propriedades de uma métrica válida com amparo visual.	18
Figura 7 – Outras métricas comuns.	19
Figura 8 – Visualiação de $\ f\ $	22
Figura 9 – Visualização das distâncias, centrado em L	29
Figura 10 – Série S_{v^2} vista como uma aproximação da área de f	32
Figura 11 – f e g originais e arbitrárias.	33
Figura 12 – f e g discretizadas em nove pontos.	34
Figura 13 – A função $h = f \cdot g$ discretizada e devidamente ponderada por Δ_x	35
Figura 14 – Qualquer intervalo simétrico entre funções ímpares retorna uma inte- gral nula.	37
Figura 15 – À esquerda, uma função $f \in L^2$; à direita, N amostras de f : utilizamos $\mathbb{C}^N$	38
Figura 16 – $T = 2\pi$ à esquerda; $T = 1$ à direita.	39
Figura 17 – Com o Período Fundamental $= T$, encontramos diferentes frequências variando-se k	40
Figura 18 – Discretização de uma f qualquer.	46
Figura 19 – TDF de Dimensão igual a T	47
Figura 20 – Interpretação geométrica utilizando o círculo unitário.	49
Figura 21 – Interpretação geométrica seccionando o intervalo $[e^0, e^{12\pi}]$	53
Figura 22 – Visualização por dimensão.	54
Figura 23 – Sinal de áudio original e suas projeções em frequências.	54
Figura 24 – Delimitação de intensidade mínima.	55
Figura 25 – Composição de novo áudio.	55
Figura 26 – Transformando um somatório em uma integral, novamente.	56
Figura 27 – Intuição da Linearidade: à direita, a TF da função à esquerda.	57
Figura 28 – Intuição da Dilatação: à direita, a TF da função à esquerda.	58
Figura 29 – Função seno multiplicada por $\exp(-2i\pi kt)$. As diferentes imagens são obtidas variando-se a frequência k	60
Figura 30 – Picos de cosseno e seno.	60

Introdução

Talvez a principal diferença entre as áreas Matemática Aplicada e a Matemática Pura seja a variável tempo. Em sua totalidade de ramificações, há sempre uma disputa oculta entre a necessidade de uma matemática ainda não desenvolvida e a espera por uma problemática concreta, ou seja, quando a sociedade é o fator limitante. Considerando o nível de abstração o qual a matemática pura lida, em maioria, o segundo o caso é o mais recorrente.

Há, no entanto, correlações entre resultados altamente abstratos com as necessidades que a evolução da tecnologia proporciona. A princípio, pode ser uma correspondência ínfima, porém, quando levamos em conta o caráter de generalização da matemática, não é estranho pensar que uma teoria bem fundamentada pode possuir aplicações de naturezas diversas. Nesta linha de raciocínio, o trabalho desenvolvido inicialmente por Joseph Fourier trata de um conhecimento cujas raízes estão presentes em setores abstratos da matemática, dos quais as propriedades se traduzem em poderosas ferramentas práticas.

O francês e contemporâneo de Napoleão Bonaparte, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi um físico matemático cujo trabalho se concentrava em mecânica clássica, na época, também chamada de mecânica racional. Fourier trabalhava no chamado Problema dos N-Corpos, um estudo de sistemas de equações diferenciais que modelam a dinâmica entre N corpos celestiais. Resolver analiticamente tal problema significaria prever a movimentação dos objetos de estudo em função do tempo ([ROSENBERG, 2012](#)). Foi ele iniciou a investigação de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, as chamadas *séries de Fourier*, que é utilizado principalmente nas áreas: Matemática, Engenharia, Computação, Música, Ondulatória, Sinais Digitais, Processamento de Imagens, e outras.

Em meados de 1802, Fourier obteve progresso em seus estudos, para pouco depois se deparar em dificuldades, em determinado momento o físico voltou-se completamente para o estudo da difusão de calor. Seus manuscritos foram enviados em 1807 para Institut de France em esperança de uma publicação, porém suas ideias não foram plenamente aceitas, em especial por Lagrange. Quatro anos depois, Fourier consegue a divulgação de seus trabalhos em um curto artigo e formaliza seus manuscritos em seu livro *Théorie Analytique de la Chaleur* (A teoria analítica do calor), publicado em 1822 ([GRATTAN-GUINNESS; RAVETZ, 1972](#)), baseado na aplicação da técnica de decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes nos problemas de condução do calor. A Figura 1 mostra parte do manuscrito enviado para o Institut de France em 1807, a respeito da *Théorie Analytique de la Chaleur dans les solides*.

Lu le 21^{er} X^{bre} 1807
Commissaire des Arts et Manufactures
La Harpe, Monge et Lavoisier

Delambert
pour l'Institut.

MS
1851

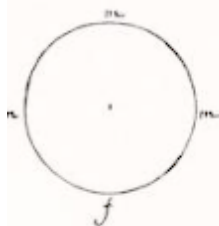
Théorie de la propagation de la Chaleur dans les Solides



Objet
de cet Ouvrage.

Lorsque la chaleur est inégalement distribuée entre les différents points d'un corps solide, elle tend à se mettre en équilibre en passe successivement d'un point qui devient plus chauffé, à un autre qui le devient moins. En même temps la chaleur se dissipe d'elle-même par la surface et se perd dans le milieu ou dans le vide. Cette tendance à une distribution uniforme, et ce refroidissement spontané qui a lieu à la surface des corps, sont les deux causes qui changent à chaque instant la température des différents points. La question de la propagation de la chaleur, consiste à déterminer quelle est la température de chaque point d'un corps à un instant donné. On suppose que les températures initiales soient connues, et on demande suivant quelle loi varient les températures. Des exemples suivans feront connaître plus clairement la nature de ces questions.

Supposons qu'un cercle ou anneau métallique, dont le plan est horizontal, soit exposé à la flamme d'un foyer dans une partie de sa circonférence. L'action de ce foyer étant durable et uniforme, les autres parties s'chaufferont continuellement, et, après un certain temps, chaque point de l'anneau aura acquis presque entièrement la plus haute température à laquelle il puisse parvenir. Cette limite, ou maximum de température, n'est pas la même pour tous les points. Elle est d'autant moindre qu'ils sont plus éloignés de l'axe ou le foyer est immédiatement appliqué.



La ligne $f m m f$ représente la circonférence moyenne de l'anneau, c'est-à-dire, celle qui joint tous les centres des sections circulaires, faites par des plans perpendiculaires au plan de l'anneau, en qui passent par le centre de cet anneau. Le diamètre de cette section est assez petit pour qu'on puisse, sans erreur sensible, regarder comme égales les températures des différents points d'une même section. Le point f est celui au dessous duquel le foyer se trouve placé.

Lorsque les températures sont devenues permanentes, le foyer transmet à chaque instant une quantité de chaleur qui compense exactement celle qui se dissipe par la surface dans tous les points de l'anneau.

Si maintenant on supprime le foyer, la chaleur continuera de se propager dans l'intérieur du solide, mais la ^{celle} quantité de chaleur qui se dissipe par la surface ne sera plus remplacée par

Figura 1 – Manuscrito de 1807 enviado para Institut de France: Théorie Analytique de la Chaleur dans les solides (Teoria Analítica do Calor em Sólidos).

A seguir, fazemos um breve estado da arte do tema. [Pereira e ao \(2005\)](#) apresentaram uma abordagem específica sobre a análise da Matemática, utilizando-se de teoremas importantes com o propósito de descrever uma função em um determinado intervalo, buscando valores para a convergência das séries. A investigação procurou extrair e despertar a essência da matéria (análise) para melhor contribuir na aprendizagem, fazendo com que no futuro este possa agir de forma significativa na evolução da matemática que busca à todo momento o aprimoramento dos conhecimentos matemáticos. [Chaves \(2013\)](#) aborda uma alternativa praxeológica de se compreender o ensino das Séries de Fourier, uma vez que tal temática constituiu-se em uma das maiores “vilãs” no ensino da Disciplina Cálculo Diferencial e Integral IV, e apresenta uma roteiro didático que permita ao discente compreender a construção do conhecimento matemático por meio das manipulações algébricas, e desperte aos discentes da educação superior entendimentos sem medos e temores. [Araki e Mollo Neto \(2013\)](#) exploram uma alternativa didática para o ensino de séries de Fourier, buscando uma forte contextualização para a confirmação da sua aplicação em situações práticas do dia a dia, motivando assim os alunos a se aprofundarem nos estudos correspondentes de forma a integrar e alinhar o discurso e a maneira de abordagem com o mesmo formalismo para a transmissão de conhecimentos aos discentes do curso de Engenharia Eletrônica. [Pifer e Aurani \(2015\)](#) promoveram um enfoque com uma análise das bases conceituais e epistemológicas envolvidas na construção da teoria da condução do calor de Fourier, com contribuição no ensino de física mostrando uma visão mais clara da natureza da ciência através de seus procedimentos, seu alcance e suas limitações. [Teixeira, Medeiros e Menezes \(2017\)](#) apresentaram um material de apoio - notas de aula - da disciplina *Métodos Matemáticos I*, para as Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais com a motivação para saber qual é o processo de difusão de calor no interior de uma barra. O material apresenta metodologia didática *formal e usual* normalmente utilizada na Matemática.

A partir das observações notadas na revisão bibliográfica (estado da arte), surgiu a ideia da pesquisa, construir um arcabouço matemático necessário para entender a fundamentação teórica por trás da análise das séries de Fourier, apresentando um conteúdo que promova autonomia para o discente posteriormente, ou seja, apresentar um conteúdo que promova uma alternativa rigorosa (com mais detalhes) para o ensino das séries de Fourier. Assim como, motivou a realizar a pesquisa utilizando um tema que está presente em diversas áreas de conhecimento atuais, como as séries de Fourier, é trazer, à atualidade e realidade do discente, um conhecimento que de outra maneira seria observado somente pelo âmbito abstrato. Desde filtros de áudio à análise de dados meteorológicos, estudá-la não só é entender como a matemática pode traduzir e modular diversos assuntos, agindo como um incentivo à pesquisa, como também aprofundar nos conhecimentos teóricos que os alunos de um curso de exatas já possuem em suas ementas, podendo ser um material útil não só para os atuais estudantes de Licenciatura, como também àqueles que planejam

participar de uma pesquisa em uma pós-graduação em exatas.

Para tanto, a metodologia escolhida foi utilizar-se das proposições matemáticas estudadas ao longo da ementa do curso de licenciatura em matemática, presentes em boa parte, também, em outros cursos de exatas, para apresentar uma forma rigorosa, porém acessível, da intuição básica por trás da análise de Fourier. Ainda, o trabalho também estará relacionando diferentes pontos de vista acerca do tema, de modo que o leitor possa continuar seus estudos sob o âmbito que preferir, seja este de caráter teórico ou prático, tendo o domínio necessário e suficiente para tal.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: Cap. 1 descrevemos brevemente a fundamentação teórica da trigonometria, cálculo, álgebra linear, tópicos de análise e análise complexa necessárias para o estudo da "construção" das séries de Fourier; no Cap. 2 apresentamos algumas definições, propriedades, convergências, métricas e exemplos da séries de Fourier; Cap. 3 apresentamos as definições de bases para as séries de Fourier e transformada discreta de Fourier, normalização e ortogonalidade da base, bases ortonormais e a transformada de Fourier. E finalmente, no Cap. 4, os resultados obtidos e conclusão.

1 Fundamentação Teórica

Pela natureza do assunto, é imprescindível que se tenha noção dos principais resultados do Cálculo, como os conceitos básicos de derivadas e integrais, obviamente, assume-se a familiaridade com funções. Como faremos um tratamento algébrico, os requerimentos em álgebra linear serão menos rigorosos, sendo apresentados durante o trabalho. Séries também serão brevemente apresentadas, porém recomenda-se a noção intuitiva.

1.1 Funções Periódicas

Os objetos de estudo primordiais que a análise de Fourier são denominados como periódicos, aqueles cujo estado em qualquer instante é idêntico passado, ou regressado, um determinado período, caracterizando um padrão. Podemos definir uma função periódica definida nos $\mathbb{R}$, $f(t)$, de período igual a T , um número real positivo e não único, tal que:

$$f(t + T) = f(t - T) = f(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.1)$$

Seja $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, \dots\}$ o conjunto ordenado com a relação $T_i < T_{i+n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ de todos os possíveis períodos positivos de f , dizemos que o menor período deste conjunto, T_0 , é o *período primordial* de f , e o chamaremos de T . Além disso, vale que (OSGOOD, 2019):

$$f(t + mT) = f(t + T) = f(t), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Um exemplo natural do caso são as funções trigonométricas, cujo período é 2π , que podem representar fenômenos físicos. Seu uso é justificado, pois a notação matemática facilita na manipulação dos cálculos, em especial, ao utilizar a notação matemática da análise complexa, denotada como fórmula de Euler:

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta), \quad (1.3)$$

onde θ é o argumento real (em radianos ou em graus); e é a base do logaritmo natural; $i^2 = -1$, sendo i é a unidade imaginária; $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ são funções trigonométricas (ZILL; CULLEN, 2001), (EDWARDS; PENNY, 1995).

Fenômenos periódicos estão presentes em uma amálgama de setores da realidade, um relógio de pêndulo (VIANA, 2020), o movimento da lua (WISDOM; J.; MIGNARD, 1984), e até mesmo na radiação (PINHEIRO; PAULO, 2011). É natural, portanto, que o estudo das séries de Fourier esteja presente no ensino de cursos superiores de engenharia e física. A ementa dos mesmos, no entanto, não justifica o seu uso de forma rigorosa, reduzindo a importância das séries comumente a uma ferramenta de aproximação.

1.2 Relações Trigonométricas

Em nossos cálculos será imprescindível que se saiba realizar as seguintes substituições:

Propriedade 1.1 Função Seno de argumento $A + B$:

$$\sin(A + B) = \sin(A) \cos(B) + \sin(B) \cos(A). \quad (1.4)$$

Da Eq. (1.4) implica em:

$$\begin{aligned} \sin(A + B) + \sin(A - B) &= \sin(A) \cos(B) + \sin(B) \cos(A) \\ &\quad + \sin(A) \cos(-B) + \sin(-B) \cos(A). \end{aligned}$$

Como $\cos(-B) = \cos(B)$ e $\sin(-B) = -\sin(B)$:

$$\begin{aligned} \sin(A + B) + \sin(A - B) &= \sin(A) \cos(B) + \sin(B) \cos(A) \\ &\quad + \sin(A) \cos(B) - \sin(B) \cos(A) \\ &= 2 \sin(A) \cos(B). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sin(A) \cos(B) = \frac{\sin(A + B)}{2} + \frac{\sin(A - B)}{2}. \quad (1.5)$$

Propriedade 1.2 Função Cosseno de argumento $A + B$:

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B). \quad (1.6)$$

Da Eq. (1.6) implica em:

$$\begin{aligned} \cos(A + B) + \cos(A - B) &= \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) \\ &\quad + \cos(A) \cos(-B) - \sin(A) \sin(-B) \end{aligned}$$

Como $\cos(-B) = \cos(B)$ e $\sin(-B) = -\sin(B)$:

$$\begin{aligned} \cos(A + B) + \cos(A - B) &= \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) \\ &\quad + \cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B) \\ &= 2 \cos(A) \cos(B). \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{\cos(A + B)}{2} + \frac{\cos(A - B)}{2}. \quad (1.7)$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \cos(A + B) - \cos(A - B) &= \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) \\ &\quad - \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) \\ &= -2 \sin(A) \sin(B) \end{aligned}$$

Por fim,

$$\sin(A) \sin(B) = \frac{\cos(A - B)}{2} - \frac{\cos(A + B)}{2}. \quad (1.8)$$

1.3 Resultados do Cálculo

Definição 1.1 (Limites e Continuidade) Dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ definida em D_f é igual a L quando x tende a x_0 , qualquer que seja o caminho tomado pela vizinhança de x_0 . Denotamos matematicamente este enunciado à seguinte maneira:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta \mid \forall x \in D_f :$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon,$$

se o limite L existe, e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, então podemos afirmar que $f(x)$ é contínua em x_0 ([GUIDORIZZI, 2016](#); [LARSON et al., 2006](#)).

Definição 1.2 (Derivada de uma função) Denotada por $f'(x)$, a derivada de uma função é um caso especial de limites e um dos conceitos mais importantes do cálculo, possuindo mais de uma interpretação. Numericamente falando, $f'(x_0)$ (a derivada de f em x_0) é igual à inclinação da reta tangente ao ponto $(x_0, f(x_0))$. Obtemos a derivada de uma função em um ponto ao realizar o limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0), \Delta x = x - x_0, \quad (1.9)$$

e para encontrarmos a derivada de uma função:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x), \quad (1.10)$$

se este limite existe em todos os pontos do Domínio de f , então dizemos que f é derivável ([BUSS; FLEMMING, 2006](#)).

Definição 1.3 (Primitivas e integrais) Dada uma função f definida em um intervalo L arbitrário. Definimos como primitiva de f em L como uma função que obedeça a seguinte equivalência:

$$F'(x) = f(x). \quad (1.11)$$

Note que $F(x) + k$, sendo $k \in \mathbb{R}$, também o é. Portanto, podemos definir um conjunto de todas as primitivas de f e denotarmos-as como:

$$F(x) + k = \int f(x) \, dx, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

onde o nome que damos ao segundo membro da igualdade na Eq. (1.12) é *integral indefinida* de f . Quando $L = [a, b]$, e a integral neste intervalo existe, esta recebe o nome de *integral definida* em $[a, b]$ e vale a seguinte propriedade:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad (1.13)$$

sendo elencado o **teorema fundamental do cálculo**. Uma propriedade muito utilizada de integrais será:

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx. \quad (1.14)$$

1.4 Resultados da Álgebra Linear

Ao lidar com espaços métricos, espera-se familiaridade com espaços vetoriais, ainda que este não necessariamente possua uma norma. Porém, é de interesse que se tenha noção das propriedades que um espaço métrico possui, já que elas podem e serão herdadas por espaços métricos mais completos.

Propriedade 1.3 (Espaços Vetoriais) Dotado de elementos que atribuímos o nome de *vetores*, um *espaço vetorial* é um conjunto munido com duas operações principais e oito propriedades. Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial com u, v e $w \in \mathcal{E}$, e α, β pertencentes a um corpo K , segue que:

1. **Adição:** $u + v \in \mathcal{E}$;
2. **Multiplicação por escalar:** $\alpha u \in \mathcal{E}$;
3. **Comutatividade:** $u + v = v + u$;
4. **Associatividade da Adição:** $(u + v) + w = u + (v + w)$;
5. **Vetor Nulo:** $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{E} \mid v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v, \forall v \in \mathcal{E}$;
6. **Iverso Aditivo:** $\forall v \in \mathcal{E}, \exists -v \mid v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$;
7. **Associatividade da Multiplicação:** $(\alpha\beta)w = \alpha(\beta w)$;
8. **Distributividade em soma de escalares:** $(\alpha + \beta)w = \alpha w + \beta w$;
9. **Distributividade em soma de vetores:** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
10. **Multiplicação por 1:** $1 \cdot v = v$.

Definição 1.4 (Conjunto Linearmente Independente (L.I.)) Um conjunto $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}$ é Linearmente Independente (L.I.) quando nenhum vetor $x \in \mathcal{X}$ pode ser escrito como uma combinação linear de outros vetores pertencentes a $\mathcal{X}$.

Definição 1.5 (Base de um Espaço Vetorial) Se existe um subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ que seja L.I., cujo conjunto de todas as combinações lineares possíveis seja o próprio $\mathcal{E}$, então afirma-se que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{E}$ ([LIMA, 2018a](#)).

Lema 1.1 (Valor absoluto de um vetor do $\mathbb{R}^2$) Denominamos $|u|$ como o *valor absoluto* ou *módulo* do um vetor u , sendo calculado a partir do *Teorema de Pitágoras*. A Figura 2 mostra geometricamente, a obtenção do valor absoluto de u .

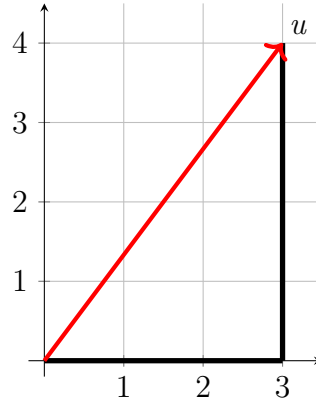


Figura 2 – Obtenção do valor absoluto de u .

Definição 1.6 (Produto Escalar) Definimos o produto escalar entre dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ à seguinte maneira:

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^2 u_i v_i.$$

Uma propriedade que conseguimos realizando o produto escalar entre dois vetores do $\mathbb{R}^2$ é a obtenção do ângulo entre ambos através de:

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}. \quad (1.15)$$

Definição 1.7 (Produto Interno) Chamamos de *produto interno* em $\mathcal{E}$ uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa um par de vetores $u, v \in \mathcal{E}$ a um número real $\langle u, v \rangle$, de modo que se cumpra as seguinte propriedades para quaisquer $u, u', v \in \mathcal{E}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$;
2. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle$;
3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
4. $u \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0$.

1.5 Tópicos de Análise

Definição 1.8 (Valor absoluto) O valor absoluto de um número, ou módulo, simbolizado por $|\cdot|$, é uma função que retorna os seguintes valores:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Outras formas de trabalhar o módulo: se $x \leq a$ e $-x \leq a$, então podemos afirmar que $|x| \leq a$, isso implica em dizer que $x \in [-a, a]$. Ainda, por valor absoluto, entende-se também a inequação $|x| \geq x$. Com esses dois entendimentos, podemos fazer o seguinte raciocínio: $|x|$ é maior ou igual que x e $-x$, assim como $|y|$ é maior ou igual que y e $-y$, logo, podemos afirmar que $(x + y) \leq |x| + |y|$ e $-x - y \leq |x| + |y|$, ora como $-x - y = -(x + y)$, podemos concluir que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Além disso, tomando todas as possibilidades de $x \cdot y$, temos que podem ser dois valores positivos, dois negativos, um positivo e outro negativo, e o caso de algum deles ser igual a 0. Portanto, pode ocorrer de $xy < 0$ para sinais alternados, $xy > 0$ para sinais idênticos e $xy = 0$ para algum deles nulo, e respectivamente, teremos que $|xy| > 0$, $|xy| > 0$ e $|xy| = 0$, logo, $|xy| \geq 0$ e $|xy| = |x| \cdot |y|$.

Definição 1.9 (Sequências) Uma sequência de números reais é uma função $X : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}$, no qual o n -ésimo termo da sequência será denotado como $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Para indicar a sequência χ , escrevemos $s_\chi : (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ (LIMA, 2014).

Definição 1.10 (Sequências Limitadas e Ilimitadas) Uma determinada sequência χ será limitada caso existam termos a e b , tal que $a < x_n < b, \forall n \in \mathbb{N}$. Isso é o mesmo que dizer que os termos de χ estão contidos no intervalo $[a, b]$. Se uma sequência não é limitada, então ela será ilimitada. Caso ocorra de existir apenas b , tal que $x_n < b, \forall n \in \mathbb{N}$, então a sequência χ será *limitada superiormente*, analogamente, a denotaremos como *limitada inferiormente* caso exista apenas o termo a , tal que $a < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.11 (Limite de uma sequência) Diz-se que um número real a é limite de uma determinada sequência χ , quando para qualquer ϵ positivo arbitrário, é possível encontrar um n_0 pertencente aos naturais tal que, para qualquer n maior que n_0 , a distância de x_n até a seja menor que ϵ . Matematicamente, denotamos:

$$\lim x_n = a \text{ ocorre se: } \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Quando este limite existe, dizemos que a sequência χ converge para a , ou seja, é uma sequência convergente. Caso contrário, a chamamos de sequência divergente.

Definição 1.12 (Séries) À soma dos infinitos termos de uma sequência qualquer, damos o nome de Série, portanto $S_n = \sum x_n$. Logo, para definirmos uma série, é necessário o uso de limites. Tomando os n primeiros termos de uma sequência, é possível definirmos as *reduzidas* de S_n à seguinte maneira:

$$s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Se existir $s = \lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, então dizemos que a série $S_n = \sum x_n$ é convergente, do contrário, S_n é chamada de divergente.

Teorema 1.1 Se S_n é uma série convergente então $\lim x_n = 0$.

Exemplo 1.1 Séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{(n-1)}$ com $r < 1$ são convergentes por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{(n-1)} = \frac{a}{1-r}. \quad (1.16)$$

Exemplo 1.2 A Série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p \leq 1$ é divergente por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots \\ \frac{1}{2^0} \cdot 2^{-1} + \frac{1}{2^1} \cdot 2^0 + \frac{1}{2^2} \cdot 2^1 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \dots &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ é divergente, implica-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p \leq 1$, também o é.

Definição 1.13 (Fórmula de Taylor) Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida no intervalo I e n vezes derivável no ponto $a \in I$. O *polinômio de Taylor de ordem n* da função f no ponto a é o polinômio

$$p(h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n,$$

onde $f^{(n)}$ é a n -ésima derivada da função f e $h = (x - a)$. Se f é n vezes derivável em todo seu domínio, dizemos que $f \in C^n$, quando isso ocorre para qualquer $n \in \mathbb{N}$, dizemos que f é de classe C^∞ e consequentemente seu polinômio de Taylor é da forma de uma série (LIMA, 2018b).

Exemplo 1.3 Série de Taylor da função Cosseno, centrada em 0:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) \rightarrow p(h), \quad h \in \mathbb{N} &= \cos(0) - \sin(0) \cdot \theta - \frac{\cos(0)}{2!} \cdot \theta^2 + \frac{\sin(0)}{3!} \cdot \theta^3 + \frac{\cos(0)}{4!} \cdot \theta^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

Exemplo 1.4 Série de Taylor da função Seno, centrada em 0:

$$\begin{aligned}\sin(\theta) \rightarrow p(h) &= \sin(0) + \cos(0) \cdot \theta - \frac{\sin(0)}{2!} \cdot \theta^2 - \frac{\cos(0)}{3!} \cdot \theta^3 + \frac{\sin(0)}{4!} \cdot \theta^4 + \dots \\ &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\end{aligned}\quad (1.18)$$

1.6 Resultados da Análise Complexa

No estudo do corpo dos números complexos é introduzido um elemento primordial: a unidade imaginária. Em síntese, a unidade imaginária é tal que seu quadrado é igual à -1 e é usualmente denotada por i , seguiremos este costume.

Definição 1.14 (Números complexos) Um número complexo qualquer possui a forma $z = a + ib$, com a e b números reais. Separado em duas partes, estas também possuem denominações próprias: a é chamada de *parte real* de z , usualmente escrita como $\Re(z)$; o número b , por acompanhar a unidade imaginária i , recebe o nome de *parte imaginária* de z , denotada por $\Im(z)$ (ZILL; SHANAHAN, 2011).

Propriedade 1.4 (Conjugado) Seja z um número complexo qualquer. Portanto z pode ser escrito como $z = a + ib$ e possui uma contraparte chamada de conjugado de z , denotado por $\bar{z}$, no qual $\Im(\bar{z}) = \Im(z) \cdot (-1)$, ou seja, $\bar{z} = a - ib$. De forma que, definidas operações de Adição e Multiplicação entre $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ à seguinte maneira:

- $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$;
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 - b_2a_1)$;
- $z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) + (-1 + i \cdot 0) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$;

obtemos as seguintes propriedades:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $\bar{\bar{z}} = z$;
3. $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$;
4. $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$;
5. $z - \bar{z} = (a - a) + i(b + b) = 2ib$.

Com as Propriedades [3] e [5], podemos reescrever $\Re(z)$ e $\Im(z)$ na forma:

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (1.19)$$

Além disso, vemos pela Propriedade [4] que o resultado da multiplicação de um número complexo pelo seu conjugado resulta em um número real, vamos utilizar essa propriedade para fugir da problemática de dividir pela unidade imaginária e definir a divisão como:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}. \quad (1.20)$$

Definição 1.15 (Plano Complexo) Um número complexo $z = a + ib$ possui uma correspondência direta a um par ordenado (x, y) do plano Cartesiano, portanto as propriedades de distâncias são herdadas, de forma que:

Seja $z = x + iy$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.21)$$

Definição 1.16 (Forma Polar de Números Complexos) Podemos sobrepor um sistema de coordenadas polares ao plano complexo, de forma que uma número $z = x + iy$ forme um ângulo θ com a origem. Tomando $|z| = r$, temos que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, portanto

$$z = x + iy \Rightarrow z = (r \cos \theta) + i(r \sin \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (1.22)$$

é a representação polar de z .

Definição 1.17 (Fórmula de Euler) Da Definição 1.13, e utilizando as funções de $\cos(\theta)$, $\sin(i\theta)$ e $e^{i\theta}$ centradas em θ :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &\rightarrow p(h) = e^0 + e^0 \cdot i\theta + \frac{e^0}{2!} \cdot i^2\theta^2 + \frac{e^0}{3!} \cdot i^3\theta^3 + \frac{e^0}{4!} \cdot i^4\theta^4 + \frac{e^0}{5!} \cdot i^5\theta^5 + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Fica claro que podemos tratar um número complexo, então, na forma:

$$re^{i\theta}, \quad (1.24)$$

ou seja, $e^{i\theta}$ possui módulo igual a 1 e variar θ é justamente percorrer os pontos análogos ao conjunto definido pelo círculo trigonométrico real usual de raio 1. Ainda, vemos que $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$, pois $\cos(\cdot)$ é função par e $\sin(\cdot)$ é função ímpar. Logo:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (1.25)$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (1.26)$$

2 Construindo as Séries de Fourier

Podemos definir a série de Fourier de uma função como a soma, ou combinação linear, de determinada uma determinada base. No entanto, em ordem disso ser possível, algumas condições se fazem necessárias. A primeira delas e mais elementar é nossa função original seja periódica, ou seja, existe um T , tal que $f(t + T) = f(t - T) = f(t)$, com $-\infty < t < \infty$. No caso de uma função não periódica, é necessário definir um intervalo L e então torná-la periódica de período L repetindo a imagem deste intervalo indefinidamente, formando uma nova função (GONDAR; CIPOLATTI, 2016), como mostra a Figura 3:

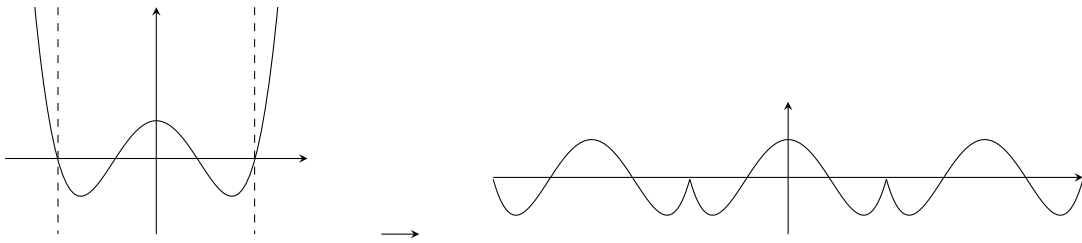


Figura 3 – Periodização de um intervalo qualquer.

Definição 2.1 (Série de Fourier) Seja f uma função periódica de período $2L$ e absolutamente integrável no intervalo $[-L, L]$. A série de funções trigonométricas

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1)$$

é denominada série de Fourier de f quando

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Os números reais $(a_0, a_1, \dots)$ e $(b_1, b_2, \dots)$ são chamados de *coeficientes de Fourier*, e dado um n suficientemente grande uma função periódica pode ser aproximada por uma série de Fourier de maneira satisfatória.

Exemplo 2.1 (Onda "Quadrada") Pela natureza binária, esse modelo físico aparece comumente em dispositivos tecnológicos (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2013), sendo um material clássico para estudo com a Análise de Fourier. Vamos representar este modelo com a seguinte função, como mostra a Figura 4:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ h & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x). \quad (2.3)$$

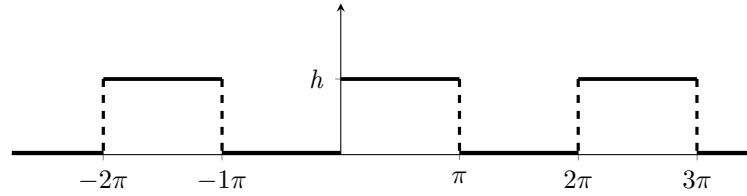


Figura 4 – Gráfico de $f(x)$.

A partir de Eq. (2.2), podemos então desenvolver os coeficientes. Tomando $L = \pi$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h dx = h \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \cos(nx) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \sin(nx) dx \\ &= \frac{h}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \begin{cases} \frac{2h}{n\pi}, & n \text{ ímpar}, \\ 0, & n \text{ par}. \end{cases} \end{aligned}$$

A série resultante é da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right).$$

A Figura 5 mostra a evolução das somas parciais da Série (S_N), obtidas na aplicação ??. Foram computados os 17 primeiros termos.

É possível estender a série de Fourier para cobrir funções definidas nos Complexos. A partir da Fórmula de Euler (Item 1.3), podemos manipular a Eq. (2.1) para:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{i2\pi nx}{L}\right), \quad (2.4)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \exp\left(-\frac{i2\pi nx}{L}\right) dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Sendo a forma complexa de uma série de Fourier (HANSEN, 2014). Não é claro, no entanto, de onde derivou-se este conhecimento se começarmos o estudo daqui. De fato, há mais de uma forma de se chegar nestas séries, Joseph Fourier, por exemplo, as derivou a partir de seu trabalho em difusão de calor, através de equações diferenciais parciais. Aqui, vamos seguir uma outra linha de raciocínio. Partindo dos conceitos de topologia, uma extensão da álgebra linear, garantimos a intuição de diferentes propriedades e concepções, como questões de convergência da série.

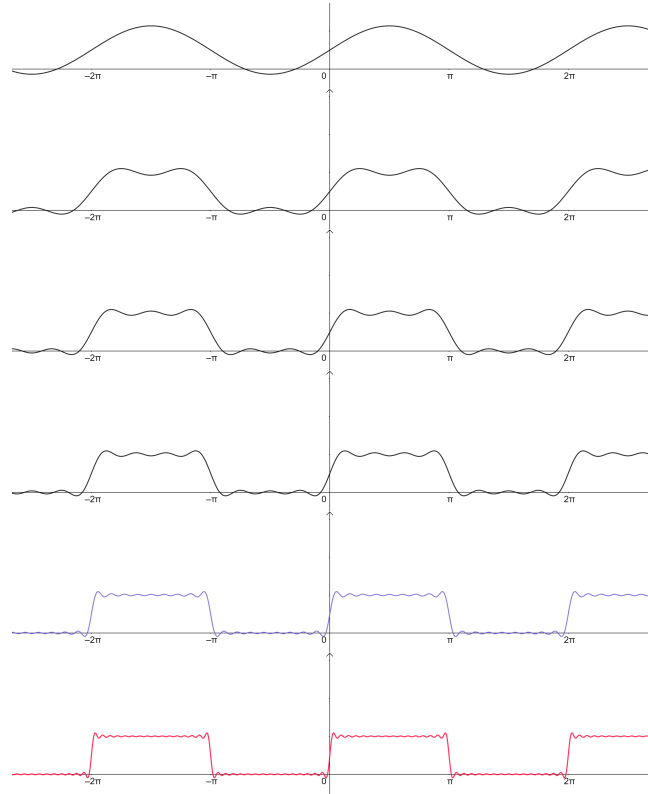


Figura 5 – Da curva de cima para baixo: $S_n = S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_5 \rightarrow S_{10} \rightarrow S_{17}$.

2.1 Métricas, Normas e Produto Interno Hermitiano

Começaremos com o objetivo de definir a classe de funções que iremos utilizar a frente, para tal, introduziremos alguns conceitos principais da Topologia, como a ideia de Espaços Métricos. Ocorre que muitos dos espaços vetoriais que um discente estuda em álgebra linear também são espaços métricos, e, portanto, esta é uma forma de generalizar um conhecimento que já possuímos.

Uma das questões cernes da topologia é a noção de distância. Um conceito quase que natural em nosso cotidiano, na topologia ela possui mais de uma interpretação, e portanto pode ser definida matematicamente com o auxílio de uma *métrica*.

Definição 2.2 (Métrica) De acordo com [Lima \(2020\)](#), uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos $d(x, y)$, onde $x, y \in M$, sendo a distância entre x e y . Dada uma métrica, ela deve atender a quatro condições para quaisquer $x, y, z \in M$. Intuitivamente, a distância de um elemento a ele mesmo deve ser nula, a princípio. Embora pareça elementar, esta propriedade serve de ferramenta para a prova de outros enunciados. Ainda nesta linha de raciocínio, a distância de dois elementos diferentes é um número positivo, o que indica bicondicionalidade da primeira propriedade, no caso: $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. Novamente de forma intuitiva, a distância entre dois elementos é

comutativa, ou seja, independe da ordem computada. Por fim, também designada como *desigualdade triangular*, a quarta propriedade dita que o caminho subótimo é aquele que percorre por mais elementos, como mostra a Figura 6.

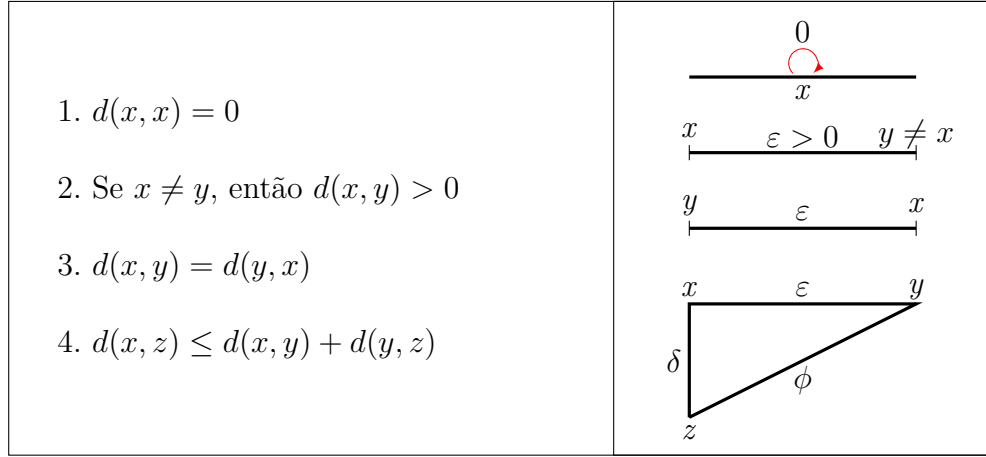


Figura 6 – Propriedades de uma métrica válida com amparo visual.

Um espaço métrico, portanto, nada mais é que um conjunto associado a uma determinada métrica. Além disso, podemos utilizar em vez de um conjunto genérico M , um espaço vetorial $\mathcal{E}$, conjuntos já estudados em Álgebra Linear, como o Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, cujos elementos são da forma de énuplas $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, com $u_i \in \mathbb{R}$. Dados $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, e denotando a distância do elemento u ao elemento v como $d(u, v)$, usualmente utilizamos a seguinte métrica:

$$d_2(u, v) = \left[\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.$$

No $\mathbb{R}^2$, a métrica d_2 , também chamada de **métrica euclidiana**, é coincidente com o *teorema de Pitágoras*. Em suma, essa métrica traduz a ideia de que a menor distância entre dois elementos distintos é um segmento de reta, sendo sem dúvida a métrica mais intuitiva. Para desvincularmos a nossa noção de distância original, vamos apresentar outras funções com que podemos trabalhar e ver como funcionam na prática:

$$d_1(u, v) = \sum_{i=1}^n |u_i - v_i| = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| + \dots + |u_n - v_n|;$$

$$d_{\max}(u, v) = \max\{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|, \dots, |u_n - v_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i - v_i|.$$

Podemos utilizar um exemplo bem simples para demonstrar como a distância pode variar em respeito à métrica utilizada. Utilizando o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (4, 3)$, podemos ver como claramente como $d_{\max}(u, v)$ será sempre menor ou igual à $d_1(u, v)$, como mostra a Figura 7.

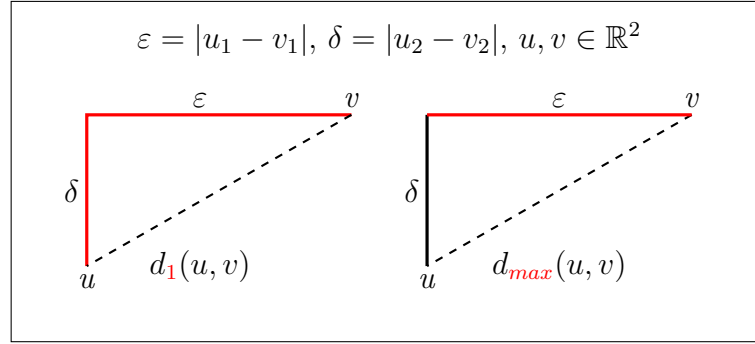


Figura 7 – Outras métricas comuns.

Quando trabalhamos com espaços vetoriais, possuir uma noção da extensão ou dimensão de um determinado vetor adiciona grande valor ao estudo. Podemos realizar essa quantização levando em conta o elemento nulo do corpo utilizado no exemplo para definir o espaço vetorial, os números reais. Tomando como vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ aquele que será associado ao número real 0, e de forma similar à maneira como definimos matematicamente o conceito de distância utilizando *métricas*, utilizamos as *normas* para quantificar a grandeza de elementos (LIMA, 2020).

Definição 2.3 (Norma) Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial. Uma *norma* em $\mathcal{E}$ é uma função $\|\cdot\| : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada vetor $u \in \mathcal{E}$ a um número real $\|u\|$ (leia *norma de u*). De forma similar ao conceito de métrica, uma norma deve obedecer às seguintes condições para quaisquer $u, v \in \mathcal{E}$ e λ escalar:

1. Se $u \neq \mathbf{0}$, então $\|u\| \neq 0$;
2. $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$;
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Assim, analogamente às diferentes métricas, podemos formular diferentes normas, ordenando diferentes vetores. Além disso, a partir daqui, não precisamos mais referenciar os conjuntos como espaços métricos, isso porque se determinada aplicação atende aos requisitos de norma, então o conjunto munido desta função possui também uma métrica da forma $d(u, v) = \|u - v\|$ (LIMA, 2020). Podemos provar essa afirmação:

Demonstração 2.1 De fato, seja $\|\cdot\| : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ uma norma e $u, v, w \in \mathcal{E}$. Portanto ela responde às três propriedades citadas acima. Queremos mostrar que $\|u - v\|$, verificará as quatro propriedades de métricas. Pela propriedade 2, temos que $\|0 \cdot u\| = |0| \cdot \|u\| = 0 \Rightarrow d(u, u) = \|u - u\| = 0$, satisfazendo a primeira propriedade de métricas. Utilizando as propriedades 2 e 3 temos que $\|u - u\| \leq \|u\| + |-1| \cdot \|u\| \rightarrow 0 \leq 2 \cdot \|u\|$. Logo, a norma de um vetor sempre retornará um elemento pertencente aos $\mathbb{R}^+$. Para algum

$v \neq u$ temos que $u - v = w \neq \mathbf{0} \Rightarrow \|w\| > 0$ pela propriedade 1, satisfazendo a segunda condição de métrica. Utilizando a propriedade 2, temos que $\|u - v\| = \|(-1) \cdot (v - u)\| = |-1| \cdot \|v - u\| \Rightarrow d(u, v) = d(v, u)$, satisfazendo a terceira propriedade. Provamos a quarta condição da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| \\ &= d(u, w) + d(w, v) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Repare que os exemplos apresentados de métricas $d_1(u, v)$ e $d_2(u, v)$ podem ser obtidos a partir das funções $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|$ e $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$, isto é, caso estas funções atendam às propriedades de normas para quaisquer u, v pertencentes ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, o que, de fato, não é difícil de provar, vejamos:

Demonstração 2.2 A primeira propriedade de norma é direta: dado qualquer qualquer vetor $u \neq \mathbf{0}$, então é garantida a existência de ao menos um $u_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$, o que implica em $|u_i| > 0$ e, por conseguinte, $\|u\|_1 > 0$ e $\|u\|_2 > 0$. Dados λ e u , temos que $\lambda \cdot u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) \Rightarrow \|\lambda u\|_1 = |\lambda u_1| + |\lambda u_2| + \dots + |\lambda u_n|$. Pela propriedade multiplicativa de módulo Eq. (1.8), temos que:

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_1 &= |\lambda| \cdot |u_1| + |\lambda| \cdot |u_2| + \dots + |\lambda| \cdot |u_n| \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda| \cdot |u_i| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |u_i| \\ &= |\lambda| \cdot \|u\|_1 \end{aligned}$$

A prova da segunda propriedade para $\|u\|_2$ é de forma análoga à da $\|u\|_1$. Resta apenas provar a terceira propriedade. Provaremos para $\|\cdot\|_2$ mais frente. Para $\|\cdot\|_1$ temos, pela propriedade da função módulo 1.8, que:

$$\|u + v\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i + v_i| \leq \sum_{i=1}^n |u_i| + \sum_{i=1}^n |v_i| = \|u\|_1 + \|v\|_1.$$

Relembramos agora que espaços vetoriais permitem que funções ajam como vetores, elementos de um conjunto. Temos, por exemplo, o espaço vetorial $\mathcal{P}_n$ dos polinômios de grau n com as operações usuais, cujo conjunto $p_k = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é uma possível base. No entanto, não é tão intuitivo como definir uma norma para um espaço vetorial de funções, afinal, como se define a extensão, ou a grandeza, de objetos que assumem diferentes valores ao longo de seus domínios? Queremos definir uma função que simbolize a extensão de uma determinada aplicação.

Inicialmente, definiremos uma função f limitada. Então, por Lima (2014) existem c_1 e c_2 tal que $a \cdot c_1 \leq \text{Im}(f) \leq c_2$. Podemos em duas escolhas naturais para a norma:

o valor $C \mid C \geq |f(x)|$, ou seja, o supremo do módulo da imagem de f (o módulo é necessário, visto que uma norma é sempre maior ou igual a 0), repare que C é também o maior elemento entre $|c_1|$ e $|c_2|$. Outra ideia possível é a área que esta função em módulo cobre, ou seja, integrando $|f|$. Como uma norma é uma aplicação que retorna um número, é necessário ainda que esta seja uma integral definida, logo, restringiremos o domínio de f para um intervalo onde esta integral possa ser calculada e $|f|$ seja contínua.

Portanto, seja $\mathcal{D}$ um domínio arbitrário. Queremos um vetor da forma $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow f(x) \leq C_f, C_f \in \mathbb{R}$, então definimos um conjunto $\mathcal{F}$ de todas as funções contínuas possíveis definidas em $\mathcal{D}$. Vamos provar que

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)|, \quad (2.7)$$

é uma norma válida e que $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação sobre os $\mathbb{R}$:

Demonstração 2.3 Primeiramente, vamos mostrar que $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial. Seja $f, g, h \in \mathcal{F}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Por serem aplicações limitadas, $f(x) + g(x)$ ainda é limitada, assim como $\lambda \cdot f(x)$. Ainda, como a imagem dessas funções pertence aos reais, temos que $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$, $[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$. Podemos definir $\mathbf{0}$ como tal função que $\forall x \in \mathcal{D}, \mathbf{0}(x) = 0$, o que implica que para toda $f \in \mathcal{F}$ e $x \in \mathcal{D}$ temos $\mathbf{0}(x) + f(x) = f(x) + \mathbf{0} = f(x)$. Sendo f limitada por C_f , temos que $-C_f \leq f(x) \leq C_f$, portanto existe $-f$ tal que $f(x) + (-f)(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow f + (-f) = \mathbf{0}$. Por $\text{Im}(f) \in \mathbb{R}$, as próximas propriedades são diretas: temos que para qualquer $f \in \mathcal{F}$ e $x \in \mathcal{D}$, $1 \cdot f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$; $(\alpha\beta)f(x) = \alpha(f(x)\beta)$; $(\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$; $\alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$.

Demonstração 2.4 É fácil notar que $\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)|$ é uma norma válida, visto que para $f \neq \mathbf{0}$ existe pelo menos algum $x_0 \in \mathcal{D} \mid f(x_0) \neq 0 \Rightarrow |f(x_0)| > 0 \Rightarrow \|f\| > 0$, satisfazendo a primeira condição de norma. Pela propriedade 1.8 de módulo, temos que $\|\lambda \cdot f\| = \sup_{x \in \mathcal{D}} |\lambda \cdot f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|$, atendendo à segunda propriedade de norma. Por fim, seja $s = \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)|$ e $r = \sup_{x \in \mathcal{D}} |g(x)|$, temos que:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in \mathcal{D}} |s + r| = |s + r| \leq |s| + |r| \\ &= \sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathcal{D}} |g(x)| \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

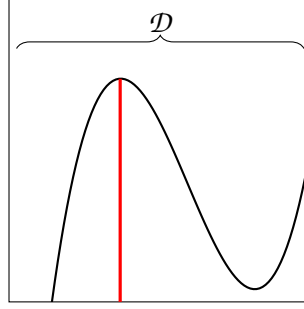


Figura 8 – Visualiação de $\|f\|$.

Provaremos a norma na forma de integral mais a frente. Antes, estederemos o conceito de produto interno para um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos, recebendo a alcunha de *Hermitiano* (HANSEN, 2014).

Definição 2.4 (Produto Interno Hermitiano) Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial, chamamos de *produto interno hermitiano* em $\mathcal{E}$ uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$, que associa um par de vetores $u, v \in \mathcal{E}$ a um número complexo $\langle u, v \rangle$, de modo que se cumpra as seguinte propriedades para quaisquer $u, v, w \in \mathcal{E}$ e λ pertencente a um corpo K :

1. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$;
2. $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \cdot \langle v, w \rangle$;
3. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
4. $u \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0$.

Vamos observar como a operação 1.6 definida para um produto escalar entre dois vetores do $\mathbb{R}^n$ atende às condições de produto interno. Seja $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, queremos mostrar que $\langle u, v \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$, ou seja:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n u_k v_k, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n,$$

é um produto interno válido. Com $z, w \in \mathbb{C}^n$ tais que $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ e $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, a fim de que a quarta propriedade seja atendida, $z \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle z, z \rangle > 0$, ou seja um número real positivo, é necessário que $\langle z, w \rangle = z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2} + \dots + z_n \cdot \overline{w_n}$. Ainda, como um número pertencente ao $\mathbb{R}^n$ pode ser visto como um caso particular de número complexo, que só possui componentes reais, temos que a propriedade de comutatividade do Produto Interno usual é exatamente a mesma à primeira propriedade do Produto Interno Hermitiano, visto que o conjugado de um número que só possui componentes reais é o próprio número, consequentemente $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} = \langle w, v \rangle$. Assim, provaremos apenas para o

caso de $z, w \in \mathbb{C}^n$. Em suma, vamos mostrar que:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^n, \quad (2.8)$$

é um produto interno válido:

Demonstração 2.5 Seja $z, w, y \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathcal{K}$. Para provar a primeira condição do produto Hermitiano, basta usarmos da propriedade de números complexos: $\overline{\overline{z}} = z$, portanto

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k} = \sum_{k=1}^n \overline{w_k} z_k = \sum_{k=1}^n \overline{w_k \overline{z_k}},$$

como $\overline{\overline{z}} + \overline{w} = \overline{z + w}$, podemos colocar todo o somatório em conjugado:

$$\langle z, w \rangle = \overline{\sum_{k=1}^n w_k \overline{z_k}} = \overline{\langle w, z \rangle};$$

A segunda condição é imediata, visto que

$$\langle \lambda z, w \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda z_k \overline{w_k} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k} = \lambda \langle z, w \rangle;$$

Ainda, pela propriedade de distributividade de número complexos, $z(w + y) = zw + zy$, assim como $(z + w)y = zy + wy$. Logo,

$$\langle z + y, w \rangle = \sum_{k=1}^n (z_k + y_k) \overline{w_k} = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k} + \sum_{k=1}^n y_k \overline{w_k} = \langle z, w \rangle + \langle y, w \rangle.$$

Por fim, também pela definição dos números complexos, temos que

$$\langle z, z \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{z_k} = \sum_{k=1}^n |z_k|^2.$$

Observe que no caso, nosso espaço métrico seja $\mathbb{R}^2$, é fácil de prosseguimos utilizando a Propriedade 1.6 de produto escalar, basta notar que a função cosseno é uma função limitada no intervalo $[-1, 1]$, logo é impossível que a desigualdade falhe. De certa forma, o Teorema 2.1 pode ser visto como uma generalização desta propriedade.

De acordo com Lima (2020), definido um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, podemos mostrar que $\sqrt{\langle u, u \rangle}$ atende todos os requisitos de uma norma, ou seja, $\langle u, u \rangle = \|u\|^2$, sendo eles: $\|u\| \neq 0, \forall u \neq \mathbf{0}$; $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$, e $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$:

Demonstração 2.6 Primeiramente, pela propriedade 4, para um $u \neq \mathbf{0}$ temos que $\sqrt{\langle u, u \rangle} > 0$, o que implica que para um u genérico, $\langle u, \cdot \rangle \geq 0$, portanto $\sqrt{\langle u, u \rangle}$ também o é, corroborando com a primeira propriedade de norma, pois a igualdade só ocorre quando $u = \mathbf{0}$. De acordo com a segunda propriedade 2, $\sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{(\lambda \cdot \overline{\lambda}) \langle u, u \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle u, u \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\lambda| \cdot \|u\|$, satisfazendo a segunda propriedade de norma. Por fim, para provar a terceira e última propriedade de norma, precisamos mostrar que $\sqrt{\langle u + v, u + v \rangle} \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} + \sqrt{\langle v, v \rangle}$ (BUENO et al., 2021).

Teorema 2.1 (Teorema de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz) Definida a norma de um vetor u pertencente a um espaço $\mathcal{E}$ munido com produto interno tal que $\langle u, u \rangle^{1/2}$, temos que (BUENO et al., 2021)

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in \mathcal{E}. \quad (2.9)$$

Como definimos $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, temos que $\|u + v\| = \sqrt{\langle u + v, u + v \rangle}$. Pela propriedade distributiva 3:

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle u + v, u + v \rangle} &= \sqrt{\langle u + v, u \rangle + \langle u + v, v \rangle} \\ &= \sqrt{\langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle}. \end{aligned}$$

De 1.8 e do Teorema 2.1, temos:

$$\begin{aligned} \langle v, u \rangle &\leq |\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\| \\ \langle u, v \rangle &\leq |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle u + v, u + v \rangle} &= \sqrt{\langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle} \\ &\leq \sqrt{\|u\|^2 + \|v\| \|u\| + \|u\| \|v\| + \|v\|^2} \\ &= \sqrt{(\|u\| + \|v\|)^2} \\ &= \|u\| + \|v\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} + \sqrt{\langle v, v \rangle}. \end{aligned}$$

Ainda, também podemos provar agora a terceira propriedade de norma para $\|\cdot\|_2$, onde $\mathcal{E}$ seja o $\mathbb{R}^n$. Queremos mostrar que $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, ora,

$$\begin{aligned} \|u + v\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2} = \sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + \cdots + (u_n + v_n)^2} \\ \Rightarrow \|u + v\|^2 &= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + \cdots + (u_n + v_n)^2 \\ &= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 + v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 + 2 \cdot (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i^2 + \sum_{i=1}^n v_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n u_i v_i = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 + 2\langle u, v \rangle - 2\|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

Como $\langle u, v \rangle \leq |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$, temos que

$$\langle u, v \rangle - \|u\| \|v\| \leq 0 \Rightarrow 2\langle u, v \rangle - 2\|u\| \|v\| = 2 \cdot [\langle u, v \rangle - \|u\| \|v\|] = C \leq 0,$$

logo,

$$\begin{aligned} (\|u\| + \|v\|)^2 + 2\langle u, v \rangle - 2\|u\| \|v\| &= (\|u\| + \|v\|)^2 + C, C \leq 0 \Rightarrow \\ \|u + v\|^2 &\leq [(\|u\| + \|v\|)^2 + C] - C \\ \|u + v\|^2 &\leq (\|u\| + \|v\|)^2 \\ \|u + v\| &\leq (\|u\| + \|v\|). \end{aligned}$$

2.2 Decompondo vetores através do Produto Interno

Se o produto escalar é uma função que atende aos requisitos de produto interno, podemos supor que suas propriedades também são herdadas para o produto interno, e por esse motivo que foi feita a demonstração de $\langle u, v \rangle$ reais e $\langle z, w \rangle$ complexos. Em especial, vamos estudar as decomposições de vetores em diferentes bases. No caso de vetores reais, o produto interno sendo definido da mesma forma que o produto escalar nos diz que para $u, v \in \mathbb{R}^n$ ortogonais, ou seja, quando existe um ângulo reto entre estes vetores, e diferentes de $\mathbf{0}$, implica em $(u \cdot v) = 0$. Daqui, vamos inferir duas coisas, a primeira é que isto continua sendo verdade para $\langle u, v \rangle$ pela função ser idêntica, mas também que esta noção é consequência de uma expansão do conceito de ortogonalidade (LIMA, 2018a).

Propriedade 2.1 (Ortogonalidade) Dado um espaço vetorial qualquer $\mathcal{E}$ munido de um produto interno, dizemos que dois vetores deste conjunto são ortogonais se o produto interno entre eles for zero:

$$\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp v, \quad u, v \in \mathcal{E}. \quad (2.10)$$

Podemos muito bem estender essa ideia para números complexos e espaços de funções, embora não sejam tão intuitivos por perda de abstração geométrica. É interessante perceber que dados $w, z \in \mathbb{C}$, não nulos e definidos por $w = w_1 + i \cdot w_2$ e $z = i \cdot w = -w_2 + i \cdot w_1$, eles não serão ortogonais entre si ($w \not\perp z$) ao considerarmos o produto interno hermitiano, ainda que a diferença do argumento entre ambos na forma polar seja um ângulo reto. Uma forma de interpretar esta informação é que definido o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, z é um múltiplo de w . O produto interno hermitiano entre w e z é da forma: $\langle w, z \rangle = \langle w, iw \rangle = \bar{i} \langle w, w \rangle = -i \cdot w \bar{w} = -i \cdot (w_1 w_1 + w_2 w_2) = -i(w_1^2 + w_2^2) \neq 0$.

Uma analogia seria realizar o produto interno entre dois número reais não nulos e esperar que o resultado fosse nulo. Por outro lado, dados $w, z \in \mathbb{C}^2$ tais que $w = (1 + i, 0)$ e $z = (0, 1 + i)$, é fácil perceber que o produto interno entre ambos será nulo, e portanto são ortogonais.

Generalizando para $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ e definida uma base $\beta_{\mathbb{C}^n} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, podemos escrever este mesmo número como uma combinação linear única dos vetores de $\beta_{\mathbb{C}^n}$, ou seja,

$$z = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n. \quad (2.11)$$

Se fizermos o produto interno entre z e e_1 , obtemos

$$\langle z, e_1 \rangle = \langle \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n, e_1 \rangle,$$

pela propriedade distributiva de produto internos 3, temos que

$$\langle z, e_1 \rangle = \langle \alpha_1 \cdot e_1, e_1 \rangle + \langle \alpha_2 \cdot e_2, e_1 \rangle + \dots + \langle \alpha_n \cdot e_n, e_1 \rangle,$$

pela propriedade 2 de produtos hermitianos

$$\langle z, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \langle e_n, e_1 \rangle.$$

Uma primeira propriedade que gostaríamos que a base $\beta_{\mathbb{C}^n} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tenha, é que seus vetores sejam ortogonais entre si, $e_i \perp e_j, i \neq j$. Dessa forma, nós temos que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ e $\beta_{\mathbb{C}^n}$ passa a ser um conjunto ortogonal:

$$\langle z, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \langle e_n, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle.$$

Como definimos a norma de um espaço vetorial munido de produto interno como $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, temos que:

$$\langle z, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle = \alpha_1 \|e_1\|^2,$$

como temos apenas escalares em ambos os lados da equação, é válido multiplicá-los por e_1 :

$$\langle z, e_1 \rangle e_1 = \alpha_1 \|e_1\|^2 e_1,$$

ainda, caso e_1 seja um vetor unitário, isto é, $\|e_1\| = 1$, finalmente, temos que

$$\langle z, e_1 \rangle e_1 = \alpha_1 e_1. \quad (2.12)$$

No caso de e_1 não ser um vetor unitário, é interessante encontrarmos uma forma de *normalizar* este vetor, isto é, transformá-lo em um vetor unitário. Sabendo que a norma de um vetor não nulo retorna um número real positivo, por [Iezzi e Domingues \(1982\)](#) podemos utilizar o fato de que o conjunto $\mathbb{R} - 0$ possui inversos multiplicativos para todos seus elementos, ou seja, que $\mathbb{R}$ é um corpo, para que, seja $e_1 \neq \mathbf{0}$, então temos que $\|e_1\| > 0$. Logo, existe λ também positivo tal que $\lambda \cdot \|e_1\| = 1$:

$$\lambda \cdot \|e_1\| = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\|e_1\|}.$$

Como λ é positivo, então $|\lambda| = \lambda$. Pela Propriedade 2 de norma, temos que:

$$|\lambda| \cdot \|e_1\| = \|\lambda e_1\|. \quad (2.13)$$

Portanto, podemos definir o vetor $e'_1 = \lambda e_1$ como o vetor e_1 normalizado.

Finalmente, caso não somente o vetor e_1 , mas todos e_i de $\beta_{\mathbb{C}^n} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sejam vetores unitários, é possível reescrever z da Eq. 2.11 como:

$$\begin{aligned} z &= \langle z, e_1 \rangle e_1 + \langle z, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle z, e_n \rangle e_n \\ z &= \sum_{i=1}^n \langle z, e_i \rangle e_i. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ainda, neste caso, $\beta_{\mathbb{C}^n}$ passa a ser denominado como *ortonormal*, ou seja, para $i \neq j$ temos que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ e que para todo i , com $1 \leq i \leq n$, $\|e_i\| = 1$. Alguns exemplos conhecidos de bases ortonormais são as chamadas de bases canônicas estudadas, tal que $e_i = 1$ e $e_j = 0$ para todo $j \neq i$. Elas possuem uma vantagem: $\alpha_1 = z_1 \Rightarrow \langle z, e_1 \rangle = z_1$, o que facilita a visualização do que está ocorrendo:

Exemplo 2.2 Dado $u = (1, 2, 3)$ e $\beta_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$, tal que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Temos que:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^3 \langle u, e_i \rangle e_i \\
 u &= \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \langle u, e_3 \rangle e_3 \\
 u &= (1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0)e_1 + (1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0)e_2 + (1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1)e_3 \\
 u &= 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 \\
 u &= 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1) \\
 u &= (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) = (1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

Há mais de um nome dado para a Eq. (2.14), Oliveira (2018) denota como decomposição ortogonal como extensão (HANSEN, 2014). Nossa intenção é utilizar essa decomposição para reescrever aplicações em função de outras ortonormais, como já provamos que a integral definida é uma função válida como produto interno, é possível perceber que as séries de Fourier são exatamente uma combinação linear de funções trigonométricas ortonormais. A principal diferença, no entanto, é que estaremos lidando agora com espaços vetoriais de dimensão infinita. Apresentada a principal ferramenta em espaços de dimensão finita, a decomposição de vetores em uma base ortonormal, vamos agora estender o conceito para espaços de dimensão infinita.

2.3 Definindo a Série de Fourier em espaços de Hilbert

As séries de Fourier possuem espaços específicos de interesse, em aplicações práticas, precisamos de dados iniciais. Por mais informações que tenhamos, é impossível realizarmos um cálculo sensível com computadores: nossos dados representam um conjunto discreto, do contrário, teríamos infinitas operações, e portanto precisaríamos também de um tempo que não seja finito. Porém eles não serão os únicos a estudarmos. Principalmente porque considerando exemplos mais simples, a intuição pouco muda de um para outro, portanto, começar com um espaços menos abstrato é benéfico para a absorção do conhecimento.

Isso se traduz no fato de utilizarmos diferentes bases em nossas decomposições ortogonais. Se nossos dados são discretos, não modelados por uma função, faz sentido utilizarmos uma lista, uma ênupla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. A base escolhida de um conjunto desta natureza é utilizada no Cálculo da Transformada Discreta de Fourier. No entanto, considerando que as séries de Fourier são escritas utilizando bases de dimensão infinita, vamos estudar esse aspecto de espaços vetoriais primeiramente. A primeira vista, pouco muda quando expandimos nossas definições para conjuntos de infinitas dimensões, tanto que introduzimos alguns exemplos de produto interno para espaços de funções sem muitas

dificuldades. Porém, surgem novos conceitos e, com eles, algumas limitações, em especial na formulação de uma norma que seja conveniente. Seja $\{u, v\}$ e $\{z, w\}$ vetores pertencentes respectivamente à $\mathbb{R}^\infty$ e $\mathbb{C}^\infty$. Um produto interno entre eles se dá na forma:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i$$

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \overline{w_i}.$$

Repare que as ênuplas de $\mathbb{R}^\infty$ e $\mathbb{C}^\infty$ podem ser vistas como sequências: dado um vetor x qualquer, termos que a componente x_i pertencente a x representa o i ésimo termo da sequência equivalente $s_x : \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$. Logo, não é estranho pensar que, dadas as propriedades ou características que podemos estudar em diferentes sequências, também haverão propriedades equivalentes quando traduzidas em vetores de $\mathbb{R}^\infty$ ou $\mathbb{C}^\infty$. A fim de diminuirmos a quantidade de equações daqui pra frente, vamos tratar os elementos puramente reais como casos particulares dos complexos, além disso, vamos adicionar um índice $\mathfrak{K}$ para generalizar a ideia de corpo algébrico, sendo devidamente substituído por $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Naturalmente, como estamos falando de sequências, vamos estudar a convergência sobre o ponto de vista topológico, isto é, trataremos essa questão de forma similar à que estudamos usualmente em cursos de análise na reta. Utilizaremos os novos conceitos introduzidos, em especial, vamos olhar sob a ótica das métricas, que, por definição, tratam da noção de distância entre diferentes elementos de um determinado conjunto (HANSEN, 2014).

Definição 2.5 (Sequências Convergentes) Dada uma ênupla $x = (x_1, x_2, \dots)$, denotada também por $(x_i) \mid i \in \mathbb{N}$, representando um vetor pertencente a um espaço vetorial $\mathcal{E}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, e uma constante ε qualquer positiva, existe um N tal que, para todo n maior que N , $d(x_n, L) < \varepsilon$.

Repare que como a métrica é uma função que toma dois elementos de um conjunto, podemos inferir que L pertence a $\mathcal{E}$. Além disso, perceba que esta definição é uma extensão do conceito presenciado em Análise na Reta: ao utilizarmos a métrica euclidiana no espaço vetorial $\mathbb{R}$, obtemos que a função distância $d(x_n, L) < \varepsilon$ se traduz em $|x_n - L| < \varepsilon$. Ainda, podemos pensar no caso em que uma sequência se aproxima de um determinado L , que por sua vez não seja necessariamente um elemento de $\mathcal{E}$, por consequência, não sendo uma sequência convergente, ou seja, o limite da sequência não pertence ao espaço vetorial original (HANSEN, 2014).

Definição 2.6 (Sequências de Cauchy) Dada uma ênupla $x = (x_1, x_2, \dots)$, denotada também por $(x_i) \mid i \in \mathbb{N}$, de um vetor pertencente a um espaço vetorial $\mathcal{E}$, é dita ser uma *sequência de Cauchy* se existir uma constante ε qualquer positiva e um N tal que, para todo n e m maiores que N , $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Em outras palavras, para uma sequência ser considerada de Cauchy, temos que a partir de uma determinada instância os elementos de (x_i) ficam cada vez mais próximos. Novamente, isso não implica que a sequência seja convergente, ou seja, que o limite da sequência seja um elemento de $\mathcal{E}$. Um exemplo bastante difundido, citado em [Lima \(2020\)](#), [Hansen \(2014\)](#) e [Oliveira \(2018\)](#), é o de uma sequência Q_n de números racionais que se aproximam de um determinado número irracional. Esta é uma sequência de Cauchy, porém não é uma sequência convergente quando $\mathcal{E} = \mathbb{Q}$. A convergência somente ocorreria caso $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, já que teríamos o limite L contido em $\mathcal{E}$.

Porém, podemos inferir o contrário? Uma sequência convergente implica em ser também de Cauchy? De fato, tome x_n e x_{n+1} como elementos de uma sequência convergente com um n suficientemente grande, logo $d(x_n, L) < \varepsilon_n$ positivo, pela definição de sequências convergentes é fácil perceber que $d(L, x_{n+1}) < \varepsilon_n$, também o é. Para determinado $\varepsilon_m < \varepsilon_n$, teremos $m > n + 1$, tal que $d(x_m, L) < \varepsilon_m$ e $d(L, x_{m+1}) < \varepsilon_m$. Na perspectiva de ε_i sempre ter sua existência garantida, temos que o conjunto das possíveis distâncias entre x_i e x_{i+1} estará sempre contido no conjunto de possíveis distâncias entre x_j e x_{j+1} para todo $i > j$. Assim, $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon_{2i}$, como mostra a Figura 9:

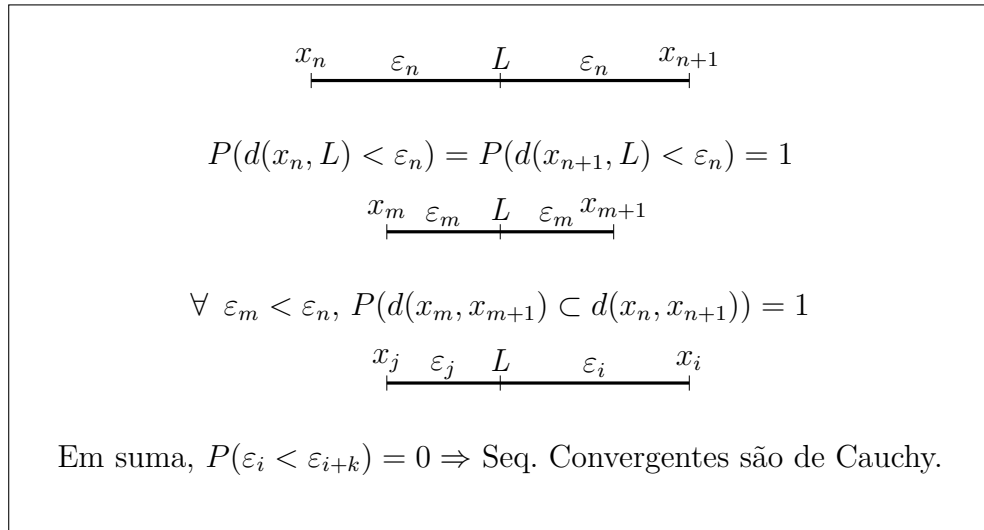


Figura 9 – Visualização das distâncias, centrado em L .

Antes de seguirmos em frente, vamos relembrar que mostramos através da Demonstração 2.1 como uma métrica pode ser obtida através de uma determinada norma, fazendo $d(u, v) = \|u - v\|$, dados $u, v \in \mathcal{E}$. Quando combinamos este resultado com a Demonstração 2.6, que prova que uma norma pode ser obtida através de um produto

interno, realizando $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, é fácil notar que podemos obter uma métrica a partir de um produto interno, de forma que $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$.

Com as definições de convergência entendidas, nós podemos definir uma classe de espaços vetoriais denominada de *espaços completos*, quando todas as sequências de Cauchy em um determinado espaço $\mathcal{E}$ convergem, também, em $\mathcal{E}$.

Definição 2.7 (Espaços de Hilbert) Denominamos como *espaços de Hilbert* os espaços vetoriais com produto interno cuja métrica induzida os categorizem como espaços completos (OLIVEIRA, 2018).

Definição 2.8 (Espaços de Hilbert) Denominamos como *espaços de Hilbert* os espaços vetoriais com produto interno cuja métrica induzida os categorizem como espaços completos.

Em outras palavras, para que um espaço métrico $\mathcal{E}$ seja considerado completo, é necessário que a partir de um n natural suficientemente grande e uma constante ε arbitrária, qualquer sequência de Cauchy da forma $(x_1, x_2, \dots)$ tomada em $\mathcal{E}$, tenha, pelos exemplos usuais de métrica e norma induzidas, $d(x_n, L) < \varepsilon$, tal que L seja um elemento de $\mathcal{E}$ e igual a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Isto é, tomando como exemplo o espaço de Hilbert $\mathbb{R}^2$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N, \sqrt{|u_n - u_{n+1}|^2 + |v_n - v_{n+1}|^2} < \varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^2$.

Como estamos tratando de normas, repare que, como pré-requisito, faz-se necessário que esta seja bem definida em um espaço vetorial. Perceba que os espaços apresentados $\mathbb{R}^\infty$ e $\mathbb{C}^\infty$ apresentam alguns problemas caso procedamos de forma descuidada. Tomando $\mathbb{R}^\infty$ como exemplo, e definido o produto interno usual, com normas e métricas induzidas, respectivamente, como $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ e $d(u, v) = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$, dados $u, v \in \mathbb{R}^\infty$. Temos, então, que o vetor $u = (u_1, u_2, \dots)$ terá como norma $\sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots}$. Dada uma ênupla $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, já caracterizamos a sequência $s_x : \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$, e se queremos agora realizar uma soma infinita, utilizamos o conceito de séries, ou seja, chamaremos a série respectiva ao vetor x como $S_x = x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots$. Fica claro que não podemos admitir que estas funções atendem às propriedades requeridas de norma e métrica pela possibilidade de divergência para infinitos elementos de $\mathcal{E}$. Contornamos este problema selecionando subespaços vetoriais bem definidos a partir das características de seus elementos.

Primeiramente, lembremos da visão de cada ênupla como uma sequência. Para o caso da sequência não ser limitada, teríamos divergência garantida ao realizar o somatório, portanto, nos atentaremos para sequências que convergem absolutamente. Nestes casos, garantimos logo de princípio a existência de um supremo e podemos avaliar a possibilidade

de que seja uma norma válida a seguinte função:

$$\|z\|_{[\mathcal{X}]} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |z_i|. \quad (2.15)$$

Demonstração 2.7 De fato, a primeira propriedade de norma é direta, visto que para $z \neq \mathbf{0}$ temos garantida a existência de ao menos um $z_i \neq 0$. Por 1.8, temos que $\|\lambda z\|_{[\mathcal{X}]} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\lambda z_i| = |\lambda| \cdot \sup_{i \in \mathbb{N}} |z_i| = |\lambda| \cdot \|z\|_{[\mathcal{X}]}$. Por fim, seja $s = \sup_{i \in \mathbb{N}} |z_i|$ e $r = \sup_{i \in \mathbb{N}} |w_i|$, temos, também utilizando 1.8, que:

$$\begin{aligned} \|z + w\|_{[\mathcal{X}]} &= \sup_{i \in \mathbb{N}} |z_i + w_i| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |s + r| = |s + r| \leq |s| + |r| \\ &= \sup_{i \in \mathbb{N}} |z_i| + \sup_{i \in \mathbb{N}} |w_i| \\ &= \|z\| + \|w\|. \end{aligned}$$

No entanto, uma sequência convergente não implica que a soma de seus elementos se traduza numa série convergente, basta tomar como exemplo $v = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$, tal qual a sequência equivalente seria $s_v = \left(\frac{1}{i}\right)$ com $i \in \mathbb{N}$, cuja série da forma $S_v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ é divergente conforme a Eq. (1.2), ainda que o limite da sua sequência s_v seja 0. Esse problema, no entanto, não ocorre quando trabalharmos com alguns elementos como $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$, cuja série S_u é comumente denominada como *série geométrica*. Fica claro que a função definida por:

$$\|z\|_{[\mathcal{X}]} = \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|, \quad (2.16)$$

é uma norma válida para elementos como u , cuja série é convergente por Eq. (1.5), visto que todas as propriedades de normas são diretas ou análogas às propriedades de módulo (Eq. (1.8)). Também é visível que esta é a $\|\cdot\|_1$ definida para um vetor de infinitas dimensões. Ainda nesta linha de raciocínio, nossa próxima norma seria análoga à $\|\cdot\|_2$.

É interessante notar que como estamos tratando de sequências que tendem a zero, lidamos com números em módulo contido no intervalo $(0, 1)$, e uma forma de descrevermos séries convergentes é destacando o rápido decaimento de seus elementos. Decaimento, este, acelerado ao elevarmos tais números alguma potência maior do que um. Estudando a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ como um limite superior da série

$$S_{v^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

, fica claro esse tipo de situação, como mostra a Figura 10.

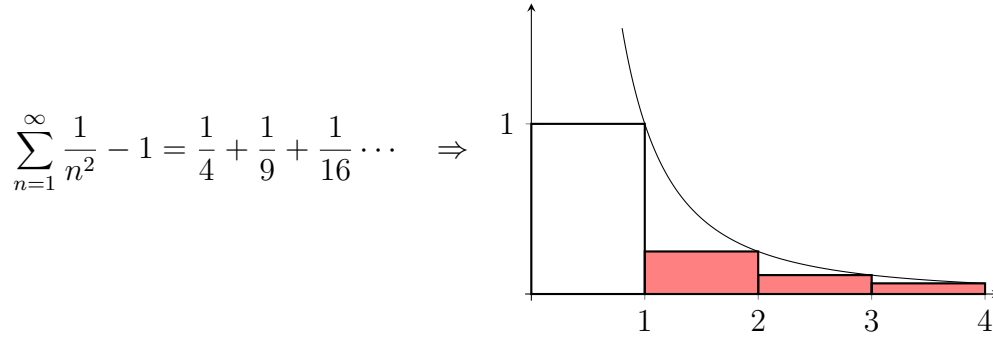


Figura 10 – Série S_{v^2} vista como uma aproximação da área de f .

Na Eq. (1.5) foi mostrado um caso de uma soma menor ou igual à estudada divergente, implicando à série estudada em questão divergir. Agora, faremos o contrário, mostrar que:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \leq L,$$

implicaria em S_{v^2} convergir. De fato:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x^{-2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{a} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar que embora v não convirja na norma análoga à $\|\cdot\|_1$, podemos obter a função

$$\|z\|_2^{\infty} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2}, \quad (2.17)$$

equivalente à norma $\|\cdot\|_2$, e que, por sua vez, satisfaz as condições de norma para vetores como v , assim como para aqueles que, assim como u , convergem em $\|\cdot\|_1$. Surge, enfim, uma forma de generalizar alguns espaços vetoriais discretos, ou seja, que possuem uma propriedade enumerável, assim como as ênuplas de $\mathbb{R}^{\infty}$ e $\mathbb{C}^{\infty}$: a partir da norma de seus elementos. Em toda a literatura aqui citada, foi convencionado o uso do símbolo l como base de identificação dessa classe de espaços vetoriais, seguiremos com a mesma notação.

Construímos, então, dois espaços vetoriais distintos, subconjuntos de $\mathbb{C}^{\infty}$, portanto herda suas operações principais: l_1 , cujo conjunto é a união de todos os vetores que convergem com a norma $\|\cdot\|_1^{\infty}$, e l_2 , cujo conjunto é a união de todos os vetores que convergem com a norma $\|\cdot\|_2^{\infty}$. Repare que são conjuntos não excludentes, visto que se um vetor converge com a função $\|\cdot\|_1^{\infty}$, é garantido que ele também convergirá com $\|\cdot\|_2^{\infty}$, dado que para qualquer $z \in \mathbb{C}^{\infty}$, temos que $0 < |z|^2 < |z| < 1$.

Analogamente às sequências e séries de elementos pertencentes a $\mathbb{C}^{\infty}$, também é possível estendermos os conceitos apresentados para os espaços métricos de funções. Como

estamos olhando sob a ótica de espaços de Hilbert, temos o questionamento: do que se trata uma sequência de funções? Não é um conceito tão intuitivo, mas algebricamente pode ser tratado exatamente igual tratamos sequências até então. Uma sequência de funções, logo, poderá convergir em uma função específica ou divergir.

Observe que a Figura 5 é justamente a representação de uma série convergente de funções, o que talvez não tenha sido visto anteriormente, agora se torna algo trivial ao repetir. Este também é um caso de funções contínuas convergindo para uma função descontínua, logo, a primeira propriedade limitadora de nosso conjunto é encontrada: queremos que a série convirja em um elemento do próprio conjunto, logo, $\mathcal{E}$, de cara, já deve conter ambas funções contínuas, quanto funções descontínuas. De forma análoga ao exemplo de uma sequência cujo limite é um número irracional, inferimos que o espaço de funções contínuas C_a^b utilizado no exemplo de norma da Figura 8 não é um espaço completo. Resolvemos o primeiro caso adicionando os números irracionais aos racionais, ou seja, quando passamos dos $\mathbb{Q}$ para os $\mathbb{R}$, esse processo de obter um espaço métrico completo é o que chamamos de *completamento* (OLIVEIRA, 2018) e é o que vamos buscar realizar em C_a^b .

Além disso, queremos obter um produto interno para espaços de funções, tanto reais, quanto complexas. Para fins didáticos, vamos nos ater às funções reais inicialmente. Definidas as propriedades necessárias, então caracterizamos nosso conjunto tomado para formar o espaço de funções, assim como foi quando tratamos dos espaços l_1 e l_2 .

Considere as funções

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definidas no intervalo real $[a, b]$, de caráter arbitrário, como mostra a Figura 11.

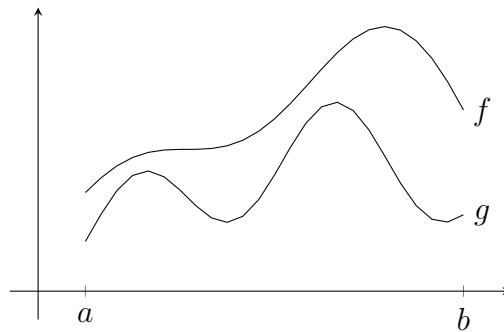


Figura 11 – f e g originais e arbitrárias.

Vamos construir o produto interno entre ambas as funções a partir da aplicação que já estamos familiarizados, definida em Eq. (2.8). Repare que as ênuplas de elementos pertencentes ao conjunto $\mathbb{C}^\infty$ são, no entanto, discretas, ou seja, enumeráveis, logo, vamos fazer o mesmo para nosso domínio $[a, b]$, e tentemos aplicar a função da Eq. (2.8) para nossas discretizações de f e g , como mostra a Figura 12.

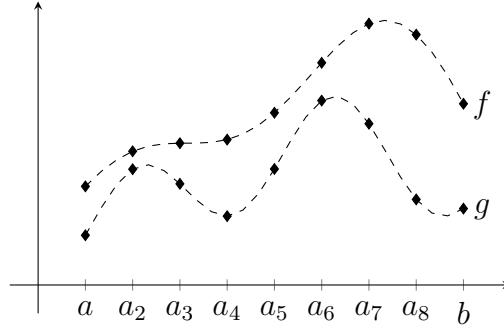


Figura 12 – f e g discretizadas em nove pontos.

Apontaremos nossa discretização com o índice d . Temos então, as funções f_d e g_d :

$$\begin{aligned} f_d &= \{f(a), f(a_2), f(a_3), \dots, f(b)\}; \\ g_d &= \{g(a), g(a_2), g(a_3), \dots, g(b)\}, \end{aligned}$$

e a aplicação:

$$\langle f_d, g_d \rangle_d = f(a)g(a) + f(a_2)g(a_2) \cdots + f(b)g(b).$$

No entanto, esta aplicação percorre infinitamente nossas funções f e g originais, pois estas são a união dos infinitos pontos $f(i)$ e $g(i) \mid a \leq i \leq b$. Logo, o que queremos fazer é incluir mais pontos, todos os pontos de f e g . Nisso encontramos duas particularidades. A primeira é que diferentemente das ênuplas pertencentes a $\mathbb{C}^\infty$, um intervalo real é não enumerável (LIMA, 2014), além disso, como vimos na problemática de vetores pertencentes a espaços de infinitas dimensões, é comum que as séries destes vetores diverjam. É interessante, portanto, conter nosso produto interno.

Para resolver ambas as problemáticas de uma vez, vamos reutilizar a ideia da prova da convergência de S_{v2} , utilizando o teste de convergência de séries por integrais. Este teste nos diz que é possível tratar uma série como uma integral de Riemann, com os retângulos de base $\Delta_x = 1$, implicando que cada elemento da série possui um peso igual a 1. Em nosso caso, queremos obter uma série que contemple todos os $f(i)$ e $g(i)$ de nossa função. Utilizando a métrica usual para $\mathbb{R}$, na Figura 12 podemos ver que o nosso domínio está discretizado pela distância de $\Delta_x = \frac{b-a}{8}$, e portanto cada ponto deve possuir tal peso. Para que $f(b)g(b)$ não extrapole nosso intervalo, vamos visualizar uma integral de Riemann agindo sobre a função $h = f \cdot g$, e sua discretização h_d , e considerar apenas até $f(a_8)g(a_8)$ na Figura 13.

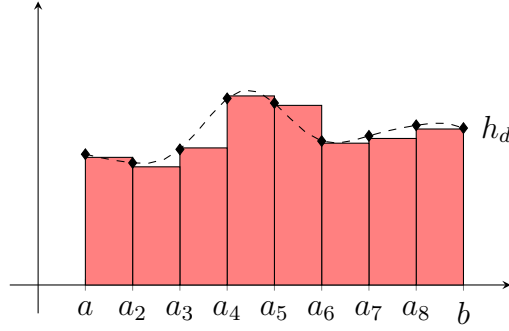


Figura 13 – A função $h = f \cdot g$ discretizada e devidamente ponderada por Δ_x .

Utilizamos a função h_d , pois a altura de cada retângulo de nossa integral de Riemann será justamente $h(a) = f(a)g(a)$, $h(a_1) = f(a_1)g(a_1)$, $\dots$, $h(a_8) = f(a_8)g(a_8)$, que são justamente os termos da soma obtida por $\langle f_d, g_d \rangle_d$. Perceba, portanto, que conforme utilizarmos mais pontos de f e g originais, menor terá de ser a distância discretizada, por consequência, é possível obter uma função que contemple todos os pontos de f e g se aplicarmos um limite em Δ_x , ou seja, calcularmos a integral definida em $[a, b]$ de h :

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} h_d \cdot \Delta_x = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \langle f_d, g_d \rangle_d \Delta_x = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (2.18)$$

Observe que utilizamos duas funções reais, portanto $\langle f_d, g_d \rangle_d$ retornou apenas valores reais pois $g(i) = \overline{g(i)}$. Então, vamos generalizar nosso conceito considerando f e g funções integráveis no intervalo $[a, b]$. Definimos o produto interno entre f e g como a integral definida neste intervalo de f pelo conjugado de g , assim como os exemplos anteriores de produtos internos. Logo:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} d(x). \quad (2.19)$$

Vamos mostrar que esta definição é um produto interno válido, novamente, apenas para o caso de complexos:

Demonstração 2.8 Note que as três primeiras propriedades são imediatas, novamente pelas definições de complexos, e visto que a integral é uma soma:

$$\begin{aligned} \overline{\langle g, f \rangle} &= \overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)} d(x)} = \int_a^b \overline{g(x)\overline{f(x)}} d(x) = \int_a^b \overline{g(x)} f(x) d(x) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} d(x) \\ &= \langle f, g \rangle, \end{aligned}$$

provando a Propriedade 1;

$$\langle \lambda \cdot f, g \rangle = \int_a^b \lambda f(x)\overline{g(x)} d(x) = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\overline{g(x)} d(x) = \lambda \cdot \langle f, g \rangle,$$

tal qual a propriedade 2;

$$\begin{aligned}\langle f + h, g \rangle &= \int_a^b [f(x) + h(x)] \cdot \overline{g(x)} \, dx = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} + h(x) \overline{g(x)} \, dx \\ &= \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx + \int_a^b h(x) \overline{g(x)} \, dx \\ &= \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle,\end{aligned}$$

satisfazendo a Propriedade 3. Por fim, temos que provar que dada $f \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle f, f \rangle \neq 0$. Por hipótese, $f \neq \mathbf{0}$, implica na existência de algum $c \in [a, b]$ tal que $f(c) \neq 0$. Caso f seja um função contínua ou contínua por partes, $f(c)$ não é um ponto isolado e portanto existe um $\epsilon > 0$ tal que a integral no intervalo $c - \epsilon, c + \epsilon$ é diferente de zero. Das definições de números complexos, temos que $z\bar{z} = |z|^2$. Logo,

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x) \overline{f(x)} \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx > 0.$$

Assim como Propriedade 4. No entanto, Hansen (2014) ocorre de uma função g retornar 0, exceto por um conjunto enumerável de pontos, definindo-a como *0 em quase todo lugar*. Estes pontos não afetam nossa integral e portanto $\langle g, g \rangle = 0$, também, o que implica que trataremos $g = \mathbf{0}$, assim como funções que diferem apenas em um conjunto enumerável de pontos, *iguais em quase todo lugar*, serão simplesmente consideradas iguais.

Conforme já demonstrado por Eq. (2.6), podemos definir a seguinte norma como a raiz do produto interno de um vetor com ele mesmo, portanto, vamos utilizar o produto interno já demonstrado como válido em Eq. (2.19), cujas propriedades continuarão a ser atendidas neste conjunto, para definir a seguinte norma:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(z) \overline{f(z)} \, dz} = \sqrt{\int_a^b |f(z)|^2 \, dz}. \quad (2.20)$$

Repare que esta norma é semelhante à $\|\cdot\|_2^\infty$ em sua construção, sendo a raiz quadrada de uma soma de termos elevados ao quadrado, portanto, a denominaremos como $\|f\|_2$. Além disso, é plausível que

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(z)| \, dz,$$

também seja uma norma válida. A demonstração é trivial, dado que para qualquer $f \neq \mathbf{0}$, temos garantido que $\int_a^b |f(z)| \, dz > 0$. Pelas propriedades Eq. (1.14) de integrais e de módulo 1.8, temos a segunda propriedade de norma garantida, obtemos

$$\begin{aligned}\|f + g\|_1 &= \int_a^b |f(z) + g(z)| \, dz \leq \int_a^b |f(z)| + |g(z)| \, dz \\ &= \int_a^b |f(z)| \, dz + \int_a^b |g(z)| \, dz \\ &= \|f\|_1 + \|g\|_1.\end{aligned}$$

Limitamos nosso conjunto, então, para o de funções que sejam simplesmente absolutamente integráveis com as mesmas operações principais já definidas até então, e cuja integral seja finita. Analogamente aos espaços criados anteriormente, temos que: o conjunto de todas as funções que atendam à norma $\|f\|_2$ é denominado por L^2 , assim como o conjunto de todas as funções que atendam à norma $\|f\|_1$ é denominado por L^1 .

Este é um ponto delicado, as provas de que $\mathbb{C}^N$, l^2 ¹, e L^2 são exemplos de espaços de Hilbert não estão no escopo deste trabalho por utilizar de um conteúdo mais avançado, assim como a prova que a base L^2 ², a ser apresentada, realmente gere todo o espaço. Este será o tópico a seguir.

Vale lembrar que as bases são inerentes a todos os espaços vetoriais, e como trabalhamos subconjuntos individualmente quanto à convergência de suas normas, é justo inferir que suas bases também serão distintas entre si, e é justamente o que buscaremos. Conforme estudamos na seção de Projeção Ortogonal é preferível que obtenhamos bases que sejam também *Ortonormais* e, como vimos, basta normalizarmos um conjunto de vetores ortogonais, conforme Eq. (2.13).

Portanto, cabe o questionamento, porque utilizamos as funções trigonométricas? Há mais de uma resposta, ou pontos positivos nesta escolha. O primeiro ponto é que como estamos tratando de funções ortogonais, encontrar funções que sejam ímpares é de grande valia, pois como funções ímpares são tais que $f(-x) = -f(x)$, é garantido que a integral definida em um intervalo simétrico específico retornará zero. Ora, a função seno é uma aplicação ímpar, e cosseno é uma função par, ou seja, $f(x) = f(-x)$, logo, temos que a multiplicação entre ambas retornará uma função ímpar. De fato, basta tomar f sendo ímpar, e g , par: temos então que $f(x) = -f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$, o que implica que $(f(x) \cdot g(x)) = -f(-x) \cdot g(-x) = -(f(-x) \cdot g(-x))$, ou seja, $f(x) \cdot g(x)$ é ímpar. O que implica que é fácil de encontrar um intervalo o qual o produto interno entre tais funções retorne que ela sejam ortogonais, como mostra a Figura 14.

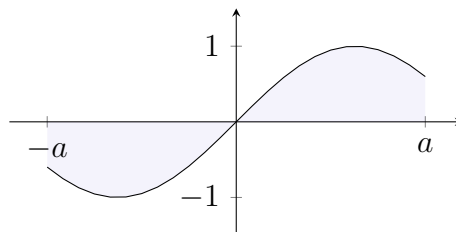


Figura 14 – Qualquer intervalo simétrico entre funções ímpares retorna uma integral nula.

Outro motivo é o fato de podermos utilizar a identidade referenciada em 1.3 para facilitar a álgebra envolvida. Identidade, essa, que pode ser facilmente alcançada da Série

¹ Caso seja de interesse do leitor ver uma prova de que l^2 é um espaço de Hilbert, consulte (LIMA, 2020).

² Para uma prova que o conjunto gera L^2 , ver (OLIVEIRA, 2018).

de Taylor, ver a prova em 1.17. Por fim, são também funções periódicas, logo a soma delas representam bem aproximações de funções originais que também o sejam.

No entanto, ainda é possível estendermos a ideia para funções verdadeiramente aperiódicas, que será o caso apresentado em última instância na seção *Transformada de Fourier*. Inicialmente, voltamos nossos olhos para as funções periódicas, a lembrar, se $f(t)$ é periódica, então existe um T chamado de período, ou período fundamental, tal que $f(t) = f(t + T)$. O ponto chave é que estudando um único período, correlacione com a ideia de intervalo, estamos olhando ao mesmo tempo para a função inteira. Cabe, então, definirmos este intervalo de modo que a base escolhida seja ortogonal.

Uma forma de diferenciar as bases a serem utilizadas pode ser a quantidade de dados que se têm disponível. Caso tenhamos em mão todos os pontos de um período, temos a própria função e portanto cabe utilizar uma base de funções. Caso tenhamos apenas amostras discretas do objeto a ser estudado, então utilizaremos uma base da forma de ênuplas, de maneira bem similar à adequação mostrada do produto interno, como mostra a Figura 15.

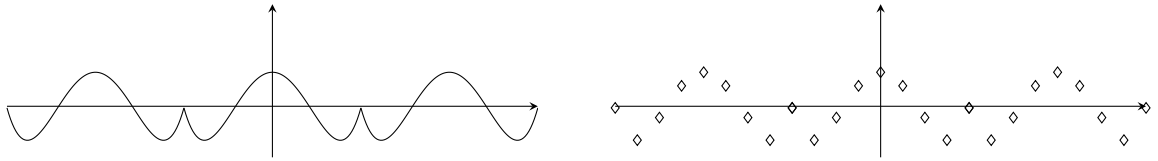


Figura 15 – À esquerda, uma função $f \in L^2$; à direita, N amostras de f : utilizamos $\mathbb{C}^N$.

Definição 2.9 (Transformada Discreta de Fourier) Seja $e = \{e_n\}$ uma base ortonormal finita ou não, e um conjunto finito ou não de dados arbitrário f . Chamamos os elementos da forma:

$$\langle f, e_n \rangle, \quad (2.21)$$

de *Coefficientes de Fourier*. No caso de $n \in \mathbb{N}$ e $f \in L^2$, temos

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \quad (2.22)$$

como a Série de Fourier de f . Para $n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq N-1$ e uma sequência $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{N-1} \langle \mathbf{f}, e_n \rangle e_n, \quad (2.23)$$

onde $\langle \mathbf{f}, e_n \rangle$ é chamada de *Transformada Discreta de Fourier (DFT)*.

3 Observando as diferentes decomposições na prática

Sabemos que as funções trigonométricas são periódicas, mas como exatamente descobrimos o período T de cada aplicação de maneira rápida e simples? A resposta pra essa pergunta é simples: normalizando o domínio. Com isso, entramos com a ideia de frequência. É interessante realizarmos essa mudança de visualização, sendo uma forma clara de perceber as diferenças entre funções de diferentes argumentos.

3.1 Bases para Séries de Fourier à luz de frequências

Vamos olhar para uma função que temos bastante familiaridade: $\cos(t)$. É visível que sua periodicidade está representada no círculo trigonométrico, ou seja, $\cos(t) = \cos(t + 2k\pi)$, o que implica que nosso período fundamental será obtido quando $k = 1$ e será $T = 2\pi$. Quando modificamos no entanto nossa aplicação para $\cos(2\pi t)$, entendemos que ela irá percorrer o círculo trigonométrico "2 π vezes" mais rapidamente, e portanto chegamos em $\cos 2\pi t = \cos(2\pi t + 2k\pi) = \cos[2\pi(t + k)]$, o que implica que agora $T = 1$. Em outras palavras, T é o tempo com que o argumento da função percorre uma vez, a primeira vez, o círculo trigonométrico. Repare, ainda, que multiplicando o argumento de nossa função por 2π , normalizamos o nosso período multiplicando-o por $(2\pi)^{-1}$, como mostra a Figura 16.

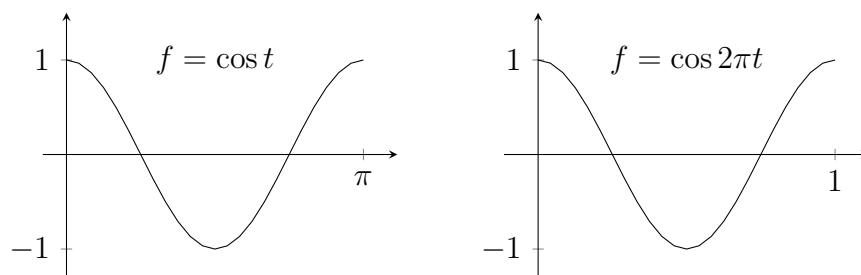


Figura 16 – $T = 2\pi$ à esquerda; $T = 1$ à direita.

De forma análoga, ao dividirmos o argumento por T , estamos multiplicando o período por T . Para obtermos diferentes frequências, adicionamos a variável k no numerador, ou seja, ao escrevermos $\cos \frac{2\pi tk}{T}$, estamos sinalizando que em $t = T$, possuímos exatamente k ciclos. Na Figura 17 é possível perceber como é simples de entender essas informações.

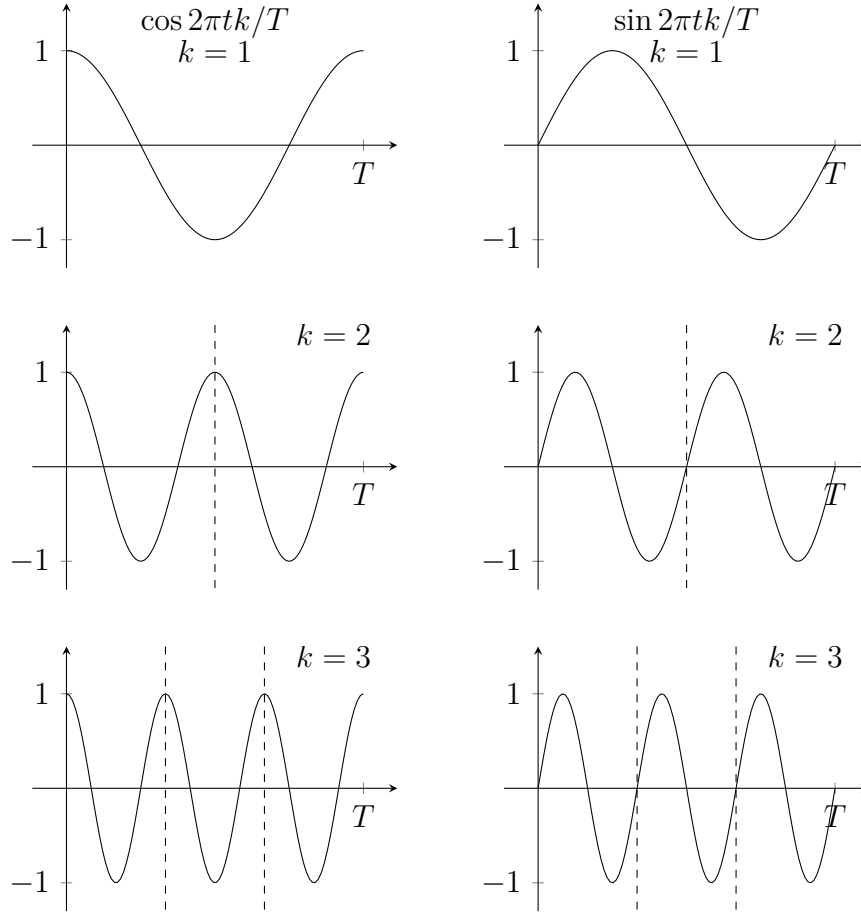


Figura 17 – Com o Período Fundamental $= T$, encontramos diferentes frequências variando-se k .

Designamos para as série de Fourier e Transformada Discreta de Fourier reais, bases compostas de sinusoides como os da Figura 17. Variando-se a frequência k pelos números naturais união zero, temos o conjunto:

$$e_{k[SF\mathbb{R}]} = \left\{ \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\},$$

com k pertencente aos naturais união zero, como uma base ortogonal para nossas Séries de Fourier puramente reais, a qual será normalizada.

A partir das bases obtidas, fica claro que uma combinação linear de $e_{n[SF\mathbb{R}]} = \{\cos(2\pi kt/T), \sin(2\pi kt/T)\}$ resultará numa expressão tal qual apresentada no início do nosso trabalho em Eq. (2.1), onde o a_0 nada mais é que o coeficiente do vetor $\cos 2\pi kt/T$, $k = 0$. O fato de que a função que foi utilizada na Eq. (2.1) ser absolutamente integrável advém do fato de existência de sua norma em L^1 , o que, por si só, não garante a sua convergência, e, finalmente, o termo L é análogo à T . Em meio a todas as literaturas referenciadas neste trabalho, várias formas de se escrever a equação da série de Fourier são utilizadas, o que pode confundir um pouco o leitor à primeira vista, vamos explicar como todas elas são equivalentes e querem carregar a mesma informação.

Inicialmente, recordemos a partir da Figura 17 como o período fundamental de nossas funções pode ser escrito como o inverso multiplicativo de nossas frequências. A Eq. (2.1) utiliza as funções de argumento $\pi nx/L$, neste caso, n está fazendo o papel da frequência k , e os limites de integração $-L$ e L implicam que o nosso período T está escrito em função de L , ou seja, para

$$n = k, x = t \rightarrow \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \Rightarrow L = \frac{T}{2}. \quad (3.1)$$

Observação 3.1 A Eq. (3.1) faz sentido, afinal, estamos procurando por intervalos simétricos, e de $-L$ a L , estamos integrando sobre exatamente um período. Esta é a explicação de como pode-se encontrar diferentes formas de se escrever a Série de Fourier, não somente os intervalos de integração dependem do período da função, mas este também depende da troca ou não de variáveis no argumento da base escolhida. Além disso, ainda é necessário normalizar a base, adicionando diferentes constantes à equação. Perceba alguns exemplos na Tabela 3.1.

Esta normalização, por fim, explica o fato de o coeficiente a_0 estar dividido por dois na Eq. (2.1). Como precisamos encontrar a norma de cada vetor da base, vamos aproveitar e obter esse resultado a partir da verificação da ortogonalidade da mesma, fazendo:

$$\begin{aligned} \langle e_{k[SFR]}, e_{k'[SFR]} \rangle &= (1) \left\{ \left\langle \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) \right\rangle \right\}_{k,k'=0}^{\infty}; \\ &\quad (2) \left\{ \left\langle \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) \right\rangle \right\}_{k,k'=0}^{\infty}; \\ &\quad (3) \left\{ \left\langle \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) \right\rangle \right\}_{k,k'=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

Dessa forma, quando $k = k'$ em (1) ou (2), basta obtermos a raiz quadrada e teremos a norma de tal vetor.

$$(1) : \left\langle \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) \right\rangle = \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt;$$

$$(2) : \left\langle \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) \right\rangle = \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt;$$

$$(3) : \left\langle \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) \right\rangle = \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt.$$

Pelas relações trigonométricas de seno e cosseno em Eq. (1.2), podemos trabalhar as integrais à seguinte maneira:

$$(1) : \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k+k')t}{T}\right) dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k-k')t}{T}\right) dt;$$

$$(2) : \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k-k')t}{T}\right) dt \\ - \frac{1}{2} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k+k')t}{T}\right) dt;$$

$$(3) : \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k+k')t}{T}\right) dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k-k')t}{T}\right) dt.$$

Pela relação trigonométrica (3), temos que a integral é sempre 0:

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi(k \pm k')t}{T}\right) dt = - \left[\frac{T \cdot \cos\left(\frac{2\pi(k \pm k')t}{T}\right)}{2\pi(k \pm k')} \right]_0^T = - \frac{T \cdot \cos(2\pi(k \pm k'))}{2\pi(k \pm k')} + \frac{T \cdot \cos(0)}{2\pi(k \pm k')} \\ = \frac{T}{2\pi(k \pm k')} - \frac{T}{2\pi(k \pm k')} = 0.$$

Para $k = k' = 0$, temos que:

$$(1) : \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos(0) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(0) dt = T$$

$$(2) : \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \sin(0) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \sin(0) dt = 0.$$

Ainda,

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi(k \pm k')t}{T}\right) dt = \left[\frac{T \sin\left(\frac{2\pi(k \pm k')t}{T}\right)}{2\pi(k \pm k')} \right]_0^T = \frac{T \sin(2\pi(k \pm k'))}{2\pi(k \pm k')} = 0, \quad (3.2)$$

logo, para $k = k' \neq 0$, temos:

$$(1) : \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt = 0 + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(0) dt = \frac{T}{2}$$

$$(2) : \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos(0) dt + 0 = \frac{T}{2}.$$

Finalmente, para $k \neq k'$, nenhum termo se cancela para $\cos(0)$ antes da integração, portanto, por Eq. (3.1), temos

$$\begin{aligned} (1) : \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt &= 0 \\ (2) : \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi k't}{T}\right) dt &= 0. \end{aligned}$$

Vemos que os vetores de $e_{k[SF\mathbb{R}]} = \{\cos 2\pi kt/T, \sin 2\pi kt/T\}_{k=0}^\infty$ possuem duas normas, uma em específico apenas para o caso de $k = 0$. A fim de clarificação da escrita, reescrevermos o conjunto ortogonal com a parcela $k = 0$ destacada: $e_{k[SF\mathbb{R}]} = \{1, \cos 2\pi kt/T, \sin 2\pi kt/T\}_{k=1}^\infty$. A base ortonormal $E_{k[SF\mathbb{R}]}$ é obtida utilizando o processo de normalização descrito pela Eq. (2.13):

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \|e_{k[SF\mathbb{R}]\|} &= 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\|e_{k[SF\mathbb{R}]\|}}, \quad E_{k[SF\mathbb{R}]} = \lambda \cdot e_{k[SF\mathbb{R}]} \\ E_{k[SF\mathbb{R}]} &= \left\{ \sqrt{\frac{1}{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\}_{k=1}^\infty. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Desta forma, o cálculo da série toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^\infty \langle f, E_k \rangle E_k = \int_0^T f(t) \cdot \sqrt{\frac{1}{T}} dt \cdot \sqrt{\frac{1}{T}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^\infty \left[\int_0^T f(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^\infty \left[\int_0^T f(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right]. \end{aligned}$$

Coletamos as constantes das normalizações para junto das integrais:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^\infty \langle f, E_k \rangle E_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^\infty \left[\left[\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right] \cdot \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^\infty \left[\left[\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right] \cdot \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right]. \end{aligned}$$

Por fim, reescrevemos estas integrais pelos coeficientes a_k e b_k e deixamos apenas um somatório:

$$a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (3.4)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3.5)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi tk}{T}\right) dt, k \geq 1 \quad (3.6)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi tk}{T}\right) dt, k \geq 1. \quad (3.7)$$

Observando que a_0 é justamente da forma de a_k com $k = 0$, exceto pela constante multiplicada por dois, é comum simplesmente escrever $\frac{a_0}{2}$ na Eq. (3.4) e $k \geq 0$ na Eq. (3.6), excluindo a necessidade da Eq. (3.5). A seguir temos alguns exemplos de escritas usuais das séries de Fourier.

É possível carregar ambas as informações, senos e cossenos, a partir de um único vetor. Essa é uma das vantagens da utilização dos números complexos. A partir das identidades referenciadas nas Eq. (1.25) e Eq. (1.26), é possível estabelecermos bases complexas, e obter:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi tk}{T}\right) &= \frac{\exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) + \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right)}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi tk}{T}\right) &= \frac{\exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) - \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right)}{2i}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Em outras palavras, nós temos que a base $e_{k[SF\mathbb{R}]}$ pode ser escrita como uma combinação linear dos vetores $e_{k[SF\mathbb{C}]}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Vejamos,

Para $k = k'$:

$$\int_0^T \exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \exp\left(-\frac{i2\pi k't}{T}\right) dt = \int_0^T e^0 dt = T,$$

e, para $k \neq k'$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \exp\left(-\frac{i2\pi k't}{T}\right) dt &= \int_0^T \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right) dt \\ &= \frac{T}{i2\pi(k-k')} \cdot \left[\exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right) \right]_0^T \\ &= \frac{T}{i2\pi(k-k')} \cdot [\exp(i2\pi(k-k')) - 1] \\ &= \frac{T}{i2\pi(k-k')} \cdot [\cos(2\pi(k-k')) + i \sin(2\pi(k-k')) - 1] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, de forma análoga ao modelo real, temos respectivamente, a base ortogonal complexa, e a Série Complexa de Fourier:

Funções utilizadas	Bases Ortonomais utilizadas
Sem mudança de variável ⁽¹⁾ $\sin(kx), \cos(kx)$	Normalizada por $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ e $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ $\left\{ \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos(kx), \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(kx) \right\}_{k=1}^{\infty}$
Mudança de variável: x para $\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ⁽²⁾ $\sin(n\pi x/L), \cos(n\pi x/L)$	Normalizada por $\sqrt{\frac{1}{2L}}$ e $\sqrt{\frac{1}{L}}$ $\left\{ \sqrt{\frac{1}{2L}}, \sqrt{\frac{1}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sqrt{\frac{1}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$
Mudança de variável: x para $\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$ ⁽³⁾ $\sin(2\pi kt/T), \cos(2\pi kt/T)$	Normalizada por $\sqrt{\frac{1}{T}}$ e $\sqrt{\frac{2}{T}}$ $\left\{ \sqrt{\frac{1}{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\}_{k=1}^{\infty}$

Formato final da Série de Fourier

- (1): $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, com limites de integração $[-\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi]$;
- (2): $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, com limites de integração $[-L, L]$;
- (3): $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$, com limites de integração $[0, T]$.

Podendo, ainda, estar na forma $\frac{a_0}{2}$, com a_k definido por $k \geq 0$.

Tabela 1 – Formas comuns de se escrever a Série de Fourier de uma função qualquer.

$$E_{k[SF\mathbb{C}]} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{T}} \exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \right\}_{k=-\infty}^{\infty} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, E_k \rangle E_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T f(x) \sqrt{\frac{1}{T}} \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) dt \cdot \sqrt{\frac{1}{T}} \exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left[\frac{1}{T} \int_0^T f(x) \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) dt \right] \cdot \exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \right]. \end{aligned}$$

Escrita pelos coeficientes complexos de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \quad (3.10)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

3.2 Transformada Discreta de Fourier (TDF)

Utilizaremos a mesma ideia das bases de séries de Fourier, porém agora discretizadas. Portanto, para a TDF, temos que a união das sequências:

$$e_{(k,t)[DFT\mathbb{R}]} = s_{cos} : \left\{ \cos \frac{2\pi kt}{T} \right\}_{k=0, t=0}^{k=(T/2), t=T-1} \cup s_{sen} : \left\{ \sin \frac{2\pi kt}{T} \right\}_{k=0, t=0}^{k=(T/2), t=T-1},$$

com t, k, T naturais, que implica que T é um múltiplo de 2, é uma base ortogonal para a DFT puramente real, a qual será normalizada. Este t/T surge da discretização do nosso domínio em T intervalos iguais: dessa forma, é possível obter uma sequência periódica. A visualização da periodicidade ficará mais explícita na explicação do uso de números complexos logo em seguida.

Perceba a semelhança com a Série de Fourier, a fim práticos, a DFT é nada mais que uma aproximação computacional, portanto, está limitada à quantidade de dados disponíveis, representados por $0 \leq t \leq T - 1$. Além disso, nosso k está limitado a $T/2$ para que haja vetores igualmente distribuídos entre senos e cossenos. Na Figura 18, um exemplo para $T = 6$, ou seja 6 amostras de uma f qualquer:

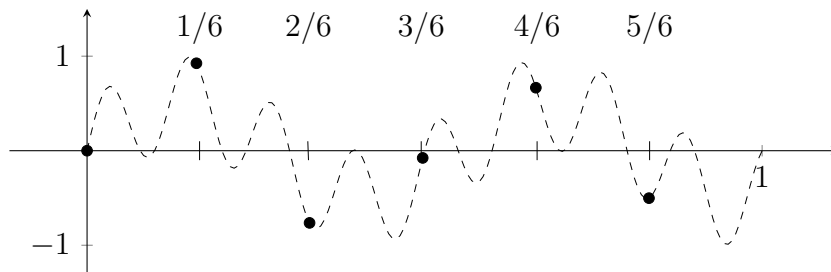
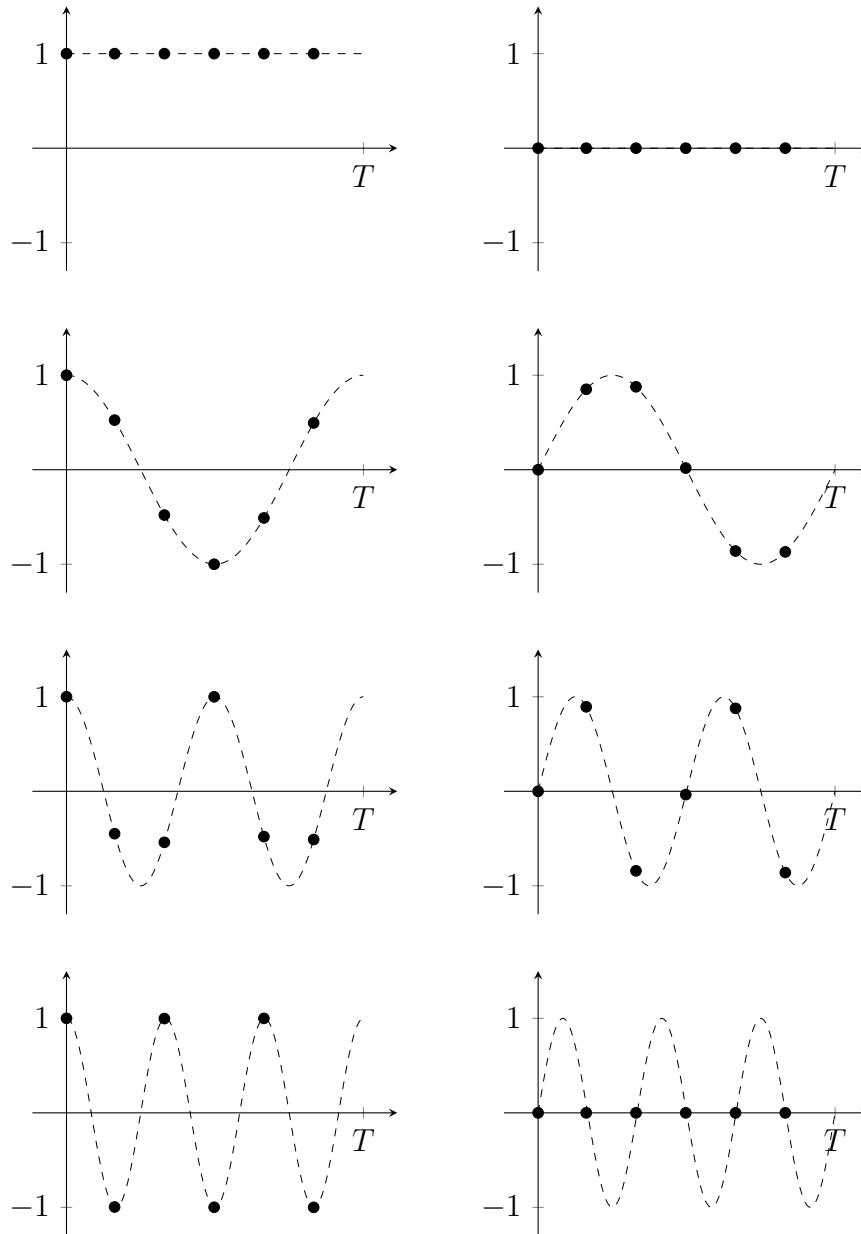


Figura 18 – Discretização de uma f qualquer.

A nossa base será composta justamente pelas discretizações da Figura 17, ou seja, cada uma delas será um elemento da forma de sequência, ou ênupla, de 6 elementos. Considerando que para $k = 0$, retorna-se 0 para nossa função seno, esta parcela será irrelevante:

**Figura 19** – TDF de Dimensão igual a T.

Ainda, para $k = T/2$, ocorre duas excentricidades: Primeiro, a função cosseno retornará valores alternados entre 1 e -1 , o que, em conjunto com o vetor de $k = 0$, possui uma norma igual a $\sqrt{T}$, enquanto os outros vetores terão norma $\sqrt{\frac{T}{2}}$. Segundo, em $k = 0$, a função seno retornará sempre zeros, o que torna seguro dizer que a TDF de $T = 6$ é uma aproximação de 6 vetores, 6 ênuplas de 6 elementos, de 6 dimensões, da nossa série de Fourier original de infinitas dimensões. De fato, os vetores ortogonais para seis dimensões são exatamente:

$$\begin{aligned}
k = 0 : C_0 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
k = 1 : C_1 &= (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
S_1 &= (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \\
k = 2 : C_2 &= (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\
S_2 &= (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \\
k = 3 : C_3 &= (1, -1, 1, -1, 1, -1).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

É trivial perceber que a base normalizada, realizando os mesmos processos realizados para a base de infinitas dimensões, agora para $e_{(k,t)}[TDF\mathbb{R}]$:

$$\begin{aligned}
E_{(k,T)[DFT\mathbb{R}]} &= s_1 : \left[\sqrt{\frac{1}{T}} [1, 1, \dots, 1] \right] \cup s_{cos} : \left[\sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi kt}{T} \right]_{k=1, t=0}^{k=(T/2)-1, t=T-1} \\
&\cup s_{1'} : \left[\sqrt{\frac{1}{T}} [1, -1, 1, \dots, -1] \right] \cup s_{sen} : \left[\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi kt}{T} \right]_{k=1, t=0}^{k=T/2, t=T-1}.
\end{aligned}$$

Por sua vez, a expansão de uma amostra de uma função f qualquer, designada como $f[t] = [f_{(0)}, f_{(1/T)}, f_{(2/T)}, \dots, f_{(T-1/T)}]$, ou simplesmente $f[t] = [f_{(t/T)}]_{t=0}^{T-1}$, pode ser analisada como:

$$\begin{aligned}
f[t] &= \sum_{k=0}^{T/2} \langle f[t], E_{(k,T)} \rangle E_{(k,T)} = \sum_{t=0}^{T-1} f_{(t/T)} \sqrt{\frac{1}{T}} \cdot \sqrt{\frac{1}{T}} \\
&+ \sum_{k=1}^{(T/2)-1} \left[\sum_{t=0}^{T-1} f_{(t/T)} \left[\sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right] \right] \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \\
&+ \sum_{k=1}^{(T/2)-1} \left[\sum_{t=0}^{T-1} f_{(t/T)} \left[\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right] \right] \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \\
&+ \left[\sum_{t=0}^{T-1} f_{(t/T)} \sqrt{\frac{1}{T}} (-1)^t \right] \cdot \sqrt{\frac{1}{T}} (-1)^t.
\end{aligned}$$

Novamente, a maneira mais concisa, análoga à série de Fourier, é denotá-la como:

$$f[t] = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=0}^{T/2} C_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) + \sum_{k=0}^{T/2} S_k \sin \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) + \frac{C_{T/2}}{2} \tag{3.13}$$

$$C_k = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f_{(t/T)} \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{T}{2} \tag{3.14}$$

$$S_k = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f_{(t/T)} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{T}{2}, \quad (3.15)$$

com $0 < t < T - 1$. Em verdade, é fácil determinar as sequências de cossenos e senos ortogonais para determinados valores de T pequenos, sem necessariamente utilizarmos a fórmula apresentada. Visualmente, fica fácil de entender tanto a periodicidade da sequência, quanto o uso dos complexos, quando representamos a Figura 19 como círculo trigonométrico devidamente seccionado:

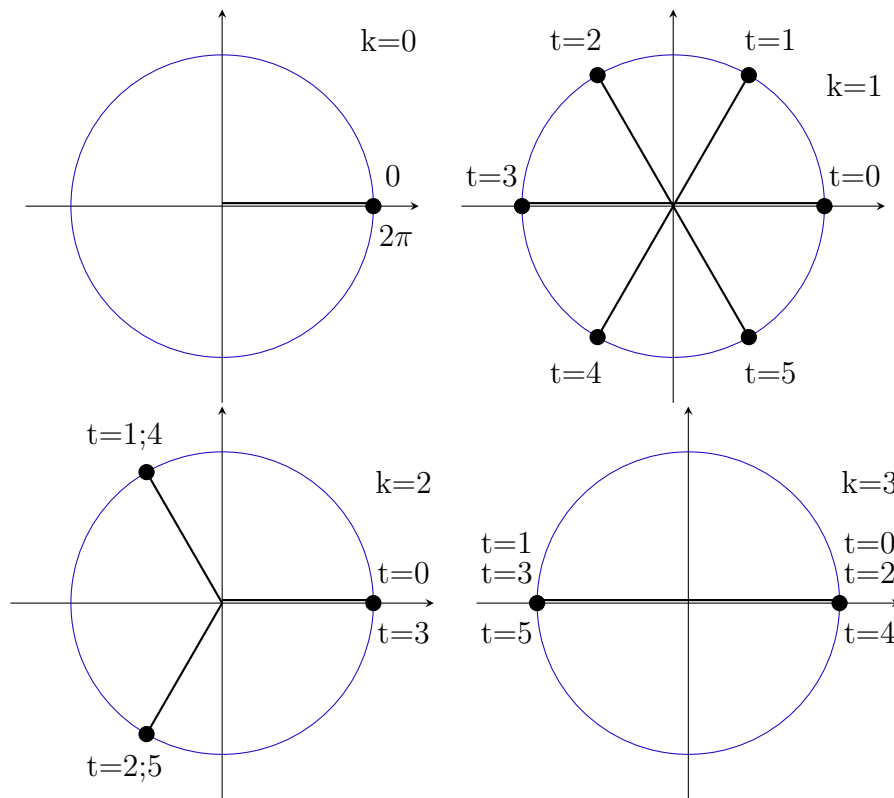


Figura 20 – Interpretação geométrica utilizando o círculo unitário.

Para valores como $T = 6$, ou $T = 12$, o cálculo pode ser feito à mão sem maiores dificuldades, no entanto, é interessante ainda utilizar este recurso como forma de entender intuitivamente o uso dos complexos. Perceba que os pontos destacados indicam exatamente os valores das sequências de seno e cosseno, e ao dividirmos o círculo em seções iguais, criamos sequências periódicas. Não só isso, basta um esboço do círculo de frequência igual a 1, que se obtém facilmente o desenho das próximas frequências. Por fim, os pontos do círculo de frequência 1 são análogos aos pontos:

$$e^{i\theta} = \left\{ \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 0}{6}\right), \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 1}{6}\right), \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 2}{6}\right), \right. \\ \left. \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 3}{6}\right), \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 4}{6}\right), \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 5}{6}\right) \right\}.$$

O qual, perceba, é o mesmo que:

$$e^{i\theta} = \left\{ \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 0}{6}\right), \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 1}{6}\right), \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 2}{6}\right), \right. \\ \left. \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot 3}{6}\right), \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot (-2)}{6}\right), \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 1 \cdot (-1)}{6}\right) \right\}.$$

Ou seja, parte dos vetores será exatamente o conjugado de alguns previamente já calculados, e caso seja uma frequência par, com $k = 2$ da Figura 20 como exemplo, não haverá um vetor da forma $\exp(i\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, excluindo o trivial $\exp(0)$, basta calcular metade dos coeficientes e adicionar seus respectivos conjugados, otimizando o processo, onde a parte real da sequência de vetores obtidos representa os valores em $\cos(\theta)$, e a parte imaginária os valores em $\sin(\theta)$. Por conta disso, as oito imagens da Figura 19 foram reduzidas, somente para quatro na Figura 20.

De forma que, uma base ortogonal complexa utilizada para calcular a TDF de uma função é:

$$e_{(k,t)[TDF\mathbb{C}]} : \left[\exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \right]_{(k,t)=0}^{T-1}. \quad (3.16)$$

A princípio, surge uma questão: por qual motivo agora variamos a frequência de 0 a $T - 1$, assim como t ? Há mais de um jeito de pensarmos sobre isso. Uma explicação a princípio é que dessa forma que estaremos tratando de T vetores complexos de dimensão T , ou seja, trabalharemos sob $\mathbb{C}^T$. Caso tivéssemos k limitado a $T/2$ poderíamos estar tratando com um conjunto insuficiente para gerar nosso espaço. Além disso, vamos olhar para as normas dos vetores desta base realizado o produto interno:

$$\left\langle \left[\exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \right]_{(k,t)=0}^{T-1}, \left[\exp\left(-\frac{i2\pi k't}{T}\right) \right]_{(k,t)=0}^{T-1} \right\rangle = \sum_{t=0}^{T-1} \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right). \quad (3.17)$$

Para $k = k'$, temos que a Eq. (3.17) resultará em:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \exp\left(\frac{i2\pi \cdot 0 \cdot t}{T}\right) = \sum_{t=0}^{T-1} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = T. \quad (3.18)$$

Para $k \neq k'$, podemos realizar a seguinte manipulação algébrica:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right) = \exp\left(\frac{i2\pi(k-k') \cdot 0}{T}\right) + \exp\left(\frac{i2\pi(k-k') \cdot 1}{T}\right) \\ \vdots \\ + \exp\left(\frac{i2\pi(k-k') \cdot (T-1)}{T}\right).$$

Pelas propriedades de exponenciação, temos que:

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{i2\pi(k-k')}{T}\right) \sum_{t=0}^{T-1} \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right) &= \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')(0+1)}{T}\right) \\
&+ \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')(1+1)}{T}\right) \\
&\vdots \\
&+ \exp\left(\frac{i2\pi(k-k') \cdot (T-1+1)}{T}\right) \\
&= \sum_{t=1}^T \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')T}{T}\right).
\end{aligned}$$

Desta maneira, por

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{T-1} \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right) - \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')}{T}\right) \sum_{t=0}^{T-1} \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right) &= \\
\sum_{t=0}^{T-1} \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right) - \sum_{t=1}^T \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right),
\end{aligned}$$

os termos entre $t = 1$ e $t = T - 1$ se cancelarão. Colocando o somatório em evidência, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{T-1} \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')t}{T}\right) \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')}{T}\right)\right] &= \exp\left(\frac{i2\pi(k-k') \cdot 0}{T}\right) \\
&- \exp\left(\frac{i2\pi(k-k') \cdot T}{T}\right).
\end{aligned}$$

Como $\exp(0) = 1$, isolando nosso somatório original temos que:

$$\left\langle \left[\exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \right]_{(k,t)=0}^{T-1}, \left[\exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right) \right]_{(k,t)=0}^{T-1} \right\rangle = \frac{1 - \exp(i2\pi(k-k'))}{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(k-k')}{T}\right)}. \quad (3.19)$$

Como $(k - k') \in \mathbb{Z}$, temos que o numerador desta fração sempre resultará num complexo da forma $1 - \cos(2\pi(k - k')) - i \sin(2\pi(k - k')) = 1 - 1 - 0 = 0$. Além disso, é impossível $k - k'$ ser um múltiplo de T , já que ambos estão limitados a $[0, T - 1]$, e não são iguais, logo, não há possibilidade da indeterminação $\frac{0}{0}$. Portanto, para $k \neq k'$, nosso produto interno confirma a ortogonalidade do conjunto.

No entanto, perceba que todos os vetores possuem uma norma igual a $\sqrt{T}$, o que implica que o conjunto ortonormal deve ser obtido através de $\lambda = \sqrt{T}^{-1}$:

$$E_{(k,t)[DFTC]} : \left[\frac{\exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right)}{\sqrt{T}} \right]_{(k,t)=0}^{T-1}. \quad (3.20)$$

Portanto, nossa decomposição complexa, de uma $f_{\mathbb{C}}[t]$ pertencente à $\mathbb{C}^T$ toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}[t] &= \sum_{k=0}^{T-1} \langle f_{\mathbb{C}}[t], E_{(k,t)[TDFC]} \rangle E_{(k,t)[TDFC]} \\ &= \sum_{k=0}^{T-1} \left[\sum_{t=0}^{T-1} f_{\mathbb{C}}[t] \frac{\exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right)}{\sqrt{T}} \right] \cdot \frac{\exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right)}{\sqrt{T}}_{t=0}^{T-1} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \left[\sum_{t=0}^{T-1} f_{\mathbb{C}}[t] \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) \right] \cdot \exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right)_{t=0}^{T-1}, \end{aligned}$$

onde o termo

$$\sum_{t=0}^{T-1} f_{\mathbb{C}}[t] \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) \quad (3.21)$$

é a nossa TDF de $f_{\mathbb{C}}[t]$.

Agora, veja só os vetores da base ortogonal para $T = 6$ na Figura 21. Observe que, os vetores da base real de $k = 1$ e $k = 2$ se repetem aqui, ou quase: Em verdade, o vetor $e_{(k,t)} = \overline{e_{(T-k,t)}}$, propriedade simétrica que por se tratar de complexos tem a mesma alcunha do produto interno complexo, isso é: Hermitiano (HANSEN, 2014). Porém, pela simetria obtida ao dividirmos o intervalo $[\exp(0), \exp(i2\pi)]$ em intervalos iguais, $k = 1$ e $k = 5$, assim como $k = 2$ e $k = 4$, carregam as mesmas informações. O que, de certa forma, compensa a constante de normalização ser menor (relembre, a constante de normalização ao final para a base real era $2/T$, enquanto aqui sempre foi $1/T$, independente de k ser zero ou não), explicando o fato de k ir até $T - 1$, como mostra na Figura 21.

Existe, ainda, mais uma interpretação, dessa vez algébrica, e agora facilmente entendida (basta lembrarmos das Eq. (1.25) e Eq. (1.26)): observe que tanto a função seno, quanto a função cosseno, são equivalentes a não um, mas dois complexos somados. Ainda, um deles também é o conjugado do outro. Por isso, apesar de tanto na série de Fourier complexa, quanto na TDF complexa, aparecerem somas com o dobro de termos, não é necessário calcular todos os coeficientes, afinal, a segunda metade deles será exatamente o conjugado dos anteriores.

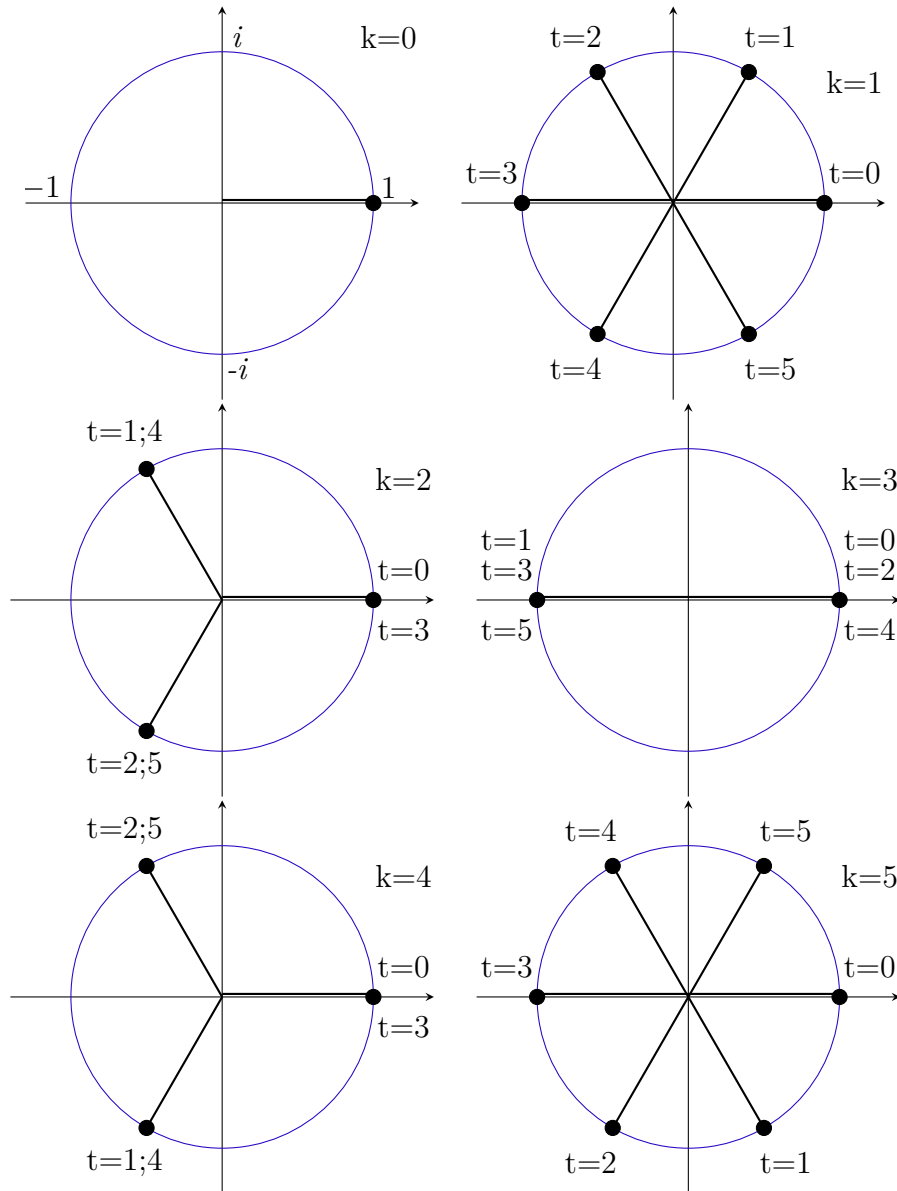
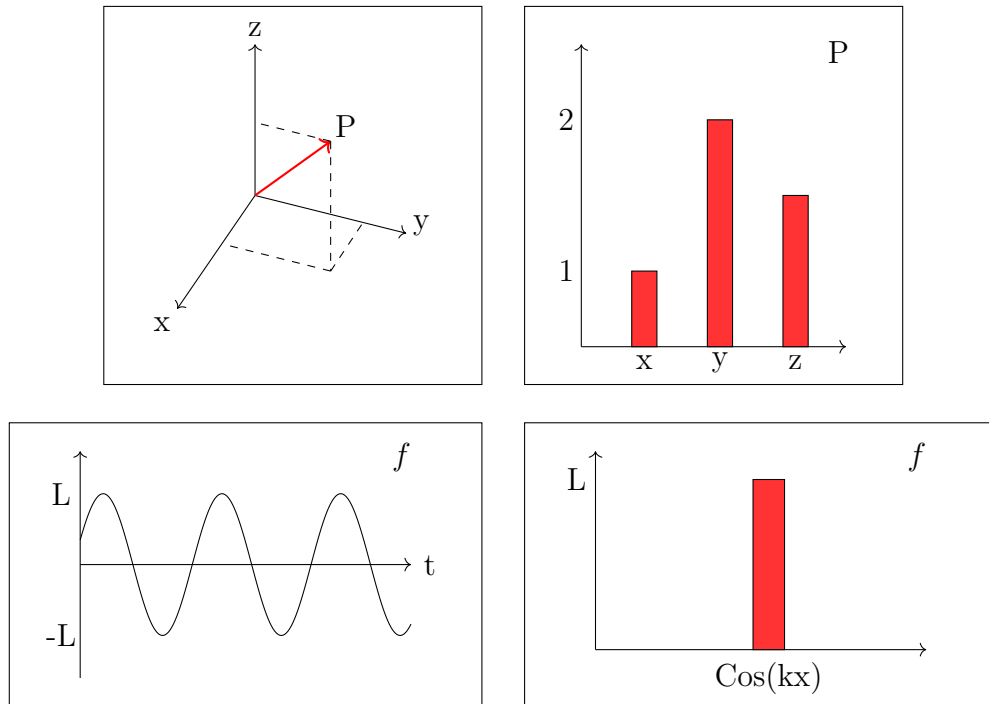


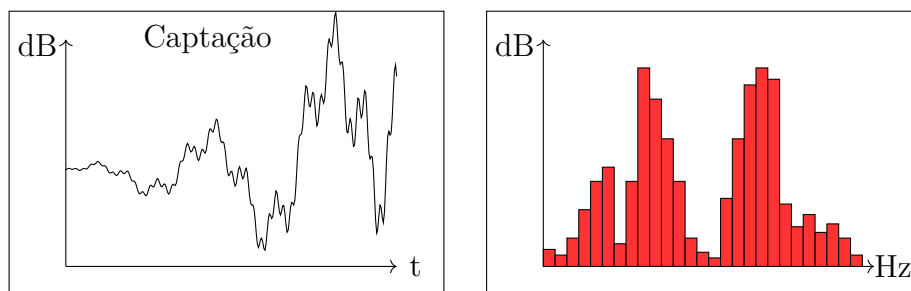
Figura 21 – Interpretação geométrica seccionando o intervalo $[e^0, e^{12\pi}]$.

3.3 Transformada de Fourier

De forma análoga ao espaço $\mathbb{R}^3$, uma frequência pode ser múltipla de um único vetor de uma base ou carregar projeções. É interessante podermos visualizar um gráfico de tais informações, para isso, vamos utilizar uma representação gráfica de Norma por Dimensão de um determinado elemento, assim, conseguimos representar cada projeção, ainda que o objeto de estudo tenha mais do que três dimensões. Na prática, um exemplo com o espaço euclidiano e com uma frequência qualquer:

**Figura 22** – Visualização por dimensão.

Vamos apresentar uma aplicação utilizando-se desta forma de representação. Filtros de áudio, em resumo, possuem a funcionalidade de limpar um espectro de áudio de ruídos indesejados, sejam eles provenientes do ambiente ou do equipamento de captação. Vamos adequar nossas unidades para as usuais, Hertz como medida de frequência e decibéis para representar a intensidade. A seguir, uma simulação de uma frequência de áudio captada que deverá ser filtrada posteriormente:

**Figura 23** – Sinal de áudio original e suas projeções em frequências.

Assume-se que os ruídos indesejados sempre serão de menor intensidade que as frequências desejadas, portanto, ao traçar um limite mínimo de intensidade, pode-se aplicar uma lógica booleana, isto é, uma lógica que retorna verdadeiro ou falso, para considerar apenas aquelas frequências que atinjam esse determinado limite. Podemos representar esse limite graficamente da seguinte maneira:

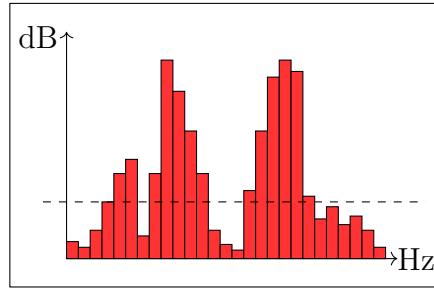


Figura 24 – Delimitação de intensidade mínima.

Até aqui, fizemos a decomposição de um áudio simulado e então selecionamos algumas frequências, em outras palavras, o produto interno com uma base para obter os coeficientes e então filtrá-los. Em seguida faremos a composição, isto é, multiplicaremos novamente os coeficientes selecionados com as respectivas frequências da base utilizadas para sua obtenção. Realizando a soma desses vetores, criamos uma aproximação da nossa captação original, agora limpa das frequências indesejadas, como mostra a Figura 25.

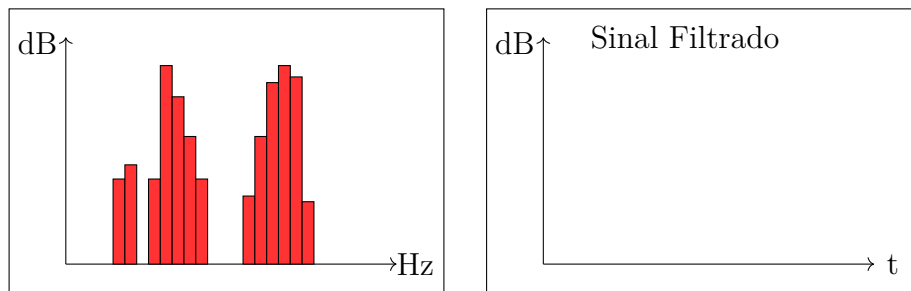


Figura 25 – Composição de novo áudio.

Perceba, então, que esta dualidade de decomposição e composição é algo que permite manipulação do objeto original. Precisamos obter cada vez mais coeficientes se quisermos um resultado cada vez mais preciso, em outras palavras é necessário adicionar cada vez mais dimensões. Aqui cabe lembrarmos o trabalho do matemático Georg Cantor, que nos trouxe à luz infinitos de maior cardinalidade que outros (LIMA, 2014), e novamente da visualização de séries em área da Figura 10. Perceba que a soma das frequência acima são justamente a mesma forma de representação, desta vez, do somatório contido na TDF ou de uma série de Fourier. Além disso, observe na Figura 17, que todas as frequências obtidas pela variação de k são múltiplas da obtida por $k = 1$, podendo-se inferir que há talvez uma representação com intervalos menores entre as frequências (LIMA, 2014).

Perceba que se o período da função ($k = 1$) na Figura 17 for $2T$, obtemos todos os mesmos coeficientes obtidos com um $k' = 2k$, no entanto, para um k' ímpar, encontramos frequências novas, que não foram utilizadas na construção da função quando ela era de período fundamental T . Nas representações esquemáticas anteriores, temos que os retângulos vermelhos são representados em largura justamente pelo período fundamental T , visto que para um período fundamental duas vezes maior teríamos de encaixar o dobro

de retângulos neste mesmo intervalo. Se apenas continuarmos a aumentar o período da função original, temos que nossos retângulos estarão cada vez mais próximos e culminarão em uma integral, de forma similar como aprende-se a intuição por trás dos limites de uma integral de Riemann:

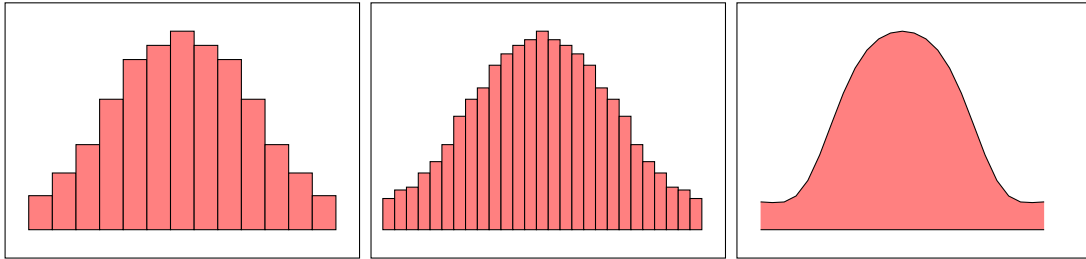


Figura 26 – Transformando um somatório em uma integral, novamente.

Podemos visualizar isso algebricamente acontecendo, também, perceba que tanto nos resultados da DFT, quanto das Séries de Fourier, ocorre uma normalização similar à $1/T$, que geometricamente representa a largura de cada retângulo. Portanto, quanto maior o período, menor será esta normalização, ao ponto de se tornar uma diferencial dt . Em outras palavras, os coeficientes se tornam uma função, e o conjunto de suas frequências um domínio. Para tal, dilatamos um período de uma função periódica de modo que T tenda ao infinito. A função f original passa a ser aperiódica, ou de período único.

Enquanto antes contávamos as frequências por k/T , agora elas se tornam um conjunto não enumerável, logo, este termo passa a ser uma variável, isso implica que a integral externa das Séries de Fourier que percorria em k terá de se adaptar para uma integral, ou seja, nossa integral interna, que tratava do produto interno de f com a base ortogonal deve continuar variando conforme a variável de f . Como dk , nós temos justamente a largura dos retângulo infinitesimais, ou seja, a normalização da base ortogonal. Portanto, temos:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi kt} dt \right] e^{i2\pi kt} dk, \quad (3.22)$$

onde a integral interna, de forma similar à DFT, é denominada como Transformada de Fourier de f (FT). Note que a Figura 26 está representando exatamente a integral externa, ou seja, a composição de volta pra f , em outras palavras, estamos representando a mesma função, porém em outro domínio. A FT apresenta várias operações calculadas em funções, por exemplo, propriedades de combinação linear, diferenciação, translação, dilatação, multiplicação por polinômios e convolução (BASSANEZI; JR., 1988; ZILL; SHANAHAN, 2011). Matematicamente falando, é uma solução analítica de determinadas problemáticas, e computacionalmente impossível de replicar com fidelidade absoluta em toda sua extensão, já que depende de infinitos dados e retornos.

Como estamos tratando essencialmente de somas, existe uma questão interessante que não foi levantada até então é acerca da linearidade destas operações. Determine uma função $h = f + g$, é trivial perceber que a decomposição de h resulta na soma das decomposições de f e g , em outras palavras é similar às Transformações lineares da forma $T(A + B) = T(A) + T(B)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi kt} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) + g(t)]e^{-i2\pi kt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi kt} + g(t)e^{-i2\pi kt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi kt} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi kt} dt. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Em outras palavras, é possível aplicar a TF em f e g e a soma dos resultados é a mesma que aplicar TF diretamente em h :

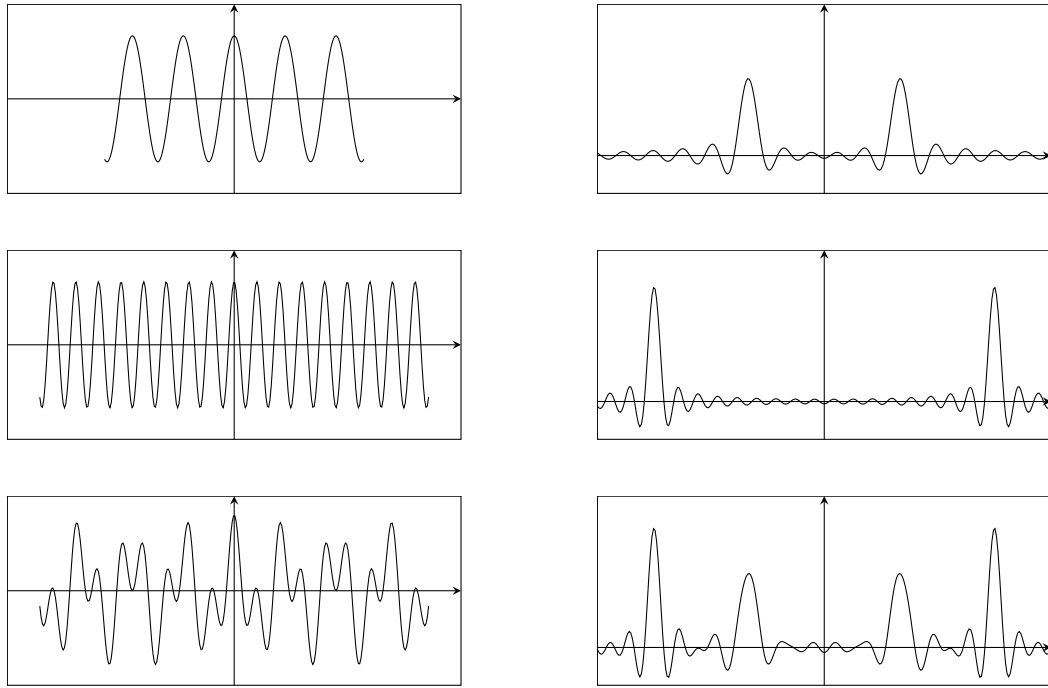


Figura 27 – Intuição da Linearidade: à direita, a TF da função à esquerda.

Da mesma forma, podemos aplicar a ideia de dilatação do domínio utilizada na mudança de variáveis no início deste capítulo. Relembre que multiplicando o argumento de um senoide por 2π , nossa imagem era inversamente modificada e o período da função tornava-se $T = 1$. Analogamente, para uma função $f(t)$ qualquer e sua dilatação por n , $f(nt)$, resulta em uma mudança de alguns parâmetros da integral. Em especial, deve-se atentar ao fato de que para um n negativo, os limites da integral também irão ser afetados:

$$y = nt \Rightarrow dy = n dt, \quad t = \frac{y}{n}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi kt} dt, \quad n > 0 &\rightarrow \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-i2\pi ky}{n}} dy \\
&= \frac{1}{n} FT\left(\frac{k}{n}\right) \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi kt} dt, \quad n < 0 &\rightarrow \frac{1}{n} \int_{\infty}^{-\infty} f(y) e^{\frac{-i2\pi ky}{n}} dy \\
&= -\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{\frac{-i2\pi ky}{n}} dy = \frac{1}{-n} FT\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$f(nt) \Rightarrow FT = \frac{1}{|n|} FT\left(\frac{k}{n}\right). \quad (3.24)$$

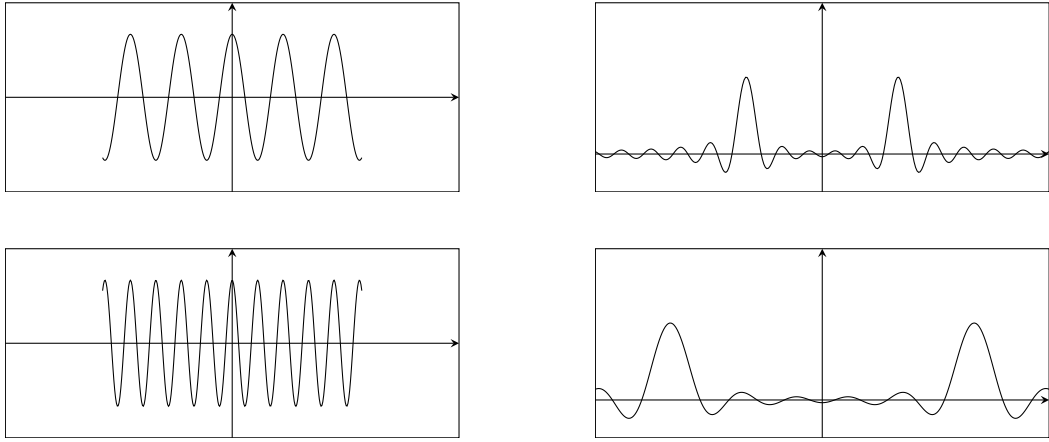


Figura 28 – Intuição da Dilatação: à direita, a TF da função à esquerda.

Há muitas propriedades interessantes ainda presentes neste âmbito, como convoluções, translação de fase, e até sobre área (Repare o que acontece na Eq.(3.22) quando $k = 0$), no entanto, vamos finalizar com outra noção intuitiva do significado da TF. Diferentemente das séries de Fourier e da TDF, pensar na TF em um caráter mais próximo da física talvez seja mais interessante. Vamos recordar da mecânica, a equação de centro de massa de um número finito de pontos. Por (HALLIDAY, 2014), o centro de massa de partículas ao longo de uma linha reta é dado pela média ponderada de suas posições, com pesos iguais às suas respectivas massas:

$$CM_x = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

No caso de massas equivalentes, importâncias iguais, teríamos que o centro de massa seria justamente a média aritmética das posições:

$$CM_x = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

Peceba pelas normalizações da base ortogonal complexa de TDF o termo $1/T$. Quando substituímos o parâmetro N da Eq.(?? por T , encontramos essa normalização:

$$CM_x = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T x_i.$$

No espaço, temos que é possível a soma das posições como uma soma de vetores, ou seja, quando tratamos de mais dimensões, substituímos nosso x_i pela posição do objeto em questão. Se nosso conjunto de objetos for justamente os pontos de uma função, a qual podemos reescrever como uma soma de suas projeções ortogonais, teremos

$$CM_f = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T \langle f, e_i \rangle e_i, \quad (3.25)$$

que é justamente a mesma equação de uma TDF normalizada por $1/T$, ou seja, estávamos calculando o centro de massa de alguma função considerando T pontos. Função esta, que era justamente a discretização da aplicação $f(t)\exp(-i2\pi kt)$. No entanto, que cara tem essa função? Diferentemente das funções seno e cosseno, $\exp(i\theta)$ pode ser entendido como uma espiral, percorrendo os pontos análogos ao círculo trigonométrico conforme varia-se θ .

Quando multiplicamos a exponencial por f , estamos dilatando os pontos pela imagem de f , ou seja, os pontos da espiral se afastarão da origem quando o módulo da imagem for maior que 1, se aproximarão da origem se quando o módulo da imagem de f estiver entre 0 e 1, e retornarão à origem quando for 0. Também é possível pensarmos o contrário: como os pontos da função $\exp(i\theta)$ possuem sempre módulo igual a 1, não estamos dilatando os pontos de f , mantendo seu módulo. Ainda, estamos sempre adicionando o argumento θ aos números de f , já que pela Eq.(1.24):

$$e^{i\theta_1} \cdot r e^{i\theta_2} = r e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Em outras palavras, estamos "enrolando" f ao redor da origem. Quando nossa função é um senoide, conseguimos visualizar interessantes padrões geométricos provenientes dessa multiplicação, conforme podemos observar na Figura 29.

Resumindo, quando tomamos todos os pontos da função, realizamos o processo apresentado na Figura 26, ou seja, aplicamos a TF de f . Neste caso, estamos descobrindo o centro de massa, ou como algumas das fontes chamam, como (HANSEN, 2014), a densidade de toda a função. O centro de massa da espiral tende a percorrer as redondezas da origem, porém quando a frequência da espiral coincide com a da função em k e $-k$, ocorrerá um pico, um deslocamento. A imagem respectiva será mais limpa, também. Repare na Figura 30, como a TF de cosseno irá em determinado momento apontar um valor real enquanto a função seno um valor imaginário, estando ambas as imagens centradas

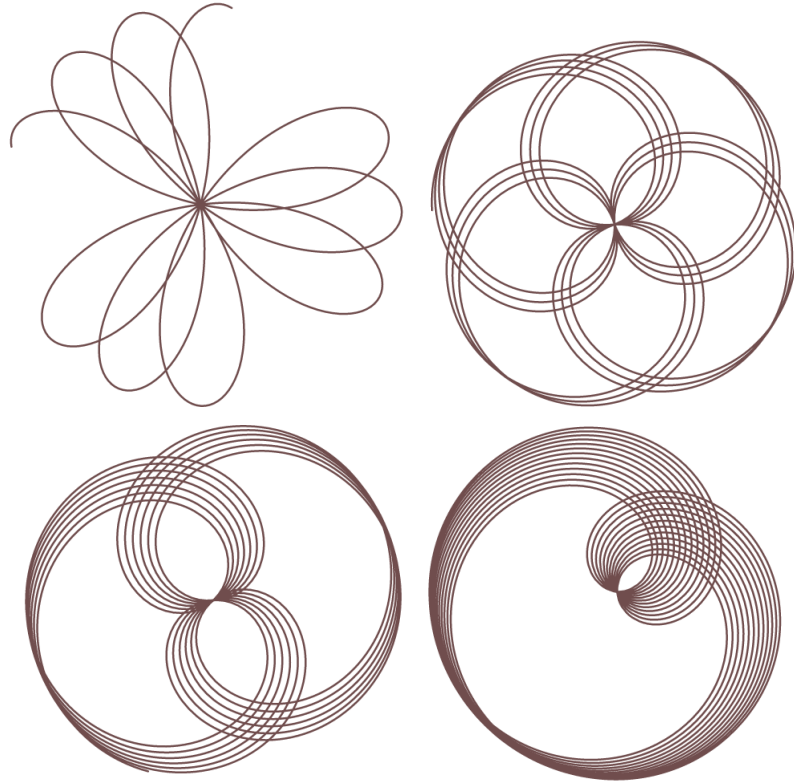


Figura 29 – Função seno multiplicada por $\exp(-2i\pi kt)$. As diferentes imagens são obtidas variando-se a frequência k .

na origem. De forma análoga ao exemplo feito no início da função Onda Quadrada, a depender das funções serem reais e pares ou reais ímpares, suas TF também serão respectivamente real e par, imaginária e ímpar. Na série, o fato de ser uma função ímpar implicou que somente haveriam coeficientes em senos, enquanto se fosse par, somente haveriam coeficientes em cossenos.

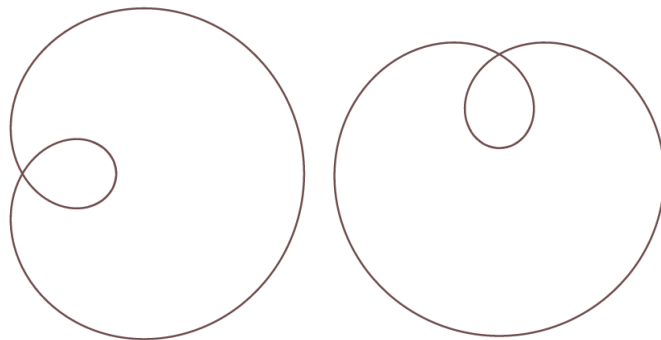


Figura 30 – Picos de cosseno e seno.

Por este motivo, não só pode-se observar como a TF de um senoide está sempre cruzando em torno do eixo da frequência, como visto nas Figura 27 e Figura 28, como também estes mesmo picos se repetirem para valores negativos de k , igualmente distanciados da origem. Esta é mais uma explicação da simetria que se encontra nos números complexos e nestas decomposições.

4 Resultados Obtidos e Conclusão

Este trabalho teve o enfoque de apresentar duas visões interligadas, e ao mesmo tempo distantes, da análise de Fourier. Com a familiaridade das noções de norma e distância, o material está apto a atender o estudante que deseja prosseguir os estudos com a noção de convergência e seus diferentes tipos, como pontual e uniforme, sendo possível compreender as diferentes generalizações das ferramentas aqui apresentadas, como o estudo de espaços L^p e l^p . Ainda, também atende àquele que deseja seguir com enfoque em aplicações, sendo necessário somente uma breve revisão de matrizes para se aprender o principal algoritmo utilizado, a Transformada Rápida de Fourier.

Em sua produção, procurou-se um equilíbrio entre conteúdo abstrato e concreto. Tomando como comparativo as fontes pesquisadas, buscou-se apresentar os quatro principais temas, convergência e as três decomposições, em um ritmo acelerado, porém natural. Não deixando de lado a base dos conhecimentos teóricos de Análise, foram apresentados exemplos, com diferentes formas de se entender seus devidos cálculos, permitindo ao leitor correlacionar seu conhecimento prévio matemático com o tema em questão.

Para tanto, cerca de todas as imagens aqui utilizadas, a partir da fundamentação teórica, foram produzidas para o trabalho e pensadas para traduzir os principais pontos que poderiam causar dificuldades. Estas imagens, não somente tornaram possível providenciar uma visão intuitiva dos temas principais, em demonstrações e argumentos, mas também ajudaram a interligar as diferentes áreas de conhecimento matemático.

Referências

- ARAKI, T.; MOLLO NETO, M. Explorando a construção computacional de sinais periódicos contínuos como combinação linear de sinais senoóideais harmonicamente relacionados. *Revista Engenho*, Portal Anchieta, v. 8, n. 1, 2013.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists, a Comprehensive Guide*. 7. ed. Waltham: Elsevier, 2013. ISBN 978-0-12-384654-9.
- BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. 1. ed. São Paulo: Harbra, 1988.
- BUENO, H. P. et al. *Ortogonalidade: um passeio pela análise funcional*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2021. ISBN 978-85-8337-166-3.
- BUSS, G. M.; FLEMMING, D. M. *Cálculo A funções, limite, derivação, integração*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- CHAVES, M. S. *O fracasso na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem sobre as séries de Fourier*. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA), 2013. [Online; Acessado em 2022]. Disponível em: <<https://www.eumed.net/rev/atlante/2013/09/series-fourier.pdf>>.
- EDWARDS, C. H.; PENNY, D. E. *Equações Diferenciais com Aplicações com Problemas de Contorno*. 3 edição. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall, 1995.
- GONDAR, J. L.; CIPOLATTI, R. *Iniciação à Física Matemática: Modelagem de Processos e Métodos de Solução*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. ISBN 978-85-244-0287-6.
- GRATTAN-GUINNESS, I.; RAVETZ, J. R. *Joseph Fourier (1768-1830): A Survey of His Life and Work*. [S.l.]: The MIT Press, 1972. ISBN 978-0262070416.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 1. ISBN 978-85-216-3056-2.
- HALLIDAY, D. *Fundamentos de Física Mecânica*. 4nd. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. v. 1.
- HANSEN, E. W. *Fourier Transforms, Principles and Applications*. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc. and Hoboken, 2014. ISBN 978-1-118-47914-8.
- IEZZI, G.; DOMINGUES, H. H. *Álgebra Moderna*. 2. ed. [S.l.]: Atual, 1982. ISBN 8535704019, 9788535704013.
- LARSON, R. et al. *Cálculo*. São Paulo: McGraw Hill, 2006.
- LIMA, E. L. *Curso de análise*. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. v. 1. ISBN 978-85-244-0118-3.
- LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. ISBN 978-85-244-0420-7.

- LIMA, E. L. *Análise Real vol. 1: Funções de Uma Variável*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. ISBN 978-85-244-0449-8.
- LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. ISBN 978-65-990528-7-3.
- OLIVEIRA, C. R. de. *Introdução à análise funcional*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. ISBN 978-85-244-0453-5.
- OSGOOD, B. G. *Lectures on the Fourier Transform and Its Applications*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2019. ISBN 978-1470441913.
- PEREIRA, A. P.; AO, J. de O. B. *Séries de Fourier na Morfometria Geométrica*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura Em Matemática) - Universidade Católica de Brasília, 2005. [Online; Acessado em 2022]. Disponível em: <<https://repositorio.uec.br:9443/jspui/bitstream/10869/1541/1/Ana%20Paula%20Pereira.pdf>>.
- PIFER, A.; AURANI, K. M. A teoria analítica do calor de joseph fourier: uma análise das bases conceituais e epistemológicas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, História da Física e Ciências Afins, v. 37, n. 1, 2015.
- PINHEIRO, M. R.; PAULO, S. R. de. Utilização da análise de fourier no estudo de variáveis micrometeorológicas de uma floresta de transição do norte de mato grosso. *Acta Amazonica*, v. 1, 2011.
- ROSENBERG, R. M. *Analytical Dynamics of Discrete Systems*. University of California, Berkeley: Springer, Softcover reprint of the hardcover 1 st edition 1977, 2012. ISBN 978-1-4684-8320-8.
- TEIXEIRA, R.; MEDEIROS, H.; MENEZES, M. L. *Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Universidade Federal Fluminense - Departamento de Matemática Aplicada, 2017. [Online; Acessado em 2022]. Disponível em: <<https://www.professores.uff.br/freddyh/wp-content/uploads/sites/105/2017/08/notasRalph.pdf>>.
- VIANA, R. L. Sincronização de relógios de pêndulo e metrônomos: um tratamento qualitativo. *Revista Brasileira de Ensino de Física - www.scielo.br/rbef*, v. 42, n. 272, 2020.
- WISDOM, J.; J., P. S.; MIGNARD, F. The chaotic rotation of hyperion. *The Massachusetts Institute of Technology Press*, Massachusetts, USA, v. 58, 1984.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais - Vol I*. São Paulo: Pearson - Makron Books, 2001.
- ZILL, D. G.; SHANAHAN, P. D. *Curso Introdutório à Análise Complexa com Aplicações*. 2. ed. [S.l.]: gen LTC, 2011. ISBN 978-8521618096.