

**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
GOIÁS
Câmpus Goiânia

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia.

Departamento de áreas acadêmicas II

Especialização em Matemática

Rayanne Auxiliadora de Oliveira Matos

POLINÔMIOS PALINDRÔMICOS: MÉTODO ALTERNATIVO PARA A REDUÇÃO DO GRAU

Goiânia

Julho de 2019



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia - Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Rayanne Auxiliadora de Oliveira Matos

Matrícula: 20172011160104

Título do Trabalho: Polinômios palindrômicos: método alternativo para a redução do grau

Autorização - Marque uma das opções

- ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
- ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
- ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Local

Goiânia, 07/05/2021.

Data

Rayanne Auxiliadora de Oliveira Matos

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Rayanne Auxiliadora de Oliveira Matos

POLINÔMIOS PALINDRÔMICOS: MÉTODO ALTERNATIVO PARA A REDUÇÃO DO GRAU

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Programa de Especialização em Matemática - De-
partamento II - IFG, como requisito parcial para
obtenção do título de Especialista em Matemática.

Goiânia

Julho de 2019

M4281p Matos, Rayanne Auxiliadora de Oliveira.
Polinômios palindrômicos: método alternativo para a redução do grau / Rayanne
Auxiliadora de Oliveira Matos. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
de Goiás, Câmpus Goiânia, 2019.
49 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Saavedra Vásquez.

Monografia (Especialização) – Especialização em Matemática, Departamento de Áreas
Acadêmicas II, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus
Goiânia.

1. Polinômios. 2. Polinômios palindrômicos. 3. Círculo Unitário. I. Vásquez, Júlio César
Saavedra (orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás –
Câmpus Goiânia. III. Título.

CCD 512.9422

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Karol Almeida da Silva Abreu CRB1/ 2.740
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.

Polinômios Palindrômicos: Método Alternativo para a Redução do Grau

por

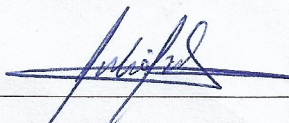
Rayanne Auxiliadora de Oliveira Matos

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação lato sensu em Matemática - Departamento de Áreas Acadêmicas II - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática

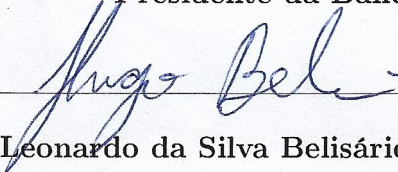
Orientador: Prof. Dr. Julio César Saavedra Vásquez

Aprovada pela seguinte banca examinadora:

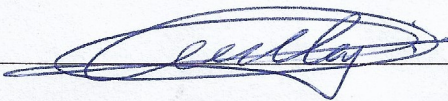


Prof. Dr. Julio César Saavedra Vásquez - IFG/Câmpus Goiânia

Presidente da Banca



Prof. Dr. Hugo Leonardo da Silva Belisário - IFG/Câmpus Goiânia



Prof. Me. Wesley Pinheiro Barreto - IFG/Câmpus Goiânia

Goiânia

12 de Julho de 2019

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus pela oportunidade proporcionada.

Ao meu marido Celso por seu amor, compreensão, carinho e apoio durante essa jornada.

Aos meus filhos, Tarsila e Oscar, minhas inspirações para tudo o que faço.

A minha mãe, irmão e sogros, por toda ajuda prestada durante o período do curso.

Aos professores deste instituto, por dividirem seus conhecimentos e suas experiências, pelo incentivo e dedicação prestados.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Júlio Cesar Saavedra Vasquez, por seu incentivo, apoio, sabedoria, empenho, trabalho, amizade e dedicação.

Dedicatória

A minha família

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre Polinômios Auto-inversíveis, em especial, os Polinômios Palindrômicos. Para isso apresentamos resultados clássicos referentes a teoria clássica de polinômios, bem como o estudo do comportamento de suas raízes no plano cartesiano, definições e propriedades acerca dos polinômios auto-inversíveis e palindrômicos.

Apresentamos um método Alternativo para a Redução do Grau dos polinômios palindrômicos P , no caso deste ser de grau $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) utilizando as relações de Viète e as características inerentes às suas raízes, obtemos um polinômio Q de grau n , que chamaremos de polinômio reduzido de P . No caso de P ser de grau ímpar ($2n + 1, n \in \mathbb{N}$) isto também é possível, já que -1 é uma raiz de todo polinômio palindrômico de grau ímpar. Uma vez que o polinômio reduzido Q associado a P contém todas as raízes deste, é possível determiná-las resolvendo n equações quadráticas ou a partir dos coeficientes de Q podermos inferir a cerca da natureza de suas raízes e por consequência acerca das natureza das raízes de P e a localização destas em relação ao círculo unitário.

Palavras-chave: Zeros de polinômios, Localização de zeros de polinômios, Polinômios Auto-inversíveis, Polinômios Palindrômicos, Círculo Unitário.

Abstract

This paper presents a study on self-inverting polynomials, especially the palindromic polynomials. For this we present classic results referring to the classical theory of polynomials, as well as the study of the behavior of its roots in the Cartesian plane, definitions and properties about the self-inverting and palindromic polynomials.

We present an alternative method for reducing the degree of palindromic polynomials P in case this is of degree $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) using Viète's relations and the inherent characteristics of its roots, we obtain a Q degree n polynomial, which we will call the P short polynomial. If P is odd-grade ($2n + 1, n \in \mathbb{N}$) this is also possible, since -1 is a root of every odd-grade palindromic polynomial. Since the reduced Q polynomial associated with P contains all its roots, it is possible to determine them by solving n quadratic equations or from the coefficients of Q we can infer about the nature of its roots and consequently about the nature of the P roots and their location in relation to the unit circle.

Keywords: Polynomial zeros, Polynomial zeros localization, Self-inverting polynomials, Palindromic polynomials, Unitary Circle.

Lista de Figuras

1	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 3z^5 + 4z^4 + 2z^3 + 1.5z + 1$	17
2	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 10z^5 + 5z^4 + 3z^3 + 1.5z - 2$	20
3	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 10z^5 + 5z^4 + 3z^3 + 1.5z + 1$ em relação a $ z \leq 1$	21
4	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 8z^6 + 5z^5 + 3z^4 + 2z^2 + z + 0.5$	22
5	Representação dos zeros dos polinômios $P(z) = 5z^2 + 2z + 2$ e $P^*(z) = 2z^2 + 2z + 5$.	24
6	Representação dos zeros do polinômio $P(z) = ((1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})i)z^2 + (3\sqrt{3} - 3i)z + (2 + 2i)$	25
7	Representação dos zeros do polinômio $P(z) = 2z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 6z + 2$	26
8	Representação dos zeros do polinômio $P(z) = 6z^6 + 3z^5 - 4z^4 + 3z^3 - 4z^2 + 3z + 6$. .	31
9	Representação dos zeros do polinômio $[P'(z)]^* = 3z^5 - 8z^4 + 9z^3 - 16z^2 + 15z + 36$. .	32
10	Representação dos zeros do polinômio $P(z) = 3z^5 - 4z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 4z + 3$	33
11	Representação dos zeros do polinômio $P'(z) = 15z^4 - 16z^3 + 6z^2 + 4z - 4$	33
12	Representação dos zeros do polinômio de Lehmer $P(z) = z^{10} + z^9 - z^7 - z^6 - z^5 - z^4 - z^3 + z + 1$	37
13	Representação dos zeros do polinômio $Q(z) = z^5 + z^4 - 5z^3 - 5z^2 + z + 3$	37
14	Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^4 - 2z^3 - 2z + 1$	38
15	Representação dos zeros do polinômio $Q(w) = w^2 - 2w - 2$	38
16	Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^6 - z^4 - 2z^3 - z^2 + 1$	39
17	Representação dos zeros do polinômio $Q(w) = w^3 - 4w + 2$	39
18	Representação dos zeros da equação quadrática $-2, 58 = z + \frac{1}{z}$	45
19	Representação dos zeros do polinômio $Q(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 7x + 5$	45
20	Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^{10} + z^9 - z^8 + z^7 - z^6 + 5z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z + 1$	46

21	Representação dos zeros do polinômio $Q(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x$	46
22	Representação dos zeros do polinômio $R(z) = z^8 + 3z^7 + 2z^5 - z^4 + 2z^3 + 3z + 1$. . .	47
23	Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^9 + 4z^8 + 3z^7 + 2z^6 + z^5 + z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + 1$	47

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	12
2.1	Propriedades básicas	12
2.2	Relação entre coeficientes e raízes	13
2.3	Limitantes para os zeros de um polinômio	15
3	Polinômios auto-inversíveis	23
3.1	Polinômios auto-inversíveis e Palindrômicos	23
3.2	Zeros de Polinômios Auto-Inversíveis	29
4	Método alternativo para a redução do grau dos Polinômios Palindrômicos com coeficientes reais	34
4.1	Zeros no Círculo Unitário	34
4.2	Método Alternativo para a redução do grau dos polinômios palindrômicos .	40
5	Considerações Finais	48
	Referências	49

1 Introdução

Os polinômios formam uma classe importante de funções que devido a natureza de suas estruturas são muito simples de se avaliar e resultados relacionados aos zeros de polinômios são utilizados em diversas áreas da matemática para se estudar soluções de inúmeros problemas. A busca por soluções de equações polinomiais é um assunto estudado há muitos anos. Os babilônios, por volta de 1700 a.C., e os hindus por volta de 600 a.C já conheciam regras para encontrar zeros de polinômios quadráticos. Tartaglia, no século XVI determinou um método para a resolução de equações cúbicas do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$ e nos séculos seguintes importantes matemáticos como Gauss, Cauchy, Hermite, Jensen, Dieudonné e Pólya contribuíram nessa área. Atualmente as funções polinomiais são tema de muita investigação, tanto do ponto de vista computacional quanto teórico, motivando ainda hoje, o trabalho de vários pesquisadores.

Neste trabalho abordamos uma classe específica de polinômios, conhecidos como polinômios palindrômicos. Considere o polinômio $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_k \neq 0$ com $a_k \in \mathbb{C}$, e associado a $P(z)$ seja o polinômio recíproco $P^*(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k z^{n-k}$. Se existir $u \in \mathbb{C}, |u| = 1$, tal que $P^*(z) = uP(z)$, então $P(z)$ é dito auto-inversível. Em particular, se $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$, então $P(z)$ é dito palindrômico. Neste caso, os coeficientes de $P(z)$ satisfazem $a_{n-k} = a_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$. Se $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots, n$ observe que $P^*(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$.

Abordamos, em especial, o comportamento dos zeros dos polinômios palindrômicos no círculo unitário, bem como o estudo de um método para a redução do grau de um polinômio palindrômico.

No segundo capítulo são apresentados resultados clássicos de polinômios e resultados sobre o comportamento dos zeros de polinômios, assim como propriedades básicas, a relação entre coeficientes e raízes e os limitantes para zeros de um polinômio.

No terceiro capítulo abordamos a definição e resultados referentes aos zeros de po-

linômios auto-inversíveis e palindrômicos, enfatizando o comportamento das raízes destes em relação ao círculo unitário.

No quarto capítulo são apresentados dois métodos para a obtenção das raízes de polinômios palindrômicos.

No quinto e último capítulo são apresentadas as considerações finais do trabalho.

Vários exemplos são apresentados para ilustrar os principais resultados. Para a elaboração das figuras apresentadas neste trabalho foi utilizado o software GeoGebra.

2 Preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados sobre zeros de polinômio, relações entre coeficientes e raízes e limitantes para os zeros de um polinômio. As principais referências utilizadas foram FAZINAZZO [5], MARQUES [8] e PEREIRA [7].

2.1 Propriedades básicas

Dada uma sequência de números complexos $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $n \geq 1$, considere a função $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$. A função P é denominada função polinomial ou polinômio associado a sequência dada. Os números $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1z, \dots, a_nz^n$ são chamadas termos do polinômio P . Considerando $a_n \neq 0$, a_n recebe o nome de coeficiente dominante.

Teorema 1. (*Teorema Fundamental da Álgebra*) *Todo polinômio não-nulo $P(z)$ de grau n , $n \geq 1$ com coeficientes complexos $a_k, k = 0, 1, \dots, n$ tem exatamente n zeros complexos $z_1, \dots, z_n$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrado em NETO [1].

Este teorema garante que toda equação polinomial não-constante com coeficientes complexos possui todas as soluções em $\mathbb{C}$. A seguir será apresentado um resultado como consequência imediata do Teorema Fundamental da Álgebra.

Proposição 2.1.1. *Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinômio de grau $n, n \geq 1$, com coeficientes complexos $a_k, k = 0, 1, \dots, n$.*

(i) α é zero de $P(z)$ se, e somente se, $(z - \alpha)$ divide $P(z)$.

(ii) se α é zero de $P(z)$, então existe um $m \geq 1$ tal que $(z - \alpha)^m$ divide $P(z)$. Assim, $P(z) = (z - \alpha)^m Q(z)$ com $Q(z)$ um polinômio complexo de grau $n - m$ onde $Q(\alpha) \neq 0$. Neste caso, diz-se que α é zero de $P(z)$ de multiplicidade m . Se $m = 1$, α é dito zero simples de $P(z)$.

(iii) Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ forem zeros de $P(z)$ dois a dois distintos, então o polinômio $(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_k)$ divide $P(z)$.

Teorema 2. (Teorema da Decomposição) Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinômio de grau n , $n \geq 1$, com coeficientes complexos $a_k, k = 0, 1, \dots, n$. O polinômio $P(z)$ pode ser representado por $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, onde $z_1, z_2, \dots, z_n$ são zeros complexos do polinômio $P(z)$.

Demonstração. A prova deste teorema será dada através de indução sobre o grau n de $P(z)$.

Considerando $n = 1$ o resultado é imediato, pois se $P(z) = a_1 z + a_0$ então $z_1 = -\frac{a_0}{a_1}$ é zero de $P(z)$. Desta forma, $P(z)$ pode ser escrito como $P(z) = a_1 \left(z - \left(-\frac{a_0}{a_1} \right) \right) = a_1(z - z_1)$.

Suponha que o resultado vale para $n - 1$. Será provada a validade para n . De fato, se $z_1 \in \mathbb{C}$ é um zero de $P(z)$, o item (ii) da Proposição 2.1.1 garante a existência de um polinômio $Q(z)$ com coeficientes complexos, tal que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$. Note que $Q(z)$ tem grau $n - 1$ com coeficiente dominante a_n .

Assim, por hipótese de indução, existem $z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tais que $Q(z) = a_n(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n)$.

Portanto $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$

2.2 Relação entre coeficientes e raízes

Agora serão deduzidas as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial de grau $n, (n \geq 1)$. Dada a equação polinomial

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (2.1)$$

com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$, cujas raízes são $z_1, \dots, z_n$. Pelo Teorema da Decomposição segue que:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = a_n z^n - a_n \underbrace{(z_1 + \dots + z_n)}_{S_1} z^{n-1} + \\ &+ a_n \underbrace{(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n)}_{S_2} z^{n-2} + \dots + (-1)^h a_n S_h z^{n-h} + \dots + (-1)^h a_n \underbrace{(z_1 z_2 \dots z_n)}_{S_n} \end{aligned}$$

Logo, comparando a expansão anterior com os coeficientes $a_k, k = 0, 1, \dots, n$ de $P(z)$, segue que:

$$S_1 = z_1 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sigma_1$$

$$S_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \sigma_2$$

$$S_3 = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} = \sigma_3$$

$\vdots$

$$S_h = z_1 z_2 \dots z_h + z_1 z_3 \dots z_h z_{h+1} + \dots + z_{n-(h-1)} \dots z_{n-1} z_n = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} = \sigma_h$$

$\vdots$

$$S_n = z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = \sigma_n$$

As expressões acima estabelecem as relações entre os coeficientes do polinômio $P(z)$ e suas raízes.

As relações acima entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial são conhecidas como fórmulas de Viète ou relações de Girard. Essas relações são referentes aos matemáticos franceses François Viète (1540-1603) e Albert Girard (1595-1632). No século XVI, Viète havia descoberto estas fórmulas para o caso de zeros positivos de um polinômio. Mas a generalização das fórmulas para zeros quaisquer de um polinômio foi primeiro desenvolvida por Girard no século XVII.

O resultado abaixo representa uma aplicação das fórmulas de Viète ou relações de Girard.

Lema 2.2.1. *Se o polinômio $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ tem todos os seus zeros em $|z| \leq 1$ então $|a_0| \leq |a_n|$. Mas, se pelo menos um desses zeros estiver no interior do disco unitário, então $|a_0| < |a_n|$*

Demonstração: Seja $z_1, z_2, \dots, z_n$ zeros de $P(z)$ em $|z| \leq 1$. Usando as fórmulas de Viète, obtém-se $(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = z_1 z_2 z_3 \dots z_n$.

$$\text{Assim, } \left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |z_1 z_2 z_3 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n| \leq 1.$$

Logo, $|a_0| \leq |a_n|$. Sendo a desigualdade estrita se pelo menos um dos zeros estiver no interior do disco unitário.

2.3 Limitantes para os zeros de um polinômio

Nesta seção são apresentados alguns resultados sobre a localização de zeros de polinômios, limitando-os em uma região anelar ou em $|z| \leq r, r > 0$. As principais referências foram MARQUES [8] e PEREIRA [7].

Teorema 3. *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, onde $a_0, a_n \neq 0$, um polinômio com coeficientes complexos,*

$$M = \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$$

e

$$M' = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$$

Então, todos os zeros de $P(z)$ satisfazem

$$\frac{|a_0|}{a_0 + M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}$$

Demonstração: Considere $|z| > 1$. Deste modo.

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n| \\ &= |a_nz^n - (-a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \dots - a_1z - a_0)| \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_nz^n| - |-a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \dots - a_1z - a_0| \\ &= |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + |a_{n-2}||z|^{n-2} + \dots + |a_1||z| + |a_0|) \\ &\geq |a_n||z|^n - M(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \dots + |z| + 1) \\ &= |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^n |z|^{-k} \right) \\ &> |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{-k} \right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Este último somatório representa uma série geométrica de infinitos termos de razão $\frac{1}{|z|} < 1$, cuja soma é dada por:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|z|} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} = \frac{|z|}{|z| - 1}$$

Assim, voltando em (2.2), tem-se

$$\begin{aligned}
 |P(z)| &> |a_n||z|^n \left[1 - \frac{M}{|a_n|} \left(\frac{|z|}{|z|-1} - 1 \right) \right] \\
 &= |a_n||z|^n \left[1 - \frac{M}{|a_n|} \left(\frac{|z|}{|z|-1} \right) \right] \\
 &= |a_n||z|^n \left[\frac{|z| - \left(1 + \frac{M}{|a_n|} \right)}{|z|-1} \right]
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Agora veja que se $|z| \geq 1 + \frac{M}{|a_n|}$, segue que $P(z) > 0$, isto é, $P(z) \neq 0$ e portanto, os zeros de $P(z)$ estão em $|z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}$.

Para mostrar que $\frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z|$ considere

$$Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 + \dots + a_0z^n.$$

Ao aplicar o resultado obtido anteriormente observe que os zeros do polinômio $Q(z)$ encontram-se em $|z| < 1 + \frac{M'}{|a_n|}$. Seja z_k um zero de $Q(z)$. Então $\frac{1}{z_k}$ é zero de $P(z)$. Desta maneira $\frac{1}{z_k} < 1 + \frac{M'}{|a_n|} \Rightarrow |z_k| > \frac{|a_0|}{|a_0| + M'}$.

Portanto, todos os zeros do polinômio $P(z)$ estão localizados na região anelar

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|} \right\}$$

Exemplo 2.3.1. *Seja $P(z) = 3z^5 + 4z^4 + 2z^3 + 1.5z + 1$. Pelo Teorema 3 segue que a região A é dada por $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{5} < |z| < \frac{7}{3}\}$. Note que todos os zeros de $P(z)$ encontram-se nesta região, sendo $z_1 = -0.81 - 0.68i$, $z_2 = -0.81 + 0.68i$, $z_3 = -0.58$, $z_4 = 0.43 - 0.57i$ e $z_5 = 0.43 + 0.57i$, conforme sugere a Figura 1.*

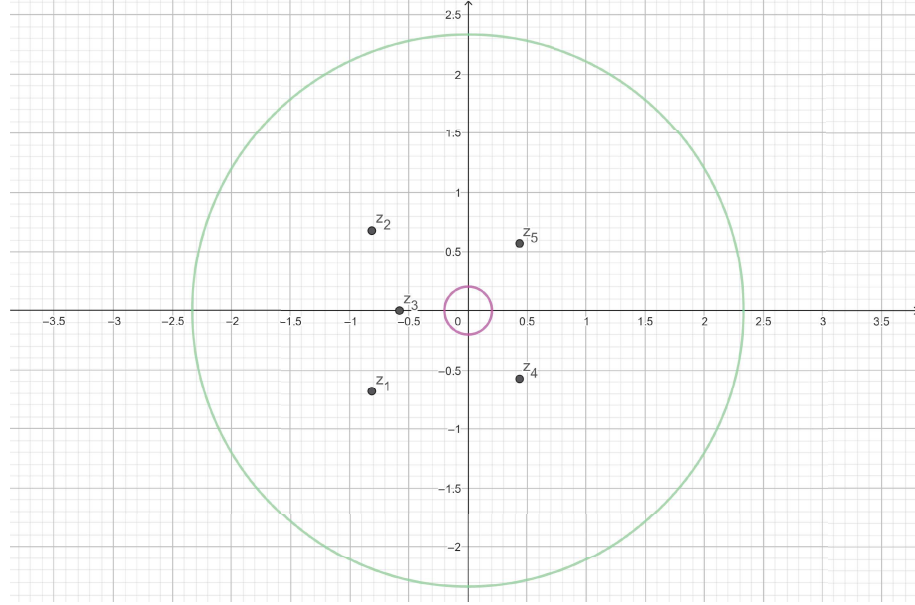


Figura 1: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 3z^5 + 4z^4 + 2z^3 + 1.5z + 1$

Teorema 4 (Teorema de Pellet). *Dado o polinômio*

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_pz^p + \dots + a_nz^n, a_p \neq 0$$

se o polinômio

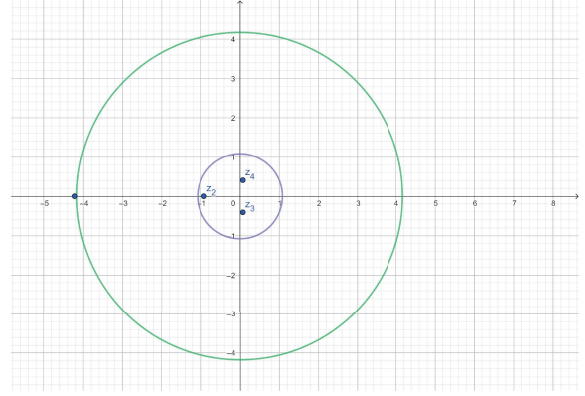
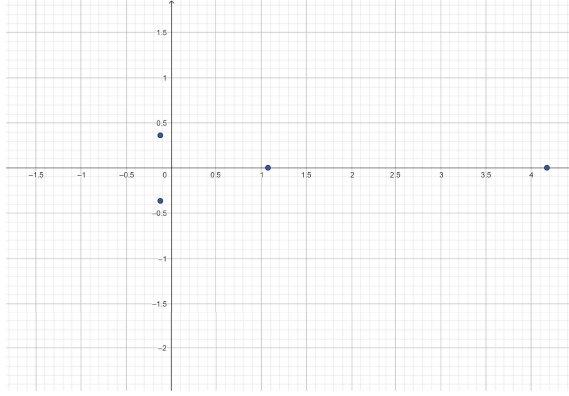
$$F_p(z) = |a_0| + |a_1|z + |a_2|z^2 + \dots + |a_{p-1}|z^{p-1} - |a_p|z^p + |a_{p+1}|z^{p+1} + \dots + |a_n|z^n$$

tem dois zeros positivos r e R , $r < R$, então $P(z)$ tem exatamente p zeros no disco $|z| \leq r$ e não tem zeros na região anelar $r < |z| < R$

A prova do teorema de Pellet encontra-se em MARDEM [9]

Exemplo 2.3.2. *Considere o polinômio $P(z) = 3z^4 + 15z^3 + 10z^2 + z + 2$, logo $F_3(z) = 3z^4 - 15z^3 + 10z^2 + z + 2$. Note que $r = 1.08$ e $R = 4.17$, são zeros de F_3 como é possível observar na Figura (a). Assim, pelo Teorema 4, o polinômio $P(z) = 3z^4 + 15z^3 + 10z^2 + z + 2$ contém três zeros em $|z| \leq 1.08$ e $P(z)$ não possui zeros em $1.08 < |z| < 4.17$. De fato, os zeros de $P(z)$ são $z_1 = -4.22$, $z_2 = -0.92$, $z_3 = 0.07 - 0.41i$, $z_4 = 0.07 + 0.41i$, onde $|z_k| < 1.08, k = 0, 1, 2$ e $|z_1| > 4.17$, como mostra a Figura (b).*

O próximo teorema nos diz como determinar a região do plano onde estão localizados os zeros do polinômio $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ de grau n tal que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ e $a_n \neq 0$.



(a) Localização dos zeros do polinômio $F_3(z) = 3z^4 - 15z^3 + 10z^2 + z + 2$.
 (b) Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 3z^4 + 15z^3 + 10z^2 + z + 2$

Teorema 5. *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ um polinômio de grau n tal que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ e $a_n \neq 0$. Então, todos os zeros de $P(z)$ estão no disco determinado por*

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}$$

Demonstração: Seja $R(z) = z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)$, onde

$$\begin{aligned} Q(z) &= a_n z^{n+1} + (1-z)P(z) \\ &= a_n z^{n+1} + (1-z)(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^k \end{aligned}$$

Então, para $|z| \leq 1$ e utilizando a desigualdade triangular,

$$|R(z)| = \left| z^n Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| = \left| a_0 z^n + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) z^{n-k} \right| \leq |a_0| |z|^n + \sum_{k=1}^n |(a_k - a_{k-1}) z^{n-k}|.$$

Como $|z| \leq 1$, tem-se que

$$|R(z)| \leq |a_0| + \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \right|.$$

Pelo Fato de $a_{k-1} \leq a_k$, para todo $k = 1, \dots, n$, segue que

$$|R(z)| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = |a_0| + a_n - a_0,$$

ou seja,

$$|z^n| \left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq |a_0| + a_n - a_0$$

e

$$\left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|z|^n}$$

Substituindo z por $\frac{1}{z}$, obtém-se que

$$|Q(z)| \leq (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n, \quad |z| \geq 1.$$

Para $|z| \geq 1$, tem-se que

$$\begin{aligned} |(z-1)P(z)| &= |a_n z^{n+1} - Q(z)| \\ &\geq |a_n||z^{n+1}| - |Q(z)| \\ &\geq |a_n||z^{n+1}| - (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n \\ &= |z|^n[|a_n||z| - |a_0| - a_n + a_0] \\ &= |z|^n|a_n| \left[|z| - \left(\frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \right) \right] \end{aligned}$$

Como $a_{k-1} \leq a_k$ para todo $k = 1, \dots, n$, então

$$a_n - a_0 = |a_n - a_0| \geq |a_n| - |a_0|$$

e assim

$$r = \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \geq 1.$$

Note que se $|z| > r$, então $|(z-1)P(z)| > 0$. Portanto, $P(z)$ não possui zeros em $|z| > r$, ou seja, todos os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq r$

Exemplo 2.3.3. *Seja $P(z) = 10z^5 + 5z^4 + 3z^3 + 1.5z - 2$, pelo Teorema 5 temos que os zeros de $P(z)$ estão localizados no círculo $|z| \leq \frac{7}{5}$. De fatos, os zeros de $P(z)$ são $z_1 = -0.67 - 0.47i$, $z_2 = -0.67 + 0.47i$, $z_3 = 0.16 - 0.75i$, $z_4 = 0.16 + 0.75i$ e $z_5 = 0.51$. Veja a figura a seguir:*

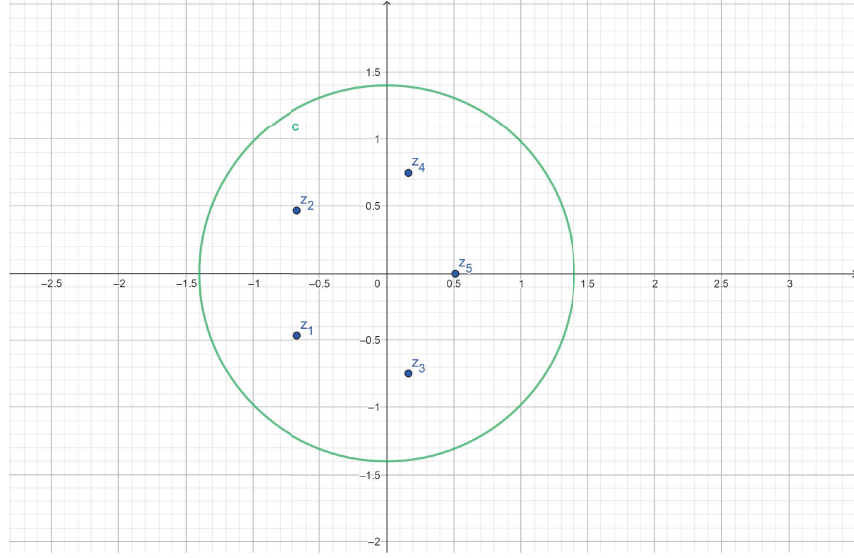


Figura 2: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 10z^5 + 5z^4 + 3z^3 + 1.5z - 2$

O teorema a seguir, resultado clássico da teoria da distribuição de zeros de polinômios, é uma consequência do resultado anterior, que tem por finalidade localizar zeros de polinômios.

Teorema 6 (Eneström-Kakeya). *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ um polinômio cujos coeficientes reais $a_k, k = 0, 1, \dots, n$ satisfazem $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0 > 0$. Então $P(z)$ não possui zeros em $|z| > 1$, ou seja, os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$.*

Demonstração: Pelo Teorema 5 tem-se que os zeros do polinômio $P(z)$ estão em $|z| \leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|}$. Pelo fato de $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0 > 0$, segue que

$$|z| \leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} = 1$$

Portanto, os zeros do polinômio $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$.

Observe que, nas condições do Teorema de Eneström-Kakeya, todos os zeros do polinômio $P(z)$ atingem o círculo unitário se, e somente se, $a_k = 1, k = 0, \dots, n$. De fato, se $|z_k| = 1, k = 0, \dots, n$ tem-se por uma das relações de Girard que

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |z_1 z_2 z_3 \dots z_n| = |z_1| |z_2| |z_3| \dots |z_n| = 1.$$

Como os coeficientes $a_k, k = 0, \dots, n$ são reais e positivos tem-se que $\frac{a_0}{a_n} = 1$. Agora, utilizando a ordenação dos coeficientes de $P(z)$, ou seja,

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0,$$

segue que

$$1 = \frac{a_n}{a_n} \geq \frac{a_{n-1}}{a_n} \geq \dots \geq \frac{a_2}{a_n} \geq \frac{a_1}{a_n} \geq \frac{a_0}{a_n} = 1$$

Portanto, $a_k = 1, k = 0, \dots, n$.

Por outro lado se $a_k = 1, k = 0, \dots, n$ segue pelo Teorema 28 de PEREIRA [7] que os zeros de $P(z)$ estão no círculo unitário.

Exemplo 2.3.4. *Seja o polinômio $P(z) = 10z^5 + 5z^4 + 3z^3 + 1.5z + 1$. Observe que $P(z)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 6. Portanto os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$. A figura a seguir mostra a localização dos zeros de $P(z)$ em relação a $|z| \leq 1$.*

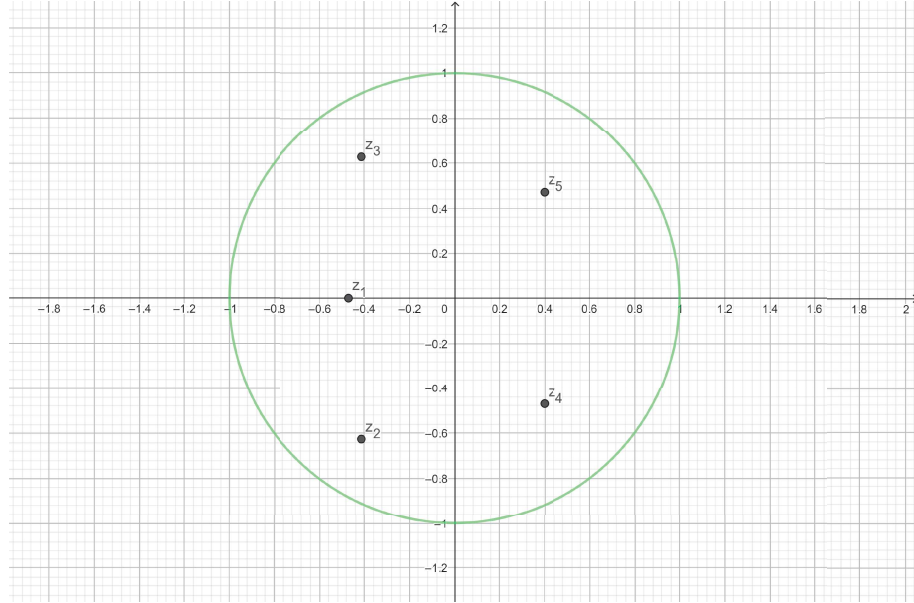


Figura 3: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 10z^5 + 5z^4 + 3z^3 + 1.5z + 1$ em relação a $|z| \leq 1$

O próximo teorema é uma generalização do teorema de Erneström-Kakeya, onde é determinada a região anelar que contém todos os zeros de certo polinômio. Esse resultado encontra-se em ANDERSON [10].

Teorema 7. *Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinômio de grau n tal que $n \geq 1$ e $a_k > 0$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Considere*

$$\alpha = \min_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\}$$

e

$$\beta = \max_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\}$$

. Todos os zeros de $P(z)$ estão na região anelar $A = \{z \in \mathbb{C} | \alpha \leq |z| \leq \beta\}$

Exemplo 2.3.5. Seja o polinômio $P(z) = 8z^6 + 5z^5 + 3z^4 + 2z^2 + z + 0.5$. Temos que

$$\frac{a_0}{a_1} = 0.5, \frac{a_1}{a_2} = 0.5, \frac{a_2}{a_3} = 0.8, \frac{a_3}{a_4} = 0.083334, \frac{a_4}{a_5} = 0.6 \text{ e } \frac{a_5}{a_6} = 0.625$$

Logo,

$$\alpha = \min_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\} = 0.5$$

e

$$\beta = \max_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\} = 0.83334$$

Pelo Teorema 7 segue que os zeros do polinômio $P(z)$ se encontram na região anelar $A = \{z \in \mathbb{C} | 0.5 \leq |z| \leq 0.83334\}$. De fato, os zeros de $P(z)$ são $z_1 = -0.57 - 0.29i$, $z_2 = -0.57 + 0.29i$, $z_3 = -0.14 - 0.54i$, $z_4 = -0.14 + 0.54i$, $z_5 = 0.41 - 0.56i$ e $z_6 = 0.41 + 0.56i$. Observe a figura a seguir:

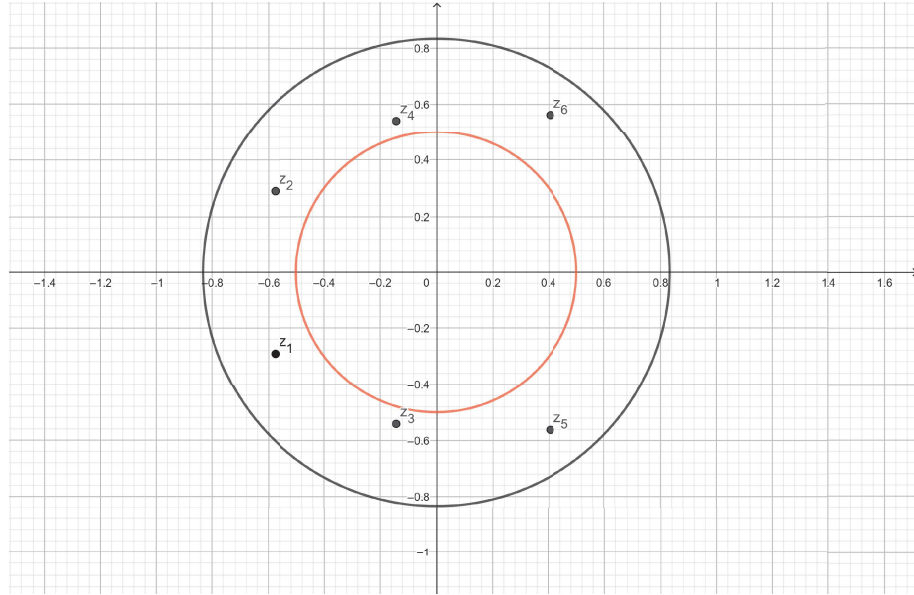


Figura 4: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 8z^6 + 5z^5 + 3z^4 + 2z^2 + z + 0.5$

3 Polinômios auto-inversíveis

Nesta seção são apresentadas definições e propriedades de polinômios auto-inversíveis e polinômios palindrômicos que são tema desse trabalho, além de exemplificações para a melhor compreensão da teoria. Para este estudo, as principais fontes foram FAZINAZZO[5], MARQUES [8] e PEREIRA [7]

3.1 Polinômios auto-inversíveis e Palindrômicos

Seja $z \mapsto P(z)$ um polinômio de grau $n, n \geq 1$, dado por

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = \sum_{k=0}^n a_kz^k = a_n \prod_{j=1}^n (z - z_j) \quad (3.1)$$

cujos zeros $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ e $a_k \in \mathbb{C}$

Definição 3.1.1. Associado ao polinômio $P(z)$, considere o polinômio $P^*(z)$, chamado de recíproco de $P(z)$, dado por:

$$P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{a}_0z^n + \bar{a}_1z^{n-1} + \dots + \bar{a}_n = \sum_{k=0}^n \bar{a}_kz^{n-k} = \bar{a}_0 \prod_{j=1}^n (z - z_j^*) \quad (3.2)$$

cujos zeros $z_k^* = \frac{1}{\bar{z}_k}$ são os inversos conjugados dos zeros de z_k de $P(z)$

Exemplo 3.1.2. Seja $P(z) = 5z^2 + 2z + 2$ cujos zeros são $z_1 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ e $z_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$. Logo o polinômio $P^*(z)$ será dado por

$$P^*(z) = z^2 \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = 5 + 2z + 2z^2$$

cujos zeros são $z_1^* = z_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ e $z_2^* = z_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

Observe que $z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ e $z_2^* = \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

Assim, satisfaz $z_k^* = \frac{1}{\bar{z}_k}$ conforme a definição de $P^*(z)$. Os zeros do polinômio $P(z)$ são os inversos conjugados aos zeros de $P^*(z)$ com relação ao círculo unitário, como são mostrados na Figura 5.

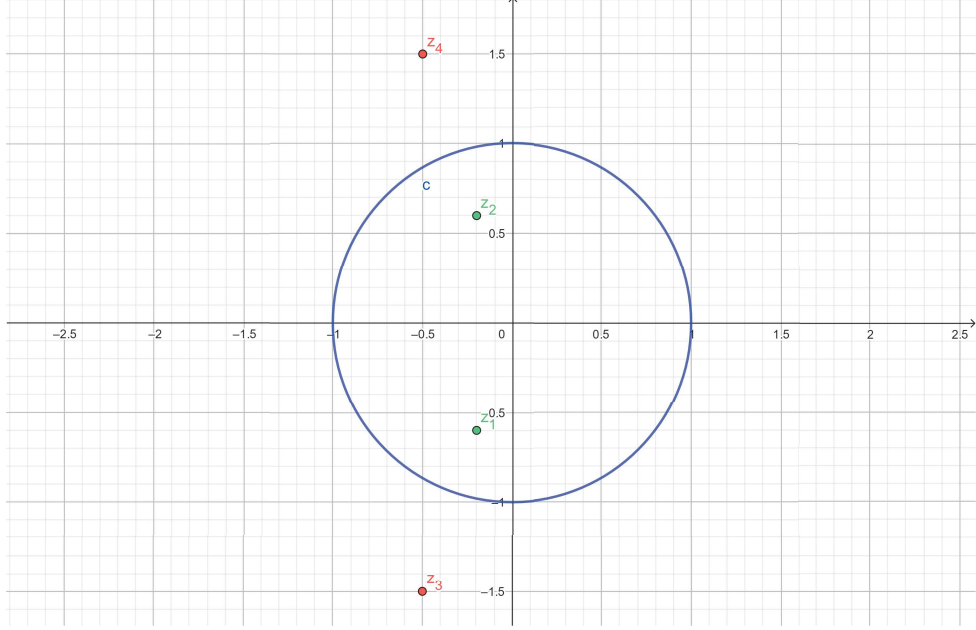


Figura 5: Representação dos zeros dos polinômios $P(z) = 5z^2 + 2z + 2$ e $P^*(z) = 2z^2 + 2z + 5$

Definição 3.1.3. Polinômio auto-inversível Dado $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinômio de grau n . Se existir $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, tal que $P^*(z) = uP(z)$, então $P(z)$ é dito auto-inversível.

Observação 1 Considere o polinômio $P(z)$ de grau n com zeros $z_1, z_2, \dots, z_n$ auto-inversível, segue-se da definição anterior que:

$$\{z_1, z_2, \dots, z_n\} = \left\{ \frac{1}{\bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_2}, \dots, \frac{1}{\bar{z}_n} \right\}$$

Exemplo 3.1.4. Sejam $P(z) = ((1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})i)z^2 + (3\sqrt{3} - 3i)z + (2 + 2i)$ um polinômio e $u = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Será provado que $P(z)$ é um polinômio auto-inversível.

Observe que:

$$|u| = \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = 1$$

Assim,

$$P^*(z) = z^2 \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = (2 - 2i)z^2 + (3\sqrt{3} + 3i)z + ((1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i),$$

Além disso,

$$\begin{aligned} uP(z) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left[((1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})i)z^2 + (3\sqrt{3} - 3i)z + (2 + 2i) \right] \\ &= (2 - 2i)z^2 + (3\sqrt{3} + 3i)z + ((1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i) \end{aligned}$$

Logo, $|u| = 1$ e $P^*(z) = uP(z)$. Portanto, $P(z)$ é auto-inversível

Vale observar na Figura 6 a simetria entre os zeros do polinômio auto-inversível $P(z)$ com relação ao círculo unitário, onde $z_1 = -0,37 - 1,37i$ e $z_2 = -0,18 - 0,68i$

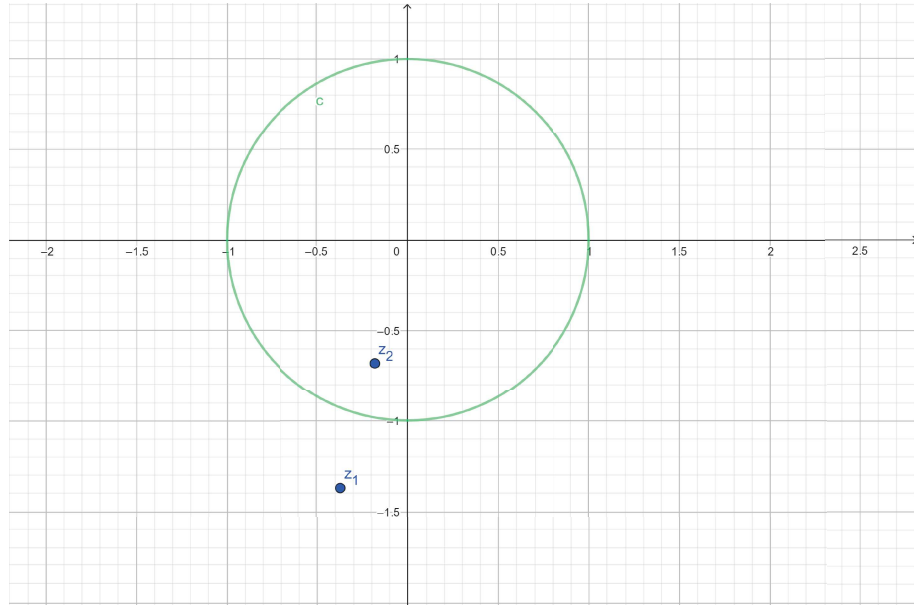


Figura 6: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = ((1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})i)z^2 + (3\sqrt{3} - 3i)z + (2 + 2i)$

Exemplo 3.1.5. Seja $P(z) = 2z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 6z + 2$ um polinômio cujos zeros são $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ e $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.

Seja

$$P^*(z) = z^4 \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = 2z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 6z + 2$$

Observe que $P(z) = P^*(z)$. Logo $z_1^* = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $z_2^* = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, $z_3^* = -1 + i$, $z_4^* = -1 - i$.

Segue ainda que

$$\begin{aligned} z_1^* &= \frac{1}{\bar{z}_1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ z_2^* &= \frac{1}{\bar{z}_2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{aligned}$$

$$z_3^* = \frac{1}{\bar{z}_3} = -1 + i$$

$$z_4^* = \frac{1}{\bar{z}_4} = -1 - i$$

ou seja, $P(z)$ e $P^*(z)$ são polinômios que satisfazem $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} = \left\{ \frac{1}{\bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_2}, \dots, \frac{1}{\bar{z}_n} \right\}$, onde $z_1 = z_3^* = \frac{1}{\bar{z}_3}$, $z_2 = z_4^* = \frac{1}{\bar{z}_4}$, $z_3 = z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1}$ e $z_4 = z_2^* = \frac{1}{\bar{z}_2}$.

Portanto, $P(z)$ é auto-inversível. A figura abaixo representa os zeros do polinômio auto-inversível $P(z)$, ressaltando a simetria entre os zeros do polinômio tanto em relação a reta real quanto ao círculo unitário.

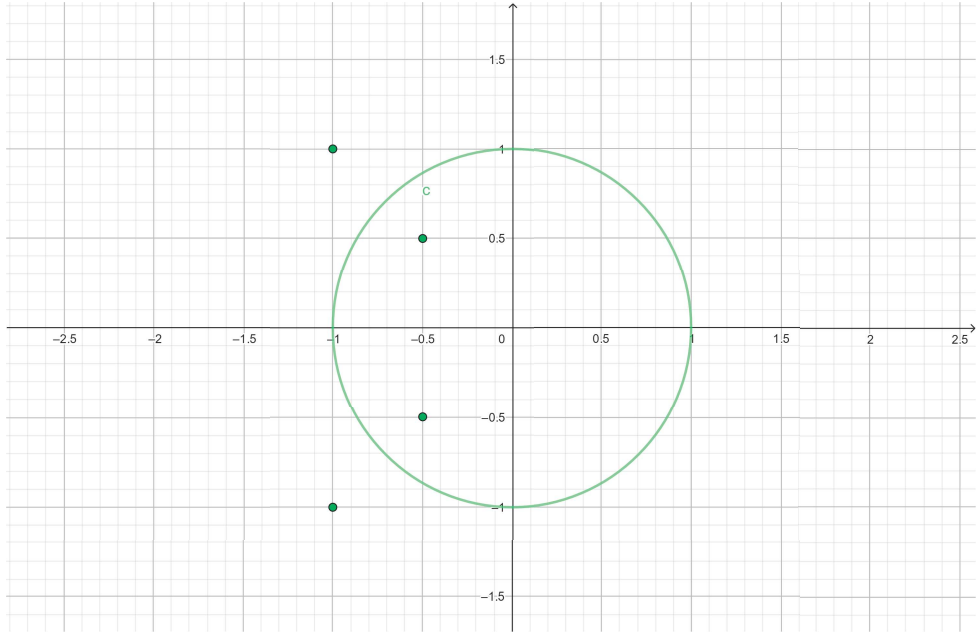


Figura 7: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = 2z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 6z + 2$

Teorema 8. Se $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) P é auto-inversível;
- (ii) $\bar{a}_n P(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ para cada número complexo z ;
- (iii) $\bar{a}_k = u a_{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, onde $|u| = 1$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Note que

$$P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = z^n \bar{a}_n \prod_{j=1}^n \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}} - z_j\right)}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 P^*(z) &= \bar{a}_n \prod_{j=1}^n \overline{\left(\frac{\bar{z}}{z} - \bar{z}z_j\right)} = \bar{a}_n \prod_{j=1}^n (1 - z\bar{z}_j) \\
 &= \bar{a}_n (1 - z\bar{z}_1)(1 - z\bar{z}_2)\dots(1 - z\bar{z}_n) \\
 &= \bar{a}_n \left(\bar{z}_1 \left(\frac{1}{\bar{z}_1} - z\right)\right) \left(\bar{z}_2 \left(\frac{1}{\bar{z}_2} - z\right)\right) \dots \left(\bar{z}_n \left(\frac{1}{\bar{z}_n} - z\right)\right) \\
 &= \bar{a}_n (\bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n) \left(\frac{1}{\bar{z}_1} - z\right) \left(\frac{1}{\bar{z}_2} - z\right) \dots \left(\frac{1}{\bar{z}_n} - z\right)
 \end{aligned}$$

Agora, utilizando a Observação 1 segue que,

$$\begin{aligned}
 P^*(z) &= \frac{\bar{a}_n}{z_1 z_2 \dots z_n} (z_1 - z)(z_2 - z)\dots(z_n - z) \\
 &= \frac{(-1)^n \bar{a}_n}{z_1 z_2 \dots z_n} (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)
 \end{aligned}$$

Através das relações de Viète segue que

$$P^*(z) = \frac{\bar{a}_n}{a_0} P(z),$$

e assim,

$$\bar{a}_n P(z) = a_0 P^*(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Para pontos em $|z| = 1$ segue que $|P^*(z)| = |P(z)|$. Desta forma, de

$$|\bar{a}_n P(z)| = \left| a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right|,$$

pode-se concluir que $|\bar{a}_n| = |a_0|$. Tem-se que $u = \frac{\bar{a}_n}{a_0}$ onde $|u| = 1$. Como $\bar{a}_n P(z) = \overline{a_0 z^n P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, segue que

$$u[a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n] = [\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n]$$

Logo, $\bar{a}_k = u a_{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Observe que $P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n$. Como $\bar{a}_k = u a_{n-k}$,

$k = 0, 1, \dots, n$, tem-se

$$P^*(z) = ua_n z^n + \dots + ua_1 z + ua_0 = uP(z)$$

Sendo $|u| = 1$, segue pela Definição 2.3.3 que P é auto-inversível.

Definição 3.1.6. Polinômio Palindrômico $P(z)$ é palindrômico se, e somente se, $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$

Exemplo 3.1.7. Seja $P(z) = 5z^4 - 4z^3 + 2z^2 - 4z + 5$. Note que

$$z^4 P\left(\frac{1}{z}\right) = 5 - 4z + 2z^2 - 4z^3 + 5z^4$$

Logo, $z^4 P\left(\frac{1}{z}\right) = 5 - 4z + 2z^2 - 4z^3 + 5z^4$, ou seja, $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$. Portanto $P(z)$ é um polinômio palindrômico.

A Definição 3.1.6 determina algumas consequências para um polinômio palindrômico $P(z)$.

Propriedades: Considere $P(z)$ um polinômio palindrômico. Tem-se:

- (i) Considerando $a_k \in \mathbb{R}$, então $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{z^n P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = P^*(z)$, ou seja, $P(z) = P^*(z)$ e, segundo a Definição 3.1.3, considerando $u = 1$, segue que $P(z)$ é auto-inversível. Em outras palavras, todo polinômio palindrômico com coeficientes reais é auto-inversível.
- (ii) Se $P(z)$ é de grau n , tem-se $a_{n-k} = a_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.
- (iii) Seja $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, com $a_n \neq 0$. Observe que $z = 0$ não é zero de nenhum polinômio palindrômico. De fato, suponha que $z = 0$ seja um zero de $P(z)$, isto é,

$$P(0) = 0 \Leftrightarrow P(0) = a_n 0^n + \dots + a_1 0 + a_0 \Leftrightarrow a_0 = 0$$

Porém, pelo item anterior, $a_n = a_0$ e, por hipótese, $a_n \neq 0$. Então $a_0 \neq 0$. Logo $z = 0$ não é zero de $P(z)$.

- (iv) Se z_1 é zero de $P(z)$, então $\frac{1}{z_1}$ também será zero de $P(z)$. De fato, supondo z_1 zero de $P(z)$ e utilizando $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$, segue que

$$P(z_1) = 0 \Rightarrow z_1^n P\left(\frac{1}{z_1}\right) = 0$$

Como, pelo item anterior, $z_1 \neq 0$, então $P\left(\frac{1}{z_1}\right) = 0$, ou seja, $\frac{1}{z_1}$ é zero de $P(z)$.

(v) Temos que $z = -1$ é raiz de todo polinômio palindrômico de grau ímpar P_{2n+1} e como consequência $P_{2n+1}(z) = (z+1)Q_{2n}(z)$. Para provar isso basta observar que:

$$P_{2n+1}(-1) = (-1)^{2n+1}P_{2n+1}\left(\frac{1}{-1}\right) \Rightarrow 2P_{2n+1}(-1) = 0 \Rightarrow P_{2n+1}(-1) = 0$$

(vi) Se $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n$, então z_1 e $\bar{z}_1$ são zeros de $P(z)$. Logo, pelo item anterior, $\frac{1}{z}$ e $\frac{1}{\bar{z}_1}$ também são zeros de $P(z)$.

3.2 Zeros de Polinômios Auto-Inversíveis

Nesta seção serão apresentados resultados sobre zeros de polinômios auto-inversíveis. As demonstrações de alguns teoremas aqui omitidos podem ser encontrados em MARDEM [9] e MILOVANÓVIC [4].

Teorema 9. *Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_n \neq 0$, um polinômio auto-inversível e $P'(z)$ sua derivada. Então*

$$\bar{a}_n[nP(z) - zP'(z)] = a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

$$e \left| \frac{nP(z)}{zP'(z)} - 1 \right| = 1 \text{ para cada } z \text{ em } |z| = 1.$$

Demonstração Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinômio auto-inversível. Pelo Teorema 8

$$\bar{a}_n P(z) = a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \quad (3.3)$$

Derivando tal expressão em relação a variável z segue que

$$\bar{a}_n P'(z) = n a_0 z^{n-1} \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - a_0 z^n \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} (z^{-2}) \Rightarrow z \bar{a}_n P'(z) = n a_0 z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

Substituindo a equação (3.3) na equação acima tem-se

$$\begin{aligned} \bar{a}_n P'(z) &= n \bar{a}_n P(z) - \bar{a}_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \\ \Rightarrow \bar{a}_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} &= \bar{a}_n n P(z) - \bar{a}_n z P'(z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_n[nP(z) - zP'(z)] = a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

Isso mostra a primeira parte do teorema. Agora tomando o módulo na expressão acima e z no círculo unitário, sabe-se que $|P^*(z)| = |P(z)|$ e, conseqüentemente, $|a_n| = |a_0|$. Assim é obtido o resultado, pois,

$$|\bar{a}_n[nP(z) - zP'(z)]| = \left| a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \right|$$

Como $|a_n| = |a_0|$ e $|a_n| \neq 0$, implica que $a_0 z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \neq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{|\bar{a}_n| |nP(z) - zP'(z)|}{|a_0| |z^{n-1} \overline{P'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}|} &= 1 \Rightarrow \frac{|nP(z) - zP'(z)|}{|P^*(z)|} = 1 \Rightarrow \frac{|nP(z) - zP'(z)|}{|P'(z)|} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \frac{nP(z) - zP'(z)}{P'(z)} \right| = 1 \Rightarrow |z| \left| \frac{nP(z)}{zP'(z)} - 1 \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{nP(z)}{zP'(z)} - 1 \right| = 1 \end{aligned}$$

Teorema 10. *Se $P(z)$ é um polinômio auto-inversível, então $P'(z)$ não tem zeros no círculo unitário, exceto os zeros múltiplos de $P(z)$.*

Demonstração Seja $P(z)$ um polinômio auto-inversível de grau n com $z_1, z_2, \dots, z_n$ zeros simples de $P(z)$. Suponha, por absurdo, que exista ξ um zero de $P'(z)$ de modo que $|\xi| = 1$ e $\xi \neq z_k$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Pelo Teorema 9,

$$\left| \frac{zP'(z)}{nP(z) - zP'(z)} \right| = 1$$

para z com $|z| = 1$. Assim,

$$1 = \left| \frac{\xi P'(\xi)}{nP(\xi) - \xi P'(\xi)} \right| = 0$$

o que é absurdo. Portanto $P'(z)$ não possui zeros em $|z| = 1$.

Agora supondo que $P(z)$ possua um zero r de multiplicidade $m > 1$,

$$P(z) = (z - r)^m Q(z)$$

então

$$P'(z) = m(z - r)^{m-1} + (z - r)^m Q'(z).$$

Logo,

$$P'(z) = (z - r)^{m-1} [mQ(z) + (z - r)Q'(z)]$$

Como

$$mQ(r) + (r - r)Q'(r) = mQ(r) \neq 0$$

decorre que r é zero de multiplicidade $m - 1$ de $P'(z)$.

Teorema 11. *Se o polinômio $\sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$, é um polinômio auto-inversível, então $P(z)$ tem o mesmo número de zeros em $|z| < 1$ que o polinômio*

$$H_1(z) = [P'(z)]^* = \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) \bar{a}_{n-k} z^k.$$

Isto é, $P(z)$ e $P'(z)$ possuem o mesmo número de zeros em $|z| > 1$.

Exemplo 3.2.1. *Seja $P(z) = 6z^6 + 3z^5 - 4z^4 + 3z^3 - 4z^2 + 3z + 6$ um polinômio auto-inversível com um zero em $|z| < 1$, como mostra a Figura 8. Segue ainda que $P'(z) = 36z^5 + 15z^4 - 16z^3 + 9z^2 - 8z + 3$ e, desta forma $[P'(z)]^* = 3z^5 - 8z^4 + 9z^3 - 16z^2 + 15z + 36$. Observando a Figura 9, segue que $[P'(z)]^*$ possui um zero em $|z| < 1$, isto é, $P(z)$ e $[P'(z)]^*$ possuem o mesmo número de zeros em $|z| < 1$. Os zeros de $P(z)$ são $z_1 = -1.41$, $z_2 = -0.71$, $z_3 = -0.07 - i$, $z_4 = -0.07 + i$, $z_5 = 0.88 - 0.48i$ e $z_6 = 0.88 + 0.48i$. Os zeros de $[P'(z)]^*$ são $z_1 = -0.86$, $z_2 = -0.2 - 1.76i$, $z_3 = -0.2 + 1.76i$, $z_4 = 1.96 - 0.78i$ e $z_5 = 1.96 + 0.78i$*

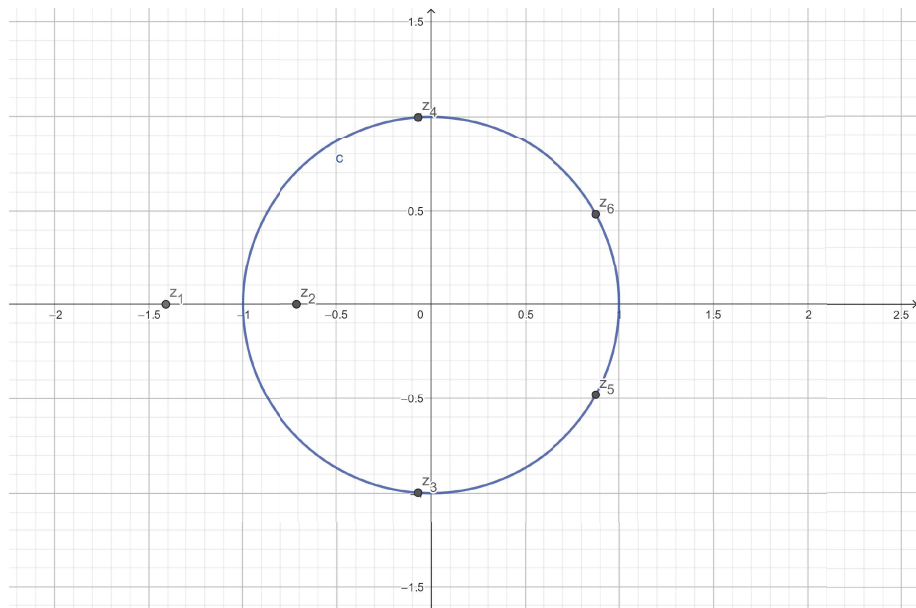


Figura 8: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = 6z^6 + 3z^5 - 4z^4 + 3z^3 - 4z^2 + 3z + 6$

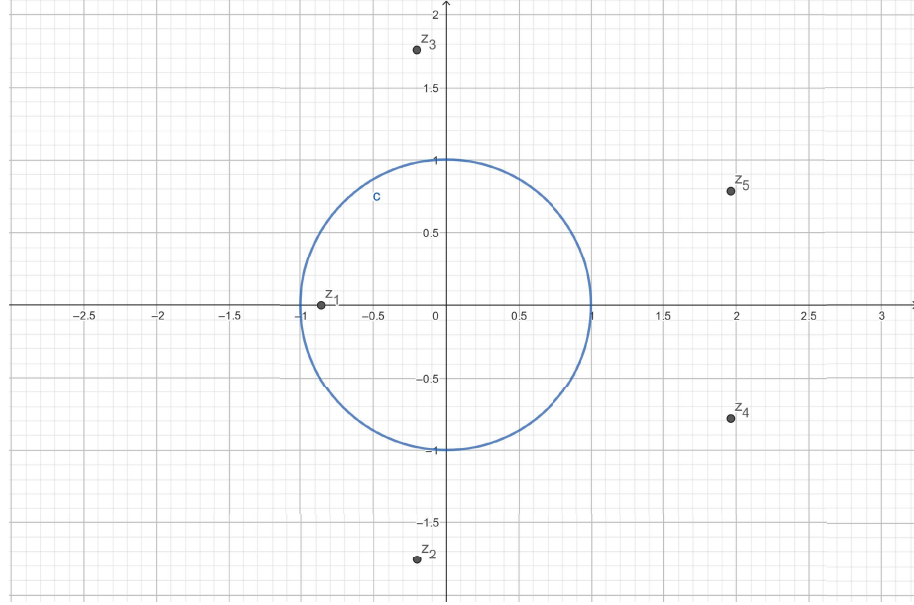


Figura 9: Representação dos zeros do polinômio $[P'(z)]^* = 3z^5 - 8z^4 + 9z^3 - 16z^2 + 15z + 36$

Teorema 12 (Cohn). *Seja $P(z)$ um polinômio auto-inversível de grau n . Suponha que $P(z)$ tenha exatamente τ zeros no círculo unitário (contando a multiplicidade) e exatamente ν pontos críticos em $|z| = 1$ (contando a multiplicidade). Então*

$$\tau = 2(\nu + 1) - n.$$

Para mais informações ver KIM [11] e COHN [2]. Como consequência desse resultado, segue o Teorema 13.

Teorema 13. *Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$ um polinômio de grau n . $P(z)$ possui todos os seus zeros em $|z| = 1$ se, e somente se, $P(z)$ é auto-inversível e todos os zeros de $P'(z)$ estão em $|z| \leq 1$.*

Exemplo 3.2.2. *Seja $P(z) = 3z^5 - 4z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 4z + 3$ um polinômio que possui todos os seus zeros em $|z| = 1$ como mostra a Figura 10. Segue que $P(z)$ é auto-inversível, cujos zeros são $z_1 = -1$, $z_2 = 0.28 - 0.96i$, $z_3 = 0.28 + 0.96i$, $z_4 = 0.88 - 0.47i$ e $z_5 = 0.88 + 0.47i$. De fato*

$$P^*(z) = z^5 \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = 3_4 z + 2z^2 + 2z^3 - 4z^4 + 3z^5,$$

ou seja, $P(z) = uP^(z)$ com $u = 1$. Note que $P'(z) = 15z^4 - 16z^3 + 6z^2 + 4z - 4$, sendo que todos os seus zeros estão em $|z| \leq 1$, como mostra a Figura 11, exemplificando o teorema anterior. Os zeros de $P'(z)$ são $z_1 = -0,56$, $z_2 = 0.46 - 0.67i$, $z_3 = 0.46 + 0.67i$ e $z_4 = 0.72$.*

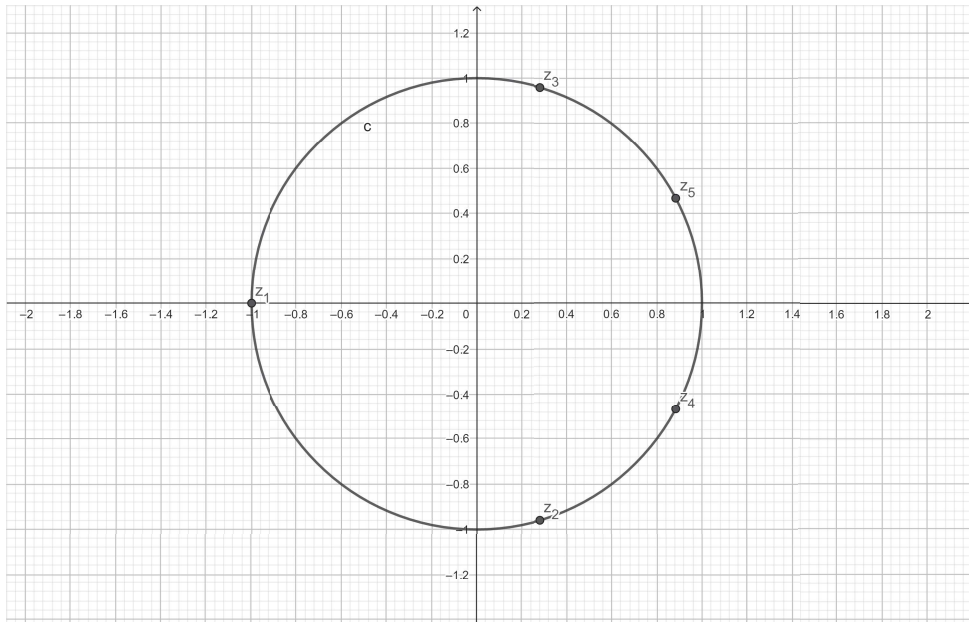


Figura 10: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = 3z^5 - 4z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 4z + 3$

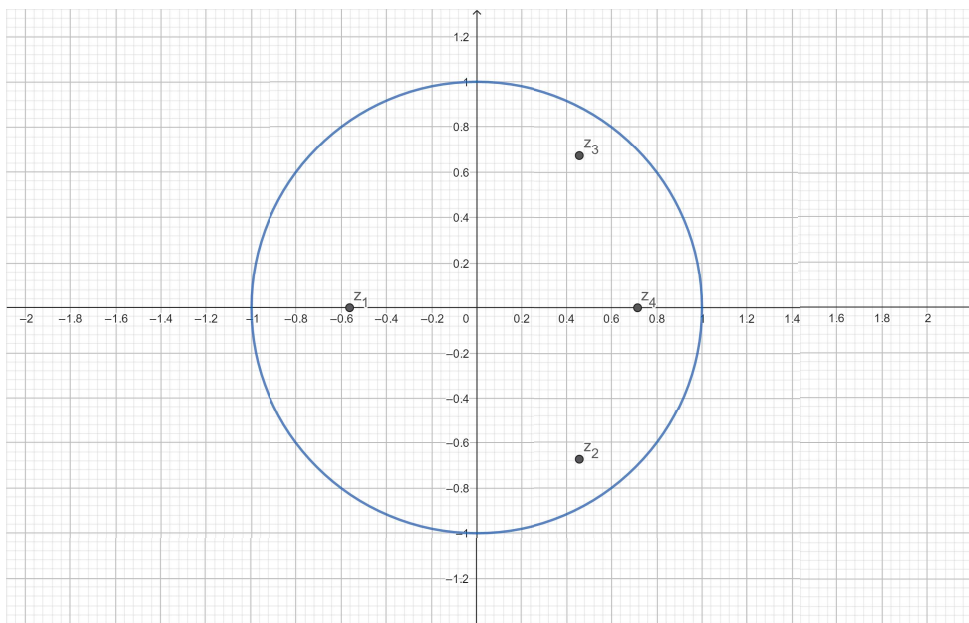


Figura 11: Representação dos zeros do polinômio $P'(z) = 15z^4 - 16z^3 + 6z^2 + 4z - 4$

Convém ressaltar que todos os resultados sobre zeros de polinômio auto-inversíveis apresentados nessa seção são, também, válidos para polinômios palindrômicos com coeficientes reais.

4 Método alternativo para a redução do grau dos Polinômios Palindrômicos com coeficientes reais

Neste capítulo são apresentados dois métodos para a obtenção das raízes de polinômios palindrômicos do tipo $P_{2n} = z_n Q(z + \frac{1}{z})$, onde Q é um polinômio de grau n de tal forma que a partir das raízes de Q obtemos as raízes de $P_{2n}(z)$

4.1 Zeros no Círculo Unitário

Teorema 14. *Seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinômio palindrômico irredutível de grau $n > 1$, com $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n$. Se $P(z)$ tem uma raiz no círculo unitário, então n é par e $z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = P(z)$.*

Demonstração: Seja α uma raiz de $P(z)$ tal que $|\alpha| = 1$. Como $P(z)$ tem coeficientes reais, segue que $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ também será raiz de $P(z)$. O produto $z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$ é um polinômio de grau n (seu coeficiente dominante é $P(0)$) com α raiz. Como $P(z)$ é irredutível, temos que $z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = cP(z)$, para algum racional $c \neq 0$. Definindo $z = 1$, temos que $P(1) = cP(1)$, desde que $P(1) \neq 0$, portanto, pelas nossas hipóteses, $c = 1$. Assim, $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$. Definindo agora $z = -1$, obtemos $P(-1) = (-1)^n P(-1)$, desde que $P(-1) \neq 0$, assim, $(-1)^n = 1$, portando n é par

Teorema 15. *Considere o polinômio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, de grau $n > 1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) *O polinômio tem coeficientes palindrômicos quando $a_k = a_{n-k}$ para todo $k, k = 0, 1, \dots, n$;*

$$(2) \quad z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = P(z);$$

(3) $P(z) = z^{\frac{n}{2}} Q\left(z + \frac{1}{z}\right)$ onde Q é um polinômio de grau $\frac{n}{2}$. (Uma versão para quando o grau de P é ímpar é $P(z^2) = z^n Q\left(z + \frac{1}{z}\right)$, onde o grau de Q é igual a n).

Demonstração: É simples verificar que (1) e (2) são equivalentes e que (3) $\Rightarrow$ (2). Para provar que (2) $\Rightarrow$ (3), defina $n = 2m$, reescrevendo a equação $z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = P(z)$ como $z^m P\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z}\right)^m P(z)$. Como $P(z)$ tem grau $2m$

$$\left(\frac{1}{z}\right)^m P(z) = a_{2m} z^{2m} + a_{2m-1} z^{2m-1} + \dots + a_m + \dots + \frac{a_1}{z^{m-1}} + \frac{a_0}{z^m} \quad (4.1)$$

que é um polinômio em z e $\frac{1}{z}$ de grau m . A condição de simetria em (1), nos diz que z^k e z^{m-k} tem coeficientes iguais. Podemos dizer então que $a_{2m}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ tem termos iniciais e finais que correspondem aos de (4.1), então $\left(\frac{1}{z}\right)^m P(z) - a_{2m}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ é um polinômio em z e $\frac{1}{z}$ de grau menor que m . É palíndromo já que a diferença de polinômios palíndromos é palíndromo em z e $\frac{1}{z}$. Portanto, por indução no grau, podemos escrever $\left(\frac{1}{z}\right)^m P(z) - a_{2m}\left(z + \frac{1}{z}\right) = H\left(z + \frac{1}{z}\right)$, onde H é um polinômio que tem grau menor que m . Agora adicione $a_{2m}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ a ambos os lados.

A conclusão do item 3 do Teorema 15 nos diz, essencialmente, que $P(z)$ pode ser expresso em termos de $z + \frac{1}{z}$.

Exemplo 4.1.1. O polinômio $z^8 - z^5 - z^4 - z^3 + 1$ é palíndromo. Dividindo por z^4 , temos $z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}$. Agora, subtraindo $\left(z + \frac{1}{z}\right)^4$:

$$\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 = -4z^2 - z - 7 - \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2}$$

Adicionando $4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2$, tem-se

$$\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 + 4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = -z + 1 - \frac{1}{z}$$

Adicionando $z + \frac{1}{z}$:

$$\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 + 4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) = 1$$

Isolando z^4 , temos

$$z^8 - z^5 - z^4 - z^3 + 1 = z^4 \left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = z^4 \left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 - 4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1\right)$$

No Teorema 15 não fizemos suposições sobre sua irreducibilidade ou que os coeficientes são racionais. (O teorema foi, no entanto, inspirado na situação do Teorema 14 onde $P(z)$ é irreducível). O Teorema 15 fornece uma bijeção entre todos os polinômios $Q(z)$ de grau m e todos os polinômios palindrômicos $P(z)$. No próximo teorema faremos uma ligação entre as raízes no círculo unitário e raízes reais.

Teorema 16. Considere o polinômio $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ com grau uniforme $n = 2m$, satisfazendo $a_k = a_{n-k}$ para todo k , escreva $P(z) = z^m Q(z + \frac{1}{z})$, onde o grau do polinômio Q é igual a m . As raízes de $P(z)$ no círculo unitário, considerando como pares recíprocos, correspondem as raízes de Q no intervalo $[-2, 2]$ por $\left\{\alpha, \frac{1}{\alpha}\right\} \leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

Demonstração: Temos que $P(z) = 0$ se, e somente se, $Q(z + \frac{1}{z}) = 0$. (Note que $P(0) = a_0 = a_n \neq 0$). Se $|z| = 1$ e $z = \cos \theta + i \sin \theta$, então $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ encontra-se no intervalo $[-2, 2]$. Por outro lado, se $-2 \leq t \leq 2$, fazendo $t = 2 \cos \theta$ para algum ângulo θ , então $t = z + \frac{1}{z}$ para os dois números $z = \cos \theta \pm i \sin \theta$ (que são realmente um número quando $t = \pm 2$), ou seja, $z = 1$ para $t = 2$ e $z = -1$ para $t = -2$.

Definindo $z = \pm 1$ na equação $P(z) = z^m Q(z + \frac{1}{z})$, nós temos $P(\pm 1) = \pm Q(\pm 2)$. Já que realmente estamos interessados nos polinômios $P(z)$ que são irreducíveis com grau maior que 1, $P(\pm 1)$ não será 0, para que Q não desapareça em ± 2 . Portanto, os extremos de $[-2, 2]$ realmente não importam quando falamos de raízes, embora devamos especificar que uma raiz de $Q(z)$ é em $(-2, 2)$ não apenas em $[-2, 2]$ para ter certeza de que tem a forma $z + \frac{1}{z}$ para dois valores de z .

Exemplo 4.1.2. O polinômio $P(z) = z^{10} + z^9 - z^7 - z^6 - z^5 - z^4 - z^3 + z + 1$ é conhecido como polinômio de Lehmer. Para provar que ele possui 8 raízes no círculo, vamos escrevê-lo em termos de $z + \frac{1}{z}$. Utilizando o método do Exemplo 4.1.1, o polinômio de Lehmer é equivalente a:

$$z^5 \left(\left(z + \frac{1}{z} \right)^5 + \left(z + \frac{1}{z} \right)^4 - 5 \left(z + \frac{1}{z} \right)^3 - 5 \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + 4 \left(z + \frac{1}{z} \right) + 3 \right).$$

O polinômio $Q(z) = z^5 + z^4 - 5z^3 - 5z^2 + 4z + 3$ possui todas suas raízes reais, que são aproximadamente $z_1 = -1.89, z_2 = -1.47, z_3 = -0.58, z_4 = 0.91$ e $z_5 = 2.03$, sendo 4 delas localizadas no intervalo $(-2, 2)$, na Figura 12 estão representadas as 10 raízes do polinômio de Lehmer, onde 8 delas estão sobre o círculo unitário.

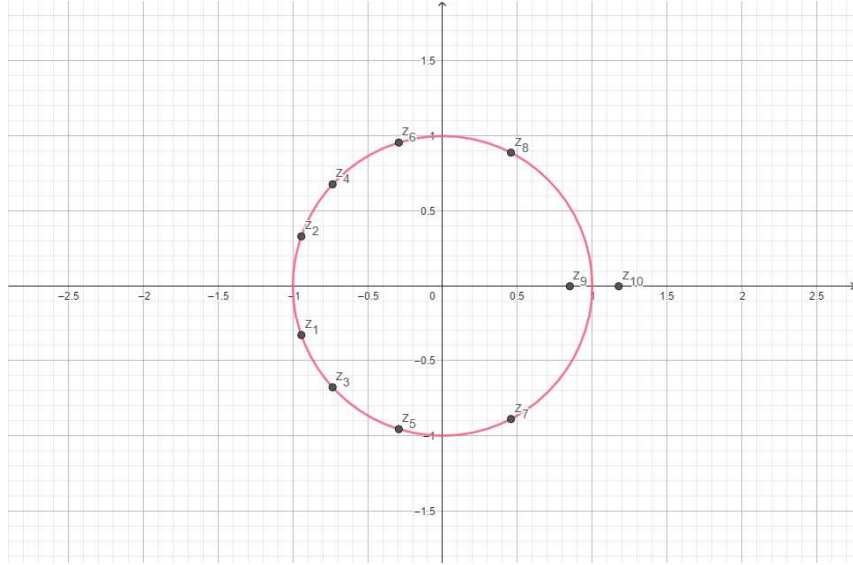


Figura 12: Representação dos zeros do polinômio de Lehmer $P(z) = z^{10} + z^9 - z^7 - z^6 - z^5 - z^4 - z^3 + z + 1$

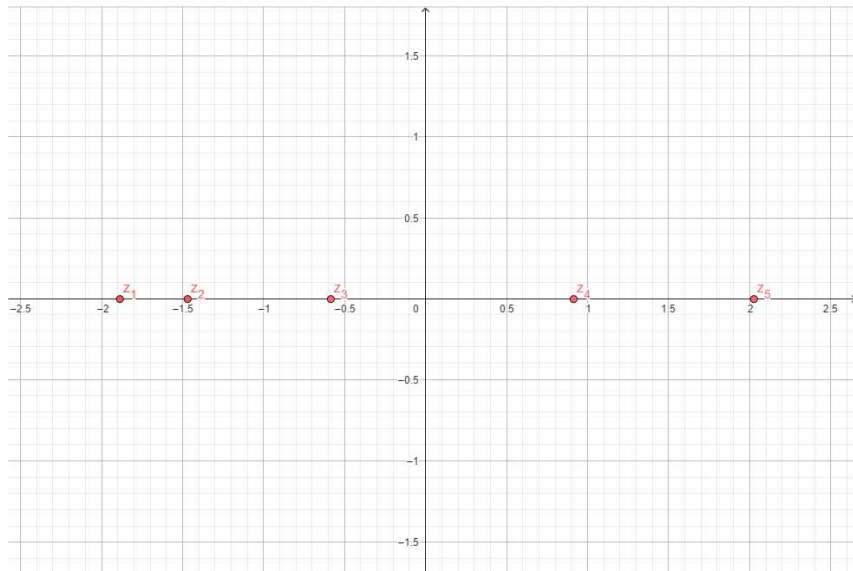


Figura 13: Representação dos zeros do polinômio $Q(z) = z^5 + z^4 - 5z^3 - 5z^2 + z + 3$

Exemplo 4.1.3. Considere o polinômio palindrômico $P(z) = z^4 - 2z^3 - 2z + 1$. Podemos escrever

$$z^4 - 2z^3 - 2z + 1 = z^2 \left(\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 \left(z + \frac{1}{z} \right) - 2 \right)$$

Então raízes de $P(z) = z^4 - 2z^3 - 2z + 1$ no círculo unitário estão relacionadas com as raízes reais do polinômio $Q(w) = w^2 - 2w - 2$ no intervalo $[-2, 2]$. As raízes de Q são aproximadamente -0.732 e 2.732 , onde uma delas pertence ao intervalo $(-2, 2)$

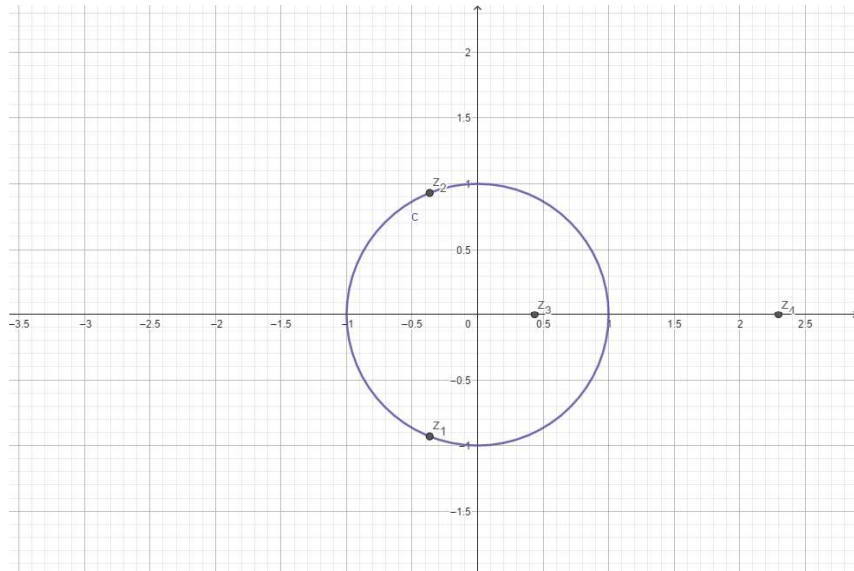


Figura 14: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^4 - 2z^3 - 2z + 1$

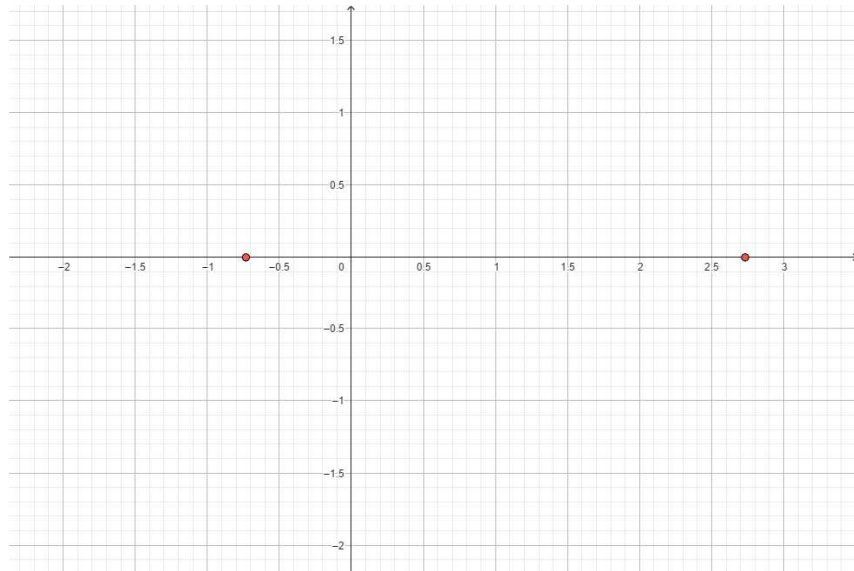


Figura 15: Representação dos zeros do polinômio $Q(w) = w^2 - 2w - 2$

Exemplo 4.1.4. O polinômio palindrômico $P(z) = z^6 - z^4 - 2z^3 - z^2 + 1$ pode ser escrito como:

$$z^6 - z^4 - 2z^3 - z^2 + 1 = z^3 \left(\left(z + \frac{1}{z} \right)^3 - 4 \left(z + \frac{1}{z} \right) + 2 \right)$$

então as raízes de $P(z) = z^6 - z^4 - 2z^3 - z^2 + 1$ no círculo unitário estão relacionadas com as raízes do polinômio $Q(w) = w^3 - 4w + 2$ no intervalo $[-2, 2]$, cujas raízes são aproximadamente $-2.214, 0.539$ e 1.675

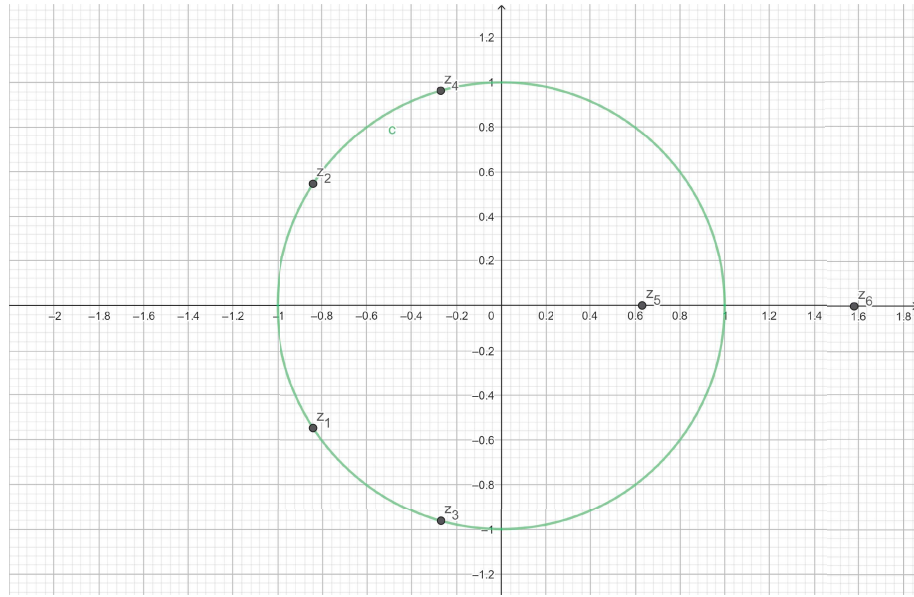


Figura 16: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^6 - z^4 - 2z^3 - z^2 + 1$

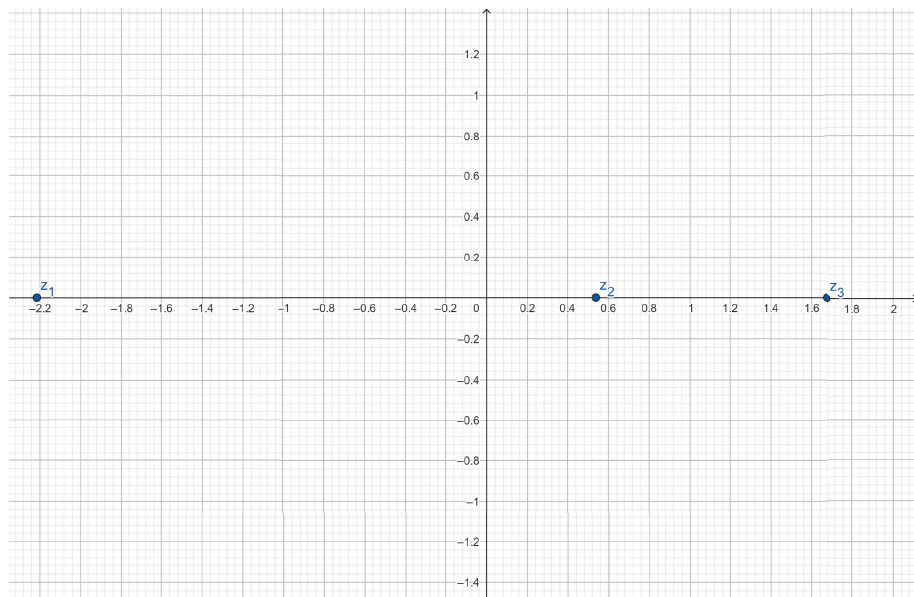


Figura 17: Representação dos zeros do polinômio $Q(w) = w^3 - 4w + 2$

4.2 Método Alternativo para a redução do grau dos polinômios palindrômicos

O Exemplo 4.1.1 mostra um procedimento que envolve várias manipulações algébricas as quais dependem integralmente das expressões que a precedem. O procedimento abaixo que tem como base as relações de Viète permite de maneira alternativa e genericamente expressar

$$P_{2n}(z) = z^n Q_n \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

Sem perda de generalidade, considere o polinômio palindrômico de grau par

$$P_{2n}(z) = z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + 1.$$

Das relações de Viète tem-se que se $z_i, i = 1, 2, \dots, 2n$ são raízes de $P_{2n}(z)$, então:

$$\sum_{i=1}^{2n} z_i = -a_1, \sum_{j \neq i=1}^{2n} z_i z_j = -a_2, \sum_{i \neq j \neq k}^{2n} z_i z_j z_k = -a_3, \dots, z_1 z_2 z_3 \dots z_{2n-1} z_{2n} = 1.$$

Uma vez que estas raízes ocorrem em pares inversos (z_{2i-1}, z_{2i}) , onde $z_{2i} = \frac{1}{z_{2i-1}}, i = 1, 2, \dots, n$ a partir da mudança de variável $x_i = z_{2i-1} + z_{2i}, z_{2i} = \frac{1}{z_{2i-1}}, i = 1, 2, \dots, n$ de $P(z)$ é possível construir um polinômio $Q_n(x)$,

$$Q_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = Q_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x^2 + b_{n-1} x + b_n$$

onde os coeficientes $b_k, k = 1, 2, \dots, n$ são obtidos a partir das relações entre os coeficientes e as raízes de $P(z)$ além do fato de $z_{2i-1} z_{2i} = 1, i = 1, 2, \dots, n$. De posse do polinômio $Q_n(x)$ e a partir de suas raízes $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, obtemos as $2n$ raízes de $P(z)$, decorrentes das n equações quadráticas:

$$x_i = z_{2i-1} + z_{2i} = z_{2i-1} + \frac{1}{z_{2i-1}}, i = 1, 2, \dots, n$$

De fato se

$$Q_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x^2 + b_{n-1} x + b_n$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (z_{2i-1} + z_{2i}) = \sum_{i=1}^{2n} z_i = a_1 \quad (4.2)$$

$$b_2 = \sum_{i \neq j}^n x_i x_j = \sum_{i \neq j}^n (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j}) = \sum_{i \neq j}^{2n} z_i z_j - \sum_{i=1}^n z_{2i-1} z_{2i} = a_2 - n \quad (4.3)$$

uma vez que $\sum_{i \neq j}^{2n} z_i z_j$ contém termos do tipo $z_{2i-1} z_{2i} = 1$ que não estão presentes no desenvolvimento de $\sum_{i \neq j}^n (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j})$. O número excedente deste tipo de parcelas de valor 1 é dado por

$$C_{2n}^2 - 2^2 C_n^2 = n.$$

Por outro lado,

$$b_3 = \sum_{i \neq j \neq k}^n x_i x_j x_k = \sum_{i \neq j \neq k}^n (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j})(z_{2k-1} + z_{2k}) \quad (4.4)$$

Precisamos escrever o desenvolvimento de (4.4) em função de $z_i z_j z_k, i \neq j \neq k$, isto é,

$$b_3 = \sum_{i \neq j \neq k} z_i z_j z_k - \sum z_{2i-1} z_{2i} z_k^1$$

Uma vez que ternas do tipo $z_{2i-1} z_{2i} z_k = z_k$ não estão presentes nas $2^3 C_n^3$ parcelas do desenvolvimento de (4.4). Logo o número excedente deste tipo de parcelas é dado por

$$C_{2n}^3 - 2^3 C_n^3 = 2n(n-1)$$

pois $\sum_{i \neq j \neq k} z_i z_j z_k$ tem C_{2n}^3 ternas. Portanto,

$$\begin{aligned} b_3 &= \sum_{i \neq j \neq k}^{2n} z_i z_j z_k - (n-1) \sum_{k \neq i}^{2n} z_{2i-1} z_i z_k \\ b_3 &= a_3 - (n-1) \sum_{k=1}^{2n} z_k = a_3 - (n-1)a_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

No cálculo de

$$b_4 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n x_i x_j x_k x_l = \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^n (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j})(z_{2k-1} + z_{2k})(z_{2l-1} + z_{2l}) \quad (4.6)$$

¹Nos somatórios não foi indicada a quantidade de parcelas, pois esta ainda será determinada. Utilizaremos este tipo de notação toda vez que o número de parcelas não seja imediato

Observe que esta última expressão no seu desenvolvimento contém $2^4 C_n^4$ parcelas. Uma vez que parcelas do tipo $z_{2i-1}z_{2i}z_jz_l = z_jz_l \neq 1$ e $z_{2i-1}z_{2i}z_{2j-1}z_{2j} = 1$, que não estão presentes em (4.6). Dessa forma se substituirmos $\sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{2n} z_i z_j z_k z_l$ por (4.6) teremos

$$b_4 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{2n} z_i z_j z_k z_l - \left(\sum_{z_j z_l \neq 1} z_{2i-1} z_{2i} z_j z_l + \sum z_{2i-1} z_{2j} z_{2j-1} z_{2j} \right)$$

O total excedente destes dois tipos de parcelas é,

$$C_{2n}^4 - 2^4 C_n^4 = \frac{n(n-1)(4n-7)}{2}$$

das quais C_n^2 parcelas são do tipo $z_{2i-1}z_{2i}z_{2j-1}z_{2j} = 1$, logo

$$b_4 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{2n} z_i z_j z_k z_l - \left(\sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_l + \frac{n(n-1)}{2} \right) \quad (4.7)$$

Por outro lado, o total de parcelas do tipo $z_{2i-1}z_{2i}z_jz_l = z_jz_l \neq 1$ é

$$C_{2n}^4 - 2^4 C_n^4 - C_n^2 = 2n(n-1)(n-2) \quad (4.8)$$

uma vez que $\sum_{j \neq l}^{2n} z_j z_l$ contém C_{2n}^2 parcelas, das quais n são do tipo $z_{2i-1}z_{2i} = 1$ e $C_{2n}^2 - n = 2n(n-1)$ do tipo $z_j z_l \neq 1$, de (4.8) segue-se que $\sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_l$ contém exatamente $(n-2)$ vezes a quantidade deste tipo de termos contidos em $\sum_{j \neq l}^{2n} z_j z_l$, portanto,

$$\sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_l = (n-2) \left(\sum_{j \neq l}^{2n} z_j z_l - n \right)$$

Substituindo esta relação em (4.7) temos

$$\begin{aligned} b_4 &= \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{2n} z_i z_j z_k z_l - \left((n-2) \sum_{j \neq l}^{2n} z_j z_l - \frac{n(n-3)}{2} \right) \\ b_4 &= a_4 - (n-2)a_2 + \frac{n(n-3)}{2} \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
b_5 &= \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^n x_i x_j x_k x_l x_r \\
&= \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^{2n} (z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j})(z_{2k-1} + z_{2k})(z_{2l-1} + z_{2l})(z_{2r-1} + z_{2r}) \\
&= \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^{2n} z_i z_j z_k z_l z_r - \left(\sum z_{2i-1} z_{2i} z_j z_k z_l + \sum z_{2i-1} z_{2i} z_{2j-1} z_{2j} z_k \right) \\
&= \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^{2n} z_i z_j z_k z_l z_r - \left(\sum z_j z_k z_l + \sum z_k \right) \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Uma vez que a quantidade de parcelas do tipo $z_{2i-1} z_{2i} z_{2j-1} z_{2j} z_k = z_k$ de (4.9) é $(2n-4)C_n^2$ logo o número de termos do tipo $z_j z_k z_l$ de (4.9) é dado por,

$$C_{2n}^5 - 2^5 C_n^5 - 2(n-2)C_n^2 = \frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{3} \tag{4.10}$$

Por outro lado $\sum_{i \neq j \neq k}^{2n} z_i z_j z_k$ contém C_{2n}^3 parcelas, das quais $(2n-2)C_n^1$ são do tipo $z_i z_j z_k = z_k$ e $C_{2n}^3 - 2(n-1)C_n^1 = \frac{4n(n-1)(n-2)}{3}$ termos tal que $z_i z_j \neq 1$, de (4.10) segue-se que $\sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_k z_l$ contém exatamente $(n-3)$ vezes a quantidade deste tipo de termos presentes em $\sum_{i \neq j \neq k}^{2n} z_i z_j z_k$, portanto

$$\sum z_{2i-1} z_{2i} z_j z_k z_l = (n-3) \left(\sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_k z_l - \sum z_k \right)$$

De (4.9) segue-se que o número de parcelas do tipo $z_i z_j z_k = z_k$ será

$$(-(n-3)C_n^2 + 2(n-2)C_n^2) = \frac{(n-4)(n-1)n}{2}$$

Substituindo esta relação em (4.10) temos

$$\begin{aligned}
b_5 &= \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^{2n} z_i z_j z_k z_l z_r - (n-3) \sum_{z_j z_l \neq 1} z_j z_k z_l + \frac{(n-4)(n-1)}{2} \sum_{k=1} z_k \\
b_5 &= a_5 - (n-3)a_3 + \frac{(n-4)(n-1)}{2} a_1
\end{aligned}$$

Pelo exposto acima, conclui-se que cada coeficiente b_k de subíndice par/ímpar depende de todos os coeficientes a_k de subíndice par/ímpar inferiores ou iguais a k . Seguindo um procedimento análogo ao supracitado é possível obter os $b_k, k \geq 6$. No caso de um polinômio palindrômico de grau 8 e 6

$$\begin{aligned} P_8(z) &= z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1 \\ P_6(z) &= z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1 \end{aligned}$$

seus correspondentes polinômios reduzidos são respectivamente

$$\begin{aligned} Q_4(x) &= x^4 + a_1 x^3 + (a_2 - 4)x^2 + (a_3 - 3a_1)x + (a_4 - 2a_2 + 2) \\ Q_3(x) &= x^3 + a_1 x^2 + (a_2 - 3)x + (a_3 - 2a_1) \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, no caso específico do polinômio $P_8(z) = z^8 - z^5 - z^4 - z^3 + 1$ temos que

$$Q_4(x) = x^4 - 4x^2 - x + 1$$

uma vez que $a_1 = 0, a_2 - 4 = -4, a_3 - 3a_1 = -1$ e $a_4 - 2a_2 + 2 = 1$, ou equivalentemente,

$$P_8(z) = z^4 Q_4\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^4 \left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 - 4 \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 \right)$$

O próximo teorema estabelece uma relação entre a localização dos zeros de um polinômio palindrômico e os zeros de seu polinômio reduzido.

Teorema 17. *Considere o polinômio palindrômico de grau par e com coeficientes reais*

$$P(z) = z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + 1$$

e seja $Q_n(x)$ seu polinômio reduzido. Então x é uma raiz real de $Q_n(x)$ se, e somente se, $P(z)$ possui duas raízes z , tais que z é real ou $|z| = 1$. Reciprocamente, para cada raiz complexa de $Q_n(x)$, $P(z)$ possuirá duas raízes complexas, $|z| \neq 1$ e reciprocamente.

Demonstração Seja $z = \alpha + \beta i$ uma raiz qualquer de $P(z)$. Logo as raízes de $Q(x)$ são tais que:

$$x = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \alpha \left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right) + \beta \left(1 - \frac{1}{|z|^2}i\right) \quad (4.11)$$

Logo x será real se, e somente se, z é real ou $|z| = 1$. De (4.11) tem-se

$$z = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

logo $x \in (-2, 2) \leftrightarrow z \in \mathbb{C}$. Além disso, $|z| = \sqrt{\left(\frac{-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2} = 1$. Reciprocamente $|x| \geq 2 \leftrightarrow z \in \mathbb{C}$, de tal sorte que z e $\frac{1}{z}$ não estão no círculo unitário.

Exemplo 4.2.1. Considere o polinômio reduzido $Q(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ do polinômio $P(z) = z^{10} + z^9 - z^8 + z^7 - z^6 + 5z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z + 1$. A partir das 5 raízes x_i de $Q(x)$, $i = 1, \dots, 5$ resolvemos as 5 correspondentes equações quadráticas para achar as 10 raízes de $P(z)$. Por exemplo para $x = -2,58$

$$-2,58 = z + \frac{1}{z}$$

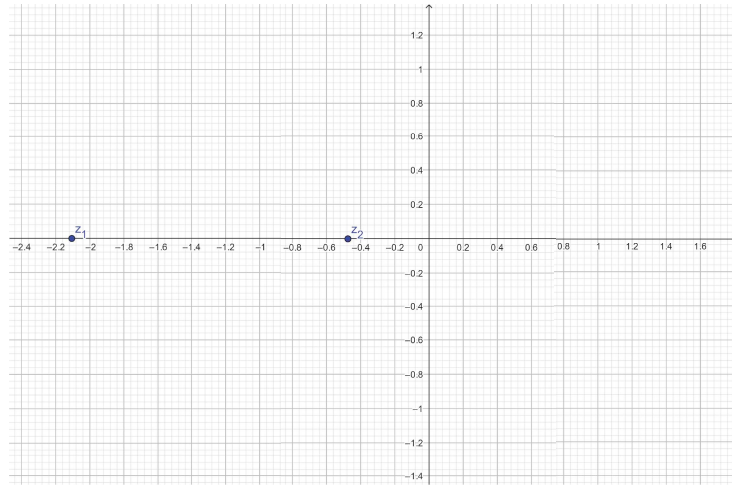


Figura 18: Representação dos zeros da equação quadrática $-2,58 = z + \frac{1}{z}$

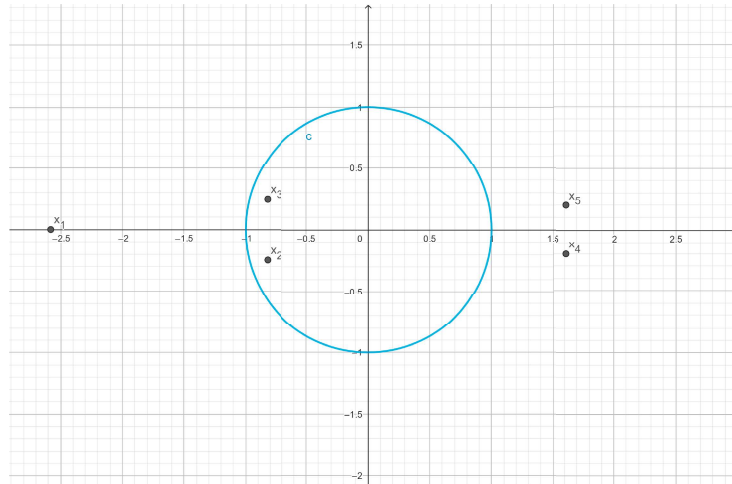


Figura 19: Representação dos zeros do polinômio $Q(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 7x + 5$

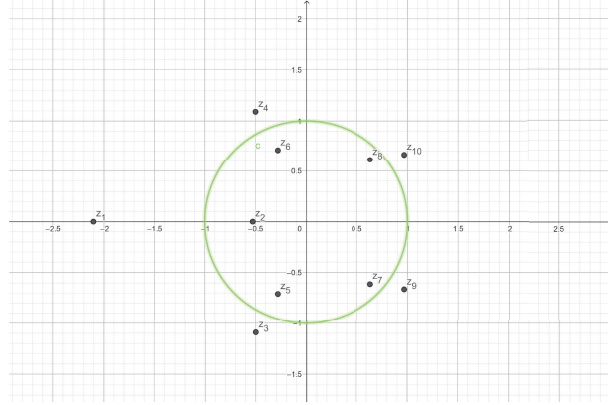


Figura 20: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^{10} + z^9 - z^8 + z^7 - z^6 + 5z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z + 1$

Exemplo 4.2.2. Considere o polinômio $P(z) = z^9 + 4z^8 + 3z^7 + 2z^6 + z^5 + z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + 1$. Uma vez que $P(z) = (z + 1)(z^8 + 3z^7 + 2z^5 - z^4 + 2z^3 + 3z + 1)$, logo o polinômio reduzido de $R(z) = z^8 + 3z^7 + 2z^5 - z^4 + 2z^3 + 3z + 1$ é:

$$Q(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x$$

A partir das 4 raízes x_i de $Q(x)$ resolvemos as 4 correspondentes equações quadráticas pra achar as 8 raízes de $R(z)$. Por exemplo, para $x = 1.69$, temos:

$$1.69 = x + \frac{1}{x}$$

que correspondem a $z_1 = 0.85 + 0.53i$ e $z_2 = .85 + 0.53i$ que correspondem as duas raízes de $P(z)$

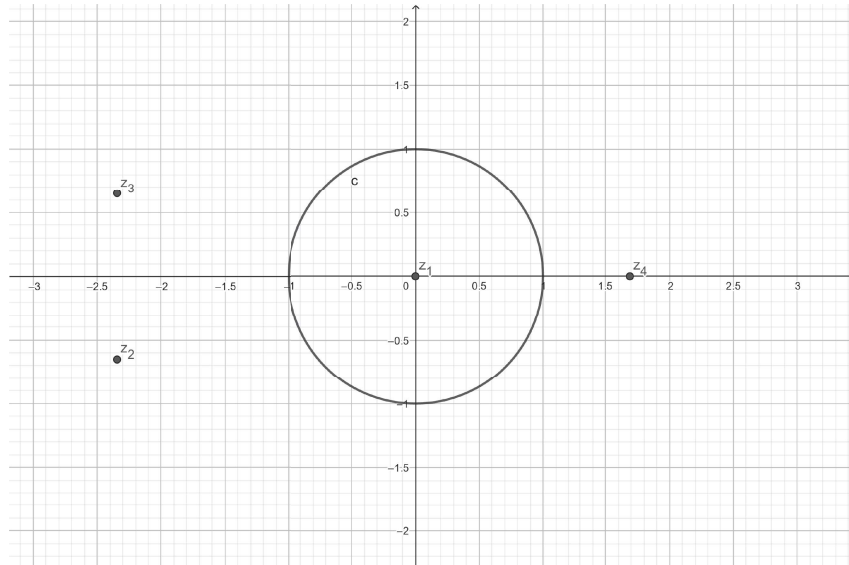


Figura 21: Representação dos zeros do polinômio $Q(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x$

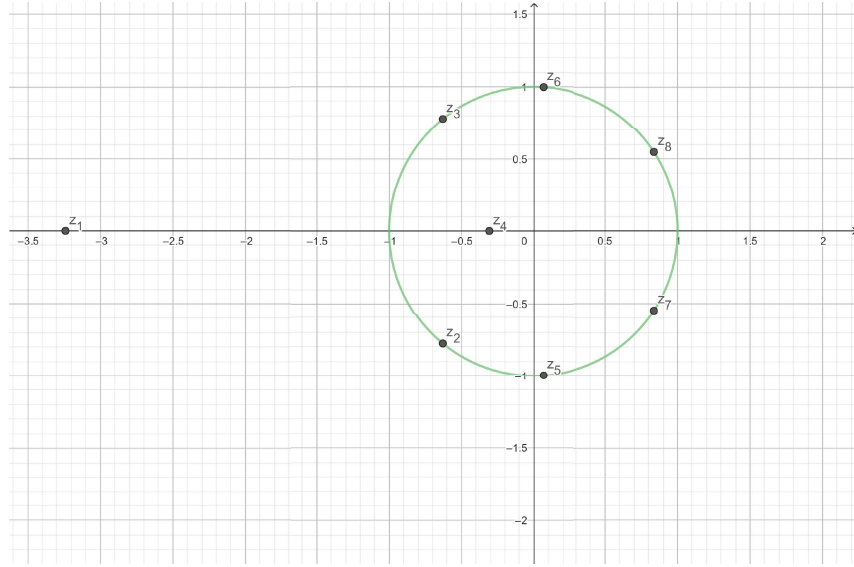


Figura 22: Representação dos zeros do polinômio $R(z) = z^8 + 3z^7 + 2z^5 - z^4 + 2z^3 + 3z + 1$

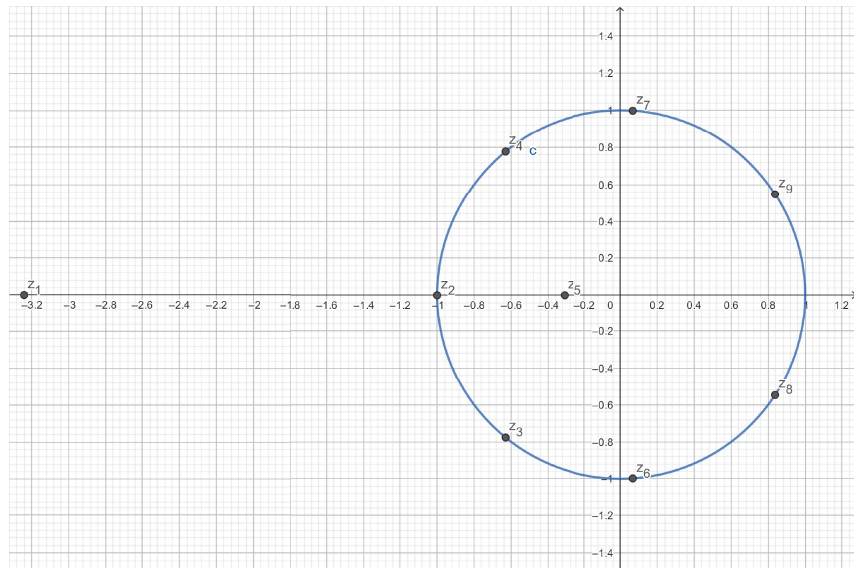


Figura 23: Representação dos zeros do polinômio $P(z) = z^9 + 4z^8 + 3z^7 + 2z^6 + z^5 + z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + 1$

O procedimento apresentado no início de capítulo faz uso de várias manipulações algébricas para escrever um polinômio palíndromico $P(z)$ em termos de $z + \frac{1}{z}$. Porém, essas manipulações dependem integralmente das expressões que a precedem. O método alternativo para a redução do grau de um polinômio palíndromico apresenta a vantagem de depender apenas dos coeficientes do polinômio palíndromico $P(z)$ para encontramos seu polinômio reduzido correspondente, e dada a relação existente entre os zeros de um polinômio reduzido e os zeros de um polinômio palíndromico conseguimos determinar a posição desses em relação ao círculo unitário.

5 Considerações Finais

Neste trabalho foram estudados vários resultados sobre a localização de zeros de polinômios no plano, determinando uma região onde estes podem ser encontrados, bem como os casos onde esses zeros se encontram localizados sobre o círculo unitário. No Capítulo 2 foram vistos resultados gerais sobre zeros de polinômios, muito interessantes, visto que quanto maior o grau do polinômio maior a dificuldade de controlar o comportamento dos seus zeros. No Capítulo 3 foram estudados propriedades de polinômio auto-inversíveis, utilizados posteriormente na análise dos zeros de polinômios palindrômicos. No Capítulo 4 foi abordado um procedimento para onde escrevemos um polinômio palindrômico $P_{2n}(z)$ onde escrevemos $P_{2n}(z) = z^n Q\left(z + \frac{1}{z}\right)$, onde Q é um polinômio de grau n , de tal forma que a partir das raízes de Q obtemos as raízes de P_{2n} . Tal procedimento pode ser visto em [6]. Neste trabalho foi apresentado um método alternativo para tal propósito. É interessante observar como a geometria intrínseca das raízes dos polinômios palindrômicos simplifica o cálculo das mesmas. Observamos que impondo condições aos coeficientes b_k do polinômio reduzido $Q_n(x)$ que definem a natureza de suas raízes de acordo com o Teorema 17, obtemos condições necessárias e suficientes acerca dos coeficientes a_k do polinômio palindrômico $P_{2n}(z)$ e conseqüentemente a cerca da localização do seus zeros no círculo unitário. Convém destacar que está sendo elaborado um artigo com esse ultimo resultado com o objetivo de publica-lo.

Referências

- 1 A. C. M. NETO. *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012
- 2 A. COHN. *Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise*. Mathematische Zeitschrift, 14: 110-148, 1922.
- 3 C.B. BOYER. *História da Matemática*. Edgard Blucher, São Paulo, 1974
- 4 G.V. MILOVANÓVIC; D.S. MITRINOVIC; Th. M. RASSIAS. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. World Scientific, Singapore, 1994.
- 5 E. N. FAZINAZZO. *Polinômios Palindrômicos com Zeros somente Reais*. Master's thesis, UNESP, Presidente Prudente, Julho de 2016.
- 6 <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/numbersoncircle.pdf>
- 7 J. A. PEREIRA. *Zeros de Polinômios Auto-Recíprocos Reais no Círculo Unitário*. Master's thesis, UNESP, Presidente Prudente, Fevereiro de 2015.
- 8 L. F. MARQUES. *Zero de Polinômios Perturbados*. Master's thesis, UNESP, Presidente Prudente, Abril de 2013.
- 9 M. MARDEM. *Geometry of Polynomials*. American Mathematical Society, Providence, 1966.
- 10 N. ANDERSON; E.B. SAFF; R.S.VARGA. On the Eneström-Kekeya theorem and its sharpness. *Linear Algebra App.*, v. 28, p. 5-16, 1979.
- 11 S.H, KIM; C.W. PARK. *On the zeros of certain self-reciprocal polynomials*. J. Math. Anal. Appl., 339:240-247, 2008.