

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Curso de Especialização em Matemática

Superfícies com Ângulo de Chebyshev Constante

por

Naygno Barbosa Noia

Goiânia
2017



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: **Naygno Barbosa Noia**

Matrícula: 20151011160128

Título do Trabalho: **Superfícies com Ângulo de Chebyshev Constante**

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

Superfícies com Ângulo de Chebyshev Constante

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais incluídos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Barbosa - TO, 04/05/21.
Local Data

Naygno Barbosa Noia

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Naygno Barbosa Noia

Superfícies Com Ângulo de Chebyshev Constante

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação lato sensu em Matemática - Departamento de Áreas Acadêmicas II - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Geometria

Orientadora: Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes

Goiânia

2017

N692s Noia, Naygno Barbosa.

Superfícies com Ângulo de Chebyshev Constante / Naygno Barbosa Noia. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2017.

90 f. : il.

Orientadora: Profª. Dra. Karoline Victor Fernandes.

Monografia – Curso de Pós-graduação *lato sensu* em Matemática, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Espaço Euclidiano. 2. Malha de Chebyshev. 3. Curvatura Gaussiana. I. Fernandes, Karoline Victor (orientadora). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III. Título.

CDD 516

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Karol Almeida da Silva Abreu CRB1/ 2.740
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

Superfícies Com Ângulo de Chebyshev Constante

por

Naygno Barbosa Noia

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação lato sensu em Matemática - Departamento de Áreas Acadêmicas II - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

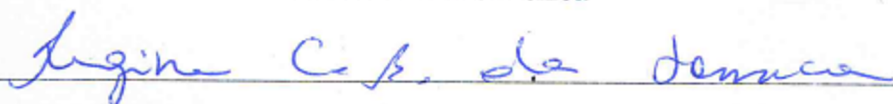
Área de concentração: Geometria

Orientadora: Profa. Dra Karoline Victor Fernandes

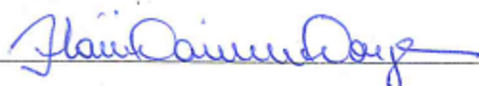
Aprovada pela seguinte banca examinadora:



Profa. Dra Karoline Victor Fernandes - IFG/Câmpus Goiânia
Presidente da Banca



Profa. Dra. Regina Célia B. da Fonseca - IFG/Câmpus Goiânia



Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza - IFG/Câmpus Goiânia

Goiânia

31 de Janeiro de 2017

Agradecimentos

Aos meus pais, Natal Noia e Maria Barbosa da Silva Noia, que sempre buscaram me apoiar nas minhas jornadas em busca do conhecimento.

Aos meus irmãos Nayron, Wildon e Wilza. Aos meus demais familiares. Ah!, não esquecendo, à minha irmã Wilda. Essa aí, de todos, é a mais solidária com as minhas aventuras pelo universo do aprimoramento intelectual.

Às minhas tias Constância Ferreira dos Santos (*in memoriam*) e Vilmenes Ferreira dos Santos, por me concederem abrigo durante a realização desse trabalho. E seus filhos e netos pelos bons momentos de “papos” descontraídos.

À professora Karoline Victor Fernandes, pelo profissionalismo, pela dedicação e paciência, que foram indispensáveis para a realização deste trabalho.

Aos demais professores da Especialização em Matemática com quem cursei alguma disciplina e me proporcionaram significativos momentos de reflexão acerca da matemática.

Aos meus colegas de curso que me possibilitaram boas discussões sobre a vida o universo (matemático) e tudo mais.

Ao prof. Flávio Raimundo e à profa. Regina por terem participado da Banca Examinadora.

“Eu não quero acreditar. Eu quero entender”.

Carl Sagan

Resumo

Neste trabalho, discorremos acerca da caracterização feita por Riveros e Corro [11], para superfícies com curvatura Gaussiana negativa, parametrizada por malha de Chebyshev generalizada e com ângulo de Chebyshev contante, em termos de uma função meromorfa que satisfaz determinada equação diferencial. Além disso, estudamos a propriedade, estabelecida por [11], de que as linhas assintóticas dessas superfícies possuem, a menos de sinal, a mesma curvatura geodésicas. Como aplicação, esses fatos corroboram com a propriedade de que existe, para cada ângulo de Chebyshev constante, uma família de 4-parâmetros de superfícies completas.

Palavras-chaves: Malha de Chebyshev, Função Meromorfa, Curvatura Gaussiana, Ângulo de Chebyshev.

Abstract

This work, talking about the characterization made by Riveros and Corro [11], to surfaces with negative Gaussian Curvature, parametrized for Chebyshev net generalized and with angle of Chebyshev constant, in term of a meromorphic function that satisfies determine differential equation. Furthermore, we studied the property [11] , established for, of that the asymptomatic lines those surfaces owns, the less of signal, the same geodesic curvature. As application, those facts corroborate with the property which exists, to each constant Chebyshev angle, a family completes of surfaces with 4-parametrized.

Keywords: Chebyshev Net, Meromorphic Function, Gaussian Curvature, Chebyshev Angle.

Sumário

Introdução	6
1 Preliminares	7
1.1 Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$	7
1.2 Curvas	9
1.3 Superfícies	11
1.4 Campos Vetoriais	27
2 Equações de Compatibilidade e Curvas Geodésicas	32
2.1 Equações de Compatibilidade em Superfícies Parametrizadas Regulares	32
2.2 Curvas Geodésicas	39
2.3 Equações de Compatibilidade em Superfícies Parametrizadas por Linhas Assintóticas	47
3 Resultados Principais	67
3.1 Funções Holomorfas e Séries de Laurent	67
3.2 Equação de Liouville	72
3.3 Superfícies Completas	74
3.4 Resultados Principais	77
4 Conclusão	88
Bibliografia	89

Introdução

De acordo com Corro e Riveros [11], Bianchi [5], [6] estudou uma classe de superfícies com curvatura Gaussiana negativa obtida pela generalização das transformações de Bäcklund¹ para superfícies com curvatura Gaussiana negativa. Além disso, ainda em [11], eles completam que Fujioka [1], introduz a noção de malha de Chebyshev generalizada (como uma generalização natural das malhas de Chebyshev para superfícies com curvatura Gaussiana negativa) e mostra que uma superfície de Bianchi² com ângulo de Chebyshev constante parametrizada por uma malha de Chebyshev generalizada é um pedaço de uma helicóide; neste caso, com ângulo de Chebyshev igual a $\pi/2$.

No entanto, neste trabalho buscamos apresentar parte substancial do arcabouço conceitual que nos pareceu ser razoável para dar fundamentação teórica para a caracterização de uma família de superfícies – com malha de Chebyshev generalizada, ângulo de Chebyshev constante e diferente de $\pi/2$, obtida por Riveros e Corro no artigo [11]. Nesse artigo, tal caracterização foi conseguida mostrando que os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais dessas superfícies depende de uma função meromorfa que satisfaz uma equação diferencial. A caracterização é baseada nos resultados obtidos por [8], [9] e [10]. Em [11], foi mostrado que estas superfícies têm a propriedade geométrica de que as linhas assintóticas têm curvatura geodésica com mesmo valor absoluto. Além disso, como aplicação são obtidas soluções destas equações diferenciais que permitem obter uma família de superfícies completas de 4-parâmetros.

¹Mais detalhes sobre Transformações de Bäcklund podem ser encontradas em [12]

²Ver mais detalhes em [3]

Capítulo 1

Preliminares

Tomando como espaço vetorial o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, iniciamos este capítulo tratando de alguns conceitos básicos do cálculo vetorial, por exemplo: produto interno, produto vetorial, etc. Em seguida, ainda com a intenção de apresentar o fundamental, descrevemos curvas, superfícies, equações de compatibilidade, etc., que no contexto da geometria diferencial – tratada neste trabalho – se mostram úteis para o entendimento do que é exposto nos capítulos posteriores. Todas as demonstrações omitidas neste capítulo são encontradas em [2], [4], [12].

1.1 Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ como sendo o conjunto formado pelas ternas ordenadas de números reais, ou pontos p , de coordenadas (x, y, z) . Introduzindo as operações: $u + v$ e λu , para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, segue que o $\mathbb{R}^3$ torna-se um espaço vetorial. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, temos as seguintes definições.

Definição 1.1 *Dados os vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, o **produto interno** entre u e v é o número real*

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Em particular, temos que $\langle w, w \rangle = |w|^2$ para todo $w \in \mathbb{R}^3$.

Proposição 1.2 *Sejam os vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e seja o número $\lambda \in \mathbb{R}$. O produto interno satisfaz as seguintes condições:*

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
2. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$,
3. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$,
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$,
5. $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente, se $u = 0$.

Definição 1.3 *Dados os vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, o **produto vetorial** de u e v é o vetor*

$$u \times v = (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - v_1u_2).$$

Proposição 1.4 *Para quaisquer vetores u, v e w em $\mathbb{R}^3$, o produto vetorial goza das seguintes propriedades:*

1. $|u \times v| = |u||v| \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre u e v ;
2. $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$;
3. $u \times v = 0$ se, e somente se, u e v são linearmente dependentes;
4. $u \times v = -(v \times u)$;
5. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$;
6. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$;
7. $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$.

Definição 1.5 *O **produto misto** entre os vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ em $\mathbb{R}^3$ é o número real*

$$\langle u, v \times w \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

onde as barras verticais indicam o determinante.

Proposição 1.6 *Dados os vetores u, v e w em $\mathbb{R}^3$, o produto misto satisfaz as condições seguintes:*

1. $\langle u, v \times w \rangle = \langle v, w \times u \rangle = \langle w, u \times v \rangle = -\langle w, v \times u \rangle = -\langle v, u \times w \rangle = -\langle u, w \times v \rangle$.
2. $\langle u, v \times w \rangle = 0$ se, e somente se, u, v e w são linearmente dependentes.
3. Se $\{u, v, w\}$ é uma base ortonormal, então $\langle u, v \times w \rangle = \pm 1$.

Proposição 1.7 (*Identidade de Lagrange*) *Sejam w_1, w_2, w_3 e w_4 vetores de $\mathbb{R}^3$, então*

$$\langle w_1 \times w_2, w_3 \times w_4 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle \langle w_2, w_4 \rangle - \langle w_1, w_4 \rangle \langle w_2, w_3 \rangle \quad (1.1)$$

Demonstração: Utilizando os itens 1 e 7 das proposições (1.6) e (1.4), respectivamente, segue que

$$\begin{aligned} \langle w_1 \times w_2, w_3 \times w_4 \rangle &= \langle w_3 \times w_4, w_1 \times w_2 \rangle \\ &= \langle w_1, w_2 \times w_3 \times w_4 \rangle \\ &= \langle w_1, \langle w_2, w_4 \rangle w_3 - \langle w_2, w_3 \rangle w_4 \rangle \\ &= \langle w_1, w_3 \rangle \langle w_2, w_4 \rangle - \langle w_1, w_4 \rangle \langle w_2, w_3 \rangle \end{aligned}$$

Desta forma obtemos a *Identidade de Lagrange*. ■

1.2 Curvas

Para caracterizarmos os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que constituem as curvas utilizamos funções diferenciáveis. Vejamos a seguir.

Definição 1.8 *Uma **curva parametrizada diferenciável** de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto.*

O subconjunto de $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ – representado pelos pontos da forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, tais que as funções reais $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são diferenciáveis – e a variável $t \in I$, são respectivamente, o **traço** e o **parâmetro** da curva α .

Definição 1.9 *O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$ é denominado **vetor tangente** (ou vetor velocidade) da curva $\alpha(t)$ em t , onde $x'(t)$, $y'(t)$ e $z'(t)$ denotam as derivadas primeiras das funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ em um ponto $t \in I$.*

Considere uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que para cada $t \in I$, tem-se que $\alpha'(t) \neq 0$, isto é, os pontos sobre a curva α são **regulares**.

Definição 1.10 Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ chama-se **curva regular** quando $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Sejam I e J intervalos aberto de $\mathbb{R}$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável tal que $h'(s) \neq 0$, para todo $s \in J$, e $h(J) = I$. Nestas condições seguem as definições.

Definição 1.11 A **reparametrização de α por h** é uma curva regular dada pela função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde a função h é denominada **mudança de parâmetro**.

A aplicação $s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$ é denominada **função comprimento de arco** da curva α a partir de t_0 . Além disso, a aplicação $s(t)$ é de classe C^∞ , pois α é uma curva regular.

Definição 1.12 Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **parametrizada por comprimento de arco** quando para cada $t_0, t_1 \in I$, com $t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$, isto é,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0, \quad (1.2)$$

onde $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$.

Proposição 1.13 Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **parametrizada por comprimento de arco** se, e somente se, para todo $t \in I$, tem-se que $|\alpha'(t)| = 1$.

A proposição seguinte nos diz que toda curva regular pode ser reparametrizada por comprimento de arco. Vejamos.

Proposição 1.14 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada por comprimento de arco.

Assim, a aplicação β , dessa proposição, é denominada reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ denomina-se **curvatura** de α em s . Quando $k(s) \neq 0$, os vetores $n(s) = \alpha''(s)/k(s)$ e $b(s) = t(s) \times n(s)$, onde $t(s) = \alpha'(s)$, denominam-se **normal** e **binormal**, respectivamente, de α em s . Já o número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é denominado de **torção**, também, de α em s . Os vetores $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ constituem uma base ortonormal (o **Triedro de Frenet**) em $\mathbb{R}^3$ e satisfazem as equações

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) = \tau(s)n(s) \end{cases} \quad (1.3)$$

chamadas **Fórmulas de Frenet**.

O teorema seguinte, também conhecido como **Teorema Fundamental das Curvas**, afirma que uma curva regular em $\mathbb{R}^3$ tem seu comportamento local completamente descrito quando conhecemos os valores de τ e k .

Teorema 1.15 *Dadas as funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, com $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe a menos de movimentos rígidos uma única curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco s , onde $k(s)$ e $\tau(s)$ são a curvatura e a torção, respectivamente, de α .*

Observação 1.16 *Um movimento rígido em $\mathbb{R}^3$ é o resultado da composição de uma translação com uma transformação ortogonal de determinante positivo (isso quer dizer que o movimento rígido preserva a orientação).*

1.3 Superfícies

Nesta seção apresentamos algumas das propriedades de superfícies regulares. Para isso, adotamos um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z de $\mathbb{R}^3$ e consideremos uma aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ nas variáveis u e v de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $(u, v) \in U$, $X(u, v)$ determina um ponto de $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.17 Diz-se que um subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** quando for possível definir uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, na vizinhança V de cada ponto $p \in S$, tal que

1. X é diferenciável. Isto significa que suas funções coordenadas têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$.
2. X é um homeomorfismo. Com isso, dizemos que X é contínua e que sua inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ é, também, contínua.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Veja na imagem abaixo.

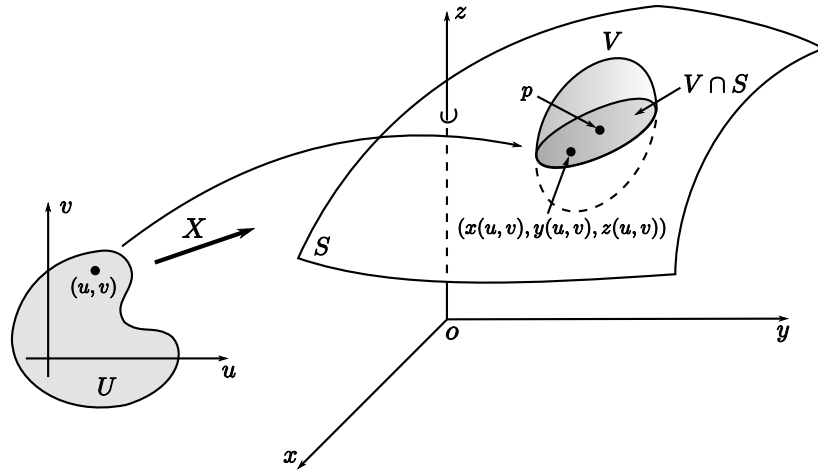


Figura 1.1: Superfície Regular

Na Definição (1.17), a palavra diferenciável significa, no contexto da geometria diferencial, que a aplicação X é infinitamente diferenciável (classe C^∞). A aplicação X e a vizinhança $V \cap S$ são denominadas, respectivamente, de **parametrização** e **vizinhança coordenada**.

Definição 1.18 Seja a superfície regular S , com parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, e um ponto $p \in S$. Dizemos que um vetor $w \in \mathbb{R}^3$ é um **vetor tangente** a S em p , quando $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva sobre S , tal que $X(u(t_0), v(t_0)) = p$.

Sejam as coordenadas $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dado um ponto $q = (u_0, v_0)$, a matriz

$$JX_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

é a **matriz jacobiana** da aplicação $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. De fato, considere as bases canônicas $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\{f_1, f_2, f_3\} \subset \mathbb{R}^3$. O vetor e_1 é tangente à curva $u \mapsto (u, v_0)$ cuja imagem por X é a curva

$$u \mapsto (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Esta última curva (chamada curva coordenada $v = v_0$) está em S e tem em $X(q)$ o vetor tangente dado por

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = X_u,$$

onde as derivadas são calculadas em (u_0, v_0) e um vetor é indicado pelas suas coordenadas na base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Por definição de diferencial,

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = X_u.$$

Analogamente, usando a curva coordenada $u = u_0$ (imagem por X da curva $v \mapsto (u_0, v)$), obtemos

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = X_v.$$

Considere uma superfície regular S com parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Para todo $p \in S$, a Condição 3 na Definição (1.17), sugere a existência de um plano tangente às curvas coordenadas de S , que passam por p . A proposição seguinte mostra que isso de fato acontece.

Proposição 1.19 *O subespaço vetorial $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ de dimensão dois coincide com o conjunto de vetores tangentes a S em X_q para qualquer $q \in U$, onde S é uma superfície regular com parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$.*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que $dX_q(\mathbb{R}^2)$ tem dimensão dois. Para isso denotemos o núcleo de dX_q por $\mathcal{N}(dX_q)$. Pela Condição 3 da Definição (1.17), dX_q é injetiva. Então, $v \in \mathcal{N}(dX_q)$ implica que $dX_q(v) = 0 = dX_q(0)$, isto é, $v = 0$, logo

$\mathcal{N}(dX_q) = \{0\}$. Segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que

$$\dim \mathcal{N}(dX_q) + \dim dX_q(\mathbb{R}^2) = \dim \mathbb{R}^2,$$

onde, $\dim dX_q(\mathbb{R}^2) = 2$. Seja $w \in T_{X_q}S$, então $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ com $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(t_0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} (X(u(t), v(t))) \right|_{t=t_0} \\ &= X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0), \end{aligned}$$

isto é, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v em (u_0, v_0) .

Reciprocamente, seja $w \in dX_q(\mathbb{R}^2)$, onde

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

então existe uma curva $\alpha(t) \subset S$, tal que $(u'(0), v'(0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(t_0) = w$. De fato, basta considerar

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $u(t) = u_0 + at$ e $v(t) = v_0 + bt$. ■

Denominamos o conjunto de vetores tangentes, pertencentes ao subespaço vetorial $dX_q(\mathbb{R}^2)$ determinado na Proposição (1.19), de **plano tangente** a S em p , denotado por T_pS , cuja base associada em relação à parametrização X é dada por $\{X_u, X_v\}$.

Definição 1.20 *Seja S uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. A cada plano tangente T_pS está associado um par de vetores unitários, em $\mathbb{R}^3$, e normais a T_pS ; denominados de **vetores normais unitários** em p . A reta que passa por p na direção de um desses vetores normais unitários é chamada a **reta normal** em p .*

Para o tratamento de problemas que envolvam noções de métrica e deslocamento sobre uma superfície regular temos as seguintes definições.

Definição 1.21 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular com parametrização dada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, e $T_p S$ um plano tangente a S no ponto p . Denominamos a forma quadrática*

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto I_p(w) = \langle w, w \rangle_p \end{aligned} \quad (1.4)$$

de **primeira forma fundamental** da superfície S no ponto $p \in S$.

A igualdade em (1.4), da primeira forma fundamental, é a maneira pela qual a superfície regular S herda o produto interno natural do $\mathbb{R}^3$. Além disso, em relação à base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$, podemos escrever a igualdade em (1.4) como

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \quad (1.5)$$

onde as funções E , F e G são dadas por

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle \quad (1.5a)$$

diferenciáveis, na vizinhança coordenada correspondente à $X(u, v)$, são os **Coefficientes da Primeira Forma Fundamental**. De fato, considere um vetor $w \in T_p S$, uma curva regular $\gamma(t)$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$. E, também, considere a curva

$$\begin{aligned} \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \beta(t) = (u(t), v(t)), \end{aligned}$$

tal que, $\beta = X^{-1} \circ \gamma$, de sorte que, $\beta(0) = q$, com $X(q) = p$.

Notemos que, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= X'(\beta(t))\beta'(t) \\ &= X_u(\beta(t))u'(t) + X_v(\beta(t))v'(t), \end{aligned}$$

onde, $\beta(t) = (u'(t), v'(t))$. Assim, pela Definição (1.5)

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle w, w \rangle_p = \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle_{\gamma(0)} \\ &= \langle X_u(\beta(0))u'(0) + X_v(\beta(0))v'(0), X_u(\beta(0))u'(0) + X_v(\beta(0))v'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle u'v' + \langle X_v, X_v \rangle (v')^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2.$$

A fim de determinarmos vetores normais unitários em cada ponto $q \in X(U)$ de uma superfície regular S , defina a seguinte aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} N : X(U) \subset S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ q &\longmapsto N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q), \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização de S em p .

Definição 1.22 *Dados um conjunto aberto V em uma superfície regular S e uma aplicação diferenciável $N : V \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$ como em (1.6). Diz-se que N é um **campo diferenciável de vetores normais unitários** em V .*

Definição 1.23 *Uma superfície regular S é dita **orientável** quando pode ser coberta por uma família de vizinhanças coordenadas, de tal forma que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma **orientação** de S , e, neste caso dizemos que a superfície S é **orientada**.*

Proposição 1.24 *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S .*

Uma superfície regular S que admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda sua totalidade é **orientável**. A escolha de um campo N é uma **orientação** de S .

Definição 1.25 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow S^2$ é denominada **Aplicação Normal de Gauss**, onde*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é a esfera unitária.

Vejamos no gráfico seguinte

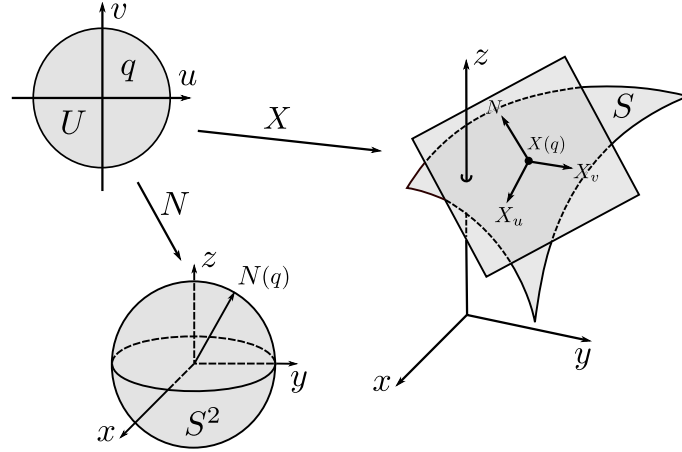


Figura 1.2: Aplicação Normal de Gauss

Com isso, a Definição (1.25) quer dizer que a aplicação normal de Gauss é a translação da origem do campo N para a origem de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $N(q)$ é o ponto final da translação do vetor normal em q .

A diferencial $dN : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é linear e auto-adjunta.

Definição 1.26 A forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \quad (1.7)$$

é chamada de **Segunda Forma Fundamental** de S em p .

Considere uma superfície S com parametrização em $p \in S$ dada por

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v). \end{aligned} \quad (1.8)$$

E, também, defina a seguinte curva parametrizada em S

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto \alpha(t) = X(u(t), v(t)), \end{aligned} \quad (1.9)$$

com $\alpha(0) = p$. Segue que, no ponto p , a curva $\alpha(t)$ tem vetor tangente expresso por

$$\alpha' = X_u u' + X_v v' \quad (1.10)$$

e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'. \quad (1.11)$$

Por outro lado, em relação à base $\{X_u, X_v\}$, escrevemos a expressão da segunda forma fundamental da seguinte maneira

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - (\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle) u' v' - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2. \end{aligned}$$

Como, $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$, derivando em relação a u e v , obtemos $e = -\langle N_u, X_u \rangle$, $f = -(\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle)$ e $g = -\langle N_v, X_v \rangle$. Então, podemos escrever a Equação (1.7) como segue

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2 \quad (1.11a)$$

onde e, f , e g são os **coeficientes** da segunda forma fundamental.

Proposição 1.27 *A matriz da aplicação $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ na direção de um vetor $w \in T_p S$, em relação à base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$, é dada por*

$$dN = \begin{bmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{bmatrix}$$

onde “ E, F, G ” e “ e, f, g ” são, respectivamente, os coeficiente da primeira e segunda formas fundamentais de S em p .

Demonstração: No ponto $p \in S$, considere a parametrização de S e a curva parametrizada dadas, respectivamente, em (1.8) e (1.9). Afirmamos que, na base $\{X_u, X_v\}$, a diferencial da aplicação N na direção de um vetor $w \in T_p S$ tem matriz

$$dN = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

não necessariamente simétrica. De fato, como $N_u, N_v \in T_p S$ em (1.11), podemos escrever $N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$ e $N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$. Tomando $w = \alpha'$ em (1.18), então

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v, \end{aligned}$$

isto é,

$$dN(\alpha') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} \implies dN \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$dN = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Além disso, para obtermos os valores de cada a_{ij} em relação aos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, procedemos como segue.

Primeiramente escrevemos os coeficientes da segunda forma fundamental em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental. Vejamos.

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{21}\langle X_v, X_u \rangle \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}\langle X_u, X_u \rangle + a_{22}\langle X_v, X_u \rangle \\ -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}\langle X_u, X_v \rangle + a_{21}\langle X_v, X_v \rangle \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}\langle X_u, X_v \rangle + a_{22}\langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \tag{1.12}$$

Mas, pela primeira forma fundamental, temos que $\langle X_u, X_u \rangle = E$, $\langle X_u, X_v \rangle = F$ e $\langle X_v, X_v \rangle = G$, então as igualdades em (1.12) se reduzem a:

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= a_{12}E + a_{22}F \\ -f &= a_{11}F + a_{21}G \\ -g &= a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned} \tag{1.13}$$

A forma matricial, das relações em (1.13) é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}E + a_{21}F & a_{12}E + a_{22}F \\ a_{11}F + a_{21}G & a_{12}F + a_{22}G \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}.$$

Para encontrarmos a matriz $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}$, devemos fazer

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} (-1)^2 \det[G] & (-1)^3 \det[F] \\ (-1)^3 \det[F] & (-1)^4 \det[E] \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

que, na verdade, são as expressões para os coeficientes de $[a_{ij}]$ da matriz de dN na base $\{X_u, X_v\}$. ■

Considere uma curva regular C com vetor normal n , contida na superfície regular S com vetor normal N em p , que passa pelo ponto $p \in S$, onde k é sua curvatura e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$.

Definição 1.28 *Seja S uma superfície parametrizada regular e $p \in S$. A **função curvatura normal** em p é uma aplicação $k_n : T_p S \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa, para cada vetor $w \in T_p S \setminus \{0\}$, um número*

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}.$$

Segue dessa definição que: se $w \in T_p S \setminus \{0\}$, então $k_n(\lambda w) = k_n(w)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ em p . De fato, seja $w = aX_u + bX_v$, onde $(a, b) \neq (0, 0)$. Denotando por e, f, g os coeficientes da segunda forma fundamental em $p \in S$, temos

$$\begin{aligned} k_n(\lambda w) &= \frac{II_p(\lambda w)}{I_p(\lambda w)} \\ &= \frac{a^2e + 2abf + b^2g}{\langle w, w \rangle} \\ &= k_n(w). \end{aligned}$$

O fato acima nos permite falar em *curvatura normal ao longo de uma dada direção tangente à superfície em p* .

Agora, vejamos a interpretação geométrica da curvatura normal e da segunda forma quadrática. Sejam S uma superfície regular de parametrização dada pela aplicação $X : U \rightarrow S$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, w um vetor unitário de $T_p S$ e $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva regular em S , parametrizada pelo comprimento de arco s , tal que $N(s)$ é a restrição do vetor normal N à curva α e $\alpha'(s_0) = w$. Se a curvatura de α em s_0 é não nula, então

$$\begin{aligned} k_n(w) &= II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle \\ &= -\langle N'(s_0), \alpha'(s_0) \rangle = \langle N(s_0), \alpha''(s_0) \rangle \\ &= \langle N(u(s_0), v(s_0)), \alpha''(s_0) \rangle \\ &= k(s_0) \langle N(u(s_0), v(s_0)), n(s_0) \rangle \\ &= k(s_0) \cos \theta, \end{aligned} \tag{1.14}$$

onde $n(s_0)$ é o vetor normal a α em s_0 , θ o ângulo formado pelos vetores $n(s_0)$ e $N(s_0)$, e, $k(s_0) \neq 0$ é a curvatura de α . Isso significa que k_n é o comprimento da projeção do vetor aceleração na direção do vetor normal N em p , com um sinal dada pela orientação N de S em p .

Como $II_q(w)$ e $k_n(w)$ não dependem da curva α escolhida, podemos aplicar a relação (1.14) para a curva mais conveniente formada pela interseção do plano normal com a superfície S . Esta curva é denominada **secção normal** de S em p segundo o vetor unitário $w \in T_p S$, que é obtida pela interseção de S , em uma vizinhança de p , com o plano contendo os vetores w e $N(p)$. Nestas condições, a seção normal é uma curva regular plana definida por $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\alpha(s_0) = p$ e $\alpha'(s_0) = w$. Se $k(s_0) = 0$, isto é, $\alpha''(s_0) = 0$, então $k_n(w) = II_p(w) = 0$. Se $k(s_0) > 0$, então o vetor normal $n(s_0) = \pm N(p)$ e, portanto, segue-se de (1.14) que

$$k_n(w) = II_p(w) = \pm k(s_0).$$

Portanto, concluímos que, se w é um vetor unitário tangente à superfície em p , então $|k_n(w)|$ é igual à curvatura da secção normal de S no ponto p , segundo $w = \alpha'(s_0)$.

Proposição 1.29 *Dada uma aplicação linear auto-adjunta $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, existe uma base ortonormal $\{u, v\}$ de $T_p S$ tal que $dN_p(u) = -k_1 u$ e $dN_p(v) = -k_2 v$. Na base $\{u, v\}$, a matriz de dN_p é diagonal e os termos k_1 e k_2 ($k_1 \geq k_2$) da diagonal são, respectivamente, o máximo e o mínimo da forma quadrática $II_p(w) : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ quando restrita ao círculo unitário em $T_p S$.*

Na verdade, a Proposição (1.29) mostra que os números k_1 e k_2 , autovalores da aplicação linear auto-adjunta dN_p , são os valores extremos da curvatura normal k_n em p , com $n = 1, 2$. Além disso, a matriz

$$\begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

é a matriz diagonal de dN_p .

Definição 1.30 *Dado um ponto p sobre uma superfície regular S e seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. A curvatura **Gaussiana** é o número*

$$K = k_1 k_2 \quad (1.16)$$

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais de S em p .

Já que o determinante e o traço da matriz (1.15) não dependem da base escolhida, utilizando a Proposição (1.27), para a curvatura Gaussiana, temos:

$$K = \det dN = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Ou seja,

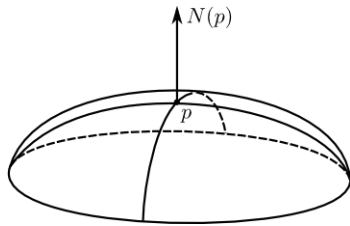
$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1.18)$$

Segue da Definição (1.30) que os pontos sobre uma superfície regular são classificados da seguinte maneira.

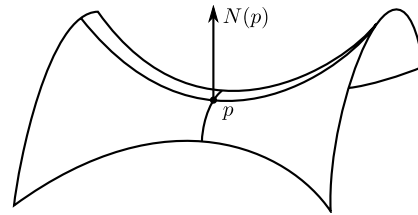
Definição 1.31 Um ponto p de uma superfície regular S com orientação N , onde k_1 e k_2 são curvaturas principais da Equação (1.16) é denominado:

1. **Elíptico** quando $K > 0$, isto é, k_1 e k_2 possuem sinais iguais.
2. **Hiperbólico**, sempre que $K < 0$, isto é, k_1 e k_2 possuem sinais diferentes.
3. **Parabólico** quando $K = 0$, com $dN_p \neq 0$, ou seja, ou $k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$.
4. **Planar**, sempre que $K = 0$, com $dN_p = 0$, isto é, $k_1 = k_2 = 0$.

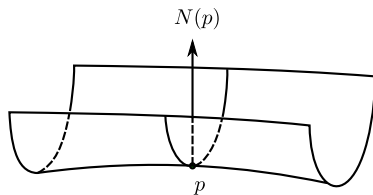
As figuras a seguir ilustram graficamente as classificações do ponto p , sobre uma superfície regular S , apresentadas na Definição (1.31). Vejamos.



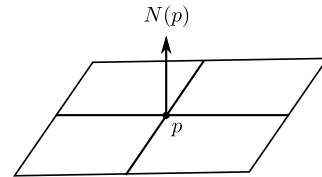
(a) p é ponto elíptico.



(b) p é ponto hiperbólico.



(c) p é ponto parabólico.



(d) p é ponto Planar.

Dentre os tipos de pontos em uma superfície regular orientada, classificados pela Definição (1.31), os que têm maior relevância neste trabalho são os hiperbólicos.

Proposição 1.32 (Olinde Rodrigues) *Uma condição necessária e suficiente para que uma curva regular e conexa C em S seja uma linha de curvatura de S é que $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$, para qualquer parametrização $\alpha(t)$ de C , onde $N(t) = N \circ \alpha(t)$ e $\alpha(t)$ é uma função diferenciável de t . Nesse caso, $-\lambda(t)$ é a curvatura (principal) segundo $\alpha'(t)$.*

Definição 1.33 *Denominamos de **direção assintótica** de S em p a uma direção de $T_p S$ para a qual a curvatura normal é nula. Uma **curva assintótica** é uma curva convexa e regular $C \subset S$ tal que, para cada $p \in C$, a reta tangente é uma direção assintótica.*

Proposição 1.34 (Fórmula de Euler) *Considere uma superfície regular S parametrizada pela aplicação $X : U \rightarrow S$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Sejam k_1 , k_2 e w_1 , w_2 , respectivamente, curvaturas principais e vetores principais de S no ponto $p = X(u_0, v_0)$. Para todo vetor $w \in T_p S$, tal que $|w| = 1$, se*

$$w = w_1 \cos \theta + w_2 \sin \theta$$

então

$$k_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \quad (1.19)$$

Demonstração: De fato, como $\{w_1, w_2\}$ é, pela Prop. (1.29), uma base ortonormal de $T_p S$, para $w = w_1 \cos \theta + w_2 \sin \theta$, temos

$$\begin{aligned} k_n(w) &= II_q(w) = -\langle dN_q(w), w \rangle \\ &= -\langle dN_q(w_1 \cos \theta + w_2 \sin \theta), w_1 \cos \theta + w_2 \sin \theta \rangle \\ &= -\langle dN_q(w_1) \cos \theta + dN_q(w_2) \sin \theta, w_1 \cos \theta + w_2 \sin \theta \rangle \\ &= -\langle -k_1 w_1 \cos \theta - k_2 w_2 \sin \theta, w_1 \cos \theta + w_2 \sin \theta \rangle \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} k_n(w) &= \langle k_1 w_1 \cos \theta, w_1 \cos \theta \rangle + \langle k_1 w_1 \cos \theta, w_2 \sin \theta \rangle \\ &\quad + \langle k_2 w_2 \sin \theta, w_1 \cos \theta \rangle + \langle k_2 w_2 \sin \theta, w_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \langle w_1, w_1 \rangle \cos^2 \theta + (k_1 + k_2) \langle w_1, w_2 \rangle \cos \theta \sin \theta + k_2 \langle w_2, w_2 \rangle \sin^2 \theta \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Pois, pelo fato de que os vetores $\{w_1, w_2\}$ formam uma base ortonormal de $T_p S$, $\langle w_1, w_1 \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1$ e $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$. ■

Em outras palavras, a Proposição (1.34), nos diz que o conhecimento das curvaturas principais em p permite calcular com certa facilidade a curvatura normal segundo uma direção dada de $T_p S$.

Proposição 1.35 *Seja K a curvatura Gaussiana da superfície S em p . Se p é um ponto hiperbólico, então p tem exatamente duas direções assintóticas.*

Demonstração: Considere a expressão da fórmula de Euler em (1.19), ou seja,

$$k_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

onde, em p , k_1 e k_2 são as curvatura principais, $w = u \cos \theta + v \sin \theta$ é o vetor tangente unitário, e, u e v são os vetores principais. Pela Definição (1.33), as direções assintóticas são determinadas por θ quando $k_n(w) = 0$. Sendo p um ponto hiperbólico, segue que $K(p) < 0$, isto é, k_1 e k_2 têm sinais opostos. Pela Definição (1.33), devemos resolver a equação $k_n(w) = 0$, isto é, devemos encontrar os valores de θ que anulam a equação (1.19). Suponha $\cos \theta \neq 0$, pois não ocorre $\sin \theta = \cos \theta = 0$. Levando em conta que $k_1 \neq 0$ e $k_2 \neq 0$, a equação

$$k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = 0 \tag{1.20}$$

pode ser reescrita na forma

$$\tan^2 \theta = -\frac{k_1}{k_2}$$

onde $\theta = \pm \arctg \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$ é a solução da equação $k_n(w) = 0$. Como a equação em (1.20) tem duas soluções, existem exatamente duas direções assintóticas em p . ■

Proposição 1.36 *Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $t \in \mathbb{R}$, uma curva regular de uma superfície S . Então, α é uma linha assintótica de S se, e somente se, as funções $u(t)$, $v(t)$ satisfazem a equação*

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0 \tag{1.21}$$

onde e , f , g são os coeficientes da segunda forma quadrática de S em $(u(t), v(t))$.

Proposição 1.37 *Seja S uma superfície regular com parametrização $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Se $p \in S$ é um ponto hiperbólico, então existe uma vizinhança V , contida em U , de p , de pontos hiperbólicos tal que, para todo $q \in V$, existem duas linhas assintóticas, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, em q .*

Proposição 1.38 *A fim de que as curvas coordenadas de uma parametrização na vizinhança de um ponto hiperbólico sejam curvas assintóticas é necessário e suficiente que $e = g = 0$.*

Demonstração: Dizemos que uma curva regular e conexa C em uma vizinhança coordenada de S é assintótica quando para qualquer parametrização $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ de C temos $II_p(\alpha'(t)) = 0$, para todo $t \in I$; isto é, pela Proposição (1.36), quando

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \quad t \in I \quad (1.22)$$

Suponha que as curvas coordenadas $\lambda(t) = X(c_1, v(t))$ e $\mu(t) = X(u(t), c_2)$ sejam curvas assintóticas. Pelo fato de que $\lambda(t)$ e $\mu(t)$ são curvas regulares, segue que

$$\lambda'(t) \neq 0 \text{ e } \mu'(t) \neq 0 \Rightarrow X_u u'(t) + X_v v'(t) \neq 0.$$

Como

$$u(t) = c_1 \Rightarrow u'(t) = 0 \Rightarrow X_v v'(t) \neq 0 \Rightarrow v'(t) \neq 0$$

e

$$v(t) = c_2 \Rightarrow v'(t) = 0 \Rightarrow X_u u'(t) \neq 0 \Rightarrow u'(t) \neq 0,$$

tem-se, respectivamente, pela Equação (1.22), que

$$k_n(\lambda'(t)) = 0 \Rightarrow e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0 \Rightarrow g(v')^2 = 0 \Rightarrow g = 0$$

e

$$k_n(\mu'(t)) = 0 \Rightarrow e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0 \Rightarrow e(u')^2 = 0 \Rightarrow e = 0.$$

Reciprocamente, suponha $e = g = 0$. Como estamos na vizinhança de um ponto hiperbólico, pela Equação (1.18), temos que

$$K < 0 \Rightarrow eg - f^2 < 0 \Rightarrow -f^2 < 0 \Rightarrow f^2 > 0 \Rightarrow f \neq 0.$$

Assim, considerando as curvas coordenadas $\lambda(t) = X(c_1, v(t))$ e $\mu(t) = X(u(t), c_2)$, segue que

$$k_n(\lambda'(t)) = k_n(\mu'(t)) = 2fu'v' = 0,$$

pois $u'(t) = 0$ e $v'(t) \neq 0$ ou $u'(t) \neq 0$ e $v'(t) = 0$. Então, as curvas coordenadas $\lambda(t)$ e $\mu(t)$ são linhas assintóticas. ■

Além disso, a expressão em (1.22) é denominada **equação diferencial da linhas assintóticas**.

1.4 Campos Vetoriais

Apresentamos nesta seção alguns conceitos de campos vetoriais no contexto das superfícies regulares com orientação.

Definição 1.39 *Uma aplicação definida por*

$$\begin{aligned} w : V \subset S &\longrightarrow T_p S \\ p &\longmapsto w(p) \end{aligned}$$

*denomina-se **campo de vetores (tangentes)** no conjunto aberto $V \subset S$ de uma superfície regular S . Quando, para alguma parametrização $X(u, v)$ em $p \in V$, as funções $a(u, v)$ e $b(u, v)$, dadas por*

$$w(p) = a(u, v)X_u + b(u, v)X_v$$

*são diferenciáveis em $p \in V$, na base $\{X_u, X_v\}$, dizemos que o campo de vetores w é **diferenciável** no ponto $p \in V$. Além disso, w é diferenciável em todo o aberto V quando é diferenciável em todos os pontos de V .*

Dizemos que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ sobre uma superfície S , parametrizada por $X : U \rightarrow S$, é uma **trajetória** de um campo de vetores tangentes w , definido em um aberto $V \subset S$, quando $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$ para $t \in I$.

Definição 1.40 *Sejam $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em um aberto $V \subset S$ de uma superfície regular S e $W \subset V$ uma vizinhança de $p \in V$ tal que $df_q \neq 0$ para todo $q \in W$. Dizemos que a f é uma **integral primeira (local)** de w quando ela é constante ao longo de cada trajetória de w na vizinhança W de p .*

Um **campo de direções** em um conjunto aberto U de uma superfície regular S é uma aplicação r que associa a cada ponto $p \in U$ uma reta em $T_p S$ que passa por p .

Definição 1.41 Uma curva regular conexa $C \subset V$ é uma **curva integral** de um campo de direções r definido em um aberto $V \subset S$ de uma superfície regular S , quando $r(p)$ é a reta tangente a C em p para todo $p \in C$.

Na linguagem das equações diferenciais, as curvas integrais são os traços das trajetórias dos campos de vetores $(b, -a)$ associados ao campo de direções representados pelas equações

$$a(u, v) \frac{du}{dt} + b(u, v) \frac{dv}{dt} = 0$$

Teorema 1.42 Sejam w_1 e w_2 campos de vetores linearmente independentes em algum ponto $p \in U$ de um conjunto aberto $U \subset S$. Então pode-se parametrizar uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que para cada $q \in V$ as curvas coordenadas – dessa parametrização – que passam por q são tangentes às curvas integrais determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$.

Demonstração: Seja W uma vizinhança de p onde as integrais primeiras f_1 e f_2 de w_1 e w_2 , respectivamente, estejam definidas. Defina a aplicação $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\varphi(q) = (f_1(q), f_2(q)), \quad q \in W$$

Como f_1 é constante ao longo das trajetórias de w_1 e $(df_1) \neq 0$, temos em p

$$d\varphi_p(w_1) = ((df_1)_p(w_1), (df_2)_p(w_1)) = (0, a)$$

onde $a = (df_2)_p(w_1) \neq 0$, pois w_1 e w_2 são linearmente independentes. Analogamente,

$$d\varphi_p(w_2) = (b, 0)$$

onde $b = (df_1)_p(w_2) \neq 0$. Segue-se que $d\varphi_p \neq 0$, e portanto que φ é um difeomorfismo local. Logo, existe uma vizinhança $\bar{U} \subset \mathbb{R}^2$ de $\varphi(p)$ que é levada difeomorficamente por $X = \varphi^{-1}$ em uma vizinhança $V = X(\bar{U})$ de p ; isto é, X é uma parametrização de S em p , cujas curvas coordenadas

$$f_1(q) = \text{const.} \quad f_2(q) = \text{const.}$$

são tangentes em q às curvas determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$, respectivamente. ■

Corolário 1.43 Dados dois campos de direções r e $\bar{r}$ em um aberto $U \subset S$ tais que em $p \in U$, $r(p) \neq \bar{r}(p)$, existe uma parametrização X em uma vizinhança de p tal que as curvas coordenadas de X são as curvas integrais de r e $\bar{r}$.

O corolário a seguir mostra que existe uma parametrização ortogonal em qualquer ponto de uma superfície regular.

Corolário 1.44 *Para todo $p \in S$ existe uma parametrização $X(u, v)$ em uma vizinhança V de p tal que as curvas coordenadas $u = \text{const.}$ e $v = \text{const.}$ intersectam-se ortogonalmente para cada $q \in V$ (diz-se que uma tal X é uma **parametrização ortogonal**).*

Demonstração: Considere uma parametrização arbitrária $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow S$ em p , e defina dois campos de vetores

$$w_1 = \bar{X}_{\bar{u}} \quad \text{e} \quad w_2 = -\frac{\bar{F}}{\bar{E}}\bar{X}_{\bar{u}} + \bar{X}_{\bar{v}}$$

onde $\bar{E}$ e $\bar{F}$ são os coeficientes da primeira forma fundamental em $\bar{X}$. Para verificarmos a ortogonalidade de $w_1(q)$ e $w_2(q)$, para todo $q \in \bar{X}(\bar{U})$ façamos

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle &= \langle \bar{X}_{\bar{u}}, -\frac{\bar{F}}{\bar{E}}\bar{X}_{\bar{u}} + \bar{X}_{\bar{v}} \rangle \\ &= \langle \bar{X}_{\bar{u}}, -\frac{\bar{F}}{\bar{E}}\bar{X}_{\bar{u}} \rangle + \langle \bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}} \rangle \\ &= -\frac{\bar{F}}{\bar{E}}\langle \bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{u}} \rangle + \langle \bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}} \rangle \\ &= -\bar{F} + \bar{F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Obtemos assim dois campos de vetores ortogonais. Segue-se que as curvas integrais determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$ são ortogonais na vizinhança $\bar{U}$ de p . Assim, pelo teorema (1.42), nessa vizinhança, a parametrização $\bar{X}$ de p é tal que, para cada $q \in \bar{U}$, suas curvas coordenadas que passam por q são ortogonais às curvas integrais determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$. Logo, as curvas coordenadas de $\bar{X}$ são ortogonais. ■

Observação 1.45 *Duas curvas são ortogonais em um ponto quando suas tangentes são ortogonais nesse ponto.*

O corolário a seguir apresenta uma condição para a existência de coordenadas determinadas pelas direções assintóticas.

Corolário 1.46 *Seja $p \in S$ um ponto hiperbólico de S . Então é possível parametrizar uma vizinhança de p tal que as curvas coordenadas desta parametrização sejam as curvas (linhas) assintóticas de S .*

Demonstração: Como as curvas assintóticas são soluções da equação

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \quad (1.23)$$

e em uma vizinhança de um ponto hiperbólico, temos $eg - f^2 < 0$. Considere uma rotação do plano uv , de maneira que $e(p) > 0$. Podemos então decompor o lado esquerdo da equação acima em dois fatores lineares distintos, o que nos dá

$$(Au' + Bv')(Au' + Dv') = 0, \quad (1.24)$$

onde os coeficientes são determinados por

$$\begin{cases} A^2 = e \\ A(B + D) = 2f \\ BD = g. \end{cases} \quad (1.25)$$

Esse sistema de equações tem duas soluções reais. De fato, considerando a primeira equação do sistema (1.25), temos que

$$A^2 = e \implies A = \sqrt{e}$$

Daí, substituindo $A = \sqrt{e}$ na segunda equação do sistema (1.25), obtemos

$$A(B + D) = 2f \implies \sqrt{e}(B + D) = 2f \implies B = \frac{2f}{\sqrt{e}} - D$$

Agora, substituindo esse valor encontrado para B na terceira equação do sistema (1.25), isto é,

$$BD = g \implies \left(\frac{2f}{\sqrt{e}} - D \right) D = g$$

Logo, encontramos a equação

$$D^2 - \frac{2f}{\sqrt{e}}D + g = 0$$

que tem soluções reais dadas por

$$D = \frac{f}{\sqrt{e}} \pm \sqrt{\frac{f^2 - eg}{e}}$$

onde $\frac{f^2 - eg}{e} > 0$, pois $eg - f^2 < 0$. Assim, a equação (1.24) nos dá o seguinte sistema de equações diferenciáveis

$$\begin{aligned} Au' + Bv' &= 0 \\ Au' + Dv' &= 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Cada uma dessas equações determina um campo diferenciável de direções (por exemplo, a primeira equação de (1.26) determina a direção que contém o vetor não-nulo $(B, -A)$), e em cada ponto da vizinhança considerada as direções dadas pelas equações do sistema são distintas. Aplicando o Corolário (1.43), vemos que é possível parametrizar uma vizinhança de p tal que as curvas coordenadas sejam curvas integrais do sistema (1.26). Mais precisamente, as curvas coordenadas de (1.26) são soluções da equação. (1.23); logo são linhas assintóticas. ■

Capítulo 2

Equações de Compatibilidade e Curvas Geodésicas

Neste capítulo, em consonância com [11], tratamos de definir parametrização de superfícies por malha de Chebyshev generalizada, escrever as expressões da primeira e segunda formas fundamentais, e, as equações de compatibilidade para superfícies – parametrizada por linhas assintóticas – com curvatura Gaussiana negativa $K = -\frac{1}{\rho^2}$, onde ρ é uma função positiva em todo seu domínio.

2.1 Equações de Compatibilidade em Superfícies Parametrizadas Regulares

Considere uma superfícies regular orientada S e uma parametrização na orientação de S dada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Nesta seção estudaremos o triedro natural, dado pelos vetores X_u , X_v e N , associado a cada ponto de $X(U)$. Assim, podemos escrever as derivadas dos vetores X_u , X_v e N na base $\{X_u, X_v, N\}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\
X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\
X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N, \\
X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, \\
\left. \begin{aligned} N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v, \end{aligned} \right\} & \text{Equações de Weingarten}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde, já sabemos, da Equação (1.17) que

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \text{ e } a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Definição 2.1 *Os coeficientes Γ_{ij}^k , para $i, j, k \in \{1, 2\}$, são chamados de **Símbolos de Christoffel**.*

Os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores. De fato, como $X_{uv} = X_{vu}$, concluímos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. Tomando o produto interno dos vetores X_{uu} , X_{uv} , X_{vu} e X_{vv} por N , temos que

$$\begin{aligned}
\langle X_{uu}, N \rangle &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, N \rangle \\
&= \langle \Gamma_{11}^1 X_u, N \rangle + \langle \Gamma_{11}^2 X_v, N \rangle + \langle L_1 N, N \rangle \\
&= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, N \rangle + L_1 \langle N, N \rangle \\
&= L_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle X_{uv}, N \rangle &= \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, N \rangle \\
&= \Gamma_{12}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, N \rangle + L_2 \langle N, N \rangle \\
&= L_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle X_{vv}, N \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle X_u, N \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, N \rangle + L_3 \langle N, N \rangle \\
&= L_3.
\end{aligned}$$

Desses blocos de igualdades acima e do fato de que $e = \langle X_{uu}, N \rangle$, $f = \langle X_{uv}, N \rangle$ e $g = \langle X_{vv}, N \rangle$, temos, respectivamente, que $e = L_1$, $f = \bar{L}_2 = L_2$ e $g = L_3$. Onde e, f

e g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S .

Para determinarmos os símbolos de Christoffel, primeiramente, tomamos o produto interno dos vetores X_{uu} , X_{uv} , X_{vu} e X_{vv} por X_u e X_v , isto é,

$$\begin{aligned}\langle X_{uu}, X_u \rangle &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, X_u \rangle \\ &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u, X_u \rangle + \langle \Gamma_{11}^2 X_v, X_u \rangle + \langle L_1 N, X_u \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_u \rangle + L_1 \langle N, X_u \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle X_{uu}, X_v \rangle &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u, X_v \rangle + \langle \Gamma_{11}^2 X_v, X_v \rangle + \langle L_1 N, X_v \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_v \rangle + L_1 \langle N, X_v \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle X_{uv}, X_u \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, X_u \rangle + L_2 \langle N, X_u \rangle \\ &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F\end{aligned}$$

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G$$

$$\langle X_{vv}, X_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F$$

$$\langle X_{vv}, X_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G.$$

Derivando os coeficientes da primeira forma fundamental em relação às variáveis u e v , isto é, para

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle \text{ e } G = \langle X_v, X_v \rangle$$

segue que

$$\begin{aligned}E_u &= 2\langle X_{uu}, X_u \rangle \Rightarrow \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_u \\ E_v &= 2\langle X_{uv}, X_u \rangle \Rightarrow \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_v \\ G_u &= 2\langle X_{vu}, X_v \rangle \Rightarrow \langle X_{vu}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_u \\ G_v &= 2\langle X_{vv}, X_v \rangle \Rightarrow \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_u &= \langle X_{uu}, X_v \rangle + \frac{1}{2}E_v \Rightarrow \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \\
F_v &= \langle X_{vv}, X_u \rangle + \frac{1}{2}G_u \Rightarrow \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos os sistemas de equações

$$\begin{cases}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_u \\
\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \\
\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_v \\
\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_u \\
\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u \\
\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_v.
\end{cases} \quad (2.2)$$

Como $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{-1} \implies \Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{11}^2 &= \begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}E_u \\ F & F_u - \frac{1}{2}E_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{-1} \implies \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}$$

Analogamente, resolvemos o segundo e terceiro pares de equações dos sistemas (2.2). Logo, temos os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental E , F , G e de suas derivadas primeiras, ou seja

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v - FG_u}{2(EG - F^2)}
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Já vimos que as expressões das derivadas de X_u , X_v e N na base $\{X_u, X_v, N\}$ dependem apenas do conhecimento dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de S . Então, é razoável considerar uma relação entre esse coeficientes. De fato, considere as expressões

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v - (X_{uv})_u &= 0 \\
(X_{vv})_u - (X_{vu})_v &= 0.
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Substituindo os valores das derivadas de X_u , X_v e N , que se encontram em (2.1), nas expressões em (2.4), temos

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v - (X_{uv})_u &= (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N)_v - (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N)_u \\
&= (\Gamma_{11}^1 X_u)_v + (\Gamma_{11}^2 X_v)_v + (L_1 N)_v - (\Gamma_{12}^1 X_u)_u - (\Gamma_{12}^2 X_v)_u - (L_2 N)_u \\
&= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + (L_1)_v N + L_1 N_v \\
&\quad - (\Gamma_{12}^1)_u X_u - \Gamma_{12}^1 X_{uu} - (\Gamma_{12}^2)_u X_v - \Gamma_{12}^2 X_{vu} - (L_2)_u N - L_2 N_u \\
\\
(X_{vv})_u - (X_{vu})_v &= (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N)_u - (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N)_v \\
&= (\Gamma_{22}^1 X_u)_u + (\Gamma_{22}^2 X_v)_u + (L_3 N)_u - (\Gamma_{21}^1 X_u)_v - (\Gamma_{21}^2 X_v)_v - (\bar{L}_2 N)_v \\
&= (\Gamma_{22}^1)_u X_u + \Gamma_{22}^1 X_{uu} + (\Gamma_{22}^2)_u X_v + \Gamma_{22}^2 X_{vu} + (L_3)_u N + L_3 N_u \\
&\quad - (\Gamma_{21}^1)_v X_u - \Gamma_{21}^1 X_{uv} - (\Gamma_{21}^2)_v X_v - \Gamma_{21}^2 X_{vv} - (\bar{L}_2)_v N - \bar{L}_2 N_v.
\end{aligned}$$

Substituindo, novamente, as derivadas X_{uu} , X_{uv} , X_{vu} , X_{vv} , N_u e N_v por suas, respectivas, combinações lineares em relação à base $\{X_u, X_v, N\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v - (X_{uv})_u &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 [\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N] + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 [\Gamma_{22}^1 X_u \\
&\quad + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N] + (L_1)_v N + L_1 [a_{12} X_u + a_{22} X_v] - (\Gamma_{12}^1)_u X_u \\
&\quad - \Gamma_{12}^1 [\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N] - (\Gamma_{12}^2)_u X_v - \Gamma_{12}^2 [\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v \\
&\quad + \bar{L}_2 N] - (L_2)_u N - L_2 [a_{11} X_u + a_{21} X_v] \\
\\
(X_{vv})_u - (X_{vu})_v &= (\Gamma_{22}^1)_u X_u + \Gamma_{22}^1 [\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N] + (\Gamma_{22}^2)_u X_v + \Gamma_{22}^2 [\Gamma_{21}^1 X_u \\
&\quad + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N] + (L_3)_u N + L_3 [a_{11} X_u + a_{21} X_v] - (\Gamma_{21}^1)_v X_u \\
&\quad - \Gamma_{21}^1 [\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N] - (\Gamma_{21}^2)_v X_v - \Gamma_{21}^2 [\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v \\
&\quad + L_3 N] - (\bar{L}_2)_v N - \bar{L}_2 [a_{12} X_u + a_{22} X_v].
\end{aligned}$$

Em seguida, aplicando distributividade, temos

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v - (X_{uv})_u &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 X_v + \Gamma_{11}^1 L_2 N + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 X_u \\
&\quad + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 X_v + \Gamma_{11}^2 L_3 N + (L_1)_v N + L_1 a_{12} X_u + L_1 a_{22} X_v - (\Gamma_{12}^1)_u X_u \\
&\quad - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 X_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 X_v - \Gamma_{12}^1 L_1 N - (\Gamma_{12}^2)_u X_v - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 X_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 X_v \\
&\quad - \Gamma_{12}^2 \bar{L}_2 N - (L_2)_u N - L_2 a_{11} X_u - L_2 a_{21} X_v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X_{vv})_u - (X_{vu})_v &= (\Gamma_{22}^1)_u X_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 X_v + \Gamma_{22}^1 L_1 N + (\Gamma_{22}^2)_u X_v + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 X_u \\
&\quad + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 X_v + \Gamma_{22}^2 \bar{L}_2 N + (L_3)_u N + L_3 a_{11} X_u + L_3 a_{21} X_v - (\Gamma_{21}^1)_v X_u \\
&\quad - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 X_u - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 X_v - \Gamma_{21}^1 L_2 N - (\Gamma_{21}^2)_v X_v - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 X_u - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 X_v \\
&\quad - \Gamma_{21}^2 L_3 N - (\bar{L}_2)_v N - \bar{L}_2 a_{12} X_u - \bar{L}_2 a_{22} X_v.
\end{aligned}$$

Agrupando as parcelas que possuem os fatores X_u , X_v , N e tendo em mente que $X_{uv} = X_{vu}$ implica $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. Então

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v - (X_{uv})_u &= [(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + L_1 a_{12} - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - L_2 a_{11}] X_u \\
&\quad + [\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L_1 a_{22} - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - L_2 a_{21}] X_v \\
&\quad + [\Gamma_{11}^1 L_2 + \Gamma_{11}^2 L_3 + (L_1)_v - \Gamma_{12}^1 L_1 - \Gamma_{12}^2 L_2 - (L_2)_u] N \\
(X_{vv})_u - (X_{vu})_v &= [(\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + L_3 a_{11} - (\Gamma_{21}^1)_v - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - L_2 a_{12}] X_u \\
&\quad + [\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{22}^2)_u + L_3 a_{21} - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{21}^2)_v - L_2 a_{22}] X_v \\
&\quad + [\Gamma_{22}^1 L_1 + \Gamma_{22}^2 L_2 + (L_3)_u - \Gamma_{21}^1 L_2 - \Gamma_{21}^2 L_3 - (L_2)_v] N.
\end{aligned}$$

Segue da independência linear dos vetores X_u , X_v e N que

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + L_2 a_{11} - L_1 a_{12} &= 0 \\
(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L_2 a_{21} - L_1 a_{22} &= 0 \\
\Gamma_{12}^1 L_1 + \Gamma_{12}^2 L_2 - \Gamma_{11}^1 L_2 - \Gamma_{11}^2 L_3 + (L_2)_u - (L_1)_v &= 0 \\
(\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{21}^1)_v + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + L_3 a_{11} - L_2 a_{12} &= 0 \\
(\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{21}^2)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 + L_3 a_{21} - L_2 a_{22} &= 0 \\
\Gamma_{22}^1 L_1 + \Gamma_{22}^2 L_2 - \Gamma_{21}^1 L_2 - \Gamma_{21}^2 L_3 + (L_3)_u - (L_2)_v &= 0.
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + f \frac{fF - eG}{EG - F^2} - e \frac{gF - fG}{EG - F^2} &= 0 \\
(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + f \frac{eF - fE}{EG - F^2} - e \frac{fF - gE}{EG - F^2} &= 0 \\
e \Gamma_{12}^1 + f \Gamma_{12}^2 - f \Gamma_{11}^1 - g \Gamma_{11}^2 + f_u - e_v &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{21}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + g \frac{fF - eG}{EG - F^2} - f \frac{gF - fG}{EG - F^2} = 0 \\
& (\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{21}^2)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 + g \frac{eF - fE}{EG - F^2} - f \frac{fF - gE}{EG - F^2} = 0 \\
& e\Gamma_{22}^1 + f\Gamma_{22}^2 - f\Gamma_{21}^1 - g\Gamma_{21}^2 + g_u - f_v = 0.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
& (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = KF \\
& (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -KE \\
& e\Gamma_{12}^1 + f\Gamma_{12}^2 - f\Gamma_{11}^1 - g\Gamma_{11}^2 = e_v - f_u, \\
& (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 = KG \\
& (\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 = -KF \\
& e\Gamma_{22}^1 + f\Gamma_{22}^2 - f\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{12}^2 = f_v - g_u.
\end{aligned}$$

Portando, obtemos as **Equações de Compatibilidade**:

$$\begin{array}{l} \text{Fórmula} \\ \text{de Gauss} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -KE = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{de Codazzi-} \\ \text{Mainardi} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

O próximo teorema é também conhecido como **Teorema Fundamental das Superfícies**.

Teorema 2.2 (Bonnet) *Sejam E, F, G, e, f, g funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $E > 0, G > 0$. Suponha que as funções dadas satisfaçam formalmente as equações de Compatibilidade e que $EG - F^2 > 0$. Então, para todo $q \in V$ existe uma vizinhança $U \subset V$ de q e um difeomorfismo $X : U \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que a superfície regular $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ tem E, F, G e e, f, g como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Além disso, se U é conexo e*

$$\bar{X} : U \rightarrow \bar{X}(U) \subset \mathbb{R}^3$$

é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe uma trans-

lação T e uma transformação ortogonal própria ρ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{X} = T \circ \rho \circ X$.

Em noutras palavras, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, satisfazendo as equações de compatibilidade, determinam uma superfície a menos de sua posição no espaço.

2.2 Curvas Geodésicas

Tratamos nesta seção de sistematizar alguns conceitos de geometria intrínseca. Para isso, começamos com o conceito de derivada covariante que é o análogo, para superfícies, da derivada usual de vetores no plano.

Definição 2.3 *Seja w um campo diferenciável de vetores (tangentes) em um conjunto aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Seja $y \in T_p S$, considere uma curva parametrizada*

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$, e seja $w(t)$ a restrição do campo de vetores w à curva α , $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. O vetor, denotado por

$$\frac{Dw}{dt}(0) \quad \text{ou} \quad D_y w(p),$$

*obtido pela projeção de $\frac{dw}{dt}(0)$ sobre o plano $T_p S$ é chamado a **derivada covariante** em p do campo de vetores w em relação ao vetor y .*

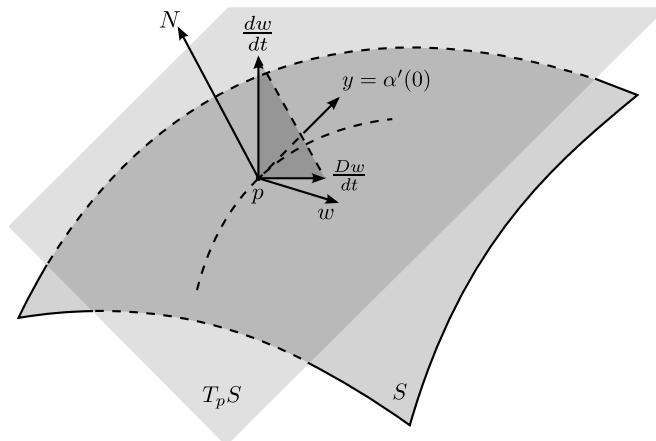


Figura 2.1

Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S . Um **campo de vetores tangentes w ao longo de α** é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um vetor $w(t) \in T_{\alpha(t)} S$.

Tomando uma curva $\alpha(t)$ em S como sendo a trajetória de um ponto que se move sobre a superfície, os vetores $\alpha'(t)$ e $\frac{D\alpha'}{dt}(t)$ representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração (derivada covariante) desse ponto sobre S .

Definição 2.4 Dada uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$, um campo de vetores w ao longo dessa curva é chamado **paralelo** quando $\frac{Dw}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.

A definição seguinte é consequência, dadas as condições iniciais, da unicidade do campo de vetores paralelo ao longo de uma curva parametrizada sobre uma superfície regular.

Definição 2.5 Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ para $t_0 \in I$. Considere w um campo paralelo ao longo de α , com $w(t_0) = w_0$; o vetor $w(t_1)$, para $t_1 \in I$ é chamado **transporte paralelo** de w_0 ao longo de α no ponto t_1 .

Definição 2.6 Uma curva parametrizada, não constante, $\gamma : I \rightarrow S$ é chamada **geodésica** em $t \in I$ quando seu campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ em t , isto é,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0.$$

Além disso, γ é uma **geodésica parametrizada** quando é geodésica para todo $t \in I$.

Note que as definições de transporte paralelo e geodésica não dependem da orientação de S . No entanto, na Definição (2.10), que está apresentada a seguir, a curvatura geodésica muda de sinal com uma mudança de orientação em S .

Proposição 2.7 Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow S$, não constante, sobre uma superfície orientada S é uma geodésica se, e somente se, satisfaz o sistema de equações

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

para todo intervalo $J \subset I$ tal que $\gamma(J)$ esteja contido em uma vizinhança coordenada em S .

Demonstração: Suponhamos, primeiramente que $\gamma(t)$ seja uma geodésica para todo $t \in I$. Seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em uma vizinhança V de $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$; e, $J \subset I$ um intervalo aberto contendo t_0 tal que $\gamma(J) \subset V$. Além disso, seja $X(u(t), v(t))$, $t \in J$, a expressão de $\gamma : J \rightarrow S$ na parametrização de X . Então, o campo de vetores tangente $w = \gamma'(t)$, $t \in J$, é dado por

$$\gamma'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v.$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{D\gamma'(t)}{dt} &= u''X_u + u'(X_{uu}u' + X_{uv}v') + v''X_v + v'(X_{vv}v' + X_{vu}u') \\
\frac{D\gamma'(t)}{dt} &= u''X_u + X_{uu}(u')^2 + X_{uv}u'v' + v''X_v + X_{vu}u'v' + X_{vv}(v')^2 \\
&= X_{uu}(u')^2 + (X_{uv} + X_{vu})u'v' + X_{vv}(v')^2 + u''X_u + v''X_v.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Utilizando as expressões em (2.1), a equação em (2.8) é escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{D\gamma'(t)}{dt} &= (\Gamma_{11}^1X_u + \Gamma_{11}^2X_v + L_1N)(u')^2 + (\Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v + L_2N + \Gamma_{21}^1X_u \\
&\quad + \Gamma_{21}^2X_v + L_2N)u'v' + (\Gamma_{22}^1X_u + \Gamma_{22}^2X_v + L_3N)(v')^2 + u''X_u + v''X_v \\
&= (\Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 + u'')X_u \\
&\quad + (\Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 + v'')X_v.
\end{aligned}$$

Como $\gamma(t)$ é uma geodésica, pela Definição (2.6), obtemos as equações (2.7) desejadas. A recíproca é imediata. ■

Proposição 2.8 *Se os coeficientes E, F e G da primeira forma fundamental de uma superfície regular S são constantes, então suas geodésicas são retas.*

Demonstração: Sendo E, F e G constantes, segue de (2.3) que os símbolos de Christoffel são todos nulos. Nesse caso, a derivada covariante coincide com a derivada usual de vetores no plano. Utilizando a Prop. (2.7), γ é uma geodésica se, e somente se, $u'' = v'' = 0$. Portanto suas geodésicas são retas. ■

Definição 2.9 *Seja w um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ sobre uma superfície orientada S . Como $w(t)$, para $t \in I$, é um campo de vetores unitário, $\frac{dw}{dt}(t)$ é normal a $w(t)$, e portanto*

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times w(t)). \tag{2.9}$$

O número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$, é chamado **valor algébrico da derivada covariante** de w em t .

Observe que o sinal de $[Dw/dt]$ depende da orientação de S e que

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left\langle \frac{dw}{dt}, N \times w \right\rangle. \tag{2.10}$$

De fato, pela figura abaixo

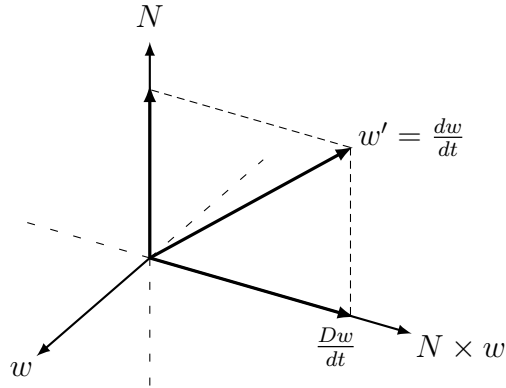


Figura 2.2

e a Definição (2.9) podemos escrever

$$\frac{dw}{dt} = \alpha N + \lambda(N \times w).$$

Daí, sendo $\langle N, N \times w \rangle = 0$ e θ o ângulo entre os vetores N e $N \times w$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dw}{dt}, N \times w \right\rangle &= \langle \alpha N + \lambda(N \times w), N \times w \rangle \\ &= \alpha \langle N, N \times w \rangle + \lambda \langle N \times w, N \times w \rangle. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dw}{dt}, N \times w \right\rangle &= \lambda \langle N \times w, N \times w \rangle \\ &= \lambda |N \times w|^2 \\ &= \lambda (|N||w| \sin \theta)^2 \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left\langle \frac{dw}{dt}, N \times w \right\rangle.$$

Definição 2.10 Considere uma curva regular orientada C contida em uma superfície orientada S e uma parametrização $\alpha(s)$ de C pelo comprimento de arco s em uma vizinhança de $p \in S$. O valor algébrico

$$\left[\frac{D\alpha'}{ds}(s) \right] = k_g$$

da derivada covariante de $\alpha'(s)$ é chamada **curvatura geodésica** de C em p .

Assim, as curvas tais que $k_g = 0$ caracterizam as curvas geodésicas que são curvas regulares.

O Lema (2.11) abaixo mostra que fixando uma determinação φ_0 do ângulo de $v(t_0)$ a $w(t_0)$ é possível “estendê-lo” diferenciavelmente em I , e isto nos fornece a função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de tal modo que $\varphi(t)$, para $t \in I$, seja uma determinação diferenciável do ângulo de $v(t)$ a $w(t)$ na orientação de S . Onde v e w são campos de vetoriais diferenciáveis ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$, com $|v(t)| = |w(t)| = 1$, para $t \in I$. Além disso, considere o campo de vetores $\bar{v}$ ao longo de α tal que a base $\{v(t), \bar{v}(t)\}$ seja ortonormal e positiva para cada $t \in I$, e, o vetor $w(t)$ seja expresso como

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t),$$

onde a e b são funções diferenciáveis em I e $a^2 + b^2 = 1$.

Lema 2.11 Considere a e b funções diferenciáveis em I com $a^2 + b^2 = 1$ e φ_0 tal que $a(t_0) = \cos \varphi_0$ e $b(t_0) = \sin \varphi_0$. Então a função diferenciável

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba')dt$$

é tal que $\cos \varphi(t) = a(t)$, $\sin \varphi(t) = b(t)$, para $t \in I$, e $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Demonstração: Considera a função

$$\begin{aligned} \xi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \xi(t) = x^2(t) + y^2(t) \end{aligned}$$

onde $x = a - \cos \varphi$ e $y = b - \sin \varphi$.

Afirmamos que $\xi \equiv 0$. De fato, sendo

$$\begin{aligned}\xi &= (a - \cos \varphi)^2 + (b - \operatorname{sen} \varphi)^2 \\ &= a^2 - 2a \cos \varphi + \cos^2 \varphi + b^2 - 2b \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi \\ &= a^2 + b^2 + \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi - 2(a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi) \\ &= 2 - 2(a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi)\end{aligned}$$

então $\xi = 2 - 2(a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi)$. Além disso,

$$\varphi' = (\varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') dt)' \implies ab' - ba' \quad \text{e} \quad (a^2 + b^2)' = 0 \implies aa' = -bb'$$

Segue que

$$\begin{aligned}\xi' &= (2 - 2(a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi))' \\ &= 0 - 2(a(-\operatorname{sen} \varphi)\varphi' + a' \cos \varphi + b \cos \varphi \varphi' + b' \operatorname{sen} \varphi) \\ &= -2(a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi - a \operatorname{sen} \varphi (ab' - ba') + b \cos \varphi (ab' - ba')) \\ &= -2(a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi - b' \operatorname{sen} \varphi a^2 + b \operatorname{sen} \varphi aa' + a \cos \varphi bb' - a' \cos \varphi b^2) \\ &= -2(a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi - b' \operatorname{sen} \varphi a^2 + b \operatorname{sen} \varphi (-bb') + a \cos \varphi (-aa') - a' \cos \varphi b^2) \\ &= -2(a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi - b' \operatorname{sen} \varphi a^2 - b' \operatorname{sen} \varphi b^2 - a' \cos \varphi a^2 - a' \cos \varphi b^2) \\ &= -2(a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi - b' \operatorname{sen} \varphi (a^2 + b^2) - a' \cos \varphi (a^2 + b^2)),\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\xi' &= -2(a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi - b' \operatorname{sen} \varphi - a' \cos \varphi) \\ &= 0.\end{aligned}$$

O que indica que $\xi = \text{constante}$. Assim, para $t = t_0$, temos que

$$\begin{aligned}\xi(t_0) &= 2 - 2(a(t_0) \cos \varphi_0 + b(t_0) \operatorname{sen} \varphi_0) \\ &= 2 - 2(a^2(t_0) + b^2(t_0)) \\ &= 2 - 2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Então, $\xi \equiv 0$ o que implica em $(a - \cos \varphi)^2 + (b - \sin \varphi)^2 = 0$, está última igualdade ocorre se, e somente se, $a = \cos \varphi$ e $b = \sin \varphi$. ■

O lema seguinte relaciona a derivada covariante de dois campos de vetores unitário ao longo de uma curva com a variação do ângulo formado por eles.

Lema 2.12 *Considere, ao longo da curva $\alpha : I \rightarrow S$, os campos de vetores diferenciáveis v e w , com $|v(t)| = |w(t)| = 1$, para $t \in I$. Então*

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

onde φ é uma das determinações diferenciáveis do ângulo de v e w , dadas no Lema (2.11).

Segue desse lema que, dadas uma curva regular orientada em S , $\alpha(s)$ uma parametrização pelo comprimento de arco s de C em p , e $v(s)$ um campo paralelo ao longo de $\alpha(s)$. Então, tomando $w(s) = \alpha'(s)$, obtemos

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds},$$

isto é, a curvatura geodésica é a taxa de variação do ângulo que a tangente à curva faz com uma direção paralela ao longo da curva.

Proposição 2.13 (Fórmula de Beltrami) *Considere w um campo vetorial paralelo ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow S$, parametrizada pelo comprimento de arco s , na orientação de uma superfície regular S com parametrização $X(u, v)$. A curvatura geodésica em um ponto $p \in C$ é dada pela expressão*

$$k_g = \left[\Gamma_{11}^2(u')^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(u')^2v' + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)u'(v')^2 - \Gamma_{22}^1(v')^3 + u'v'' - u''v' \right] \sqrt{EG - F^2}, \quad (2.11)$$

onde os Γ_{jl}^i – com $i, j, l \in \{1, 2\}$ – representam os símbolos de Christoffel e E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental de S .

Demonstração: Como $w(s) = \alpha'(s)$, obtemos

$$w(s) = X_u u' + X_v v'.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
w' &= (X_u u' + X_v v')_u + (X_u u' + X_v v')_v \\
&= X_{uu} (u')^2 + X_u u'' + X_{uv} u' v' + X_{vu} v' u' + X_{vv} (v')^2 + X_v v'' \\
&= X_{uu} (u')^2 + 2X_{uv} u' v' + X_{vv} (v')^2 + X_u u'' + X_v v''.
\end{aligned}$$

Assim, segue da Equação (2.10), da Def. (2.10) e do item (1) da Prop. (1.6), que

$$\begin{aligned}
k_g &= \left[\frac{Dw}{ds} \right] = \left\langle N \times w, \frac{dw}{ds} \right\rangle = \langle w \times w', N \rangle \\
&= \left\langle [X_u u' + X_v v'] \times [X_{uu} (u')^2 + 2X_{uv} u' v' + X_{vv} (v')^2 + X_u u'' + X_v v''], N \right\rangle \\
&= \langle (X_u \times X_{uu})(u')^3 + 2(X_u \times X_{uv})(u')^2 v' + (X_u \times X_{vv})u'(v')^2 + (X_u \times X_u)u' u'' \\
&\quad + (X_u \times X_v)u' v'' + (X_v \times X_{uu})v'(u')^2 + 2(X_v \times X_{uv})u'(v')^2 + (X_v \times X_{vv})(v')^3 \\
&\quad + (X_v \times X_u)v' u'' + (X_v \times X_v)v' v'', N \rangle.
\end{aligned}$$

Com isso obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
k_g &= \langle X_u \times X_{uu}, N \rangle (u')^3 + [2 \langle X_u \times X_{uv}, N \rangle + \langle X_v \times X_{uu}, N \rangle] (u')^2 v' \\
&\quad + [\langle X_u \times X_{vv}, N \rangle + 2 \langle X_v \times X_{uv}, N \rangle] u'(v')^2 + \langle X_v \times X_{vv}, N \rangle (v')^3 \\
&\quad + \langle X_u \times X_v, N \rangle [u' v'' - u'' v'].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Os coeficientes de $(u')^3$, $(u')^2 v'$, $u'(v')^2$, $(v')^3$ e $(u' v'' - u'' v')$ são todos em função de E , F , G e de suas derivadas primeiras. De fato, lembrando que $|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}$ e pela da Prop. (1.7), temos que

$$\begin{aligned}
\langle X_u \times X_{uu}, N \rangle &= \frac{\langle X_u \times X_{uu}, X_u \times X_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \\
&= \frac{\langle X_{uu}, X_v \rangle \langle X_u, X_u \rangle - \langle X_u, X_{uu} \rangle \langle X_u, X_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \\
&= \frac{(\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G)E - (\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F)F}{\sqrt{EG - F^2}} \\
&= \frac{\Gamma_{11}^1 FE + \Gamma_{11}^2 GE - \Gamma_{11}^1 EF - \Gamma_{11}^2 FF}{\sqrt{EG - F^2}} \\
&= \Gamma_{11}^2 \frac{GE - F^2}{\sqrt{EG - F^2}} \\
&= \Gamma_{11}^2 \sqrt{EG - F^2}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle X_v \times X_{vv}, N \rangle &= -\Gamma_{22}^1 \sqrt{EG - F^2} \\
\langle X_u \times X_{uv}, N \rangle &= \Gamma_{12}^2 \sqrt{EG - F^2} \\
\langle X_v \times X_{uu}, N \rangle &= -\Gamma_{11}^1 \sqrt{EG - F^2} \\
\langle X_u \times X_{vv}, N \rangle &= \Gamma_{22}^2 \sqrt{EG - F^2} \\
\langle X_v \times X_{uv}, N \rangle &= -\Gamma_{12}^1 \sqrt{EG - F^2} \\
\langle X_u \times X_v, N \rangle &= \sqrt{EG - F^2}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Portanto, substituindo os valores encontrados em (2.13) e (2.14) na igualdade (2.12) obtemos (2.11). ■

2.3 Equações de Compatibilidade em Superfícies Parametrizadas por Linhas Assintóticas

A seguir considere apenas superfícies com curvatura Gaussiana negativa no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Pela Prop. (1.35), tais superfícies possuem exatamente duas direções assintóticas, isto é, direções nas quais a curvatura normal se anula. Assim, podemos parametrizar essas superfícies (localmente) pelas coordenadas assintóticas (u, v) de uma dada parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definição 2.14 *O ângulo entre as linhas assintóticas de uma superfície parametrizada por coordenadas assintóticas é chamado **Ângulo de Chebyshev**.*

Proposição 2.15 *Considere $X(u, v)$ uma parametrização por linhas assintóticas de uma superfície regular S e uma função $\rho : D \subset S \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\rho(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in D$. Se a curvatura Gaussiana $K = -\frac{1}{\rho^2}$ em S , então a primeira e a segunda formas fundamentais de S são escritas, respectivamente, como*

$$I = A^2 du^2 + 2AB \cos \varphi du dv + B^2 dv^2 \tag{2.15}$$

$$II = \frac{2AB \sin \varphi}{\rho} du dv, \tag{2.16}$$

onde φ é o ângulo de Chebyshev.

Demonstração: De fato, tomando $A = |X_u|$, $B = |X_v|$ e considerando φ um ângulo de Chebyshev, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = A^2, \quad G = B^2 \quad \text{e} \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = \cos \varphi |X_u| |X_v| = AB \cos \varphi$$

mudando as coordenadas se necessário, assumimos $0 < \varphi < \pi$. Segue da expressão da primeira forma fundamental de S que

$$\begin{aligned} I &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \\ &= |X_u|^2 du^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle dudv + |X_v|^2 dv^2 \\ &= A^2 du^2 + 2AB \cos \varphi dudv + B^2 dv^2 \end{aligned}$$

Como $K = -\frac{1}{\rho^2}$, onde $\rho > 0$, segue de (1.18) que

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\rho^2}$$

Já que a superfície em questão é parametrizada por linhas assintóticas, pela Prop. (1.38), segue de $e = g = 0$ que a equação acima implica em

$$\frac{-f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\rho^2} \implies f^2 = \frac{EG - F^2}{\rho^2} \implies f = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho}$$

pois $EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = (|X_u| |X_v| \sin \varphi)^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0$. Além disso, sendo $A = |X_u| > 0$, $B = |X_v| > 0$ e $0 < \varphi < \pi$, então

$$\begin{aligned} f &= \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho} \\ &= \frac{\sqrt{A^2 B^2 - A^2 \cos^2 \varphi - B^2 \cos^2 \varphi}}{\rho} \\ &= \frac{AB \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\rho} \\ &= \frac{AB \sin \varphi}{\rho} \end{aligned}$$

Ademais, para a segunda forma fundamental, temos

$$II = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 2fdudv = \frac{2AB}{\rho} \sin \varphi dudv$$

■

Proposição 2.16 *Seja $X(u, v)$ uma parametrização por linhas assintóticas de uma superfície regular S com curvatura Gaussiana $K = -\frac{1}{\rho^2}$, onde $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\rho > 0$ em S . Então para um ponto $p \in S$ as equações de Compatibilidade são escritas como*

$$\varphi_{uv} + \left(\frac{\rho_u b \sin \varphi}{2a\rho} \right)_u + \left(\frac{\rho_v a \sin \varphi}{2b\rho} \right)_v - ab \sin \varphi = 0 \quad (2.17)$$

$$2\rho b_u + b\rho_u - a\rho_v \cos \varphi = 0 \quad (2.18)$$

$$2\rho a_v + a\rho_v - b\rho_u \cos \varphi = 0 \quad (2.19)$$

Demonstração: Primeiramente, as equações de Codazzi-Mainardi em (2.6), são escritas como

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \quad (2.20)$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \quad (2.21)$$

Então, considerando $a = \frac{A}{\rho}$ e $b = \frac{B}{\rho}$, com $A = |X_u|$ e $B = |X_v|$, os termos da primeira e segunda formas fundamentais podem ser expressos por

$$E = (a\rho)^2, \quad F = ab\rho^2 \cos \varphi, \quad G = (b\rho)^2, \quad e = g = 0 \quad \text{e} \quad f = ab\rho \sin \varphi.$$

Agora, vamos substituir os valores de E , F , G e de suas derivadas primeiras em termos de u e v nos símbolos de Christoffel como vistos em (2.3)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{(b\rho)^2[(a\rho)^2]_u - 2ab\rho^2 \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u + ab\rho^2 \cos \varphi [(a\rho)^2]_v}{2[(a\rho)^2(b\rho)^2 - (ab\rho^2 \cos \varphi)^2]} \\ &= \frac{(b\rho)^2[2(a\rho)(a\rho)_u] - 2ab\rho^2 \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u + ab\rho^2 \cos \varphi [2(a\rho)(a\rho)_v]}{2(ab\rho)^2\rho^2(1 - \cos^2 \varphi)} \\ &= \frac{2ab\rho^2[b\rho(a\rho)_u - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u + a\rho \cos \varphi (a\rho)_v]}{2(ab)^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{b\rho(a\rho)_u - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u + a\rho \cos \varphi (a\rho)_v}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)} \\
&= \frac{2(a\rho)^2(ab\rho^2 \cos \varphi)_u - (a\rho)^2[(a\rho)^2]_v - ab\rho^2 \cos \varphi [(a\rho)^2]_u}{2a^2b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2(a\rho)^2(ab\rho^2 \cos \varphi)_u - 2a\rho(a\rho)^2(a\rho)_v - 2apab\rho^2 \cos \varphi (a\rho)_u}{2(a\rho)^2b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2(a\rho)^2[(ab\rho^2 \cos \varphi)_u - a\rho(a\rho)_v - b\rho \cos \varphi (a\rho)_u]}{2(a\rho)^2b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{(ab\rho^2 \cos \varphi)_u - a\rho(a\rho)_v - b\rho \cos \varphi (a\rho)_u}{b^2\rho^2 \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \\
&= \frac{(b\rho)^2[(a\rho)^2]_v - ab\rho^2 \cos \varphi [(b\rho)^2]_u}{2a^2b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2(b\rho)^2a\rho(a\rho)_v - 2ab\rho^2 \cos \varphi b\rho(b\rho)_u}{2ab^2\rho^3a\rho \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2ab^2\rho^3[(a\rho)_v - \cos \varphi (b\rho)_u]}{2ab^2a\rho^3\rho \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{(a\rho)_v - \cos \varphi (b\rho)_u}{a\rho \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\
&= \frac{(a\rho)^2[(b\rho)^2]_u - ab\rho^2 \cos \varphi [(a\rho)^2]_v}{2a^2b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2(a\rho)^2b\rho(b\rho)_u - 2ab\rho^2 \cos \varphi a\rho(a\rho)_v}{2a^2b\rho^3b\rho \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2a^2b\rho^3[(b\rho)_u - \cos \varphi (a\rho)_v]}{2a^2b\rho^3b\rho \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{(b\rho)_u - \cos \varphi (a\rho)_v}{b\rho \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\
&= \frac{2(b\rho)^2(ab\rho^2 \cos \varphi)_v - (b\rho)^2[(b\rho)^2]_u - ab\rho^2 \cos \varphi [(b\rho)^2]_v}{2a^2b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2(b\rho)^2(ab\rho^2 \cos \varphi)_v - 2(b\rho)^2b\rho(b\rho)_u - 2ab\rho^2 \cos \varphi b\rho(b\rho)_v}{2(b\rho)^2a^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2(b\rho)^2[(ab\rho^2 \cos \varphi)_v - b\rho(b\rho)_u - a\rho \cos \varphi (b\rho)_v]}{2(b\rho)^2a^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{(ab\rho^2 \cos \varphi)_v - b\rho(b\rho)_u - a\rho \cos \varphi (b\rho)_v}{a^2\rho^2 \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \\
&= \frac{(a\rho)^2[(b\rho)^2]_v - 2ab\rho^2 \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_v + ab\rho^2 \cos \varphi [(b\rho)^2]_u}{2a^2b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2(a\rho)^2b\rho(b\rho)_v - 2ab\rho^2 \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_v + 2ab\rho^2 \cos \varphi b\rho(b\rho)_u}{2a^2b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2ab\rho^2[a\rho(b\rho)_v - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_v + b\rho \cos \varphi (b\rho)_u]}{2ab\rho^2ab\rho^2 \sin^2 \varphi}. \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{a\rho(b\rho)_v - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_v + b\rho \cos \varphi (b\rho)_u}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

Assim, os símbolos de Christoffel em termos de a , b , ρ e φ são

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{b\rho(a\rho)_u - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u + a\rho \cos \varphi (a\rho)_v}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi} \quad (2.22)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{(ab\rho^2 \cos \varphi)_u - a\rho(a\rho)_v - b\rho \cos \varphi (a\rho)_u}{b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \quad (2.23)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{(a\rho)_v - \cos \varphi (b\rho)_u}{a\rho \sin^2 \varphi} \quad (2.24)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{(b\rho)_u - \cos \varphi (a\rho)_v}{b\rho \sin^2 \varphi} \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{(ab\rho^2 \cos \varphi)_v - b\rho(b\rho)_u - a\rho \cos \varphi (b\rho)_v}{a^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \quad (2.26)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{a\rho(b\rho)_v - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_v + b\rho \cos \varphi (b\rho)_u}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi}. \quad (2.27)$$

Agora, obtidas essas expressões para símbolos de Christoffel e como $e = g = 0$ implicam que $e_v = g_u = 0$, as equações de Codazzi-Mainardi (2.20) e (2.21) assumem as seguintes formas reduzidas

$$-f_u = f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \quad (2.28)$$

$$f_v = f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1). \quad (2.29)$$

Então, a equação (2.28) é equivalente a

$$\begin{aligned}
-(ab\rho \sin \varphi)_u &= ab\rho \sin \varphi \left[\frac{(b\rho)_u - \cos \varphi (a\rho)_v}{b\rho \sin^2 \varphi} - \frac{b\rho(a\rho)_u - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a\rho \cos \varphi (a\rho)_v}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(ab\rho \sin \varphi)_u &= ab\rho \sin \varphi \left[\frac{a\rho(b\rho)_u - a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u + \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a\rho \cos \varphi (a\rho)_v}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi} \right] \\
&= \frac{ab}{ab\rho \sin \varphi} [a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u + \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u]
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
-2ab\rho \sin \varphi (ab\rho \sin \varphi)_u &= 2ab [a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u \\
&\quad + \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u]
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
-[(ab\rho \sin \varphi)^2]_u &= 2ab [a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u + \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_u] \\
&= 2ab \{ a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u + \cos \varphi [a_u b\rho^2 \cos \varphi \\
&\quad + ab_u \rho^2 \cos \varphi + 2ab\rho \rho_u \cos \varphi - ab\rho^2 \sin \varphi \varphi_u] \} \\
&= 2ab \{ a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u + \cos \varphi [\rho(a_u b\rho \cos \varphi \\
&\quad + ab_u \rho \cos \varphi + ab\rho_u \cos \varphi - ab\rho \sin \varphi \varphi_u) + ab\rho \rho_u \cos \varphi] \} \\
&= 2ab \{ a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u + \cos \varphi [\rho(ab\rho \cos \varphi)_u \\
&\quad + ab\rho \rho_u \cos \varphi] \} \\
&= 2ab [a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u + ab\rho \rho_u \cos^2 \varphi] \\
&\quad + 2ab\rho \cos \varphi (ab\rho \cos \varphi)_u \\
&= 2ab [a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u + ab\rho \rho_u \cos^2 \varphi] \\
&\quad + [(ab\rho \cos \varphi)^2]_u
\end{aligned}$$

Subtraindo $[(ab\rho \cos \varphi)^2]_u$ a ambos os lados da igualdade acima, chegamos em

$$\begin{aligned}
-\{ [(ab\rho \cos \varphi)^2]_u + [(ab\rho \sin \varphi)^2]_u \} &= 2ab [a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u \\
&\quad + ab\rho \rho_u \cos^2 \varphi] .
\end{aligned}$$

Daí,

$$-[(ab\rho)^2]_u = 2ab [a\rho(b\rho)_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a\rho)_u + ab\rho \rho_u \cos^2 \varphi]$$

$$\begin{aligned}
-2ab\rho(ab\rho)_u &= 2ab \left[a\rho(b_u\rho + b\rho_u) - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a_u\rho + a\rho_u) + ab\rho\rho_u \cos^2 \varphi \right] \\
-\rho(ab\rho)_u &= a\rho(b_u\rho + b\rho_u) - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - b\rho(a_u\rho + a\rho_u) + ab\rho\rho_u \cos^2 \varphi \\
-\rho(ab\rho)_u &= ab_u\rho^2 + ab\rho\rho_u - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - ba_u\rho^2 - ab\rho\rho_u + ab\rho\rho_u \cos^2 \varphi.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
-\rho(a_ub\rho + ab_u\rho + ab\rho_u) &= ab_u\rho^2 - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - ba_u\rho^2 + ab\rho\rho_u \cos^2 \varphi \\
-a_ub\rho^2 - ab_u\rho^2 - ab\rho\rho_u &= ab_u\rho^2 - 2a\rho \cos \varphi (a\rho)_v - ba_u\rho^2 + ab\rho\rho_u \cos^2 \varphi.
\end{aligned}$$

Donde,

$$2b_u\rho + b\rho_u - 2 \cos \varphi (a\rho)_v + b\rho_u \cos^2 \varphi = 0. \quad (2.30)$$

Agora, para a equação (2.29), temos

$$\begin{aligned}
(ab\rho \sin \varphi)_v &= ab\rho \sin \varphi \left[\frac{a\rho(b\rho)_v - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_v + b\rho \cos \varphi (b\rho)_u}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(a\rho)_v - \cos \varphi (b\rho)_u}{a\rho \sin^2 \varphi} \right] \\
&= ab\rho \sin \varphi \left[\frac{a\rho(b\rho)_v - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_v + b\rho \cos \varphi (b\rho)_u - b\rho(a\rho)_v}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{b\rho \cos \varphi (b\rho)_u}{ab\rho^2 \sin^2 \varphi} \right] \\
&= \frac{ab}{ab\rho \sin \varphi} \left[a\rho(b\rho)_v - b\rho(a\rho)_v + 2b\rho \cos \varphi (b\rho)_u - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_v \right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
[(ab\rho \sin \varphi)^2]_v &= 2ab \left[a\rho(b\rho)_v - b\rho(a\rho)_v + 2b\rho \cos \varphi (b\rho)_u - \cos \varphi (ab\rho^2 \cos \varphi)_v \right] \\
&= 2ab \left\{ a\rho(b\rho)_v - b\rho(a\rho)_v + 2b\rho \cos \varphi (b\rho)_u - \cos \varphi \left[a_v b\rho^2 \cos \varphi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + ab_v\rho^2 \cos \varphi + 2ab\rho\rho_v \cos \varphi - ab\rho^2 \sin \varphi \varphi_v \right] \right\} \\
&= 2ab \left[a\rho(b\rho)_v - b\rho(a\rho)_v + 2b\rho \cos \varphi (b\rho)_u - ab\rho\rho_v \cos^2 \varphi \right] \\
&\quad - [(ab\rho \cos \varphi)^2]_v.
\end{aligned}$$

Adicionando $[(ab\rho \cos \varphi)^2]_v$ a ambos os lados dessa igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
[(ab\rho)^2]_v &= 2ab \left[a\rho(b\rho)_v - b\rho(a\rho)_v + 2b\rho \cos \varphi (b\rho)_u - ab\rho\rho_v \cos^2 \varphi \right] \\
2ab\rho(ab\rho)_v &= 2ab \left[a\rho(b_v\rho + b\rho_v) - b\rho(a_v\rho + a\rho_v) + 2b\rho \cos \varphi (b\rho)_u - ab\rho\rho_v \cos^2 \varphi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ab\rho)_v &= ab_v\rho + ab\rho_v - a_v b\rho - ab\rho_v + 2b \cos \varphi (b\rho)_u - ab\rho_v \cos^2 \varphi \\
&= a_v b\rho + ab_v\rho + ab\rho_v - 2a_v b\rho - ab\rho_v + 2b \cos \varphi (b\rho)_u - ab\rho_v \cos^2 \varphi \\
&= (ab\rho)_v - 2a_v b\rho - ab\rho_v + 2b \cos \varphi (b\rho)_u - ab\rho_v \cos^2 \varphi.
\end{aligned}$$

Donde, simplificado a última igualdade acima, obtemos

$$2a_v\rho + a\rho_v - 2 \cos \varphi (b\rho)_u + a\rho_v \cos^2 \varphi = 0. \quad (2.31)$$

Logo, das equações (2.30) e (2.31) podemos escrever o seguinte sistema de equação equivalente ao de Codazzi-Mainardi

$$\begin{cases} 2b_u\rho + b\rho_u - 2a_v\rho \cos \varphi + b\rho_u \cos^2 \varphi - 2a\rho_v \cos \varphi = 0 \\ 2a_v\rho + a\rho_v - 2b_u\rho \cos \varphi + a\rho_v \cos^2 \varphi - 2b\rho_u \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Por outro lado, multiplicando a primeira dessas equações por $\cos \varphi$ e somando o resultado com a segunda equação,

$$\begin{aligned}
&2b_u\rho \cos \varphi + b\rho_u \cos \varphi - 2a_v\rho \cos^2 \varphi + b\rho_u \cos^3 \varphi - 2a\rho_v \cos^2 \varphi = 0 \\
&\quad \frac{2a_v\rho + a\rho_v - 2b_u\rho \cos \varphi + a\rho_v \cos^2 \varphi - 2b\rho_u \cos \varphi = 0}{-b\rho_u \cos \varphi + 2a_v\rho(1 - \cos^2 \varphi) + b\rho_u \cos^3 \varphi + a\rho_v(1 - \cos^2 \varphi) = 0},
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
&-b\rho_u \cos \varphi + 2a_v\rho \sin^2 \varphi + b\rho_u \cos \varphi(1 - \sin^2 \varphi) + a\rho_v \sin^2 \varphi = 0 \\
&-b\rho_u \cos \varphi + 2a_v\rho \sin^2 \varphi + b\rho_u \cos \varphi - b\rho_u \cos \varphi \sin^2 \varphi + a\rho_v \sin^2 \varphi = 0 \\
&\quad (2a_v\rho - b\rho_u \cos \varphi + a\rho_v) \sin^2 \varphi = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, assumindo que $0 < \varphi < \pi$, obtemos

$$2a_v\rho - b\rho_u \cos \varphi + a\rho_v = 0. \quad (2.33)$$

Ainda utilizando o sistema de equações, obtido em (2.32), equivalente ao de Codazzi-Mainardi. Se somarmos a primeira daquelas equações com o produto de $\cos \varphi$ pela

segunda delas, vemos que

$$\begin{array}{r} 2a_v\rho \cos \varphi + a\rho_v \cos \varphi - 2b_u\rho \cos^2 \varphi + a\rho_v \cos^3 \varphi - 2b\rho_u \cos^2 \varphi = 0 \\ 2b_u\rho + b\rho_u - 2a_v\rho \cos \varphi + b\rho_u \cos^2 \varphi - 2a\rho_v \cos \varphi = 0 \\ \hline 2b_u\rho(1 - \cos^2 \varphi) + b\rho_u(1 - \cos^2 \varphi) - a\rho_v \cos \varphi + a\rho_v \cos^3 \varphi = 0, \end{array}$$

ou seja,

$$2b_u\rho - a\rho_v \cos \varphi + b\rho_u = 0. \quad (2.34)$$

Assim, para finalizar a primeira parte desta demonstração, obtivemos as equações de Codazzi-Mainardi nas seguintes formas

$$\begin{cases} 2b_u\rho + b\rho_u - a\rho_v \cos \varphi = 0 \\ 2a_v\rho + a\rho_v - b\rho_u \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Agora para a segunda parte dessa demonstração, lembre que a superfície em questão é parametrizada por linhas assintóticas. Sendo assim, escrevemos as Equações de Compatibilidade dadas em (2.5) e (2.6)

$$\begin{aligned} -EK &= (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) \\ -\frac{f_u}{f} &= \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \\ -\frac{f_v}{f} &= \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2. \end{aligned}$$

Já que

$$K = -\frac{1}{\rho^2} \text{ e } E = (a\rho)^2 \implies -EK = -a^2\rho^2 \left(-\frac{1}{\rho^2}\right) \implies -EK = a^2$$

obtemos a seguinte equivalência para a equação de Gauss

$$a^2 = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^2 \frac{f_u}{f} - \Gamma_{11}^2 \frac{f_v}{f}. \quad (2.36)$$

Com essas informações precisamos obter as equivalências das derivadas primeiras para os símbolos de Christoffel. Então, para conseguir calcular, por exemplo, $(\Gamma_{12}^2)_u$, devemos utilizar a primeira das equações em (2.35) e o símbolo de Christoffel em (2.25).

Vejamos

$$-2\rho b_u = b\rho_u - a \cos \varphi \rho_v \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \frac{(b\rho)_u - \cos \varphi (a\rho)_v}{b\rho \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{b_u \rho + b\rho_u - a \cos \varphi \rho_v - a_v \rho \cos \varphi}{b\rho \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{b_u \rho + (b\rho_u - a \cos \varphi \rho_v) - a_v \rho \cos \varphi}{b\rho \sin^2 \varphi} \end{aligned} \quad (2.38)$$

em seguida, substituímos (2.37) em (2.38)

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \frac{b_u \rho - 2\rho b_u - a_v \rho \cos \varphi}{b\rho \sin^2 \varphi} = \frac{-\rho b_u - a_v \rho \cos \varphi}{b\rho \sin^2 \varphi} \\ &= -\frac{a_v \cos \varphi + b_u}{b \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_u &= -\left(\frac{a_v \cos \varphi + b_u}{b \sin^2 \varphi}\right)_u \\ &= -\left(\frac{a_v \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi}\right)_u - \left(\frac{b_u}{b \sin^2 \varphi}\right)_u \\ &= -\frac{(a_v \cos \varphi)_u b \sin^2 \varphi - (b \sin^2 \varphi)_u a_v \cos \varphi}{b^2 \sin^4 \varphi} - \frac{(b_u)_u b \sin^2 \varphi - (b \sin^2 \varphi)_u b_u}{b^2 \sin^4 \varphi} \\ &= -\frac{(a_{vu} \cos \varphi - a_v \sin \varphi \varphi_u) b \sin^2 \varphi - (b_u \sin^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi \varphi_u) a_v \cos \varphi}{b^2 \sin^4 \varphi} \\ &\quad - \frac{b_{uu} b \sin^2 \varphi - (b_u \sin^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi \varphi_u) b_u}{b^2 \sin^4 \varphi} \\ &= -\frac{(a_{vu} \cos \varphi - a_v \sin \varphi \varphi_u) b \sin^2 \varphi - \sin \varphi ((b \sin \varphi)_u + b \cos \varphi \varphi_u) a_v \cos \varphi}{b^2 \sin^4 \varphi} \\ &\quad - \frac{b_{uu} b \sin^2 \varphi - \sin \varphi ((b \sin \varphi)_u + b \cos \varphi \varphi_u) b_u}{b^2 \sin^4 \varphi}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_u &= -\frac{a_{vu} \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi} + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} + \frac{a_v (b \sin \varphi)_u \cos \varphi}{b^2 \sin^3 \varphi} + \frac{a_v \varphi_u \cos^2 \varphi}{b \sin^3 \varphi} \\ &\quad - \frac{b_{uu}}{b \sin^2 \varphi} + \frac{b_u (b \sin \varphi)_u}{b^2 \sin^3 \varphi} + \frac{b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

A seguir, vemos como encontrar $(\Gamma_{11}^2)_v$. Para isso, consideremos em (2.35) e (2.23), respectivamente, as seguintes equações

$$-2\rho a_v = a\rho_v - b \cos \varphi \rho_u \quad (2.41)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{(ab\rho^2 \cos \varphi)_u - a\rho(a\rho)_v - b\rho \cos \varphi(a\rho)_u}{b^2\rho^2 \sin^2 \varphi}. \quad (2.42)$$

segue que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{a_u b \rho^2 \cos \varphi + a b_u \rho^2 \cos \varphi + 2ab\rho\rho_u \cos \varphi - ab\rho^2 \sin \varphi \varphi_u - a\rho^2 a_v}{b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\ &\quad - \frac{a^2\rho\rho_v + a_u b \rho^2 \cos \varphi + ab\rho\rho_u \cos \varphi}{b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{ab_u \rho^2 \cos \varphi + ab\rho\rho_u \cos \varphi - ab\rho^2 \sin \varphi \varphi_u - a\rho^2 a_v - a^2\rho\rho_v}{b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{ab_u \rho^2 \cos \varphi - ab\rho^2 \sin \varphi \varphi_u + a\rho(b\rho_u \cos \varphi - a\rho_v) - a\rho^2 a_v}{b^2\rho^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Substituindo (2.41) em (2.43), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{ab_u \rho^2 \cos \varphi - ab\rho^2 \sin \varphi \varphi_u + a\rho(2\rho a_v) - a\rho^2 a_v}{b^2\rho^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{ab_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{aa_v}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a\varphi_u}{b \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Daí,

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^2)_v &= \left(\frac{ab_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{aa_v}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a\varphi_u}{b \sin \varphi} \right)_v \\ &= \left(\frac{ab_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} \right)_v + \left(\frac{aa_v}{b^2 \sin^2 \varphi} \right)_v - \left(\frac{a\varphi_u}{b \sin \varphi} \right)_v. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^2)_v &= \frac{(ab_u \cos \varphi)_v b^2 \sin^2 \varphi - (b^2 \sin^2 \varphi)_v ab_u \cos \varphi}{b^4 \sin^4 \varphi} + \frac{(aa_v)_v b^2 \sin^2 \varphi}{b^4 \sin^4 \varphi} \\ &\quad - \frac{(b^2 \sin^2 \varphi)_v aa_v}{b^4 \sin^4 \varphi} - \frac{(a\varphi_u)_v b \sin \varphi - (b \sin \varphi)_v a\varphi_u}{b^2 \sin^2 \varphi}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{11}^2)_v &= \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{ab_{uv} \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{ab_u \sin \varphi \varphi_v}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{ab_u \cos \varphi (b^2 \sin^2 \varphi)_v}{b^4 \sin^4 \varphi} \\
&+ \frac{(a_v)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{aa_{vv}}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{aa_v (b^2 \sin^2 \varphi)_v}{b^4 \sin^4 \varphi} - \frac{a_v b \varphi_u \sin \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} \\
&+ \frac{ab_v \varphi_u \sin \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{ab \varphi_{uv} \sin \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{ab \varphi_u \cos \varphi \varphi_v}{b^2 \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

Mais precisamente,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{11}^2)_v &= \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{ab_{uv} \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{ab_u \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} - \frac{ab_u \cos \varphi (b^2 \sin^2 \varphi)_v}{b^4 \sin^4 \varphi} \\
&+ \frac{(a_v)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{aa_{vv}}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{aa_v (b^2 \sin^2 \varphi)_v}{b^4 \sin^4 \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} \\
&+ \frac{ab_v \varphi_u}{b^2 \sin \varphi} - \frac{a \varphi_{uv}}{b \sin \varphi} + \frac{a \varphi_u \varphi_v \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Para encontrarmos as derivadas segundas de a e b , e, substituímos nas equações acima, considere novamente as equações de Codazzi-Mainardi em (2.35)

$$a_v = -\frac{\rho_v a}{2\rho} + \frac{\rho_u b}{2\rho} \cos \varphi \tag{2.46}$$

$$b_u = -\frac{\rho_u b}{2\rho} + \frac{\rho_v a}{2\rho} \cos \varphi \tag{2.47}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_{vv} &= -\left(\frac{\rho_v a}{2\rho}\right)_v + \left(\frac{\rho_u b}{2\rho}\right)_v \cos \varphi - \left(\frac{\rho_u b}{2\rho}\right) \sin \varphi \varphi_v \\
a_{vu} &= -\left(\frac{\rho_v a}{2\rho}\right)_u + \left(\frac{\rho_u b}{2\rho}\right)_u \cos \varphi - \left(\frac{\rho_u b}{2\rho}\right) \sin \varphi \varphi_u \\
b_{uv} &= -\left(\frac{\rho_u b}{2\rho}\right)_v + \left(\frac{\rho_v a}{2\rho}\right)_v \cos \varphi - \left(\frac{\rho_v a}{2\rho}\right) \sin \varphi \varphi_v \\
b_{uu} &= -\left(\frac{\rho_u b}{2\rho}\right)_u + \left(\frac{\rho_v a}{2\rho}\right)_u \cos \varphi - \left(\frac{\rho_v a}{2\rho}\right) \sin \varphi \varphi_u.
\end{aligned}$$

A partir de agora devemos proceder substituindo a_{vv} , a_{vu} , b_{uv} e b_{uu} nas expressões encontradas em (2.40) e (2.45). Vejamos esse procedimento

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{12}^2)_u &= \frac{\cos \varphi}{b \sin^2 \varphi} \left(\left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_u - \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u \cos \varphi + \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u \sin \varphi \varphi_u \right) + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} \\
&\quad + \frac{a_v \varphi_u \cos^2 \varphi}{b \sin^3 \varphi} + \frac{1}{b \sin^2 \varphi} \left(\left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u - \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_u \cos \varphi + \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_u \sin \varphi \varphi_u \right) \\
&\quad + \frac{b_u (b \sin \varphi)_u}{b^2 \sin^3 \varphi} + \frac{b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi} + \frac{a_v (b \sin \varphi)_u \cos \varphi}{b^2 \sin^3 \varphi} \\
&= \frac{\cos \varphi}{b \sin^2 \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_u + \frac{\sin^2 \varphi - 1}{b \sin^2 \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{\cos \varphi \sin \varphi \varphi_u}{b \sin^2 \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} \\
&\quad + \frac{a_v \varphi_u (1 - \sin^2 \varphi)}{b \sin^3 \varphi} + \frac{1}{b \sin^2 \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u - \frac{\cos \varphi}{b \sin^2 \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_u + \frac{\sin \varphi \varphi_u}{b \sin^2 \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_u \\
&\quad + \frac{b_u (b_u \sin \varphi + b \cos \varphi \varphi_u)}{b^2 \sin^3 \varphi} + \frac{b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi} + \frac{a_v (b_u \sin \varphi + b \cos \varphi \varphi_u) \cos \varphi}{b^2 \sin^3 \varphi} \\
&= -\frac{1}{b \sin^2 \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{1}{b} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{\cos \varphi \varphi_u}{b \sin \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin^3 \varphi} \\
&\quad - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} + \frac{1}{b \sin^2 \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{\varphi_u}{b \sin \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_u + \frac{(b_u)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{b_u \cos \varphi \varphi_u}{b \sin^3 \varphi} \\
&\quad + \frac{b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi} + \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin^3 \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{12}^2)_u &= \frac{1}{b} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{\cos \varphi \varphi_u}{b \sin \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{2a_v \varphi_u}{b \sin^3 \varphi} + \frac{\varphi_u}{b \sin \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_u \\
&\quad + \frac{(b_u)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} + \frac{2b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi} + \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

E mais,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{11}^2)_v &= \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} \left(\left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_v - \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_v \cos \varphi + \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_v \sin \varphi \varphi_v \right) \\
&\quad - \frac{a b_u \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} - \frac{a}{b^2 \sin^2 \varphi} \left(\left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_v - \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_v \cos \varphi + \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_v \sin \varphi \varphi_v \right) \\
&\quad + \frac{(a_v)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a b_u \cos \varphi (b^2 \sin^2 \varphi)_v}{b^4 \sin^4 \varphi} - \frac{a a_v (b^2 \sin^2 \varphi)_v}{b^4 \sin^4 \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} \\
&\quad + \frac{a b_v \varphi_u}{b^2 \sin \varphi} - \frac{a \varphi_{uv}}{b \sin \varphi} + \frac{a \varphi_u \varphi_v \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{11}^2)_v &= \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a}{b^2} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_v + \frac{ab_u \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} - \frac{a \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right) - \frac{a \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right) \\
 &+ \frac{(a_v)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{ab_u b_v \cos \varphi}{b^3 \sin^2 \varphi} - \frac{ab_u b_v \cos \varphi}{b^3 \sin^2 \varphi} - \frac{2ab_u \varphi_v}{b^2 \sin^3 \varphi} - \frac{2aa_v b_v}{b^3 \sin^2 \varphi} - \frac{2aa_v \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin^3 \varphi} \\
 &- \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} + \frac{ab_v \varphi_u}{b^2 \sin \varphi} - \frac{a \varphi_{uv}}{b \sin \varphi} + \frac{a \varphi_u \varphi_v \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi}.
 \end{aligned}$$

Substituindo (2.47) na sétima parcela da segunda igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{11}^2)_v &= \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a}{b^2} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_v + \frac{ab_u \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} - \frac{a \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right) \\
 &- \frac{a \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right) + \frac{(a_v)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{ab_v \rho_u \cos \varphi}{2b^2 \rho \sin^2 \varphi} + \frac{a^2 b_v \rho_v}{2\rho b^3} \\
 &- \frac{a^2 b_v \rho_v}{2\rho b^3 \sin^2 \varphi} - \frac{ab_u b_v \cos \varphi}{b^3 \sin^2 \varphi} - \frac{2ab_u \varphi_v}{b^2 \sin^3 \varphi} - \frac{2aa_v b_v}{b^3 \sin^2 \varphi} \\
 &- \frac{2aa_v \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin^3 \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} + \frac{ab_v \varphi_u}{b^2 \sin \varphi} - \frac{a \varphi_{uv}}{b \sin \varphi} \\
 &+ \frac{a \varphi_u \varphi_v \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi}.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Para calcularmos as formas equivalentes para as parcelas

$$\Gamma_{12}^2 \frac{f_u}{f} \quad \text{e} \quad \Gamma_{11}^2 \frac{f_v}{f},$$

lembramos que $f = ab\rho \sin \varphi$. Então,

$$\begin{aligned}
 \frac{f_u}{f} &= \frac{(ab\rho \sin \varphi)_u}{ab\rho \sin \varphi} \\
 &= \frac{a_u b \rho \sin \varphi + ab_u \rho \sin \varphi + ab \rho_u \sin \varphi + ab \rho \cos \varphi \varphi_u}{ab\rho \sin \varphi} \\
 &= \frac{a_u}{a} + \frac{b_u}{b} + \frac{\rho_u}{\rho} + \frac{\varphi_u \cos \varphi}{\sin \varphi}.
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{f_v}{f} = \frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b} + \frac{\rho_v}{\rho} + \frac{\varphi_v \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Além disso, de (2.44), segue que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 \frac{f_v}{f} &= \left(\frac{ab_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{aa_v}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a\varphi_u}{b \sin \varphi} \right) \left(\frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b} + \frac{\rho_v}{\rho} + \frac{\varphi_v \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \\
&= \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{ab_u b_v \cos \varphi}{b^3 \sin^2 \varphi} + \frac{ab_u \rho_v \cos \varphi}{b^2 \rho \sin^2 \varphi} + \frac{ab_u \varphi_v}{b^2 \sin^3 \varphi} - \frac{ab_u \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} \\
&\quad + \frac{(a_v)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{aa_v b_v}{b^3 \sin^2 \varphi} + \frac{aa_v \rho_v}{b^2 \rho \sin^2 \varphi} + \frac{aa_v \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin^3 \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} \\
&\quad - \frac{ab_v \varphi_u}{b^2 \sin \varphi} - \frac{a \rho_v \varphi_u}{b \rho \sin \varphi} - \frac{a \varphi_u \varphi_v \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

De (2.39), temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 \frac{f_u}{f} &= - \left(\frac{a_v \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi} + \frac{b_u}{b \sin^2 \varphi} \right) \left(\frac{a_u}{a} + \frac{b_u}{b} + \frac{\rho_u}{\rho} + \frac{\varphi_u \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \\
&= - \frac{a_u a_v \cos \varphi}{ab \sin^2 \varphi} - \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a_v \rho_u \cos \varphi}{b \rho \sin^2 \varphi} + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin^3 \varphi} \\
&\quad - \frac{a_u b_u}{ab \sin^2 \varphi} - \frac{(b_u)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{\rho_u b_u}{b \rho \sin^2 \varphi} - \frac{b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi}.
\end{aligned}$$

Daí, substituindo (2.46) na primeira parcela da segunda igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 \frac{f_u}{f} &= \frac{a_u \rho_v \cos \varphi}{2b \rho \sin^2 \varphi} + \frac{a_u \rho_u}{2a \rho} - \frac{a_u \rho_u}{2a \rho \sin^2 \varphi} - \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} \\
&\quad - \frac{a_v \rho_u \cos \varphi}{b \rho \sin^2 \varphi} + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin^3 \varphi} - \frac{a_u b_u}{ab \sin^2 \varphi} \\
&\quad - \frac{(b_u)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{\rho_u b_u}{b \rho \sin^2 \varphi} - \frac{b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Agora, vamos substituir as expressões encontradas em (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51) para os respectivos termos $(\Gamma_{12}^2)_u$, $(\Gamma_{11}^2)_v$, $\Gamma_{11}^2 \frac{f_v}{f}$ e $\Gamma_{12}^2 \frac{f_u}{f}$ da equação de Gauss (2.36). Vejamos isso na página seguinte.

$$\begin{aligned}
a^2 &= (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^2 \frac{f_u}{f} - \Gamma_{11}^2 \frac{f_v}{f} \\
&= \frac{1}{b} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{\cos \varphi \varphi_u}{b \sin \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right) + \frac{2a_v \varphi_u}{b \sin^3 \varphi} + \frac{\varphi_u}{b \sin \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right) + \frac{(b_u)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} \\
&\quad + \frac{2b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi} + \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{a}{b^2} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_v - \frac{ab_u \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} + \frac{a \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right) \\
&\quad + \frac{a \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right) - \frac{(a_v)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{ab_v \rho_u \cos \varphi}{2b^2 \rho \sin^2 \varphi} - \frac{a^2 b_v \rho_v}{2\rho b^3} + \frac{a^2 b_v \rho_v}{2\rho b^3 \sin^2 \varphi} + \frac{ab_u b_v \cos \varphi}{b^3 \sin^2 \varphi} \\
&\quad + \frac{2ab_u \varphi_v}{b^2 \sin^3 \varphi} + \frac{2aa_v b_v}{b^3 \sin^2 \varphi} + \frac{2aa_v \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin^3 \varphi} + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} - \frac{ab_v \varphi_u}{b^2 \sin \varphi} + \frac{a \varphi_{uv}}{b \sin \varphi} - \frac{a \varphi_u \varphi_v \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi} \\
&\quad - \frac{a_u \rho_v \cos \varphi}{2b \rho \sin^2 \varphi} - \frac{a_u \rho_u}{2a \rho} + \frac{a_u \rho_u}{2a \rho \sin^2 \varphi} + \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{a_v \rho_u \cos \varphi}{b \rho \sin^2 \varphi} - \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin^3 \varphi} \\
&\quad + \frac{a_u b_u}{ab \sin^2 \varphi} + \frac{(b_u)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\rho_u b_u}{b \rho \sin^2 \varphi} + \frac{b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi} - \frac{a_v b_u \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{ab_u b_v \cos \varphi}{b^3 \sin^2 \varphi} \\
&\quad - \frac{ab_u \rho_v \cos \varphi}{b^2 \rho \sin^2 \varphi} - \frac{ab_u \varphi_v}{b^2 \sin^3 \varphi} + \frac{ab_u \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} - \frac{(a_v)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{aa_v b_v}{b^3 \sin^2 \varphi} - \frac{aa_v \rho_v}{b^2 \rho \sin^2 \varphi} \\
&\quad - \frac{aa_v \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin^3 \varphi} + \frac{a_v \varphi_u}{b \sin \varphi} + \frac{ab_v \varphi_u}{b^2 \sin \varphi} + \frac{a \rho_v \varphi_u}{b \rho \sin \varphi} + \frac{a \varphi_u \varphi_v \cos \varphi}{b \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes e, em seguida, efetuando as devidas operações (adição e/ou subtração) entre esses termos, chegamos em

$$\begin{aligned}
a^2 &= \frac{1}{b} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u + \frac{\cos \varphi \varphi_u}{b \sin \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right) + \frac{3a_v \varphi_u}{b \sin^3 \varphi} + \frac{3a \rho_v \varphi_u}{2b \rho \sin \varphi} + \frac{2(b_u)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} \\
&\quad + \frac{3b_u \varphi_u \cos \varphi}{b \sin^3 \varphi} + \frac{a}{b^2} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_v + \frac{a \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin \varphi} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right) + \frac{a \varphi_v}{b^2 \sin \varphi} \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right) \\
&\quad - \frac{2(a_v)^2}{b^2 \sin^2 \varphi} - \frac{ab_v \rho_u \cos \varphi}{2b^2 \rho \sin^2 \varphi} - \frac{a^2 b_v \rho_v}{2\rho b^3} + \frac{a^2 b_v \rho_v}{2\rho b^3 \sin^2 \varphi} + \frac{ab_u \varphi_v}{b^2 \sin^3 \varphi} \\
&\quad - \frac{aa_v \rho_v}{b^2 \rho \sin^2 \varphi} + \frac{aa_v b_v}{b^3 \sin^2 \varphi} + \frac{aa_v \varphi_v \cos \varphi}{b^2 \sin^3 \varphi} + \frac{a \varphi_{uv}}{b \sin \varphi} - \frac{a_u \rho_v \cos \varphi}{2b \rho \sin^2 \varphi} \\
&\quad - \frac{a_u \rho_u}{2a \rho} + \frac{a_u \rho_u}{2a \rho \sin^2 \varphi} + \frac{a_u b_u}{ab \sin^2 \varphi} + \frac{\rho_u b_u}{b \rho \sin^2 \varphi} - \frac{ab_u \rho_v \cos \varphi}{b^2 \rho \sin^2 \varphi} \\
&\quad + \frac{a_v \rho_u \cos \varphi}{b \rho \sin^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

Em seguida, multiplicando ambos os lados dessa igualdade por $\left(\frac{b \sin \varphi}{a} \right)$, temos

$$\begin{aligned}
ab \operatorname{sen} \varphi = & \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u \frac{\operatorname{sen} \varphi}{a} + \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right) \frac{\cos \varphi \varphi_u}{a} - \frac{ba_u \rho_u \operatorname{sen} \varphi}{2a^2 \rho} + \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_v \frac{\operatorname{sen} \varphi}{b} \\
& + \frac{\varphi_v \cos \varphi}{b} \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right) - \frac{ab_v \rho_v \operatorname{sen} \varphi}{2\rho b^2} + \varphi_{uv} + \frac{3a_v \varphi_u}{a \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{3\rho_v \varphi_u}{2\rho} + \frac{2(b_u)^2}{ab \operatorname{sen} \varphi} \\
& + \frac{3b_u \varphi_u \cos \varphi}{a \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{\varphi_v \rho_u}{2\rho} - \frac{2(a_v)^2}{ab \operatorname{sen} \varphi} - \frac{b_v \rho_u \cos \varphi}{2b\rho \operatorname{sen} \varphi} + \frac{ab_v \rho_v}{2\rho b^2 \operatorname{sen} \varphi} + \frac{b_u \varphi_v}{b \operatorname{sen}^2 \varphi} \\
& - \frac{a_v \rho_v}{b\rho \operatorname{sen} \varphi} + \frac{a_v b_v}{b^2 \operatorname{sen} \varphi} + \frac{a_v \varphi_v \cos \varphi}{b \operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{a_u \rho_v \cos \varphi}{2a\rho \operatorname{sen} \varphi} + \frac{a_u \rho_u b}{2a^2 \rho \operatorname{sen} \varphi} + \frac{a_u b_u}{a^2 \operatorname{sen} \varphi} \\
& + \frac{\rho_u b_u}{a\rho \operatorname{sen} \varphi} - \frac{b_u \rho_v \cos \varphi}{b\rho \operatorname{sen} \varphi} + \frac{a_v \rho_u \cos \varphi}{a\rho \operatorname{sen} \varphi}.
\end{aligned}$$

Assim, reagrupando parcelas convenientemente, temos

$$\begin{aligned}
ab \operatorname{sen} \varphi = & \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right)_u \frac{\operatorname{sen} \varphi}{a} + \left(\frac{\rho_u b}{2\rho} \right) \left(\frac{a \cos \varphi \varphi_u}{a^2} - \frac{a_u \operatorname{sen} \varphi}{a^2} \right) + \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right)_v \frac{\operatorname{sen} \varphi}{b} \\
& + \left(\frac{\rho_v a}{2\rho} \right) \left(\frac{b \cos \varphi \varphi_v}{b^2} - \frac{b_v \operatorname{sen} \varphi}{b^2} \right) + \varphi_{uv} + \frac{b_u}{ab\rho \operatorname{sen} \varphi} (2\rho b_u + b\rho_u - a\rho_v \cos \varphi) \\
& - \frac{a_v}{ab\rho \operatorname{sen} \varphi} (2\rho a_v + a\rho_v - b\rho_u \cos \varphi) + \frac{b_v}{2b^2 \rho \operatorname{sen} \varphi} (2\rho a_v + a\rho_v - b\rho_u \cos \varphi) \\
& + \frac{a_u}{2a^2 \rho \operatorname{sen} \varphi} (2\rho b_u + b\rho_u - a\rho_v \cos \varphi) + \frac{3a_v \varphi_u}{a \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{3\rho_v \varphi_u (1 - \cos^2 \varphi)}{2\rho \operatorname{sen}^2 \varphi} \\
& + \frac{3b_u \varphi_u \cos \varphi}{a \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{b_u \varphi_v}{b \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{\varphi_v \rho_u (1 - \cos^2 \varphi)}{2\rho \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{a_v \varphi_v \cos \varphi}{b \operatorname{sen}^2 \varphi}.
\end{aligned}$$

Daí, segue das equações em (2.35), que

$$\begin{aligned}
ab \operatorname{sen} \varphi = & \left(\frac{\rho_u b \operatorname{sen} \varphi}{2a\rho} \right)_u + \left(\frac{\rho_v a \operatorname{sen} \varphi}{2b\rho} \right)_v + \varphi_{uv} \\
& + \frac{3\varphi_u}{2a\rho \operatorname{sen}^2 \varphi} (2\rho b_u \cos \varphi - a\rho_v \cos^2 \varphi + 2\rho a_v + a\rho_v) \\
& + \frac{\varphi_v}{2b\rho \operatorname{sen}^2 \varphi} (2\rho a_v \cos \varphi - b\rho_u \cos^2 \varphi + 2\rho b_u + b\rho_u).
\end{aligned}$$

Ainda utilizando as equações em (2.35), e, somando e subtraindo $b\rho_u \cos \varphi$ e $a\rho_v \cos \varphi$, respectivamente, na 4ª e 5ª parcelas acima, obtemos

$$\begin{aligned}
ab \operatorname{sen} \varphi = & \left(\frac{\rho_u b \operatorname{sen} \varphi}{2a\rho} \right)_u + \left(\frac{\rho_v a \operatorname{sen} \varphi}{2b\rho} \right)_v + \varphi_{uv} \\
& + \frac{3\varphi_u}{2a\rho \operatorname{sen}^2 \varphi} (2\rho b_u \cos \varphi + b\rho_u \cos \varphi - a\rho_v \cos^2 \varphi + 2\rho a_v + a\rho_v - b\rho_u \cos \varphi) \\
& + \frac{\varphi_v}{2b\rho \operatorname{sen}^2 \varphi} (2\rho a_v \cos \varphi + a\rho_v \cos \varphi - b\rho_u \cos^2 \varphi + 2\rho b_u + b\rho_u - a\rho_v \cos \varphi).
\end{aligned}$$

Isto é,

$$ab \operatorname{sen} \varphi = \left(\frac{\rho_u b \operatorname{sen} \varphi}{2a\rho} \right)_u + \left(\frac{\rho_v a \operatorname{sen} \varphi}{2b\rho} \right)_v + \varphi_{uv}.$$

Portanto, subtraindo $ab \operatorname{sen} \varphi$ em ambos os lados da última igualdade acima, obtemos o resultado desejado.

$$\left(\frac{\rho_u b \operatorname{sen} \varphi}{2a\rho} \right)_u + \left(\frac{\rho_v a \operatorname{sen} \varphi}{2b\rho} \right)_v + \varphi_{uv} - ab \operatorname{sen} \varphi = 0.$$

■

Definição 2.17 Denominamos de *malha de Chebyshev generalizada* a qualquer parametrização de uma superfície regular com curvatura Gaussiana negativa em que $A = B$, isto é, $a = b$.

Mais precisamente, isso significa que os lados opostos de qualquer quadrilátero formado pelas curvas assintóticas da malhas de Chebyshev são iguais.

Proposição 2.18 Uma superfície, com malha de Chebyshev generalizada e curvatura Gaussiana negativa $K = -e^{-2\bar{u}}$, pode ser parametrizada de tal maneira que as formas fundamentais sejam expressas por

$$I = e^{\bar{v}+2\bar{u}}[du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2] \quad (2.52)$$

$$II = 2e^{\bar{v}+\bar{u}} \operatorname{sen} \varphi dudv, \quad (2.53)$$

onde $0 < \varphi < \pi$ é o ângulo de Chebyshev, $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são funções de u e v . Além disso, as equações de Compatibilidade são dadas por

$$2\varphi_{uv} + (\bar{u}_u \operatorname{sen} \varphi)_u + (\bar{u}_v \operatorname{sen} \varphi)_v = 2e^{\bar{v}} \operatorname{sen} \varphi \quad (2.54)$$

$$\bar{v}_u + \bar{u}_u - \bar{u}_v \cos \varphi = 0 \quad (2.55)$$

$$\bar{v}_v + \bar{u}_v - \bar{u}_u \cos \varphi = 0. \quad (2.56)$$

Demonstração: Como $K = -e^{-2\bar{u}}$, existe uma parametrização por linhas assintóticas de S . Considere $A = B = a\rho$, $\bar{v} = \ln a^2$, $\bar{u} = \ln \rho$. Segue das equações em (2.15) e (2.16) que

$$I = a^2 \rho^2 du^2 + 2(a\rho)^2 \cos \varphi dudv + (a\rho)^2 dv^2 \quad \text{e} \quad II = a^2 \rho \operatorname{sen} \varphi dudv,$$

ou seja,

$$I = a^2 \rho^2 [du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2] \quad \text{e} \quad II = 2a^2 \rho \sin \varphi dudv.$$

Como

$$\bar{v} = \log a^2 \quad \text{e} \quad \bar{u} = \log \rho \quad \implies \quad a^2 = e^{\bar{v}} \quad \text{e} \quad \rho = e^{\bar{u}}$$

tem-se que

$$I = e^{\bar{v}+2\bar{u}}[du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2] \quad \text{e} \quad II = 2e^{\bar{v}+\bar{u}} \sin \varphi dudv.$$

Pela definição de malha de Chebyshev, e sendo $a^2 = e^{\bar{v}}$, temos que

$$a = b = e^{\frac{\bar{v}}{2}}.$$

Agora, considere as equações de Compatibilidade encontradas na Proposição (2.16), isto é,

$$\begin{aligned} \varphi_{uv} + \left(\frac{\rho_u b \sin \varphi}{2a\rho} \right)_u + \left(\frac{\rho_v a \sin \varphi}{2b\rho} \right)_v - ab \sin \varphi &= 0 \\ 2\rho b_u + b\rho_u - a\rho_v \cos \varphi &= 0 \\ 2\rho a_v + a\rho_v - b\rho_u \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Assim, substituindo $a = b = e^{\frac{\bar{v}}{2}}$ e $\rho = e^{\bar{u}}$ nessas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_{uv} + \left(\frac{(e^{\bar{u}})_u a \sin \varphi}{2ae^{\bar{u}}} \right)_u + \left(\frac{(e^{\bar{u}})_v b \sin \varphi}{2be^{\bar{u}}} \right)_v - e^{\bar{v}} \sin \varphi &= 0 \\ 2e^{\bar{u}}(e^{\frac{\bar{v}}{2}})_u + e^{\frac{\bar{v}}{2}}(e^{\bar{u}})_u - e^{\frac{\bar{v}}{2}}(e^{\bar{u}})_v \cos \varphi &= 0 \\ 2e^{\bar{u}}(e^{\frac{\bar{v}}{2}})_v + e^{\frac{\bar{v}}{2}}(e^{\bar{u}})_v - e^{\frac{\bar{v}}{2}}(e^{\bar{u}})_u \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Daí, prosseguimos derivando os termos convenientes nessas expressões

$$\begin{aligned} \varphi_{uv} + \left(\frac{e^{\bar{u}} \bar{u}_u \sin \varphi}{2e^{\bar{u}}} \right)_u + \left(\frac{e^{\bar{u}} \bar{u}_v \sin \varphi}{2e^{\bar{u}}} \right)_v - e^{\bar{v}} \sin \varphi &= 0 \\ 2e^{\bar{u}} \frac{1}{2} e^{\frac{\bar{v}}{2}} \bar{v}_u + e^{\frac{\bar{v}}{2}} e^{\bar{u}} \bar{u}_u - e^{\frac{\bar{v}}{2}} e^{\bar{u}} \bar{u}_v \cos \varphi &= 0 \\ 2e^{\bar{u}} \frac{1}{2} e^{\frac{\bar{v}}{2}} \bar{v}_v + e^{\frac{\bar{v}}{2}} e^{\bar{u}} \bar{u}_v - e^{\frac{\bar{v}}{2}} e^{\bar{u}} \bar{u}_u \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, multiplicando a primeira das equações acima por 2 e as demais por $e^{-(\bar{u}+\frac{\bar{v}}{2})}$, obtemos

$$2\varphi_{uv} + (\bar{u}_u \operatorname{sen} \varphi)_u + (\bar{u}_v b \operatorname{sen} \varphi)_v = 2e^{\bar{v}} \operatorname{sen} \varphi$$

$$\bar{v}_u + \bar{u}_u - \bar{u}_v \cos \varphi = 0$$

$$\bar{v}_v + \bar{u}_v - \bar{u}_u \cos \varphi = 0.$$

■

Capítulo 3

Resultados Principais

Antes de entrarmos definitivamente na seção que motiva este trabalho, precisamos apresentar, brevemente, alguns conceitos – referentes às funções holomorfas, séries de Laurent e geometria diferencial global, pois utilizamos relações entre propriedades locais e globais de curvas e superfícies sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ – que, por não terem sido relevantes até o presente momento, não foram discutidos nos capítulos precedentes. Vejamos isso nas seções (3.1), (3.2) e (3.3) seguintes.

Lembrando que, como dito no Capítulo 1, as demonstrações aqui, também, são omitidas podem ser encontradas em [2], [4], [12].

3.1 Funções Holomorfas e Séries de Laurent

Nesta seção apresentamos algumas definições e propriedades relacionadas às funções holomorfas e séries de Laurent.

Nomeia-se conjunto dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$, ao conjunto dos números

$$z = u + iv \quad \text{tais que} \quad u, v \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad i^2 = -1$$

Dado $z = u + iv \in \mathbb{C}$, definimos seu **conjugado** como $\bar{z} = u - iv$, onde u é a **parte real** e v é a **parte imaginária** de z , representadas, respectivamente, como $Re(z)$ e $Im(z)$.

Sejam $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, definimos em $\mathbb{C}$ as operação de **adição** e

multiplicação, respectivamente, por

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d) \quad \text{e} \quad z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + cb)$$

Além disso, considere em $\mathbb{C}$, respectivamente, a **métrica** e a **norma**, como sendo os valores

$$\langle z_1, z_2 \rangle = ac + bd \quad \text{e} \quad |z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$$

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida no aberto $U \subset \mathbb{C}$. Diz-se que a função f é **derivável** no ponto $z = x + iy \in U$ quando o limite

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(z + H) - f(z)}{H} = A$$

existe. O número complexo $A = f'(z) \in \mathbb{C}$ é denominado a **derivada** da função f no ponto $z \in U$.

Definição 3.1 *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida no aberto U . Dizemos que f é **holomorfa** (ou **analítica**) no aberto U quando possui derivada $f'(z)$ em todo ponto $z \in U$.*

A função f é holomorfa em z_0 quando possui derivada em alguma vizinhança V de z_0 . A proposição (3.2) seguinte nos dá uma maneira prática de determinarmos se dada função complexa é holomorfa. Vejamos.

Proposição 3.2 *Consideremos $\bar{u}(u, v)$ e $\bar{v}(u, v)$ funções reais tais que suas derivadas parciais $\bar{u}_u$, $\bar{u}_v$, $\bar{v}_u$ e $\bar{v}_v$ são contínuas no aberto $U \subset \mathbb{C}$. A função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, com $f(z) = \bar{u}(u, v) + i\bar{v}(u, v)$ é holomorfa em U se, e somente se, as equações*

$$\bar{u}_u(u, v) = \bar{v}_v(u, v) \quad \text{e} \quad \bar{v}_u(u, v) = -\bar{u}_v(u, v),$$

*denominadas **equações de Cauchy-Riemann**, são satisfeitas em U .*

Proposição 3.3 *Sejam $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$ e $h = h_1 + ih_2$ funções holomorfas de $z = u + iv$ e o produto interno $\langle f, g \rangle = f_1g_1 + f_2g_2$. Então são válidas as asserções*

$$(i) \quad (\langle f, g \rangle)_u = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$$

$$(ii) \quad (\langle f, g \rangle)_v = \langle if', g \rangle + \langle f, ig' \rangle$$

$$(iii) \quad \langle fg, h \rangle = \langle g, \bar{f}h \rangle$$

Demonstração: Para o item (i) vamos considerar a definição de produto interno e aplicar a derivada em termos de u , isto é,

$$\begin{aligned} (\langle f, g \rangle)_u &= (f_1g_1 + f_2g_2)_u \\ &= (f_1g_1)_u + (f_2g_2)_u \\ &= f_{1u}g_1 + f_1g_{1u} + f_{2u}g_2 + f_2g_{2u} \\ &= f_{1u}g_1 + f_{2u}g_2 + f_1g_{1u} + f_2g_{2u} \\ &= \langle f_{1u} + if_{2u}, g_1 + ig_2 \rangle + \langle f_1 + if_2, g_{1u} + ig_{2u} \rangle \\ &= \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle. \end{aligned}$$

No item (ii), além da derivada em relação à variável v , devemos utilizar as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} (\langle f, g \rangle)_v &= f_{1v}g_1 + f_1g_{1v} + f_{2v}g_2 + f_2g_{2v} \\ &= -f_{2v}g_1 - f_1g_{2v} + f_{1v}g_2 + f_2g_{1v} \\ &= -f_{2v}g_1 + f_{1v}g_2 - f_1g_{2v} + f_2g_{1v} \\ &= \langle -f_{2v} + if_{1v}, g_1 + ig_2 \rangle + \langle f_1 + if_2, -g_{2v} + ig_{1v} \rangle \\ &= \langle i(f_{1v} + if_{2v}), g_1 + ig_2 \rangle + \langle f_1 + if_2, i(g_{1v} + ig_{2v}) \rangle \\ &= \langle if', g \rangle + \langle f, ig' \rangle. \end{aligned}$$

Agora, para o item (iii), segue do produto de números complexos que

$$\begin{aligned}
\langle fg, h \rangle &= \langle (f_1 + if_2)(g_1 + ig_2), h_1 + ih_2 \rangle \\
&= \langle f_1g_1 - f_2g_2 + i(f_1g_2 + f_2g_1), h_1 + ih_2 \rangle \\
&= (f_1g_1 - f_2g_2)h_1 + (f_1g_2 + f_2g_1)h_2 \\
&= g_1(f_1h_1 + f_2h_2) + g_2(f_1h_2 - f_2h_1) \\
&= \langle g_1 + ig_2, f_1h_1 + f_2h_2 + i(f_1h_2 - f_2h_1) \rangle \\
&= \langle g_1 + ig_2, (f_1 - if_2)(h_1 + ih_2) \rangle \\
&= \langle g, \bar{f}h \rangle.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.4 Considere $f = f_1 + if_2$ e $g = g_1 + ig_2$ funções holomorfas de z , onde $f \neq 0$. A fim de que $\langle f, g \rangle = 0$ é necessário e suficientes que $g = ikf$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Demonstração: Sem perda de generalidade, sendo $f \neq 0$, considere o caso em que $f_1 \neq 0$. Como $\langle f, g \rangle = f_1g_1 + f_2g_2 = 0$, então $g_1 = -\frac{f_2g_2}{f_1}$ e valem as igualdades

$$\begin{aligned}
g &= g_1 + ig_2 = -\frac{f_2g_2}{f_1} + g_2 \\
&= i\frac{g_2}{f_1}(f_1 + if_2) = i\frac{g_2}{f_1}f.
\end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de que são funções holomorfas concluimos que a função $\frac{g}{if} = \frac{g_2}{f_1} + i0$, também, é holomorfa. Nesse caso podemos utilizar as equações de Cauchy-Riemann para obter $\left(\frac{g_2}{f_1}\right)_u = 0_v$ e $\left(\frac{g_2}{f_1}\right)_v = -0_u$, isto é, $\frac{g_2}{f_1} = k \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, suponha que $g = ikf$, onde k é uma constante nos reais, então

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \langle f_1 + if_2, -f_2 + if_1 \rangle k \\
&= (f_1f_2 - f_2f_1)k = 0.
\end{aligned}$$

■

Abordamos, a partir de agora, conceitos sobre séries de funções que são utilizados no tratamento de certas propriedades de funções holomorfas. Mais precisamente, vemos

que o desenvolvimento de uma função holomorfa na vizinhança de um ponto z_0 em séries de funções é sempre possível, mesmo que essa função não seja analítica em z_0 .

Proposição 3.5 *Seja f uma função holomorfa no aberto $G : r < |z - z_0| < R$, onde r e R pertencem a $\mathbb{R}$. Então, para todo $z \in G$,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (3.1)$$

onde os coeficientes a_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

sendo C um caminho fechada em G , envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

A expressão em (3.1) da Proposição (3.5) anterior denominada **Série de Laurent** da função holomorfa f é muito útil pois nos permite estudar as singularidades isoladas de funções complexas.

Definição 3.6 *Diz-se que um ponto z_0 é **singularidade isolada** de uma função f quando existe uma vizinhança de z_0 na qual a f é holomorfa, exceto no próprio ponto z_0 .*

Um ponto (de acumulação) para o qual convergem singularidades isoladas é uma “singularidade” não isolada.

Considere z_0 uma singularidade isolada de uma função f , de forma que o desenvolvimento de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (3.2)$$

seja válido em uma vizinhança $0 < |z - z_0| < r$ de z_0 . Dizemos que uma singularidade isolada de f é **removível** quando, para a expansão (3.2) em série de Laurent de f (regular em z_0), temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

isto é, os coeficientes $a_{-n} = 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Definição 3.7 *Uma singularidade isolada de f é um **polo** quando, dada a expansão em série de Laurent de f na vizinhança de z_0 , existe $m > 0$ tal que*

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

onde, $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ para $n > m$. Neste caso, z_0 é chamado de **polo de ordem** m da função f . Um polo de ordem $m = 1$ é também chamado de **polo simples**.

Além disso, quando a série de Laurent de uma função f possui uma infinidade de termos $(z - z_0)$ com potências negativas, dizemos que z_0 é uma **singularidade essencial** dessa função.

Agora, considere uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde $U \subset \mathbb{C}$ é aberto, e $\bar{U}$ é o conjunto de suas singularidades. Nessas condições,

Definição 3.8 Dizemos que a função f é **meromorfa** no aberto U quando, sua restrição $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ com $W = U \setminus \bar{U}$, satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\bar{U}$ é discreto;
- (ii) f é holomorfa em W ;
- (iii) para cada $z \in \bar{U}$ e $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset U$ e $\bar{U} \cap D(z, r) = \{z\}$, a função $f|_{D(z, r) \setminus \{z\}}$ tem polo (de ordem finita) em z ; isto é, f possui um polo em cada ponto de $\bar{U}$.

Às vezes, informalmente, dizemos que uma função meromorfa em U é uma função em U que é holomorfa, “exceto nos polos”. Implícito nesta descrição é a ideia de que um polo é uma “singularidade isolada”.

Ou ainda, podemos dizer, que uma função meromorfa é uma função holomorfa, exceto em seus polos; e, cujas singularidades isoladas são polos.

3.2 Equação de Liouville

A equação de Liouville em duas variáveis reais é a Equação Diferencial Parcial Semilinear

$$\Delta \bar{u} = Re^{-2\bar{u}}, \quad (u, v) \in U,$$

onde $R \in \mathbb{R}$ é uma constante, u uma função real de classe C^2 e $U \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ é um domínio plano, isto é, um subconjunto aberto e conexo do plano.

Em fevereiro de 1853, Liouville obteve uma fórmula (local) para a solução (geral) de

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial z \partial \bar{z}} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$$

em termos de uma função holomorfa.

O teorema seguinte fornece uma solução para a equação de Liouville, cuja demonstração pode ser encontrada em [10].

Teorema 3.9 *A solução $\bar{u}(u, v)$ da equação de Liouville é dada por*

$$e^{\bar{u}(u,v)} = \frac{1 + R|f(z)|^2}{2|f'(z)|}, \quad z = u + iv \in \mathbb{C},$$

onde f é uma função meromorfa global tal que $f'(z) \neq 0$ em todos os pontos regulares e admite somente polos simples.

Proposição 3.10 *Uma solução da equação*

$$\Delta \bar{u} = Re^{-S\bar{u}}, \quad S, R \in \mathbb{R}$$

é dada por

$$\bar{u}(u, v) = \ln \left(\frac{2 + RS|h(z)|^2}{4|h'(z)|} \right)^{\frac{2}{S}}, \quad z = u + iv \in \mathbb{C},$$

onde h é uma função meromorfa global tal que $h'(z) \neq 0$ em todos os pontos regulares e admite somente polos simples.

Demonstração: Segue da equação $\Delta \bar{u} = Re^{-S\bar{u}}$ que

$$\Delta \left(\frac{S\bar{u}}{2} \right) = \frac{S}{2} \Delta \bar{u} = \frac{S}{2} Re^{-S\bar{u}} = \frac{SR}{2} e^{-2\left(\frac{S\bar{u}}{2}\right)}.$$

Assim,

$$\Delta \left(\frac{S\bar{u}}{2} \right) = \frac{SR}{2} e^{-2\left(\frac{S\bar{u}}{2}\right)}.$$

É uma equação de Liouville, cuja solução é dada por

$$\frac{S\bar{u}}{2} = \ln \left(\frac{1 + \frac{RS}{2}|h(z)|^2}{2|h'(z)|} \right),$$

isto é,

$$\bar{u} = \ln \left(\frac{2 + RS|h(z)|^2}{4|h'(z)|} \right)^{\frac{2}{S}}.$$

■

3.3 Superfícies Completas

Introduzimos a seguir a noção de superfície completa, que segundo Manfredo [4], é o ambiente mais adequado para o tratamento da geometria diferencial global.

Definição 3.11 *Uma superfície regular e conexa S é denominada **completa** quando, para qualquer ponto $p \in S$, for possível estender qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow S$ que começa em $p = \gamma(0)$ e está contida em S , por uma geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$ definida sobre toda a reta real $\mathbb{R}$.*

Dizemos que uma aplicação contínua $\alpha : [a, b] \rightarrow S$, de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sobre uma superfície S , é uma **curva parametrizada, diferenciável por partes**, ligando $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$ quando existe uma partição de $[a, b]$ por pontos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ tal que α é diferenciável em $[t_i, t_{i+1}]$ e $i = 0, 1, \dots, k$. O **comprimento** $l(\alpha)$ de α é definido como

$$l(\alpha) = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\alpha'(t)| dt.$$

Proposição 3.12 *Dados os pontos $p, q \in S$ – de uma superfície regular (conexa) S , existe uma **curva parametrizada diferenciável por partes** que liga p a q .*

Segue dessa proposição que o conjunto das curvas parametrizadas diferenciáveis por parte ligando p e q é não vazio. Assim podemos definir uma métrica intrínseca a S .

Definição 3.13 *A **distância (intrínseca)** $d(p, q)$ do ponto $p \in S$ ao ponto $q \in S$ é o número*

$$d(p, q) = \inf l(\alpha_{p,q}),$$

onde o $\inf$ é tomado sobre todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p a q , $\alpha_{p,q}$ é uma curva parametrizada regular por partes ligando p a q e $l(\alpha_{p,q})$ é o seu comprimento.

Proposição 3.14 *A distância d definida acima tem as seguintes propriedades,*

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $d(p, q) = d(q, p)$ | 3. $d(p, q) \geq 0$ |
| 2. $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$ | 4. $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ |

com p, q e r sendo pontos quaisquer em S .

Corolário 3.15 $|d(p, r) - d(r, q)| \leq d(p, q)$.

Dizemos que uma geodésica ligando os pontos $p, q \in S$ é **minimizante** quando seu comprimento é menor do que ou igual ao comprimento de qualquer curva regular por partes ligando p e q .

Teorema 3.16 (Rupf-Rinow) *Seja S uma superfície completa. Dados dois pontos $p, q \in S$, existe uma geodésica minimizante ligando p a q .*

Uma sequência $\{p_n\}$ de pontos em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **sequência de Cauchy na distância (intrínseca)** d se dado $\varepsilon > 0$ existe um índice n_0 tal que quando $n, m \geq n_0$ então $d(p_m, p_n) < \varepsilon$.

Teorema 3.17 *Uma superfície regular S é completa se, e somente se, toda sequência de Cauchy em S converge para um ponto de S .*

Teorema 3.18 *Sejam S e $\bar{S}$ superfícies regulares e seja $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ um difeomorfismo. Se $\bar{S}$ é completa e existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$I_p(v) \geq c\bar{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v)), \quad (3.3)$$

para todo $p \in S$ e todo $v \in T_p S$, onde I e $\bar{I}$ denotam as primeiras formas fundamentais de S e $\bar{S}$, respectivamente. Então S é completa.

Demonstração: Seja

$$\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow S, \text{ com } \alpha(t_0) = p \text{ e } \alpha(t_1) = q,$$

uma curva parametrizada diferenciável por partes ligando p e q . Como $\bar{S}$ é completa, pelo Teorema (3.16) podemos definir

$$\bar{\alpha} : [t_0, t_1] \rightarrow \bar{S}, \text{ com } \bar{\alpha}(t_0) = \varphi(p) \text{ e } \bar{\alpha}(t_1) = \varphi(q),$$

sendo uma geodésica minimizante ligando $\varphi(p)$ e $\varphi(q)$. Então, pela definição de geodésica minimizante, temos o comprimento

$$\bar{l}(\bar{\alpha}_{\varphi(p), \varphi(q)}) = \bar{d}(\varphi(p), \varphi(q)). \quad (3.4)$$

Segue da desigualdade (3.3) que

$$\begin{aligned}
|\alpha'(t)|_p \geq c|d\varphi_p(\alpha'(t))|_{\varphi(p)} &\Rightarrow \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\alpha'(t)|_p dt \geq c \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} |d\varphi_p(\alpha'(t))|_{\varphi(p)} dt \\
&\Rightarrow \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\alpha'(t)| dt \geq c \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\bar{\alpha}'(t)| dt \\
&\Rightarrow l(\alpha_{p,q}) \geq c\bar{l}(\bar{\alpha}_{\varphi(p),\varphi(q)}),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $p, q \in S$.

Sendo $\bar{\alpha}$ uma geodésica minimizante, de acordo com (3.4) e (3.5), temos que

$$l(\alpha_{p,q}) \geq c\bar{d}(\varphi(p), \varphi(q)), \tag{3.6}$$

isto é, $c\bar{d}(\varphi(p), \varphi(q))$ é cota inferior do conjunto dos comprimentos das curvas regulares por partes ligando p e q . E mais,

$$l(\alpha_{p,q}) \geq \inf l(\alpha_{p,q}) = d(p, q). \tag{3.7}$$

Pela definição de ínfimo, segue de (3.6) e (3.7) que

$$d(p, q) \geq c\bar{d}(\varphi(p), \varphi(q)). \tag{3.8}$$

Seja $\{p_n\} \subset S$ uma sequência de Cauchy em S segundo a distância d . Dado $\varepsilon c > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que $n, m \geq n_0$ tem-se

$$c\bar{d}(\varphi(p_m), \varphi(p_n)) \geq d(p_m, p_n) \Rightarrow \bar{d}(\varphi(p_m), \varphi(p_n)) < \varepsilon$$

Assim, $\{\varphi(p_n)\} \subset \bar{S}$ é uma sequência de Cauchy. Como $\bar{S}$ é completa,

$$\{\varphi(p_n)\} \rightarrow \varphi(p_0) \in \bar{S}, \text{ onde } p_0 \in S.$$

Mas, φ^{-1} é contínua, pois φ é um difeomorfismo. Então,

$$\{\varphi^{-1}(\varphi(p_n))\} \rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(p_0)) \Rightarrow \{p_n\} \rightarrow p_0 \in S.$$

Logo, pelo Teorema (3.17), S é completa. ■

3.4 Resultados Principais

Como apontam Riveros e Corro em [11], o teorema a seguir caracteriza superfícies em $\mathbb{R}^3$ que possuem malha de Chebyshev generalizada com curvatura Gaussiana negativa, ângulo de Chebyshev constante e diferente de $\pi/2$.

Teorema 3.19 *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de Riemann conexa orientada e φ uma constante diferente de $\pi/2$. Existe uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com malha de Chebyshev generalizada, curvatura Gaussiana negativa $K = -e^{-2\bar{u}}$ se, e somente se, existe uma função meromorfa global $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ que admite somente polos simples, satisfaz a expressão*

$$2e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h'|^2 \langle h, (1 + \varepsilon i)h' \rangle - [1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h|^2] \langle h', (1 + \varepsilon i)h'' \rangle = 0 \quad (3.9)$$

e $h'(z) \neq 0$ em todos os pontos regulares. Além disso, localmente, as formas fundamentais de X são dadas por

$$I = e^{(1-\varepsilon \cos \varphi)\bar{u}+c} [du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2], \quad (3.10)$$

$$II = 2e^{-\varepsilon \cos \varphi \bar{u}+c} \sin \varphi dudv, \quad (3.11)$$

onde

$$\bar{u}(u, v) = \ln \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h(z)|^2}{2|h'(z)|} \right)^{\frac{2}{1+\varepsilon \cos \varphi}}, \quad (3.12)$$

e $c \in \mathbb{R}$, $z = u + iv \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Demonstração: Se existe uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com malha de Chebyshev generalizada, curvatura Gaussiana $K = -e^{-2\bar{u}}$ e ângulo de Chebyshev φ . Considere a equação de Gauss (2.55). Essa equação pode ser assim desenvolvida

$$\begin{aligned} 2e^{\bar{v}} \sin \varphi &= 2\varphi_{uv} + (\bar{u}_u \sin \varphi)_u + (\bar{u}_v \sin \varphi)_v \\ &= 2\varphi_{uv} + \bar{u}_{uu} \sin \varphi + \bar{u}_u \cos \varphi \varphi_u + \bar{u}_{vv} \sin \varphi + \bar{u}_v \cos \varphi \varphi_v \\ &= 2\varphi_{uv} + (\bar{u}_u \varphi_u + \bar{u}_v \varphi_v) \cos \varphi + (\bar{u}_{uu} + \bar{u}_{vv}) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Sendo o ângulo φ constante,

$$2e^{\bar{v}} \sin \varphi = (\bar{u}_{uu} + \bar{u}_{vv}) \sin \varphi$$

ou, equivalentemente,

$$\bar{u}_{uu} + \bar{u}_{vv} = 2e^{\bar{v}}$$

pode ser escrita como

$$\Delta \bar{u} = 2e^{\bar{v}}. \quad (3.13)$$

Agora, as equações (2.55) e (2.56) podem ser diferenciadas em termos das variáveis u e v , como segue

$$\begin{aligned} \bar{v}_{uv} + \bar{u}_{uv} - \bar{u}_{vv} \cos \varphi &= 0, & \bar{v}_{uu} + \bar{u}_{uu} - \bar{u}_{vu} \cos \varphi &= 0, \\ \bar{v}_{vu} + \bar{u}_{vu} - \bar{u}_{uu} \cos \varphi &= 0, & \bar{v}_{vv} + \bar{u}_{vv} - \bar{u}_{uv} \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Em cada um desses pares de equações subtraímos a segunda equação da primeira. Vejamos

$$\begin{aligned} \bar{v}_{uv} + \bar{u}_{uv} - \bar{u}_{vv} \cos \varphi - (\bar{v}_{vu} + \bar{u}_{vu} - \bar{u}_{uu} \cos \varphi) &= 0, \\ \bar{v}_{uu} + \bar{u}_{uu} - \bar{u}_{vu} \cos \varphi - (\bar{v}_{vv} + \bar{u}_{vv} - \bar{u}_{uv} \cos \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, sendo $\bar{u}_{vu} = \bar{u}_{uv}$ e $\bar{v}_{vu} = \bar{v}_{uv}$, obtemos

$$(\bar{u}_{uu} - \bar{u}_{vv}) \cos \varphi = 0, \quad (3.14)$$

$$\bar{v}_{uu} - \bar{v}_{vv} + \bar{u}_{uu} - \bar{u}_{vv} = 0. \quad (3.15)$$

Como $\varphi \neq \pi/2$, segue de (3.14) e (3.15) que

$$\bar{u}_{uu} = \bar{u}_{vv} \quad \text{e} \quad \bar{v}_{uu} = \bar{v}_{vv}.$$

Substituindo $\bar{u}_{uu} = \bar{u}_{vv}$ em (3.13), temos

$$\bar{u}_{uu} + \bar{u}_{vv} = 2\bar{u}_{uu} = 2\bar{u}_{vv} = 2e^{\bar{v}} \implies \bar{u}_{uu} = e^{\bar{v}} \quad \text{e} \quad \bar{u}_{vv} = e^{\bar{v}}.$$

Diferenciando $\bar{u}_{uu} = e^{\bar{v}}$ e $\bar{u}_{vv} = e^{\bar{v}}$ em relação a v e a u , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_{uu} = e^{\bar{v}} &\Rightarrow \bar{u}_{uuv} = e^{\bar{v}} \bar{v}_v & \bar{u}_{vv} = e^{\bar{v}} &\Rightarrow \bar{u}_{vvu} = e^{\bar{v}} \bar{v}_u \\ &\Rightarrow \bar{u}_{uuvv} = e^{\bar{v}} \bar{v}_v \bar{v}_v + e^{\bar{v}} \bar{v}_{vv} & &\Rightarrow \bar{u}_{vvuu} = e^{\bar{v}} \bar{v}_u \bar{v}_u + e^{\bar{v}} \bar{v}_{uu} \\ &\Rightarrow \bar{u}_{uuvv} = e^{\bar{v}} [(\bar{v}_v)^2 + \bar{v}_{vv}] & &\Rightarrow \bar{u}_{uuvv} = e^{\bar{v}} [(\bar{v}_u)^2 + \bar{v}_{uu}]. \end{aligned}$$

Como $\bar{u}_{uvuv} = \bar{u}_{vvuu}$ e $\bar{v}_{uu} = \bar{v}_{vv}$, segue que

$$e^{\bar{v}}[(\bar{v}_v)^2 + \bar{v}_{vv}] = e^{\bar{v}}[(\bar{v}_u)^2 + \bar{v}_{vv}],$$

ou seja,

$$(\bar{v}_u)^2 - (\bar{v}_v)^2 = 0,$$

donde

$$(\bar{v}_u + \bar{v}_v)(\bar{v}_u - \bar{v}_v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{v}_u + \bar{v}_v = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{v}_u - \bar{v}_v = 0.$$

Daí, tomando $\varepsilon = \pm 1$, temos

$$\bar{v}_u + \varepsilon \bar{v}_v = 0. \quad (3.16)$$

Agora, substituindo em (3.16) as derivadas $\bar{v}_u$ e $\bar{v}_v$, provenientes, respectivamente, das equações de Codazzi (2.55) e (2.56) chegamos em

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{v}_u + \varepsilon \bar{v}_v = -\bar{u}_u + \bar{u}_v \cos \varphi - \varepsilon \bar{u}_v + \varepsilon \bar{u}_u \cos \varphi \\ &= -[\bar{u}_u - \varepsilon \bar{u}_u \cos \varphi + \varepsilon \bar{u}_v - \varepsilon^2 \bar{u}_v \cos \varphi] \\ &= -[(\bar{u}_u + \varepsilon \bar{u}_v)(1 - \varepsilon \cos \varphi)]. \end{aligned}$$

Como $(1 - \varepsilon \cos \varphi) \neq 0$, pois assumimos que $0 < \varphi < \pi$, tem-se

$$\bar{u}_u + \varepsilon \bar{u}_v = 0 \quad \implies \quad \bar{u}_u = -\varepsilon \bar{u}_v. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) nas equações de Codazzi em (2.55) e (2.56), temos

$$\begin{aligned} \bar{v}_u &= -[\bar{u}_u - \bar{u}_v \cos \varphi] & \bar{v}_v &= -[\bar{u}_v - \bar{u}_u \cos \varphi] \\ &= -[\bar{u}_u + \varepsilon \bar{u}_u \cos \varphi] & &= -[\bar{u}_v + \varepsilon \bar{u}_v \cos \varphi] \\ &= -[1 + \varepsilon \cos \varphi] \bar{u}_u & &= -[1 + \varepsilon \cos \varphi] \bar{u}_v, \end{aligned}$$

então

$$\bar{v}_u = -[1 + \varepsilon \cos \varphi] \bar{u}_u \quad \text{e} \quad \bar{v}_v = -[1 + \varepsilon \cos \varphi] \bar{u}_v.$$

Assim,

$$\bar{v} = -(1 + \varepsilon \cos \varphi) \bar{u} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Substituindo em $\Delta \bar{u} = 2e^{\bar{v}}$, obtemos

$$\Delta \bar{u} = 2e^c e^{-(1+\varepsilon \cos \varphi)\bar{u}}$$

Em seguida, se considerarmos $R = 2e^c$ e $S = (1 + \varepsilon \cos \varphi)$, pela Proposição (3.10), obtemos (3.12), isto é,

$$\bar{u}(u, v) = \ln \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h(z)|^2}{2|h'(z)|} \right)^{\frac{2}{1+\varepsilon \cos \varphi}},$$

onde h é uma função meromorfa global que admite somente polos simples, tal que $h'(z) \neq 0$ em todo ponto regular. Segue de (3.12) que

$$\begin{aligned} \bar{u}(u, v) &= \ln \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h(z)|^2}{2|h'(z)|} \right)^{\frac{2}{1+\varepsilon \cos \varphi}} \\ &= \frac{2}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \left\{ \ln [1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h(z)|^2] - \ln[2|h'(z)|] \right\}. \end{aligned}$$

Daí, utilizando os itens (i) e (ii) da Proposição (3.3), obtemos

$$\bar{u}_u = \frac{2e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h'|^2 \langle h, h' \rangle - [1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h|^2] \langle h', h'' \rangle}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)[1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h|^2]|h'|^2}. \quad (3.19)$$

Analogamente, temos

$$\varepsilon \bar{u}_v = \frac{2e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h'|^2 \langle h, \varepsilon i h' \rangle - [1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h|^2] \langle h', \varepsilon i h'' \rangle}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)[1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h|^2]|h'|^2} \quad (3.20)$$

Logo, de (3.19) e (3.20), a igualdade em (3.17) é equivalente a

$$2e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h'|^2 \langle h, (1 + \varepsilon i)h' \rangle - [1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h|^2] \langle h', (1 + \varepsilon i)h'' \rangle = 0$$

o que nos dá a expressão (3.9).

E mais, substituindo (3.18) nas expressões (2.52) e (2.53) encontradas na Proposição (2.18), temos as expressões (3.10) e (3.11)

$$I = e^{(1-\varepsilon \cos \varphi)\bar{u}+c} [du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2],$$

$$II = 2e^{-\varepsilon \cos \varphi \bar{u}+c} \sin \varphi dudv$$

A recíproca segue do Teorema (2.2). ■

Corolário 3.20 *Considere S uma superfície com malha de Chebyshev generalizada, curvatura Gaussiana negativa $K = -e^{-2\bar{u}}$ e ângulo de Chebyshev constante $\varphi \neq \pi/2$. Então as linhas assintóticas da superfície S têm curvaturas geodésicas com mesmo valor absoluto.*

Demonstração: Seja $X(u, v)$ uma parametrização da superfície S por linhas assintóticas. Segue do Teorema (3.19) que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = G = e^{(1-\varepsilon \cos \varphi)\bar{u}+c}, \quad F = \cos \varphi e^{(1-\varepsilon \cos \varphi)\bar{u}+c}, \quad (3.21)$$

onde $\varepsilon = \pm 1$.

Considera em S as seguintes linhas assintóticas

$$\alpha(s) = X(u(s), c) \quad \text{e} \quad \beta(s) = X(c, v(s))$$

parametrizadas pelo comprimento de arco s , onde $c = \text{constante}$. Segue que

$$|\alpha'(s)| = |\beta'(s)| = 1$$

implica em

$$\begin{aligned} |\alpha'(s)|^2 = |\beta'(s)|^2 = 1 &\implies |X_u|^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 1 \quad \text{e} \quad |X_v|^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1 \\ &\implies |X_u| \frac{du}{ds} = \pm 1 \quad \text{e} \quad |X_v| \frac{dv}{ds} = \pm 1 \\ &\implies \frac{du}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{E}} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{G}}. \end{aligned}$$

Donde, para $\varepsilon = \pm 1$

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (3.22)$$

e

$$\frac{dv}{ds} = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{G}}. \quad (3.23)$$

Assim, segue de (3.22), (3.23) e da fórmula de Beltrami em (2.11), que as curvaturas geodésicas das curvas assintóticas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ são, respectivamente,

$$(k_g)_{v=\text{const.}} = \varepsilon \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}} \quad (3.24)$$

$$(k_g)_{u=\text{const.}} = -\varepsilon \Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}}, \quad (3.25)$$

onde $\varepsilon = \pm 1$. Segue dos valores de Γ_{11}^2 , Γ_{22}^1 , obtidos em (2.3), e de (3.17) que

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\
 &= \frac{2EF(1 - \varepsilon \cos \varphi)\bar{u}_u - EE(1 - \varepsilon \cos \varphi)\bar{u}_v - FE(1 - \varepsilon \cos \varphi)\bar{u}_u}{2(EG - F^2)} \\
 &= \frac{2EF(\bar{u}_u + \bar{u}_v \cos \varphi) - EE(\bar{u}_v + \bar{u}_u \cos \varphi) - FE(\bar{u}_u + \bar{u}_v \cos \varphi)}{2(EG - F^2)} \\
 &= \frac{EF(\bar{u}_u + \bar{u}_v \cos \varphi) - EE(\bar{u}_v + \bar{u}_u \cos \varphi)}{2(EG - F^2)}.
 \end{aligned}$$

Mas, em (3.21) vimos que

$$E = G \implies F = E \cos \varphi.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^2 &= \frac{EF(\bar{u}_u + \bar{u}_v \cos \varphi) - EE(\bar{u}_v + \bar{u}_u \cos \varphi)}{2(EG - F^2)} \\
 &= \frac{E^2 \cos \varphi(\bar{u}_u + \bar{u}_v \cos \varphi) - E^2(\bar{u}_v + \bar{u}_u \cos \varphi)}{2(E^2 - (E \cos \varphi)^2)} \\
 &= \frac{\cos \varphi(\bar{u}_u + \bar{u}_u \cos \varphi) - (\bar{u}_v + \bar{u}_u \cos \varphi)}{2(1 - \cos^2 \varphi)} \\
 &= \frac{\cos \varphi(\bar{u}_u + \bar{u}_v \cos \varphi) - (\bar{u}_v + \bar{u}_u \cos \varphi)}{2(1 - \cos^2 \varphi)} \\
 &= -\frac{\bar{u}_v}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por analogia, temos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\
 &= \frac{2GF(\bar{u}_v + \bar{u}_u \cos \varphi) - GG(\bar{u}_u + \bar{u}_v \cos \varphi) - FG(\bar{u}_v + \bar{u}_u \cos \varphi)}{2(EG - F^2)} \\
 &= \frac{GF(\bar{u}_v - \bar{u}_u \cos \varphi) - GG(\bar{u}_u - \bar{u}_v \cos \varphi)}{2(EG - F^2)} \\
 &= \frac{G^2(\bar{u}_v \cos \varphi + \bar{u}_u \cos^2 \varphi) - G^2(\bar{u}_u + \bar{u}_v \cos \varphi)}{2(EG - F^2)} \\
 &= \frac{\bar{u}_v \cos \varphi + \bar{u}_u \cos^2 \varphi - \bar{u}_u - \bar{u}_v \cos \varphi}{2(1 - \cos^2 \varphi)} \\
 &= -\frac{\bar{u}_u}{2} \\
 &= \frac{\varepsilon \bar{u}_v}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Em seguida, substituímos os valores encontrados nas igualdades (3.26) e (3.27) em (3.24) e (3.25), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
 (k_g)_{v=const.} &= \varepsilon \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}} \\
 &= \varepsilon \Gamma_{11}^2 \frac{E\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{E\sqrt{E}} \\
 &= \varepsilon \Gamma_{11}^2 \frac{\sin \varphi}{\sqrt{E}} \\
 &= -\frac{\varepsilon \bar{u}_v \sin \varphi}{2\sqrt{E}}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

e

$$\begin{aligned}
 (k_g)_{u=const.} &= -\varepsilon \Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}} \\
 &= -\varepsilon \left(\varepsilon \frac{\bar{u}_v}{2} \right) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{G}} \\
 &= -\frac{\bar{u}_v \sin \varphi}{2\sqrt{E}}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Por fim, substituindo (3.29) em (3.28), obtemos

$$(k_g)_{v=const.} = \varepsilon (k_g)_{u=const.},$$

onde $\varepsilon = \pm 1$. ■

Corolário 3.21 *Existe uma família de superfícies de 4-parâmetros com malha de Chebyshev generalizada, ângulo de Chebyshev φ constante e diferente de $\pi/2$, onde*

$$I = e^c \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \right)^{\frac{2(1 - \varepsilon \cos \varphi)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} [du^2 + 2 \cos \varphi du dv + dv^2] \tag{3.30}$$

$$II = 2e^c \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \right)^{\frac{-2\varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \sin \varphi du dv \tag{3.31}$$

são, respectivamente, as expressões da primeira e segunda formas fundamentais. Além disso, se $c \geq -\ln(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, as formas fundamentais (3.30) e (3.31) determinam uma superfície completa.

Demonstração: Defina a função holomorfa

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto h(z) = e^{(\varepsilon+i)kz+z_1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $z_1 = a + ib$, com $a, b, k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$. Derivando h uma vez em termo de z , obtemos

$$h' = e^{(\varepsilon+i)kz+z_1}(\varepsilon + i)k = h(\varepsilon + i)k. \quad (3.33)$$

Derivando novamente,

$$h'' = h'(\varepsilon + i)k = h(\varepsilon + i)^2k^2. \quad (3.34)$$

Multiplicando (3.33) e (3.34) por $(1 + \varepsilon i)$, temos

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon i)h' &= h' + \varepsilon ih' \\ &= h(\varepsilon + i)k + \varepsilon ih(\varepsilon + i)k \\ &= h\varepsilon k + hik + \varepsilon^2 hki - \varepsilon hk \\ &= i2kh, \end{aligned}$$

isto é,

$$(1 + \varepsilon i)h' = i2kh \quad (3.35)$$

e, analogamente, obtemos

$$(1 + \varepsilon i)h'' = i2kh'. \quad (3.36)$$

Como $h \neq 0$, pelo Lema (3.4), as igualdades em (3.35) e (3.36) nos fornecem

$$\langle h, (1 + \varepsilon i)h' \rangle = \langle h, i2kh \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle h', (1 + \varepsilon i)h'' \rangle = \langle h', i2kh' \rangle = 0;$$

logo, h é solução da Equação (3.9) do Teorema (3.19). Além disso, sendo $z = u + iv$ e $z_1 = a + ib$, a função em (3.32) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} h(z) &= e^{k(\varepsilon u - v) + a + i[k(\varepsilon v + u) + b]} \\ &= e^{k(\varepsilon u - v) + a} \{ \cos[k(\varepsilon v + u) + b] + i \sin[k(\varepsilon v + u) + b] \}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$|h(z)|^2 = e^{2[k(\varepsilon u - v) + a]} \quad (3.37)$$

implica em

$$|h'(z)| = \sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}. \quad (3.38)$$

Daí, substituímos as expressões (3.37) e (3.38) em (3.12), como segue

$$\begin{aligned} \bar{u}(u, v) &= \ln \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)|h(z)|^2}{2|h'(z)|} \right)^{\frac{2}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \\ &= \ln \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \right)^{\frac{2}{1 + \varepsilon \cos \varphi}}. \end{aligned}$$

Agora, substituindo $\bar{u}(u, v)$ em (3.10) e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} I &= e^{(1 - \varepsilon \cos \varphi)\bar{u} + c} [du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2] \\ &= e^{\ln \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \right)^{\frac{2(1 - \varepsilon \cos \varphi)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} + c} [du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2] \\ &= e^c \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \right)^{\frac{2(1 - \varepsilon \cos \varphi)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} [du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} II &= 2e^{-(\varepsilon \cos \varphi)\bar{u} + c} \sin \varphi dudv \\ &= 2e^{-\varepsilon \cos \varphi \ln \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \right)^{\frac{2}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} + c} \sin \varphi dudv \\ &= 2e^c \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \right)^{\frac{-2\varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \sin \varphi dudv. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema (3.19), existe uma família a 4-parâmetros $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de superfícies com malha de Chebyshev generalizada e ângulo de Chebyshev constante. Por outro lado, como $c \geq -\ln(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, segue que

$$\begin{aligned} e^c \geq \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi} &\iff e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi) \geq 1 \\ &\iff e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a} \geq e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a} \\ &\iff 1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a} \geq 1 + e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Seque que

$$1 + e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a} \geq e^{k(\varepsilon u - v) + a}. \quad (3.40)$$

De fato, a fim de que

$$(e^{k(\varepsilon u - v) + a})^2 - e^{k(\varepsilon u - v) + a} + 1 \geq 0$$

é necessário e suficiente que o discriminante Δ do polinômio

$$p(\sigma) = \sigma^2 - \sigma + 1, \quad (3.41)$$

onde $\sigma = e^{k(\varepsilon u - v) + a}$, seja negativo. Ou, mais precisamente, que (3.41) tenha

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 \quad \Rightarrow \quad \Delta < 0.$$

Logo, segue de (3.39) e (3.40) que

$$1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a} \geq e^{k(\varepsilon u - v) + a}. \quad (3.42)$$

Ademais, dividindo ambos os lados da expressão em (3.42) por $(2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a})$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} &\geq \frac{e^{k(\varepsilon u - v) + a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}|k|} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Portanto, segue de (3.43) que

$$\left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \right)^{\frac{2(1 - \varepsilon \cos \varphi)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \geq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}|k|} \right)^{\frac{2(1 - \varepsilon \cos \varphi)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}}. \quad (3.44)$$

Agora, considere por simplicidade de notação,

$$\Psi = \left(\frac{1 + e^c(1 + \varepsilon \cos \varphi)e^{2k(\varepsilon u - v) + 2a}}{2\sqrt{2}|k|e^{k(\varepsilon u - v) + a}} \right)^{\frac{2(1 - \varepsilon \cos \varphi)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \quad (3.45)$$

Assim, segue de (3.44) que a métrica ds^2 de X , dada por

$$ds^2 = \Psi e^c [du^2 + 2 \cos \varphi du dv + dv^2]$$

é tal que

$$\begin{aligned}
ds^2 &= e^c \Psi [du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2] \\
&\geq e^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}|k|} \right)^{\frac{2(1-\varepsilon \cos \varphi)}{1+\varepsilon \cos \varphi}} [du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2] \\
&= C [du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2] \\
&= C d\bar{s}^2.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$ds^2 \geq C d\bar{s}^2, \quad (3.46)$$

onde $C = e^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}|k|} \right)^{\frac{2(1-\varepsilon \cos \varphi)}{1+\varepsilon \cos \varphi}}$ e $d\bar{s}^2 = du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2$. Em relação à métrica $d\bar{s}^2$ os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = F = G = 1,$$

isto é, são constantes. Pela Proposição (2.8) as geodésicas da superfície, segundo a métrica $d\bar{s}^2$, são retas; logo as superfícies que as contém são planos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, então $d\bar{s}^2$ é completa. Por outro lado, a desigualdade em (3.46) significa que a métrica ds^2 é mais fina que a métrica³ $d\bar{s}^2$. Então podemos tomar o difeomorfismo do Teorema (3.18) como sendo a identidade correspondente a essa desigualdade. Daí, o Teorema (3.18) nos assegura que ds^2 é completa. Portanto a superfície determinada pelas formas fundamentais em (3.30) e (3.31) é completa. ■

³Veja em [7], Capítulo 2, mais detalhes sobre o fato de a métrica ds^2 ser mais fina que a métrica $d\bar{s}^2$.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho estudamos a caracterização feita por Riveros e Corro [11] de uma classe de superfícies com curvatura Gaussiana negativa parametrizada por malha de Chebyshev generalizada e com ângulo de Chebyshev constante e diferente de $\pi/2$ no espaço Euclidiano de três dimensões. Para tanto, fizemos estudo, a grosso modo, de alguns conceitos de Geometria Diferencial, de Álgebra Linear, de Variáveis Complexas e de Equações Diferenciais Parciais com intuito de darmos suporte para o entendimento do Teorema (3.19) e seus respectivos corolários.

Além disso, nesses estudos, tivemos a oportunidade de nos aprofundarmos em conceitos, propriedades e expressões encontradas na Geometria Diferencial como, por exemplo, as Equações de Compatibilidade, que neste caso, foram investigadas, não somente para superfícies parametrizadas por curvas coordenadas, mas também para as superfícies parametrizadas por malha de Chebyshev generalizada e com curvatura Gaussiana negativa e constante.

Ademais, é interessante notar que o coeficiente $(1 + \varepsilon i)$ da Equação (3.9), além de ser não nulo, é comum a ambas as parcelas dessa equação. Isso sugere que, após fazermos os devidos ajustes no espaço onde as superfícies estão imersas, talvez a Equação (3.9) possa ser reescrita sem esse coeficiente.

Bibliografia

- [1] A. Fujioka, *Bianchi Surfaces with Constant Chebyshev Angle*, Tokyo J. Math. 27 (1) (2004). 149-153.
- [2] Ávila, Geraldo, *Variáveis Complexas com Aplicações*, 3ª ed., Rio de Janeiro: Editora LTC, 2000.
- [3] Bezerra, Adriano Cavalcante, *Superfícies de Bianchi com Ângulo de Chebyshev Constante*, Dissertação de Mestrado, Goiânia: IME-UFG, 2010.
- [4] Carmo, M. Perdigão do, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 5ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [5] L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Pisa (1909).
- [6] L. Bianchi, *Sopra Alcune Nuevo Classi di Superficie e di Sistemi Tripli Ortogonali*, Ann. Mat. (2) 18 (1890), 301-358.
- [7] Lima, Elon Lages, *Espaços Métricos*, 3ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [8] F. Brito, J. Hounie and M. L. Leite, *Liouville's Formula in Arbitrary Planar Domains*, Nonlinear Analysis 60 (2005), 1287-1302.
- [9] F. Brito and M. L. Leite, *Uniqueness and Globality of the Liouville Formula for Entire Solution of $\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\lambda}{2} = 0$* , Arch. Math. 80 (2003), 501-506.
- [10] F. Brito, M. L. Leite and V. Neto, *Liouville's Formula Under the Viewpoint of Minimal Surfaces*, Communication on Pure and Applied Analysis 3 (1) (2004), 41-51.
- [11] Riveros, Carlos M. C. and Corro, Armando M. V., *Surfaces with Constant Chebyshev Angle*, Tokyo J. Math, Vol. 35, No. 2 (2012), 359-366.

- [12] Tenenblat, Ketí, *Introdução à Geometria Diferencial*, 2^a ed., São Paulo: Blucher, 2008.