

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA
CURSO ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

**GD com MAPLE: um estudo das curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e suas
evolutas e involutas**

MICHELE MARIANE DE OLIVEIRA BARROS

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

Trabalho de Conclusão de Curso em Especialização em Matemática

**GOIÂNIA - GO
2022**



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Michele Mariane de Oliveira Barros

Matrícula: 20182011160039

Título do Trabalho: GD com MAPLE: um estudo das curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e suas evolutas e involutas

Autorização - Marque uma das opções

1. (X) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. () Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. () Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- () O documento está sujeito a registro de patente.
() O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
() Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 23 / 06 / 2022.
Local Data


Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

Michele Mariane de Oliveira Barros

**GD com MAPLE: um estudo das curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e
suas evolutas e involutas**

Trabalho de Conclusão de Curso em Especialização em Matemática do Instituto Federal de Goiás (IFG) - Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título especialista em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Prof(a). Dr(a). Titular Regina Célia Bueno da Fonseca

Brasil

Goiânia - GO, 2022

B277g Barros, Michele Mariane de Oliveira.

GD com MAPL: um estudo das curvas R^2 e R^3 e suas evolutas e involutas / Michele Mariane de Oliveira Barros. – Goiânia : Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2021. 39p. ; il.

Orientação: Prof(a). Dr(a). Regina Célia Bueno da Fonseca.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Curso de Especialização em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Geometria diferencial. 2. Software MAPLE. I. Fonseca, Regina Célia Bueno da (orientação). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III. Título.

CDD 516.36

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Lana Cristina Dias Oliveira CRB1/2.631
Biblioteca Professor Jorge Félix de Souza,
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

GD com MAPLE: Um estudo das curvas em R2 e R3 e suas evolutas e involutas.

por

MICHELE MARIANE DE OLIVEIRA BARROS

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

Monografia defendida e aprovada, em 06 de julho de 2022, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca (Presidente da Banca/ IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Simone Ariomar de Souza Almeida (IFG/Câmpus Goiânia)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Rua 75, nº 46, Centro, GOIÂNIA / GO, CEP 74055-110
Sem Telefones cadastrados

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus que sempre me ajudou, capacitou e não me deixou desistir;

Aos meus avós Izael e Maria que me ensinaram a ler e sonharam por mim;

A minha mãe Núbya e meu irmão Raphael;

Ao meu esposo Vinícius que me incentiva e apoia;

A minha orientadora paciente, amiga e grande doutora;

A coordenação de pós-graduação pela compreensão e esforços prestados.

Resumo

Inserido no campo da Geometria Diferencial, privilegiando sobretudo os conceitos curvatura, torção, equações de Frenet, evoluta e involuta de curvas especiais, esse trabalho objetiva obter as evolutas e involutas de curvas especiais no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. Para isso, a metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica em livros renomados da área contemplada, bem como o auxílio do software MAPLE. Conclui-se, dentre outros fatos, que muitas curvas ditas não regulares podem ser estudadas na geometria diferencial dentro de um intervalo regular.

Palavras-chave: Geometria Diferencial (GD); Software MAPLE; Curvas; Evolutas; Involutas.

Lista de Figuras

Figura 1 – Triedro de Frenet (B, N, T) numa curva (cor azul) qualquer.	11
Figura 2 – Limaçon com laço	16
Figura 3 – Função curvatura da Limaçon com laço.	18
Figura 4 – Ponto de maior curvatura na Limaçon	19
Figura 5 – Intervalos de parâmetros para curvatura máxima e mínima.	19
Figura 6 – Limaçon com laço e sua evoluta.	20
Figura 7 – Curva Tratriz no Maple.	21
Figura 8 – Função curvatura da Tratriz no Maple.	23
Figura 9 – Curvatura da Tratriz no Maple.	24
Figura 10 – Evoluta da Tratriz no Maple.	25
Figura 11 – Ciclóide no Maple.	26
Figura 12 – Ciclóide regular por partes no Maple.	26
Figura 13 – Evoluta da Ciclóide no MAPLE.	28
Figura 14 – Retas tangentes a evoluta da ciclóide ortogais a α no MAPLE.	28
Figura 15 – Triedro de Frenet da Hélice.	31
Figura 16 – Involuta da hélice circular para $a = 1$	32
Figura 17 – Hélice Cônica circular.	33
Figura 18 – Uma involuta da hélice cônica circular.	35

Lista de abreviaturas e siglas

GD	Geometria Diferencial
P.C.A.	Parametrização por comprimento de arco

Lista de símbolos

α	Letra grega Alfa representa uma curva
β	Letra grega Beta representa uma curva
κ	Letra grega Kappa representa curvatura
θ	Letra grega Theta representa um ângulo
τ	Letra grega Tau representa a torção
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^2$	Plano vetorial com par ordenado (x, y) de números reais
$\mathbb{R}^3$	Espaço vetorial com ternas (x, y, z) de números reais
$\mathbb{R}^n$	Espaço vetorial com n-tuplas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais, $n \in \mathbb{Z}_+^*$
C^∞	Classe infinitamente diferenciável

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA EM GD - ESTUDO DAS CURVAS	3
1.1 $\mathbb{R}^n$ como um espaço vetorial com um produto interno	3
1.2 Definição e Métodos de Apresentação de Curvas	4
1.3 Reparametrização por Comprimento de Arco	6
1.4 Curvatura e Torção de uma Curva	8
1.4.1 Curvatura e Diedro de Frenet no Plano	8
1.4.1.1 Diedro de Frenet	9
1.4.2 Curvatura, Triedro de Frenet e Torção no $\mathbb{R}^3$	9
1.4.2.1 Triedro de Frenet	10
1.4.3 Evolutas e Involutas	12
2 CURVAS REGULARES ESPECIAIS	14
2.1 Curvas Especiais	14
2.2 Curvas no MAPLE	15
2.3 Curva não simples	15
2.3.1 Limaçon com laço	15
2.3.2 Curvatura da Limaçon	17
2.3.3 Evoluta Limaçon	20
2.4 Curvas regulares por partes	20
2.4.1 Tratriz	20
2.4.1.1 Curvatura da Tratriz	22
2.4.1.2 Evoluta da Tratriz	25
2.4.2 Ciclóide	25
2.4.2.1 Curvatura da Ciclóide	27
2.4.2.2 Evoluta da Ciclóide	28
3 CURVAS ESPECIAIS NO $\mathbb{R}^3$	29
3.1 Hélice circular	29
3.1.1 Involuta da hélice circular	32
3.2 Hélice cônica circular	33
3.2.0.1 Involuta da Hélice Cônica	35
4 CONCLUSÃO	37

REFERÊNCIAS 38

Introdução

Sabe-se que as idéias primitivas de geometria surgiram da necessidade de medir terras. Algo tão aplicável e primitivo se tornou uma ciência com a contribuição de grandes matemáticos. A geometria como conhecimento científico teve origem na Grécia com Euclides (325 a.C. - 265 a.C.). A GD uniu a geometria ao cálculo diferencial integral para analisar o comportamento de curvas e superfícies no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. Os estudos de Christian Huygens (1629 - 1695) originaram os conceitos das curvas involuta e evoluta. Seguido de outros matemáticos, anos mais tarde, Gaspard Monge (1746-1818) conceituou torção. Entretanto, os principais teoremas da GD moderna tiveram início com Carl Gauss (1777-1855) ([COIMBRA, 2008](#)).

Buscando aplicar os conceitos de cálculo diferencial integral, geometria analítica e geometria diferencial estudados na graduação e pós-graduação desenvolvemos este trabalho voltado para análise do comportamento de curvas no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$.

Pela relevância do estudo de GD na análise do comportamento das curvas, no plano e no espaço, os propósitos deste trabalho são: primeiramente investigar curvatura e torção e depois analisar as involutas e evolutas a partir de uma dada curva. Para obtermos curvatura e torção introduzimos o conceito de equações de Frenet e suas aplicações ao longo das curvas aqui abordadas. Os conceitos mais importantes para o nosso estudo são os de curvas regulares, e se não regulares determinarmos se existe um intervalo regular. Também verificamos quando é conveniente uma reparametrização por comprimento de arco.

Analizamos as características como curvatura, torção, evoluta e involuta das curvas: Limaçon, Tratriz, Ciclóide, Hélice circular e Hélice cônica. A metodologia deste estudo é uma investigação bibliográfica, bem como aplicação de cálculos e gráficos verificados pelo software MAPLE.

O objetivo geral é obter as curvas evolutas e involutas de curvas especiais no plano e no espaço. Este trabalho tem como objetivos específicos:

- Estudar as curvas regulares planas C^∞ parametrizadas por comprimento de arco ou por um parâmetro qualquer;
- Estudar curvas regulares dentro de um intervalo;
- Estudar os elementos geométricos: Diedro, Triedro e equações de Frenet;
- Aplicar os conceitos de evoluta e involuta das curvas especiais aqui abordadas;
- Usar o software MAPLE.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo abordamos os conhecimentos prévios de geometria diferencial para o desenvolvimento deste estudo. Toda a fundamentação teórica básica de cálculo diferencial integral, geometria analítica e conceitos próprios de geometria diferencial foram definidos com base nos autores estudados.

No capítulo dois apresentamos as curvas em $\mathbb{R}^2$ que foram analisadas em duas seções: curvas não simples e curvas regulares por partes. As curvas não simples apresentam auto-intersecção, por tanto escolhemos estudar um caso de Limaçon. Enquanto na seção de curvas regulares por partes analisamos a tratriz e a cicloide por apresentarem cúspides.

O capítulo seguinte é composto pela análise de curvatura, torção, Triedro de Frenet, evoluta e involuta em $\mathbb{R}^3$. As curvas especiais abordadas foram as Hélices circulares e cônicas. Por fim, no capítulo final, concluímos brevemente o nosso estudo.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica em GD - Estudo das Curvas

Neste capítulo trataremos dos principais conceitos que consolidam a GD. Todas as definições e proposições apresentadas estão contidas no $\mathbb{R}^n$, entretanto o nosso estudo se concentra em $n = 2$ e $n = 3$.

Temos o intuito de construir a cada seção a ideia de parametrização por comprimento de arco, o Diedro e Triedo de Frenet, curvatura e torção. Tais definições conduzirão as conhecidas Evolutas e Involutas. Este capítulo tem como principais referências [Tenenblat \(2008\)](#), [Carmo \(1971\)](#), [Faria \(2017\)](#), [Biezuner \(2019\)](#).

Uma observação válida é que utilizamos o parâmetro s para curvas reparametrizadas por comprimento de arco e mantemos o t para curvas com um parâmetro qualquer. Deixamos claro, porque os autores referenciados podem usar letras diferentes e causar estranhamento.

1.1 $\mathbb{R}^n$ como um espaço vetorial com um produto interno

O $\mathbb{R}^n$ é definido como o conjunto de todas as n -tuplas de números reais, que são definidas como $x = (x_1, \dots, x_n)$. Dada a adição componente, temos

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

bem como a multiplicação escalar por números reais, obtendo

$$a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n), \quad (1.1)$$

o espaço $\mathbb{R}^n$ é um $\mathbb{R}$ espaço vetorial. Neste espaço vetorial temos que o *produto interno Euclidiano* (forma bilinear) é definido como

$$x, y \longmapsto \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \quad (1.2)$$

As propriedades do produto interno são as seguintes:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, (simetria)
2. $\langle a_1 x_1 + a_2 x_2, y \rangle = a_1 \langle x_1, y \rangle + a_2 \langle x_2, y \rangle$, (bilinearidade)
3. $\langle x, x \rangle > 0$, $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. (definida positiva)

Neste espaço vetorial, os três vetores $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ formam uma base canônica no $\mathbb{R}^3$. Sejam $\vec{x} = (x_1\vec{i}, x_2\vec{j}, x_3\vec{k})$ e $\vec{y} = (y_1\vec{i}, y_2\vec{j}, y_3\vec{k})$ os vetores no $\mathbb{R}^3$, então o *produto vetorial Euclidiano* é dado por

$$\vec{x} \times \vec{y}. \quad (1.3)$$

Isso nos permite definir o comprimento dos vetores pela norma

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (1.4)$$

bem como introduzir o ângulo φ entre dois vetores $x, y \neq 0$ para

$$\cos(\varphi) = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}. \quad (1.5)$$

A distância (métrica) entre dois pontos x, y é então definida como a norma do vetor diferença $y - x$. Isso torna $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial normado por um lado e um espaço métrico por outro. A geometria euclidiana pode então ser baseada nessas noções de comprimentos e ângulos (KUEHNEL, 2015).

1.2 Definição e Métodos de Apresentação de Curvas

No mundo prático, as curvas surgem de muitas maneiras diferentes, por exemplo, como curvas de perfil ou contornos de objetos técnicos. O desenho no papel em branco, as curvas aparecem como o traço do lápis para desenhá-lo. Para os físicos, as curvas surgem naturalmente no movimento de uma partícula no tempo t . Associar o parâmetro t com a posição $c(t)$ é importante, e este processo é chamado de *parametrização da curva*; a curva é então chamada de *curva parametrizada* (KUEHNEL, 2015).

Nesta Seção fazemos uma breve revisão dos conceitos e propriedades das curvas no $\mathbb{R}^n$, sendo $n = 2, 3$.

Definição 1.1 (Curva Parametrizada) Chamamos curva parametrizada a uma função contínua,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \end{aligned}$$

onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, as funções reais $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ são denominadas por funções coordenadas, e a variável t designada por parâmetro de α . A função α chamamos parametrização (FARIA, 2017).

Definição 1.2 (Traço de uma curva parametrizada) Dada uma curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^n$. O conjunto imagem $Im(\alpha) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$ é chamado traço de α (FARIA, 2017).

Definição 1.3 (Curva parametrizada simples) Uma curva parametrizada α é simples, se α for injetiva em I , isto é, se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in I$, exceto se o intervalo I for fechado $[a, b]$, o qual admite-se $\alpha(a) = \alpha(b)$. Quando não é simples, dizemos que α tem auto-interseção (FARIA, 2017).

Definição 1.4 (Curva parametrizada diferenciável) Uma curva parametrizada diferenciável é uma função vetorial localmente injetiva, continuamente diferenciável, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que α é uma curva parametrizada de classe C^k se α é k vezes continuamente diferenciável. Se α é de classe C^∞ também dizemos que α é uma curva parametrizada suave (BIEZUNER, 2019).

Definição 1.5 (Vetor tangente) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente de α em $T \in I$ é definido por (TENENBLAT, 2008; FARIA, 2017)

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Definição 1.6 (Curva Parametrizada Diferenciável no Plano) Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. A variável $t \in I$ é dita **parâmetro da curva**, e o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é chamado **traço da curva** (TENENBLAT, 2008).

Definição 1.7 (Curva Parametrizada Diferenciável no $\mathbb{R}^3$) Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. A variável $t \in I$ é dita **parâmetro da curva**, e o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é chamado **traço da curva** (TENENBLAT, 2008).

Definição 1.8 (Vetor Aceleração) O vetor aceleração de α em $t \in I$ é a primeira derivada do vetor tangente de α e tem-se (TENENBLAT, 2008; FARIA, 2017)

$$\begin{aligned} \alpha'' : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (f''_1(t), f''_2(t), \dots, f''_n(t)). \end{aligned}$$

Teorema 1.1 Se α é diferenciável e $\|\alpha(t)\|$ é constante, então $\alpha'(t)$ é ortogonal a $\alpha(t)$ para todo t no domínio de α' (EARL, 1994).

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na Ref. Earl (1994).

Definição 1.9 (Vetor Unitário) Se $v \neq 0$, então o vetor unitário u de mesma direção que v é (EARL, 1994; REIS; SILVA, 2002)

$$\vec{u} = \frac{v}{\|v\|}.$$

Definição 1.10 (Vetor Tangente Unitário (T)) Seja $T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor tangente unitário a curva α em $t \in I$ com $|\alpha'(t)| \neq 0$ (FARIA, 2017)

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}. \quad (1.7)$$

Definição 1.11 (Curva Regular) Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **regular**, se $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ (TENENBLAT, 2008; FARIA, 2017; BIEZUNER, 2019).

Definição 1.12 (Reta Tangente) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada regular. A reta tangente a α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, isto é,

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0), r \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.13 (Curva Regular por partes) Uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\alpha'(t) \neq 0$, exceto para um número finito de parâmetros, $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$, é chamada regular por partes. Os pontos com $\alpha'(t) = 0$ são chamados pontos singulares da curva (FARIA, 2017; BIEZUNER, 2019).

Definição 1.14 (Difeomorfismo) Um difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ é uma bijeção cuja inversa é também diferenciável. Se ambas, f e f^{-1} são de classe C^k , dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k (LIMA, 2011).

1.3 Reparametrização por Comprimento de Arco

Na seção anterior relembramos conceitos básicos da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial Integral. A partir destes conceitos é possível fazer uma mudança de parâmetros em uma dada curva α regular de forma conveniente a cálculos futuros, a essa reparametrização chamaremos de Parametrização por Comprimento de Arco (P.C.A.).

Definição 1.15 (Reparametrização) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular de classe C^k , Se J é um intervalo e $h : J \rightarrow I$ é um difeomorfismo (C^k), então

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

é uma curva regular de classe C^k , que tem o mesmo traço que α , chamada reparametrização de α por h . A função h é dita mudança de parâmetro (TENENBLAT, 2008; BIEZUNER, 2019; FARIA, 2017).

Definição 1.16 (Função Comprimento de Arco) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada e $t_0 \in I$. A função comprimento de arco de α a partir de t_0 é a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (TENENBLAT, 2008; BIEZUNER, 2019; CARMO, 1971)

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt, \quad (1.8)$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(f'_1(t))^2 + (f'_2(t))^2 + \dots + (f'_n(t))^2}.$$

Definição 1.17 (Parametrização P.C.A.) Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$ (TENENBLAT, 2008; FARIA, 2017). Isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 1.1 Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $\forall t \in I$, (TENENBLAT, 2008; FARIA, 2017)

$$|\alpha'(t)| = 1. \quad (1.9)$$

A demonstração desta proposição pode ser encontrada na Ref. Tenenblat (2008).

Definição 1.18 (Reparametrização P.C.A.) Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular, $s : I \rightarrow J$ a função de comprimento de arco (bijetiva de classe C^1) com $J, I \subset \mathbb{R}$. Então, existe a função inversa $s^{-1} = \beta : J \rightarrow I$ de $s(t)$ (TENENBLAT, 2008; FARIA, 2017). A reparametrização de α por $h = s^{-1}$ é dado por

$$\begin{aligned} \beta : J &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\mapsto (\alpha \circ h)(s). \end{aligned}$$

A Def.1.18 diz que toda curva regular pode ser reparametrizada por comprimento de arco (BIEZUNER, 2019).

1.4 Curvatura e Torção de uma Curva

Nesta seção vamos discorrer as definições de curvatura e torção através do Diedro e Triado de Frenet de acordo com referências [Tenenblat \(2008\)](#), [Faria \(2017\)](#), [Biezuner \(2019\)](#), [Carmo \(1971\)](#). Vimos a construção de uma curva β através da parametrização por comprimento de arco de uma curva α . Todas as definições já apresentadas são princípios intuitivos para o desenvolver desta seção.

As referências citadas acima, descrevem curvatura como um número real que mede o quanto uma curva se afasta da direção de sua tangente, ou mesmo, indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. Em palavras simples: "o quanto a curva se curva". A definição dessa seção trata do cálculo da curvatura para uma curva do tipo P.C.A.. Uma mesma curva permite parametrizações diferentes, portanto podemos calcular a curvatura de curvas regulares não parametrizadas pelo comprimento de arco como será mostrado na Proposição 1.2.

Em $\mathbb{R}^3$ cada par de vetores do Triado de Frenet (N, T, B) (Seção 1.4.2.1) vão determinar um plano. Sendo assim, podemos concluir o plano em que a curva α está contida. Estes planos podem ser: normal, osculador e retificante. A torção vai nos permitir o cálculo do quanto a curva se afasta de estar contida nesses planos ([FARIA, 2017](#); [TENENBLAT, 2008](#)).

Definição 1.19 (Curvatura para curvas P.C.A.) Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então, a curvatura de α em $s \in I$ é o número real dado por ([TENENBLAT, 2008](#); [FARIA, 2017](#); [BIEZUNER, 2019](#); [SIMMONS, 2008](#))

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)|, \quad (1.10)$$

ou seja,

$$\kappa(s) = |T'|. \quad (1.11)$$

1.4.1 Curvatura e Diedro de Frenet no Plano

No $\mathbb{R}^2$, como definido anteriormente, se a curva é do tipo P.C.A. aplica-se a Def. 1.10. A Prop. 1.2 a seguir, mostra o cálculo da função curvatura para para um t qualquer.

Proposição 1.2 (Curvatura para um parâmetro qualquer) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t . Então, a função curvatura $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\kappa(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (1.12)$$

A demonstração da Proposição 1.2 pode ser encontrada nas Ref. [Faria \(2017\)](#), [Tenenblat \(2008\)](#).

1.4.1.1 Diedro de Frenet

Em curvas planas chamamos a base ortonormal $T(s), N(s)$ de Referencial de Frenet, trata-se, respectivamente, do vetor tangente unitário e o vetor normal unitário ortogonal a $T(s)$. A curvatura nada mais é do que um fator de proporcionalidade entre os vetores $T'(s)$ e $N(s)$.

Da definição 1.10, o vetor tangente unitário de uma curva P.C.A é dado por ([TENENBLAT, 2008](#)),

$$T = (x'(s), y'(s)), \quad (1.13)$$

tendo em vista que o denominador $|\alpha'(t)| = 1$ já que a curva é P.C.A.. O vetor normal unitário é

$$N = (-x'(s), y'(s)). \quad (1.14)$$

Proposição 1.3 Seja $\alpha(t) = (x'(t), y'(t))$, $t \in I$, uma curva regular parametrizada por um parâmetro qualquer t . Então,

$$T(t) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad (1.15)$$

$$N(t) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}. \quad (1.16)$$

Note que a **função curvatura** com uma parâmetro qualquer decorre de

$$\kappa(t) = \frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{|T(t)|^3}. \quad (1.17)$$

A demonstração da Proposição 1.3 pode ser obtida na Ref. ([TENENBLAT, 2008](#)).

Observação 1.1 Note que a Eq. (1.12) é equivalente a Eq. (1.17).

1.4.2 Curvatura, Triedo de Frenet e Torção no $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^3$ a curvatura para um curva do tipo P.C.A. segue a Def. 1.19. A Prop. 1.4 apresenta as equações para o cálculo de curvatura e torção em uma parâmetro qualquer.

Proposição 1.4 (Curvatura e Torção para α em um parâmetro qualquer) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t e $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco, isto é, $\beta(s(t)) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$. Sejam $\kappa(s) > 0$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção β em $s \in J$, então (TENENBLAT, 2008)

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad (1.18)$$

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}. \quad (1.19)$$

Observação 1.2 Para o cálculo da função curvatura no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ optamos por aplicar a Eq. (1.18).

1.4.2.1 Triedro de Frenet

O Triedro de Frenet para um curva parametrizada por comprimento de arco é composto por T, N e B, que foram expícitos nas Eq. (1.23), Eq. (1.24) e Eq. (1.26). Caso a curva não seja P.C.A. o Triedro de Frenet é dado por

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad (1.20)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}, \quad (1.21)$$

$$N(t) = \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)||\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}. \quad (1.22)$$

Da Eq. (1.13) temos que o vetor tangente (T) de uma curva P.C.A. é dado por (TENENBLAT, 2008)

$$T = |\alpha'(s)|. \quad (1.23)$$

Definição 1.20 (Vetor normal) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$. O vetor

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} \quad (1.24)$$

é denominado **vetor normal** a α em s (BIEZUNER, 2019; TENENBLAT, 2008).

Definição 1.21 (Vetor binormal para um curva P.C.A.) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$. O vetor binormal é α em s é

$$B(s) = T(s) \times N(s). \quad (1.25)$$

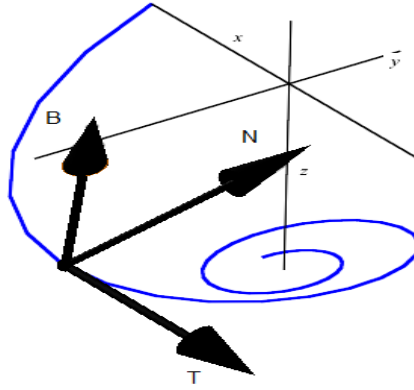


Figura 1 – Triedro de Frenet (B, N, T) numa curva (cor azul) qualquer.

Observe que caso a curva seja do tipo P.C.A., o vetor binormal é equivalente a escrever

$$B(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}. \quad (1.26)$$

Na Fig.1, podemos observar que a curva (azul), próximo ao eixo z, apresenta uma ideia de torção, diferente de nula.

Proposição 1.5 (Curvatura nula) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e só se, $\kappa(s) = 0, \forall s \in I$. A demonstração da Proposição 1.5 pode ser obtida na Ref. (TENENBLAT, 2008) pág.62.

Definição 1.22 (Plano Osculador) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. O plano osculador de α em $s \in I$ é um plano que passa em $\alpha(s)$ e é paralelo aos vetores tangentes $T(s)$ e normal $N(s)$ (FARIA, 2017).

Definição 1.23 (Torção para uma curva P.C.A.) O número real $\tau(s)$ definido por (TENENBLAT, 2008)

$$B'(s) = \tau(s)N(s) \quad (1.27)$$

é denominado torção da curva P.C.A. em s.

Em outras palavras,

$$\tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle. \quad (1.28)$$

Proposição 1.6 (Torção nula) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, de curvatura não nula. Então, α é uma curva plana se, e só se, $\tau \equiv 0$.

A demonstração da Proposição 1.6 pode ser obtida na Ref. (TENENBLAT, 2008) pág.72.

Definição 1.24 (Equações de Frenet) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\kappa(s) > 0, \forall s \in I$. Então para cada $s \in I$ temos as equações de Frenet de α definidas por (TENENBLAT, 2008)

$$T'(s) = \kappa(s)N(s), \quad (1.29)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \quad (1.30)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s). \quad (1.31)$$

1.4.3 Evolutas e Involutas

No decorrer dos capítulos 2 e 3 veremos que o estudo de evolutas difere bastante no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. No plano encontraremos uma única evoluta, enquanto que no espaço encontraremos uma família infinita de evolutas e involutas (TENENBLAT, 2008).

Em $\mathbb{R}^2$ o círculo de raio $p(s) = \frac{1}{|\kappa(s)|}$ e centro

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) \quad (1.32)$$

é denominado círculo osculador e $c(s)$ centro de curvatura. Conforme variamos o parâmetro é descrito uma curva β (Eq.(1.33)) chamada de evoluta de α (TENENBLAT, 2008).

Definição 1.25 (Evoluta no $\mathbb{R}^2$) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. A evoluta de α é uma curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por (CARMO, 1971; FARIA, 2017)

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t). \quad (1.33)$$

Definição 1.26 (Involuta P.C.A. no $\mathbb{R}^3$) Seja $\alpha(s), s \in I$, uma curva regular de $\mathbb{R}^3$. Uma involuta α é uma curva $\tilde{\alpha}(s)$ tal que, $\forall s \in I$, $\tilde{\alpha}(s)$ intercepta a reta tangente a α em s ortogonalmente, dada por (TENENBLAT, 2008; FARIA, 2017)

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (a - s)T(s). \quad (1.34)$$

Proposição 1.7 (Involuta) Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t com $n = \{2, 3\}$, e a uma constante real arbitrária. A involuta de α em $t \in I$ a partir de a é uma curva $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por (FARIA, 2017)

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + (a - s(t))T(t), \quad (1.35)$$

sendo a uma constante, pela Eq. (1.35) podemos encontrar uma família infinita de involuta de α .

Observação 1.3 Na Eq. (1.35), $s(t)$ é a função comprimento de arco dada na Def. 1.16.

Definição 1.27 (Evoluta e Involuta) Se $\tilde{\alpha}$ é uma involuta de α , então definimos α como sendo uma evoluta de $\tilde{\alpha}$ (TENENBLAT, 2008).

Proposição 1.8 (Evoluta no $\mathbb{R}^3$) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Uma evoluta de α é uma curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (TENENBLAT, 2008; FARIA, 2017)

$$\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s) + \frac{1}{\tilde{\kappa}(s)} \tilde{N}(s) + \frac{1}{\tilde{\kappa}(s)} \cot \left(\int \tilde{\tau}(s) + a \right) \tilde{B}(s). \quad (1.36)$$

A demonstração da Proposição 1.8 pode ser obtida na Ref. (TENENBLAT, 2008; FARIA, 2017).

Capítulo 2

Curvas Regulares Especiais

2.1 Curvas Especiais

Neste capítulo trataremos de curvas regulares especiais, aquelas que apresentam auto-intersecção e também curvas que são regulares por partes. A atenção inicial é verificar a existência de uma reta tangente a curva especial para cada valor do parâmetro t visto que temos a intenção de encontrar a curvatura em $\mathbb{R}^2$, e conseqüentemente a involuta e a evoluta de cada curva.

Quando falamos de curvas paramétricas que possuem auto-intersecção, denominadas como curvas não simples, observamos que este fenômeno ocorre quando $t_1 < t_2$ e $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$ (COIMBRA, 2008). Nestes pontos, quando possível, determinaremos o vetor tangente, pois existem casos em que o vetor tangente a curva no ponto de intersecção não está bem definido. No entanto, não significa que não há vetor tangente. Curvas paramétricas diferenciáveis regulares por partes possuem pontos singulares onde $|\alpha'(t)| = 0$, no entanto, em um dado intervalo a curva apresenta regularidade $|\alpha'(t)| \neq 0, \forall t \in I$, onde I é o período regular.

As curvas, abordadas aqui, dentro de um intervalo são suaves, não apresentando saltos, apenas possuem picos onde os tangentes de $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ são $x'(t) = y'(t) = 0$. Observando que, as curvas regulares por partes não são em um todo ditas regular.

Se pensarmos em curvas como o percurso descrito por uma partícula, nesses instantes em que podemos observar $x'(t) = y'(t) = 0$, a partícula não apresenta velocidade nas direções do eixos x e y , o mesmo vale para z em $\mathbb{R}^3$, podendo afirmar que ela está parada, pois a $\alpha'(t)$ é o nosso vetor tangente (T), conhecido como a velocidade em que uma partícula se move. A velocidade (vetor tangente) é a taxa de variação de posição, por isso podemos afirmar que para estes casos $x'(t) = y'(t) = 0$ a partícula está parada. E nestes pontos singulares não faz sentido trabalhar a GD com cálculos de curvatura, torção, evoluta e involuta. Afim de atender ao interesse desse estudo, nos restringiremos a curvas,

seja com auto-intersecção ou com cúspides, que pelo menos possam ser ditas regulares dentro de um intervalo.

2.2 Curvas no MAPLE

As curvas especiais foram plotadas no software MAPLE¹. Como pode ser observado na Fig. 1 fizemos uso do pacote VectorCalculus e o comando PlotPositionVector que mostra os vetores tangente, normal e binormais unitários, nessa ordem, podendo estes serem visualizados explicitamente na curva hélice. Ao longo de todo nosso trabalho os pacotes necessários e corriqueiro para o estudo foram VectorCalculus e Plots. Usamos o softwares para visualizar a forma geométrica dos cálculos de curvatura e torção. O comando Display nos permitiu ver a sobreposição das curvas em um mesmo plano como na Fig. 5. Em muitas figuras preservamos a estrutura de comandos para que possam auxiliar em estudos futuros.

2.3 Curva não simples

Como vimos no capítulo 1 as curvas não simples apresentam auto-intersecção. Nesta seção escolhemos estudar a Limaçon com laço, em algumas referências, podemos observar que tal curva é denominada Cardióide. No entanto, a curva descrita na Eq. (2.1) pode ser escrita na forma polar como $r = 2 \cdot \cos(\theta) - 1$, sendo assim $a \neq b$ e a curva se trata de uma Limaçon com laço (EARL, 1994; OLIVEIRA; FONSECA, 2018). Neste caso, temos $a = 1$ e $b = 2$, logicamente $a < b$, forma o laço interno da Fig. 2. O nome Limaçon tem origem francesa e significa caracol. Mais exemplos de Limaçons, bem como mudanças de coordenadas paramétricas para polares, podem ser vistos detalhadamente em Thomas Jr., Weir e Hass (2018), Oliveira e Fonseca (2018), Baptista (2017).

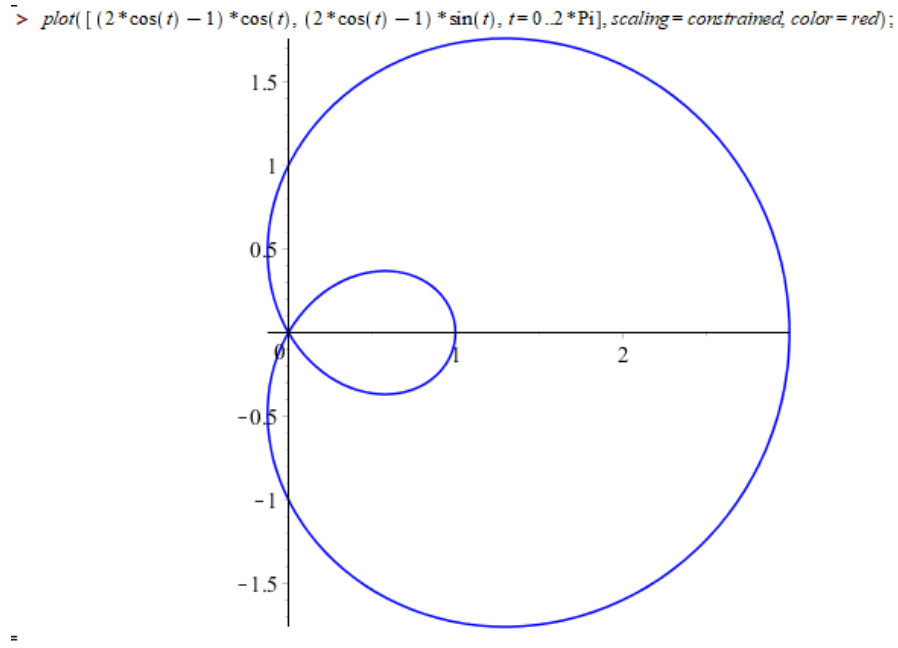
2.3.1 Limaçon com laço

O nosso estudo teve início com uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^2$ regular conhecida e bastante aplicável no universo matemático, a Limaçon com laço descrita pela equação:

$$\alpha(t) = (\cos t(2 \cos t - 1), \sin t(2 \cos t - 1)). \quad (2.1)$$

A Fig.2 mostra a curva "Limaçon com laço" dada na Eq. (2.1). A trajetória de Marte vista da Terra descreve uma Limaçon.

¹ A coordenação de Matemática tem a licença do Software MAPLE adquirida em 2007.

**Figura 2** – Limaçon com laço

Por se tratar de uma Limaçon com laço sabemos que a curva não é simples, pois possui uma auto-intersecção. Buscamos estudar o comportamento da sua curvatura, bem como o seu sinal, o círculo osculador e a sua evoluta. Faremos o cálculo da primeira derivada que nos fornece o vetor tangente dado na Eq. (1.6) e permite uma análise de critérios para o nosso estudo. Segue da Eq. (2.1) que,

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-\sin t(2\cos t - 1) + \cos t(-2\sin t), \cos t(2\cos t - 1) + \sin t(-2\sin t)) \\ \alpha'(t) &= (\sin t - 4\sin t \cos t, -\cos t - 2(\sin^2 t - \cos^2 t)) \\ \alpha'(t) &= (\sin t - 2\sin 2t, -\cos t - 2\left(\frac{1 - \cos 2t}{2} - \frac{1 + \cos 2t}{2}\right))\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha'(t) = (\sin t - 2\sin 2t, 2\cos 2t - \cos t).} \quad (2.2)$$

É fácil observar que,

$$\boxed{\alpha''(t) = (\cos t - 4\cos 2t, -4\sin 2t + \sin t).} \quad (2.3)$$

Um critério a ser observado é a regularidade da curva, ou seja, se $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ para $\forall t \in (0, 2\pi)$.

Lawrence (1972) apresenta um resumo da geometria da curva Limaçon, (ver Ref.(LAWRENCE, 1972), pág. 115 e 116).

$$\begin{aligned}x'(t) &= \sin(t) - 2\sin(2t) = 0 \\ &\rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 2\pi \text{ ou } t = \frac{4\pi}{3}. \\ y'(t) &= 2\cos(2t) - \cos(t) = 0 \\ &\rightarrow t = \pi \text{ ou } t = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Observe que não existe um parâmetro t comum para anular simultaneamente $x'(t)$ e $y'(t)$. Concluimos que $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ para $\forall t \in (0, 2\pi)$, podendo afirmar que a curva dada na Eq. (2.1) é regular.

Algo a se levar em conta, que também tornou a curva (Eq. (2.1)) especial para este estudo e que pode gerar dúvidas observando a Figura 2, no ponto de auto-intersecção. Lawrence (1972) mostra que esse ponto é gerado nos parâmetros $t = \pm \frac{\pi}{3}$. Se pensarmos na Limaçon com laço como o percurso descrito pelo movimento de uma partícula, neste ponto a partícula passa duas vezes, mas em tempos de percurso diferentes. O que de fato nos interessa é a existência do vetor tangente ($\alpha'(t)$) ao traço da curva neste ponto. Mesmo que a curva toque a origem para estes parâmetros, $\alpha'(\frac{\pi}{3}) \neq \alpha'(-\frac{\pi}{3})$, dizemos que o vetor tangente não está bem definido na origem.

2.3.2 Curvatura da Limaçon

Para determinar a função curvatura da curva limaçon é necessário calcular o módulo do vetor tangente, assim determinarmos a variação deste ao longo da curva. Então,

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{(\sin t - 2 \sin 2t)^2 + (2 \cos 2t - \cos t)^2} \\ |\alpha'(t)|^2 &= \sin^2 t - 4 \sin 2t \sin t + 4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t - 4 \cos 2t \cos t + \cos^2 t \\ |\alpha'(t)|^2 &= 1 + 4 - 4(\sin 2t \sin t + \cos 2t \cos t) \\ |\alpha'(t)|^2 &= 5 - 4(2 \sin t \cos t \sin t + \cos 2t \cos t) \\ |\alpha'(t)|^2 &= 5 + 4 \cos t (-2 \sin^2 t + 2 \sin^2 t - 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{|\alpha'(t)| = \sqrt{5 - 4 \cos t}}, \quad (2.4)$$

onde usamos as identidades trigonométricas $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$ e $\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1$. A Eq. (2.4) mostra que a curva não é do tipo P.C.A. como é dado na Prop. 1.1. Perceba que encontrar a inversa da função comprimento de arco, neste caso, não será tão simples. Por este motivo não reparametrizamos a curva $\alpha(t)$ por comprimento de arco. Neste caso, será necessário o cálculo da curvatura para um parâmetro qualquer. Pela Prop. 1.4 e Eq. (1.18) podemos obter $|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|$ usando as Eq. (2.2) e Eq. (2.3). Desenvolvendo o produto vetorial temos,

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin t - 2 \sin 2t & 2 \cos 2t - \cos t & 0 \\ \cos t - 4 \cos 2t & -4 \sin 2t + \sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$|x'y'' - x''y'| = -(\cos t - 4 \cos 2t)(2 \cos 2t - \cos t) + (\sin t - 2 \sin 2t)(-4 \sin 2t + \sin t)$$

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = 9 - 6 \cos t. \quad (2.5)$$

Finalmente vamos aplicar os resultados Eq. (2.4) e Eq. (2.5) em Eq. (1.18),

$$\kappa(t) = \frac{9 - 6 \cos t}{(5 - 4 \cos t)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.6)$$

A Fig.3 é a função curvatura dada na Eq.(2.6), observe:

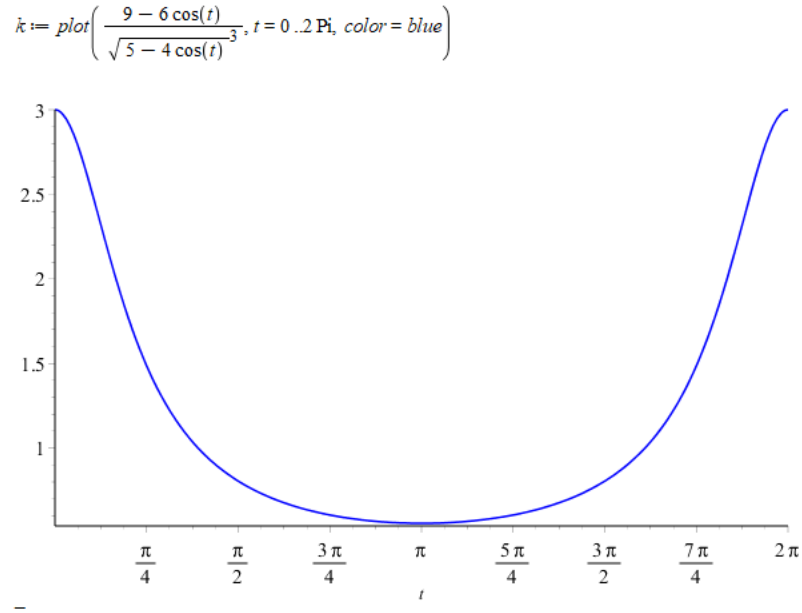


Figura 3 – Função curvatura da Limaçon com laço.

Observando a Fig.3 no ponto $(3, 0)$ para o parâmetro $\alpha(\pi)$ a Limaçon atinge curvatura mínima. Pois, pela Eq. (2.1) quanto $t = \pi$ temos,

$$\alpha(\pi) = (\cos \pi(2 \cos \pi - 1), \sin \pi(2 \cos \pi - 1)) = (3, 0). \quad (2.7)$$

A Fig.4 destaca em vermelho o ponto de máxima curvatura para os parâmetros $\alpha(0)$ e $\alpha(2\pi)$. Este ponto pode ser obtido aplicando o parâmetro $t = 0$ ou $t = 2\pi$ na Eq.(2.1)

$$\alpha(0) = (\cos 0(2 \cos 0 - 1), \sin 0(2 \cos 0 - 1)) = (1, 0). \quad (2.8)$$

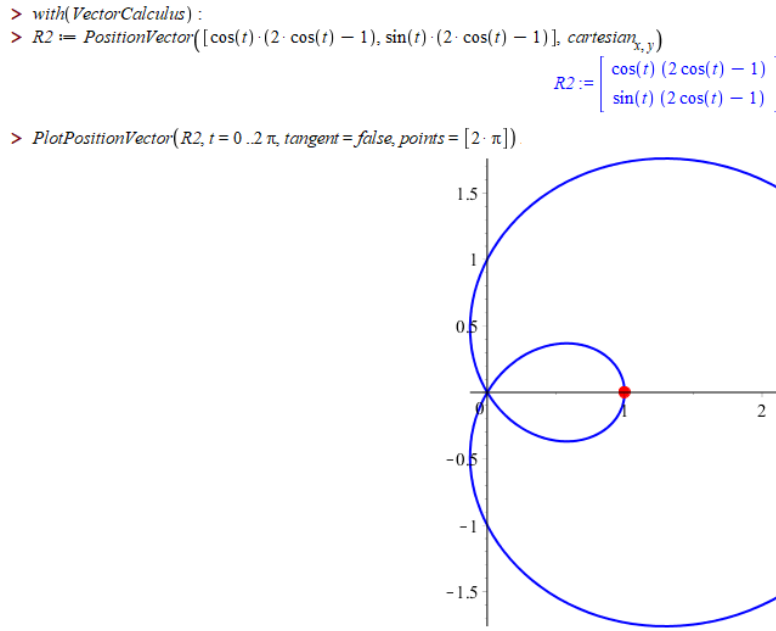


Figura 4 – Ponto de maior curvatura na Limaçon

Matematicamente de forma grosseira podemos interpretar que nos pontos de máxima curvatura é onde a curva é mais curvada, ou seja, onde está mais distante de ser aproximar de uma assíntota. Observe as curvas da Fig. 5, a parte em vermelho representa os intervalos onde a curvatura é maior e a parte em azul é o intervalo do parâmetro t em que a curvatura decresce, de acordo com a função curvatura da Eq. (2.6) explícita na Fig. 3.

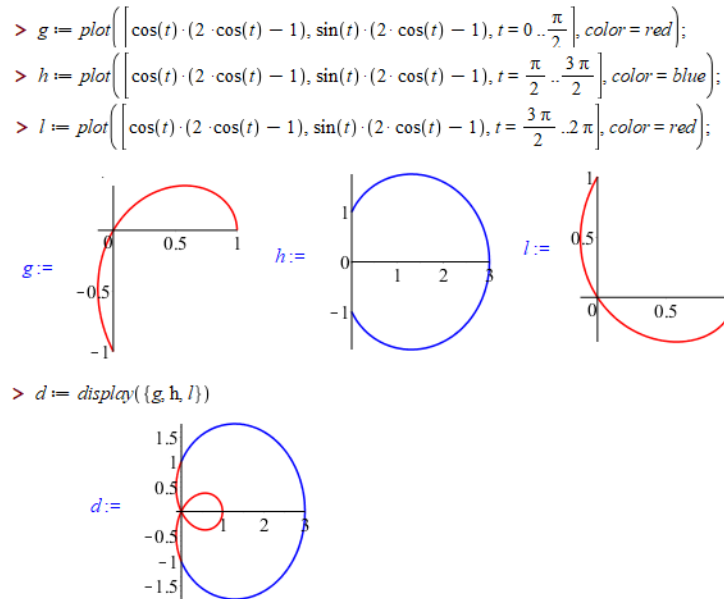


Figura 5 – Intervalos de parâmetros para curvatura máxima e mínima.

2.3.3 Evoluta Limaçon

Sabemos que evolutas são descritas conforme a variação do círculo osculador. Logo a evoluta da Limaçon seguindo a Eq. (1.33) é,

$$\beta = (\cos t(2 \cos t - 1), \sin t(2 \cos t - 1)) + \frac{(5 - 4 \cos t)^{\frac{3}{2}}}{9 - 6 \cos t} \cdot \frac{(\cos t - 2 \cos 2t, \sin t - 2 \sin 2t)}{(5 - 4 \cos t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\beta = (\cos t(2 \cos t - 1) + \frac{5-4 \cos t}{9-6 \cos t}(\cos t - 2 \cos 2t), \sin t(2 \cos t - 1) + \frac{5-4 \cos t}{9-6 \cos t}(\sin t - 2 \sin 2t)).$$

A Fig. 6 mostra a curva Limaçon com laço α em azul e a sua evoluta β em vermelho.

```
> with(plots):
> b := plot([cos(t) * (2 * cos(t) - 1) + ((5 - 4 * cos(t)) / (9 - 6 * cos(t))) * (cos(t) - 2 * cos(2 * t)), sin(t) * (2 * cos(t) - 1) + ((5 - 4 * cos(t)) / (9 - 6 * cos(t))) * (sin(t) - 2 * sin(2 * t)), t = 0 .. 2 * Pi], color = red):
> a := plot([cos(t) * (2 * cos(t) - 1), sin(t) * (2 * cos(t) - 1), t = 0 .. 2 * Pi], color = blue):
> display(b, a)
```

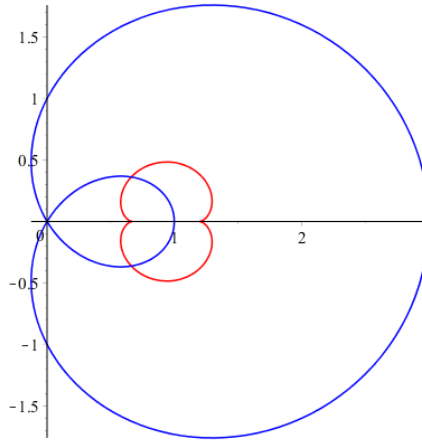


Figura 6 – Limaçon com laço e sua evoluta.

2.4 Curvas regulares por partes

2.4.1 Tratriz

A curva Tratriz é dada pela função $\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \ln(\tan \frac{t}{2}))$, conforme mostra a Fig. 7.

```
> with(plots) :
> plot([sin(t), cos(t) + ln(tan(t/2))], t = 0 .. pi, color = blue);
```

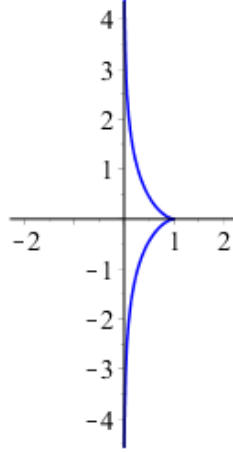


Figura 7 – Curva Tratriz no Maple.

A curva Tratriz dada na Fig. 7 é uma curva parametrizada diferenciável, no entanto não se encaixa na definição de regular, pois graficamente apresenta um cúspide (vértice). Isso quer dizer que existe um parâmetro t onde a curva $\alpha'(t) = (0, 0)$ impossibilitando sua regularidade. Porém, podemos estudar essa curva por partes, desprezando o ponto onde ela é irregular. Vamos desenvolver o estudo da curvatura da Tratriz dada pela equação:

$$\alpha(t) = (\sin(t), \ln(\tan(\frac{t}{2})) + \cos(t)), t \in (0, \pi). \quad (2.9)$$

Vamos determinar $\alpha'(t)$ para uma maior análise da curva,

$$\alpha'(t) = \left(\cos t, -\sin t + \frac{\sec^2 \frac{t}{2}}{2 \tan \frac{t}{2}} \right).$$

Por relações trigonométricas sabemos que a secante é a razão trigonométrica inversa do cosseno ($\sec = \frac{1}{\cos t}$) e a tangente é a razão entre o seno e o cosseno ($\tan = \frac{\sin t}{\cos t}$), assim

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}} \right) \\ \alpha'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2 \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}} \right) \\ \alpha'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right) \end{aligned}$$

$$\alpha'(t) = \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t} \right). \quad (2.10)$$

Facilmente determinamos a derivada de segunda ordem,

$$\alpha''(t) = \left(-\sin t, -2 \cos t - \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t} \right). \quad (2.11)$$

É fácil ver que a curva é diferenciável. No entanto, observando o comportamento de $y'(t)$ na Eq. (2.10) durante todo o intervalo $(0, \pi)$ existe uma restrição, pois $\sin(t) \neq 0$, ou seja, o parâmetro deve ser $t \neq 0$ e $t \neq \pi$ para que a curva exista. De fato, não é esta restrição que interfere na regularidade da curva, mas o parâmetro em que ocorre $\alpha'(t) = (0, 0)$. Coimbra (2008) mostra detalhadamente a análise do parâmetro singular da curva (ver Ref. (COIMBRA, 2008), pág. 16). Assim,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos t = 0 \\ &\rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ y'(t) &= \frac{\cos^2 t}{\sin t} = 0 \\ &\rightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad 0 < t < \pi. \end{aligned}$$

Podemos concluir que $\alpha'(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)$ e portanto a curva não é regular para qualquer parâmetro. Essa irregularidade ocorre no ponto $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$, exatamente onde se forma o cúspide da Tratriz. Por este motivo, denominamos a Tratriz uma curva regular por partes, de forma que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \neq \frac{\pi}{2}$, pois podemos considerá-la dentro do intervalo em que ela se faz regular.

2.4.1.1 Curvatura da Tratriz

Por teorema sabemos que módulo da primeira derivada nos permite dizer se a curva é ou não P.C.A.. O módulo de $\alpha'(t)$ é

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)|^2 &= \cos^2 t + \frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} \\ |\alpha'(t)|^2 &= \cos^2 t \cdot \csc^2 t \\ |\alpha'(t)|^2 &= \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \end{aligned}$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 t}}. \quad (2.12)$$

A Eq. (2.12) permite concluir que α não é P.C.A., pois $|\alpha'(t)| \neq 1$. Encontramos a curvatura para um parâmetro qualquer, pois a reparametrização P.C.A. não é conveniente, no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.² Para isso, determinamos antes o produto vetorial $|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|$, tal que

² No caso da curva descrita pela Eq. (2.9), consideramos que aplicar os conceitos do capítulo 1 para um parâmetro qualquer se torna mais prático e rápido. Domingues (2013) pág. 45-47 mostra a reparametrização por comprimento de arco para uma Tratriz genérica e o cálculo de sua curvatura.

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \frac{\cos^2 t}{\sin t} & 0 \\ -\sin t & -2 \cos t - \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t} & 0 \end{vmatrix}$$

$$|x'y'' - x''y'| = \frac{\cos^2 t}{\sin t} \cdot \sin t - 2 \cos^2 t - \frac{\cos^4 t}{\sin^2 t}$$

$$|x'y'' - x''y'| = \cos^2 t \cdot (-1 - \cot^2 t)$$

$$|x'y'' - x''y'| = \cos^2 t \cdot (-\csc^2 t)$$

$$|x'y'' - x''y'| = -\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

$$\boxed{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = -\frac{1}{\tan^2 t}.} \quad (2.13)$$

Facilmente podemos encontrar a função curvatura κ ,

$$\kappa(t) = \frac{-\frac{1}{\tan^2 t}}{\left(\frac{1}{\tan^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(t) = -\left(\frac{1}{\tan^2 t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\kappa(t) = -|\tan t|.} \quad (2.14)$$

Usamos o MAPLE para auxiliar na interpretação da função encontrada na Eq. (2.14). A Fig. 8 permitiu uma construção ilustrativa dos parâmetros onde temos o crescimento e o decrescimento da curvatura na Fig. 9.

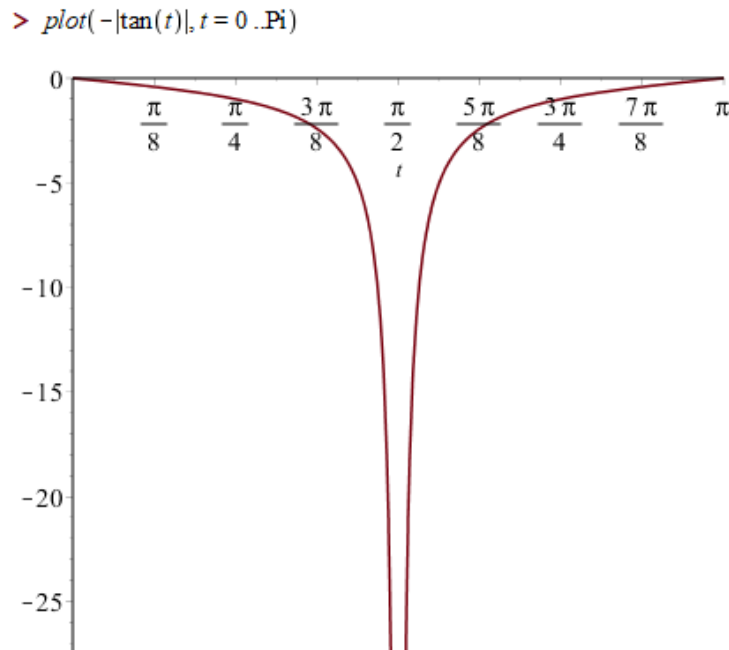


Figura 8 – Função curvatura da Tratriz no Maple.

Note que, como já hávamos analisado, a curva dada na Fig. 8 está dividida em duas partes, pois a Tratriz dada na Eq.(2.9) não é totalmente regular. A primeira parte da curva se encontra no intervalo $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e a segunda parte nos parâmetros $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Novamente, em vermelho temos os parâmetros onde a curvatura é maior e em azul onde a curvatura é menor. Ampliamos a Fig. 9 em a), b), c) para uma melhor visualização e escolhemos os parâmetros t de forma conveniente. A Fig. 9 mostra a curvatura da Tratriz, e os traços na cor azul da curva são os momentos em que ela se aproxima de uma reta, tendo uma curvatura bem pequena. Enquanto que, os traços na cor vermelha temos os parâmetros em que as retas tangentes mudam de direção em uma velocidade maior.

```
> t1 := plot([sin(t), cos(t) + ln(tan(t/2))], t = 0 .. Pi/32, color = blue) :
> t2 := plot([sin(t), cos(t) + ln(tan(t/2))], t = 3*Pi/8 .. Pi/2, color = blue) :
> t3 := plot([sin(t), cos(t) + ln(tan(t/2))], t = Pi/32 .. 3*Pi/8, color = red) :
> t4 := plot([sin(t), cos(t) + ln(tan(t/2))], t = Pi/2 .. 5*Pi/8, color = blue) :
> t5 := plot([sin(t), cos(t) + ln(tan(t/2))], t = 31*Pi/32 .. Pi, color = blue) :
> t6 := plot([sin(t), cos(t) + ln(tan(t/2))], t = 5*Pi/8 .. 31*Pi/32, color = red) :
> display(t1, t2, t3, t4, t5, t6)
```

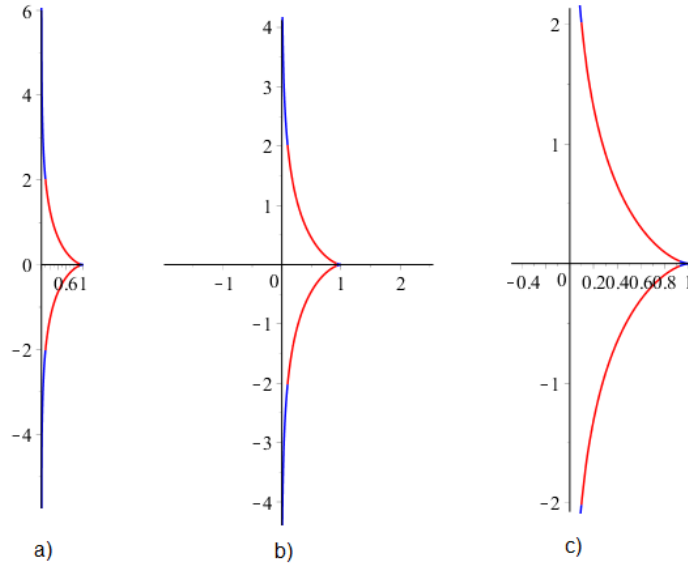


Figura 9 – Curvatura da Tratriz no Maple.

2.4.1.2 Evoluta da Tratriz

A variação do parâmetro do centro de curvatura nos permite encontrar uma nova curva β , conhecida como evoluta de α . Pela equação 1.33 a evoluta da tratriz é dada por,

$$\begin{aligned}\beta &= (\sin t, \ln(\tan(\frac{t}{2})) + \cos t) + \frac{1}{-|\tan t|} \cdot \frac{\left(-\frac{\cos^2 t}{\sin t}, \cos t\right)}{\frac{1}{\tan t}} \\ \beta &= (\sin t, \ln(\tan(\frac{t}{2})) + \cos t) + \left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}, -\cos t\right) \\ \beta &= \left(\sin t + \frac{\cos^2 t}{\sin t}, \ln(\tan(\frac{t}{2}))\right) \\ \boxed{\beta &= \left(\frac{1}{\sin t}, \ln(\tan(\frac{t}{2}))\right).}\end{aligned}\tag{2.15}$$

```
> beta := plot([ [ 1/sin(t), ln(tan(t/2)) ], t=0..Pi ], color=red):
> alpha := plot([ [ sin(t), cos(t) + ln(tan(t/2)) ], t=0..pi ], color=blue):
> display(alpha, beta)
```

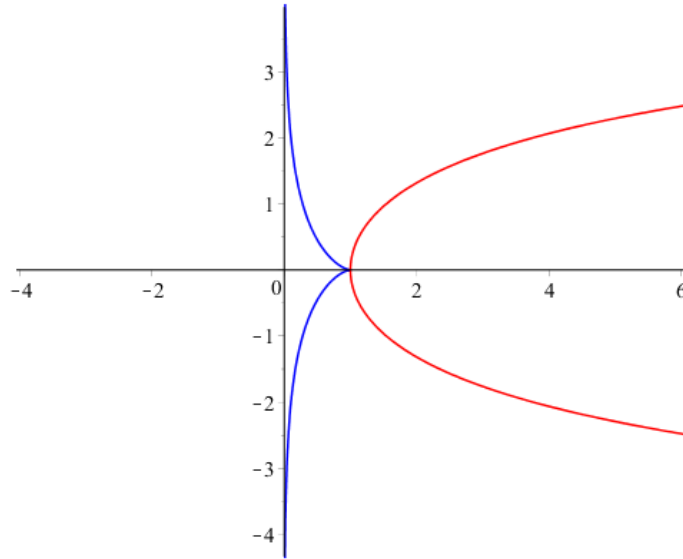


Figura 10 – Evoluta da Tratriz no Maple.

A Fig. 10 mostra a Tratriz (curva azul) e sua curva evoluta (cor vermelha).

2.4.2 Ciclóide

Assim como a Tratriz, a Ciclóide não é uma curva regular apresentando cúpides. Estudamos a Ciclóide dada por:

$$\boxed{\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).}\tag{2.16}$$

O cálculo da primeira e segunda derivada de α nos permite uma análise maior da curva. Logo, obtemos

$$\boxed{\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t)}, \quad (2.17)$$

e

$$\boxed{\alpha''(t) = (\sin t, \cos t)}. \quad (2.18)$$

A Fig. 11 mostra a curva cicloide dada na Eq. (2.16). Da Eq. (2.17) vamos definir como $x'(t) = 1 - \cos(t)$ e $y'(t) = \sin(t)$ para determinar o intervalo em que podemos considerar a curva regular. Segundo Faria (2017). Assim,

$$\alpha'(t) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.19)$$

Isso nos diz que $\alpha'(2k\pi) = (0, 0)$, portanto a curva cicloide não é regular conforme sua visualização na Fig. 11.

```
> alpha := [t - sin(t), 1 - cos(t), t = 0 .. 6 * pi]
alpha := [t - sin(t), 1 - cos(t), t = 0 .. 6 * pi]
> plot(alpha, color = blue)
```

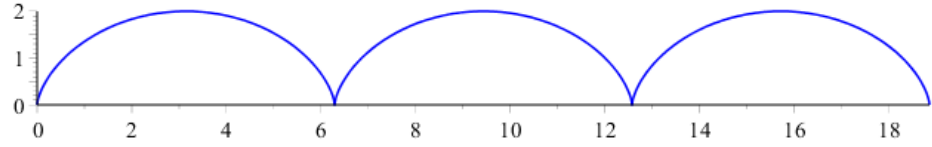


Figura 11 – Cicloide no Maple.

Porém, podemos considerar a regularidade por partes dentro do intervalo $]0, 2\pi[$. A Fig. 12 mostra a curva cicloide regular por partes, em $t \in [0, 6]$.

```
> alpha := [t - sin(t), 1 - cos(t), t = 0 .. 2 * pi]
alpha := [t - sin(t), 1 - cos(t), t = 0 .. 2 * pi]
> plot(alpha, color = blue)
```

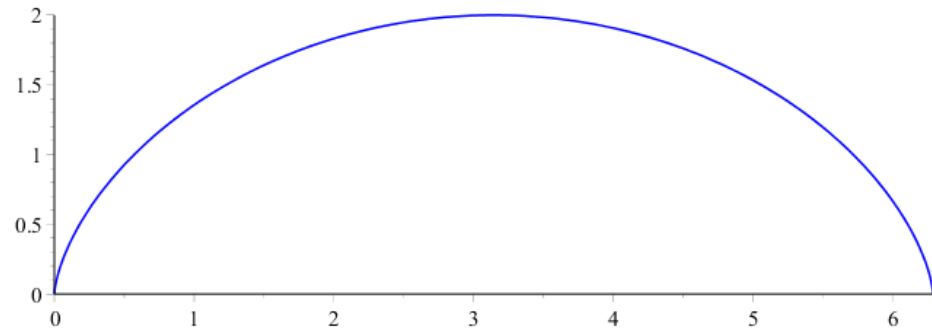


Figura 12 – Cicloide regular por partes no Maple.

2.4.2.1 Curvatura da Ciclóide

Já é conhecido que toda curva permite parametrização do tipo P.C.A.. Pela Eq. (2.16) o módulo da primeira derivada nos diz se a curva já possui tal parametrização vejamos,

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)|^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \\ |\alpha'(t)|^2 &= 1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t \\ |\alpha'(t)|^2 &= 2 - 2 \cos t \end{aligned}$$

$$\boxed{|\alpha'(t)| = \sqrt{2(1 - \cos t)}}. \quad (2.20)$$

Podemos observar da Eq. (2.20) que o módulo é diferente de 1, portanto a curva dada na Eq. (2.16) não é P.C.A. e mais uma vez, consideramos que não será conveniente tal reparametrização.³ Sendo um cálculo trabalhoso e portanto inconveniente, calculamos a curvatura para um parâmetro arbitrário, dada por,

$$\kappa(t) = \frac{|(1 - \cos t, \sin t) \times (\sin t, \cos t)|}{\left(\sqrt{2(1 - \cos t)}\right)^3}. \quad (2.21)$$

Desenvolvendo o produto vetorial, temos:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 - \cos t & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$|x'y'' - x''y'| = \cos t - \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\boxed{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = \cos t - 1}.$$

Logo a função que descreve a curvatura da cicloide α é,

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\cos t - 1}{(2(1 - \cos t))^{\frac{3}{2}}}}. \quad (2.22)$$

³ Ciclóide P.C.A. é dada por $s \mapsto (2 \arccos(1 - \frac{s}{4}) - \sin(2 \arccos(1 - \frac{s}{4})), 2 - 2(1 - \frac{s}{4})^2)$, (ver Ref.(FARIA, 2017), pág. 16). Observa-se que determinar a reparametrização por comprimento de arco não é trabalhoso, no entanto os cálculos futuros de curvatura e evoluta se tornariam extensos.

2.4.2.2 Evoluta da Cíclóide

```

> beta := plot([t + sin(t), cos(t) - 1, t = 0 .. 6 * Pi], color = red, style = point) :
> alpha := plot([t - sin(t), 1 - cos(t), t = 0 .. 6 * Pi], color = blue) :
> display(beta, alpha)

```

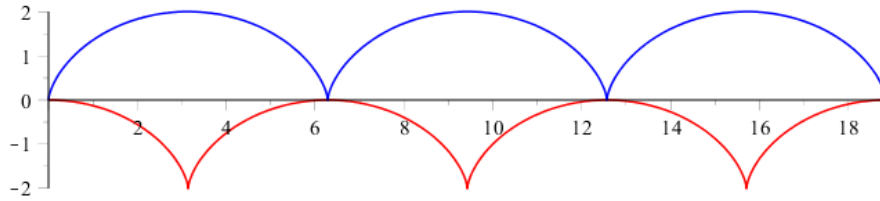


Figura 13 – Evoluta da Cíclóide no MAPLE.

Aplicando a equação 1.33 temos

$$\begin{aligned}
 \beta &= (t - \sin t, 1 - \cos t) + \frac{(2(1 - \cos t))^{\frac{3}{2}}}{\cos t - 1} \cdot \frac{(-\sin t, 1 - \cos t)}{(2(1 - \cos t))^{\frac{1}{2}}} \\
 \beta &= (t - \sin t, 1 - \cos t) + \frac{(2(1 - \cos t))}{\cos t - 1} \cdot (-\sin t, 1 - \cos t) \\
 \beta &= (t - \sin t + 2 \sin t, 1 - \cos t - 2 + 2 \cos t)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\beta = (t + \sin t, \cos t - 1)} \quad (2.23)$$

Dizemos que β (Eq. (2.23)) é a evoluta da Cíclóide dada na Eq. (2.16). Na Fig. 13 podemos visualizar α em azul e sua evoluta β em vermelho.

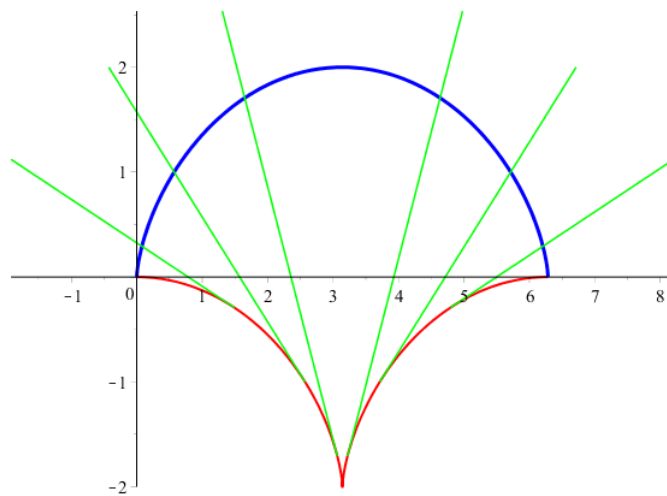


Figura 14 – Retas tangentes a evoluta da cíclóide ortogais a α no MAPLE.

Observe que na Fig. 14 as retas tangentes (verdes) de β são ortogonais a α , atendendo a Def.1.27 de que β é a evoluta da Cíclóide, e portanto, α é a involuta de β .

Capítulo 3

Curvas Especiais no $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo escolhemos estudar as curvas do tipo hélice, isso porque uma de suas características é curvatura e torção constantes. As hélices são curvas que podem ser observadas, por exemplo, no nosso DNA, nos aviões, em perfuradores, parafusos... No geral, temos dois tipos de curvas hélices: circulares que estão inscritas dentro de um cilindro e as hélices cônicas circulares que se assemelham a um cone ([ROVENSKI, 2000](#)).

No triedo de Frenet (T , N e B) temos que os três vetores que indicam o deslocamento da curva no espaço (ver Fig.1; Eq. (1.20-1.22)) e suas equações (Eq. (1.29-1.30))) determinam curvatura e torção. O vetor binormal (Eq. (1.21; 1.26)) é o responsável pelo conceito de torção em $\mathbb{R}^3$. Fizemos o estudo das famílias de curvas evolutas e involutas geradas pelas curvas denominas hélices.

Definição 3.1 (*Hélice*) Uma curvar regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma hélice se existe um vetor unitário v que forma um ângulo constante com $\alpha'(t)$, $\forall t \in I$, isto é, $\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{|\alpha'(t)|}$ é constante ([TENENBLAT, 2008](#)).

Proposição 3.1 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura e torção não-nulas. Então, α é uma hélice se, e só se, $\frac{\kappa}{\tau}$ é constante ([TENENBLAT, 2008](#)) ([FARIA, 2017](#)). A demonstração da Proposição 3.1 pode ser obtida na Ref. ([TENENBLAT, 2008](#)) pág.74.

3.1 Hélice circular

Nesta seção vamos verificar se a curva regular

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \quad (3.1)$$

descreve uma hélice de acordo com a Prop. 3.1. Obviamente o nosso objetivo é determinar a curvatura (κ) e a torção (τ) para verificar se a razão $\frac{\kappa}{\tau}$ é de fato constante. Como já

sabemos pela Prop. 1.1, vamos verificar se a curva é do tipo P.C.A., calculando a derivada e o módulo de $\alpha(t)$. Assim,

$$\alpha(t)' = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

logo,

$$|\alpha(t)'|^2 = (-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1$$

$$\boxed{|\alpha(t)'| = \sqrt{2}}$$

como $|\alpha'(t)| \neq 1$ e pela Prop. 1.1, a curva não é P.C.A.. Podemos perceber pelo módulo que a reparametrização por comprimento de arco da curva é conveniente, pois simplificará os cálculos futuros. Portanto, aplicando as Def. 1.16 e Def. 1.18, temos

$$s(t) = \int_0^t |\sqrt{2}| dt = \sqrt{2}t.$$

Portanto, a função inversa é dada por $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Assim a reparametrização de $\alpha(t)$ por comprimento de arco é

$$\boxed{\alpha(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)}. \quad (3.2)$$

Agora que temos $\alpha(s)$ do tipo P.C.A. facilmente determinamos sua curvatura (κ) dada na Eq. 1.10. Vejamos,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \alpha''(s) &= \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \kappa = |\alpha''(s)|^2 &= \left(\left(-\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right)^2, \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right)^2, 0^2 \right) \\ \kappa = |\alpha''(s)| &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\cos^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + \sin^2 \frac{s}{\sqrt{2}} \right)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

Antes de determinar a torção (τ) vamos obter o triedro de Frenet dado nas Eq. (1.23), Eq. (1.24), Eq. (1.26), Eq. (1.29), Eq. (1.30) e Eq. (1.31) a hélice circular parametrizada

pelo comprimento de arco. Vejamos

$$T = \alpha(s)' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.4)$$

$$N = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad (3.5)$$

$$B = T \times N = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.6)$$

$$T' = \frac{1}{2} \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad (3.7)$$

$$N' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad (3.8)$$

$$B' = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right). \quad (3.9)$$

Usando o software MAPLE e as Eq. (3.4)-Eq. (3.6), a Fig. 15 mostra os vetores T, N, B do Triedro de Frenet na curva hélice, dada por $\alpha(t)$. Observe que, os comandos do MAPLE usados estão indicados na Fig 15, de modo a facilitar o leitor, caso tenha interesse a trabalhar com o software MAPLE.

```
> with(VectorCalculus) :
> beta := PositionVector([cos(s/sqrt(2)), sin(s/sqrt(2)), s/sqrt(2)], cartesian[x,y,z]);
> PlotPositionVector(beta, s = 0..4*pi, tangent = true, normal = true, binormal = true, vectormun = 1)
```

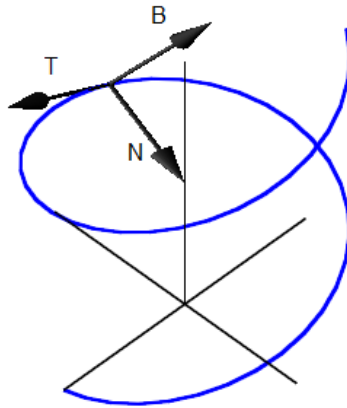


Figura 15 – Triedro de Frenet da Hélice.

Aplicando os resultados obtidos nas Eq. (3.5) e Eq. (3.9) em Eq. (1.28), temos a torção:

$$\begin{aligned} \tau &= \left\langle \frac{1}{2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\rangle \\ \tau &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\tau = -\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Finalmente, podemos concluir pela proposição 3.1 que

$$\frac{\kappa}{\tau} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1. \quad (3.11)$$

Observe que a razão (Eq. (3.11)) é uma constante, portanto a curva α é uma hélice circular.

3.1.1 Involuta da hélice circular

Nesta seção, vamos obter a equação geral para a família de curvas involutas da hélice circular P.C.A.. Utilizando o resultado obtido na Eq. (3.2) na Eq.(1.34), temos

$$\tilde{\alpha}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right) + (a - s) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\boxed{\tilde{\alpha}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}} - (a - s) \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}} + (a - s) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} + (a - s) \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}.$$

Fig. 16 mostra a curva involuta $\tilde{\alpha}(s)$ (cor vermelha) da hélice circular parametrizada por comprimento de arco quando $a = 1$. Observe que, os comandos do MAPLE usados estão indicados na Fig. 16, de modo a facilitar o leitor, caso tenha interesse a trabalhar com o software MAPLE.

```
> beta := spacecurve([cos(s/sqrt(2)), sin(s/sqrt(2)), s/sqrt(2)], s=0..4*Pi, color=blue):
> involuta1 := spacecurve([cos(s/sqrt(2)) - (1-s)/sqrt(2)*sin(s/sqrt(2)), sin(s/sqrt(2)) + (1-s)/sqrt(2)*cos(s/sqrt(2)), s/sqrt(2) + (1-s)/sqrt(2)], s=0..4*Pi, color=red):
```

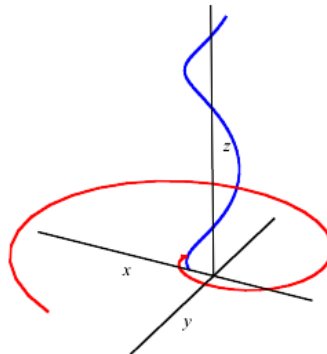


Figura 16 – Involuta da hélice circular para $a = 1$.

Uma família infinita de curvas podem ser geradas variando a . Cada involuta gera uma família infinita de evolutas, que pode ou não corresponder a curva original em azul na Fig. 16 (FARIA, 2017).

3.2 Hélice cônica circular

A hélice cônica circular também é conhecida como *hélice logarítmica*, isso decorre porque no plano ($\mathbb{R}^2$) a curva descrita é a espiral logarítmica. No entanto, no espaço ($\mathbb{R}^3$) esse tipo de curva está inscrita em um cone, por isso também é denominada hélice cônica.

Vamos verificar se a curva regular

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \quad (3.12)$$

é uma hélice conforme a Def. 3.1. Então,

$$\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t) \quad (3.13)$$

$$|\alpha'(t)| = e^t \sqrt{3}. \quad (3.14)$$

Assim, seja $v = (0, 0, 1)$ um vetor unitário, temos

$$\langle \alpha'(t), v \rangle = e^t.$$

$$\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{|\alpha'(t)|} = \frac{e^t}{e^t \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3.15)$$

Concluimos que a curva $\alpha(t)$ é uma hélice, pois $\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{|\alpha'(t)|}$ é constante. A Fig.17 mostra a hélice cônica circular dada na Eq. (3.12).

```
> with(plots):
> spacecurve([e^(t/5)*cos(t), e^(t/5)*sin(t), e^(t/5)], t = 0.1 .. 6*pi, axes = normal, thickness = 2, color = blue);
```

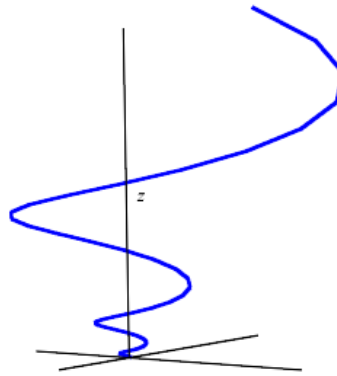


Figura 17 – Hélice Cônica circular.

Também podemos verificar que a curva é uma hélice cônica pela Prop.3.1 através do cálculo da curvatura e da torção. Pelo resultado obtido na Eq. (3.14) sabemos que a

curva não é P.C.A., obter esta reparametrização não é difícil, no entanto os cálculos são mais extensos e portanto inconvenientes.¹ Por este motivo aplicaremos a Prop. 1.4 para encontrar a curvatura e a torção em um parâmetro qualquer, então

$$\boxed{\alpha''(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, e^t)}. \quad (3.16)$$

O produto vetorial entre a primeira e segunda derivada

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (e^{2t}(\sin t + \cos t) - 2e^{2t} \cos t, e^{2t}(\sin t - \cos t) - 2e^t \sin t, \\ &\quad 2e^{2t} \cos t \cdot (\cos t - \sin t) + 2e^t \sin t \cdot (\sin t + \cos t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2 &= ((e^{2t}(\sin(t) - \cos(t)))^2 + (-e^{2t}(\cos(t) + \sin(t)))^2 + (2e^{2t})^2) \\ |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2 &= e^{4t}((\sin(t) - \cos(t))^2 + ((\sin(t) + \cos(t))^2 + 4) \end{aligned}$$

$$\boxed{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = \sqrt{6}e^{2t}}. \quad (3.17)$$

Logo a curvatura é dada por

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{(\sqrt{3}e^t)^3} \\ \kappa &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}}. \quad (3.18)$$

Para a torção temos

$$\boxed{\alpha'''(t) = (-2e^t \sin t - 2e^t \cos t, 2e^t \cos t - 2e^t \sin t, e^t)}. \quad (3.19)$$

Substituindo Eq. (3.17) e Eq. (3.19) na Eq. (1.19)

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\langle (e^{2t}(\sin t - \cos t), -e^t(\cos t + \sin t), 2e^t), (-2e^t(\sin t + \cos t), 2e^t(\cos t - \sin t), e^t) \rangle}{(\sqrt{6}e^t)^2} \\ \tau &= \frac{-2e^{3t}(\sin^2 t - \cos^2 t) - 2e^{3t}(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2e^{3t}}{6e^{4t}} \\ \tau &= \frac{-2e^{3t}(\sin^2 t - \cos^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t + 1)}{6e^{4t}} \\ \tau &= \frac{2e^{3t}}{6e^{4t}} \end{aligned}$$

¹ A reparametrização por comprimento de arco da hélice cônica circular pode ser obtida em [Coimbra \(2008\)](#) pág. 50.

$$\tau = \frac{1}{3e^t}. \quad (3.20)$$

A razão entre a curvatura 3.18 e a torção 3.20 é

$$\frac{\kappa}{\tau} = \sqrt{2}. \quad (3.21)$$

Logo a constante da proporção entre a curvatura e a razão nos diz que a curva é uma hélice cônica, assim como verificamos pela definição.

3.2.0.1 Involuta da Hélice Cônica

Pela Eq (1.35) podemos determinar a família de involutas da curva α (Eq. (3.12)). Para isso vamos calcular previamente $T(t)$ (Eq. (1.20)) e $s(t)$ (Eq. (1.8)), logo

$$T(t) = \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad (3.22)$$

$$s(t) = \sqrt{3}(e^t - 1). \quad (3.23)$$

Finalmente,

$$\tilde{\alpha}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) + (a - \sqrt{3}(e^t - 1)) \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\tilde{\alpha}(t) = (e^t \cos t + (a - \sqrt{3}(e^t - 1)) \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}}, e^t \sin t + (a - \sqrt{3}(e^t - 1)) \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{3}}, e^t + \frac{a - \sqrt{3}(e^t - 1)}{\sqrt{3}}).$$

O resultado obtido anteriormente para $\tilde{\alpha}(t)$ gera uma família infinita de curvas involutas conforme variamos o parâmetro arbitrário a . A Fig.18 mostra uma involuta (cor vermelha) da curva dada na Eq. (3.12)(cor azul) quando $a = 1$. Temos na Fig.18 as curvas em dois momentos: a) no espaço e b) no plano.

```
> involuta := spacecurve([ [e^t*cos(t) + (1 - sqrt(3)*(e^t - 1))*((cos(t) - sin(t))/sqrt(3)), e^t*sin(t) + (1 - sqrt(3)*(e^t - 1))*((cos(t) + sin(t))/sqrt(3)), e^t + (1 - sqrt(3)*(e^t - 1))/sqrt(3)], t=0..2*pi, color=red);
> h := spacecurve([ [e^(t/5)*cos(t), e^(t/5)*sin(t), e^(t/5)], t=0.1..6*pi, axes=normal, thickness=2, color=blue]);
> display(h, involuta)
```

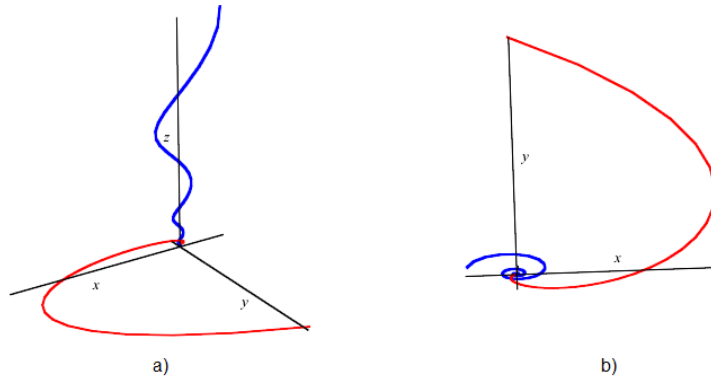


Figura 18 – Uma involuta da hélice cônica circular.

No $\mathbb{R}^3$ cada involuta gera uma família infinita de evolutas, que pode ou não corresponder a curva original ([FARIA, 2017](#)).

Capítulo 4

Conclusão

Por meio de exemplos básicos, mais acessíveis para compreensão, iniciamos a pesquisa com o objetivo de estudar e compreender o conceito de curvas regulares parametrizadas por comprimento de arco. Em muitos livros e exercícios resolvidos é fácil de encontrar este assunto. No decorrer dos estudos bibliográficos começamos a investigar as curvas que não eram totalmente regulares, pois apresentavam "picos", o que conhecemos como descontinuidade. Surgiu então, o interesse de determinar curvatura dentro do intervalo regular e também verificar o que o gráfico de curvatura nos mostra. Assim, foi possível analisar, para as curvas escolhidas neste trabalho, os momentos em que a curvatura é maior (a curva é mais "curvada") e os momentos onde é menor (a curva se aproxima de uma reta).

O cálculo diferencial integral foi nosso grande aliado, assim como o software MAPLE. Nas figuras é possível observar os comandos necessários para plotar as curvas no software. Como já dito previamente, tínhamos o interesse de abordar as curvas do tipo P.C.A., no entanto, após reparametrizarmos as curvas, pois como já sabemos também toda curva regular admite uma reparametrização do tipo P.C.A., os cálculos futuros seriam muito trabalhosos. Para a maioria das curvas aqui abordadas, cálculos de curvatura, torção e determinar as equações de Frenet se tornariam extremamente trabalhosos. Portanto, o que inicialmente era conveniente e facilitaria os cálculos se tornou inviável. Por isso, na maioria das curvas aplicamos as equações de Frenet para uma parametrização qualquer.

Disso concluímos que, muitas curvas ditas não regulares podem ser estudadas na geometria diferencial dentro de um intervalo regular. Para o nosso estudo, a reparametrização por comprimento de arco não foi o mais conveniente e aplicável.

Referências

- BAPTISTA, F. T. *O Ensino de coordenadas polares através do software GeoGebra*. 140 p. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, Campinas, Brasil, 2017.
- BIEZUNER, R. J. *Notas de aula geometria diferencial*. Belo Horizonte, Brasil: Departamento de Matemática - Instituto de Ciências Exatas - Universidade Federal de Minas Gerais, 2019.
- CARMO, M. P. *Elementos de geometria diferencial*. São Paulo, Brasil: Livro Técnico, 1971.
- COIMBRA, J. d. R. V. *Uma introdução à Geometria Diferencial*. 290 p. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, Campinas, Brasil, 2008.
- DOMINGUES, J. a. P. F. *Geometria Diferencial das curvas planas*. 73 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil, 2013.
- EARL, S. *Cálculo con Geometría Analítica*. 2 ed.. ed. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1994. ISBN 515.15 S 979515.15 S 979.
- FARIA, E. P. d. *Um estudo sobre curvas, superfícies e suas parametrizações*. Tese (Doutorado) — Universidade da Madeira, São Paulo, Brasil, 2017.
- KUEHNEL, W. *Differential geometry: curves - surfaces - manifolds*. 3ed.. ed. Vieweg & Sohn Verlag: AMS - American Mathematical Society, 2015. ISBN 978-1-4704-2320-9.
- LAWRENCE, J. D. *A catalog of special plane curves*. 1 ed.. ed. New York, USA: Dover Publications, Inc., 1972. ISBN 0-486-60288-5.
- LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. São Paulo, Brasil: IMPA, 2011. (Publicações Matemáticas 25). ISBN 9788524402678.
- OLIVEIRA, M. M. d.; FONSECA, R. C. B. d. *Modelagem matemática de curvas polares usando os recursos didáticos dos softwares geogebra e maple*. 2018.
- REIS, G.; SILVA, V. *Geometria analítica*. Rio de Janeiro, Brasil, LTC, 2002.
- ROVENSKI, V. *Geometry of Curves and Surfaces with MAPLE*. Birkaeuser, Boston: Springer Science & Business Media, 2000. ISBN 13:978-1-4612-7425-4.
- SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo, Brasil: Pearson, 2008. v. 2.

TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. 2 ed.. ed. São Paulo, Brasil: Editora Edgard Blucher, 2008. ISBN 8521204671.

Thomas Jr., G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo*. 14 ed.. ed. São Paulo, Brasil: Pearson, 2018. v. 2. ISBN 9780134438986.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS GOIÂNIA

GD com MAPLE: Um estudo das curvas em R2 e R3 e suas evolutas e involutas.

por

MICHELE MARIANE DE OLIVEIRA BARROS

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

Monografia defendida e aprovada, em 06 de julho de 2022, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca (Presidente da Banca/ IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes (IFG/Câmpus Goiânia)

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Simone Ariomar de Souza (IFG/Câmpus Goiânia)

Documento assinado eletronicamente por:

- Karoline Victor Fernandes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 06/07/2022 15:12:33.
- Simone Ariomar de Souza, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 06/07/2022 15:11:59.
- Regina Celia Bueno da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLÓGICO, em 06/07/2022 15:11:19.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 21/06/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 294775
Código de Autenticação: 10d6587c67

