

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE GOIÁS - CÂMPUS GOIÂNIA**

ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

**BREVE ESTUDO DE CURVAS PLANAS COM O SOFTWARE GEOGEBRA E
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE EVOLUTAS**

AMANDA FELIX OLIVEIRA

GOIÂNIA - GOIÁS

2018



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|--|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☒ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☐ Produto Técnico e Educacional - Tipo: _____ | |

Nome Completo do Autor: Amanda Felix Oliveira

Matrícula: 20161011160028

Título do Trabalho: Breve Estudo De Curvas Planas Com O Software GeoGebra I
Investigação Matemática Sobre Evolutas.

Restrições de Acesso ao Documento

Documento confidencial: ☒ Não ☐ Sim, justifique: _____

Informe a data que poderá ser disponibilizado no ReDi/IFG: 13/06/2018_

O documento está sujeito a registro de patente? ☒ Sim ☐ Não

O documento pode vir a ser publicado como livro? ☒ Sim ☐ Não

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;

obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém o direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;

cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Goiânia, 13/06/2018.

Amanda Felix Oliveira

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

AMANDA FELIX OLIVEIRA

**BREVE ESTUDO DE CURVAS PLANAS COM O SOFTWARE
GEOGEBRA E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE EVOLUTAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal de Goiás - IFG - Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me. Uender B. Souza

GOIÂNIA - GOIÁS

2018

Ol41b Oliveira, Amanda Felix.

Breve estudo de curvas planas com o software GeoGebra e investigação matemática sobre evolutas / Amanda Felix Oliveira. – Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2018.

47 f. : il.

Orientador: Prof. Me. Uender B. Souza.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Curso de Pós-Graduação Lato Sensu – Especialização em Matemática, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

1. Curvas planas. 2. Investigação matemática. 3. *Software* GeoGebra. I. Souza, Uender B. (orientador). II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. III. Título.

CDD 510

Breve Estudo De Curvas Planas Com O Software Geogebra E Investigação Matemática Sobre Evolutas.

por

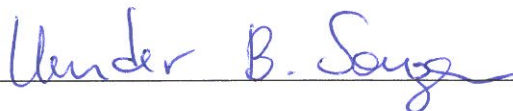
Amanda Felix Oliveira

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação lato sensu em Matemática - Departamento de Áreas Acadêmicas II - IFG/Câmpus Goiânia, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me. Uender Barbosa de Souza

Aprovada pela seguinte banca examinadora:



Prof. Me. Uender Barbosa de Souza - IFG/Câmpus Goiânia

Presidente da Banca



Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz - IFG/Câmpus Goiânia



Profa. Dra. Karoline Victor Fernandes - IFG/Câmpus Goiânia

Goiânia

09 de Maio de 2018

Dedicatória

Dedico aos meus pais e ao meu irmão, que sempre estiveram comigo me apoiando e ajudando a vencer os obstáculos expostos durante a minha caminhada, por terem dedicado suas vidas a mim, pelo amor, carinho e estímulo que me ofereceram, dedico-lhes essa conquista com gratidão.

Agradecimentos

Agradeço em especial ao Professor Uender Barbosa de Souza pelo apoio e orientação para a realização deste trabalho.

Agradeço a coordenadora da pós-graduação Karoline Victor Fernandes pelo apoio e suporte durante a realização do curso.

Agradeço aos meus pais Antonio e Valeria, que me deram o suporte necessário para que esta conquista fosse possível.

Resumo

Este trabalho tem como proposta a investigação de evolutas usando como ferramenta o *software* GeoGebra e a Investigação Matemática com o GeoGebra, proposta por Vaz, nas etapas: experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar. Apresentamos definições e teoremas de curvas planas e propomos a investigação matemática afim de determinar quais curvas possuem evolutas semelhantes a si mesmas, ou seja, sua evoluta é a composição de transformações como translação, rotação, dilatação ou contração. Em particular, investigaremos as famílias das cicloides e epicloides e deixamos uma sugestão para trabalhos futuros.

Palavras-chave: Curvas planas, investigação matemática, GeoGebra, tecnologias.

Abstract

This work has as proposal the investigation of evolutes using GeoGebra software and GeoGebra Mathematical Research, proposed by Vaz, as a tool in the stages: experiment, conjecture, formalize and generalize. We present definitions and theorems of flat curves and propose the mathematical investigation in order to determine which curves have evolutions similar to themselves, that is, their evolution is the composition of transformations such as translation, rotation, dilation or contraction. In particular, we will investigate the cycloid and epicycloid families and leave a suggestion for future work.

Keywords: Flat curves, mathematical investigation, GeoGebra, technologies.

Lista de Figuras

1.1	Tela de trabalho do GeoGebra	4
1.2	Opção <i>Habilitar Rastro e Animar</i>	6
1.3	Comando <i>Ponto</i>	6
1.4	Exemplo do uso do comando <i>Tangente</i>	7
1.5	Retas perpendiculares.	8
1.6	Exemplo Sequência 2.	8
1.7	Exemplo Sequência 3.	9
1.8	Curva gerada por spline com 3 pontos.	10
1.9	Curva criada por um spline de grau 3.	10
1.10	Parábola definida pelo comando <i>Curva</i>	11
1.11	Parábola definida pelo comando <i>Curva</i>	11
1.12	Exemplo do comando <i>Vetor</i>	12
1.13	Uso da ferramenta <i>ProjeçãoP</i>	13
2.1	Elipse com $a = \frac{6}{5}$ e $b = \frac{1}{2}$	16
2.2	Cicloide e seu vetor tangente em $t = \frac{\pi}{2}$	17
2.3	Exemplo de variação do parâmetro t_0	18
2.4	Exemplo do uso da ferramenta <i>VetorTangente</i>	18
2.5	Referencial de Frenet e Curvatura.	25
2.6	Círculo osculador da parábola	26
2.7	Círculo Osculador da Parábola	27
2.8	Elipse definida por $a = 2$ e $b = 1$	29
2.9	Cicloide e sua evoluta.	30
2.10	Evoluta criada pelo comando <i>LugarGeométrico</i>	30
2.11	Envolvente da família das normais a cicloide.	31

3.1	Evolutas.	33
3.2	Trocoide com $b > R$	34
3.3	Trocoide com $b < R$	34
3.4	Pontos da lista L	36
3.5	Aproximação da Cicloide pelo comando <i>Spline</i>	36
3.6	Retas tangentes à Evoluta da Cicloide	36
3.7	Aproximação da Evoluta do Trocoide com $b > R$	38
3.8	Aproximação da Evoluta do Trocoide com $b < R$	38
3.9	Ilustração da construção de uma epitrocoide.	38
3.10	Epicicloides com $b = r = 1$ e $n = R$	39
3.11	Relação de proporção	40
3.12	Etapa da generalização.	43
3.13	Hipocicloide e a envolvente de suas retas normais.	44

Sumário

Introdução	1
1 O <i>Software</i> GeoGebra	3
1.1 Breve introdução ao <i>software</i>	3
1.1.1 Opções Habilitar Rastro e Animar	5
1.2 Alguns Comandos do GeoGebra	6
1.2.1 Ponto	6
1.2.2 Tangente	7
1.2.3 Girar	7
1.2.4 Sequência	8
1.2.5 Se	9
1.2.6 Spline	9
1.2.7 Curva	10
1.2.8 LugarGeométrico	10
1.2.9 Derivada	11
1.2.10 Vetor	12
1.2.11 Comprimento	12
1.3 Criando Ferramentas	12
2 Curvas Planas	15
2.1 Curvas parametrizadas e diferenciáveis	15
2.2 Vetor tangente	16
2.3 Curva Regular	18
2.4 Comprimento do Arco	19
2.5 Mudança de Parâmetro	20

2.6	Teoria local das curvas Planas e Fórmulas de Frenet	21
2.7	Círculo Osculador	25
2.8	Evolutas	27
3	A Investigação	32
3.1	Investigação matemática com GeoGebra	33
3.1.1	Trocoides	34
3.1.2	Epitrocoides	37
3.1.3	Hipotrocoides	44
	Conclusão	45
	Referências Bibliográficas	46

Introdução

O estudo da Geometria Diferencial teve início com o estudo de curvas, e foram Euclides e Arquimedes quem estudaram as retas tangentes. Segundo [2], o desenvolvimento da Geometria Diferencial se deu com o avanço Cálculo Diferencial, tendo como principais colaboradores os matemáticos Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wihelm Von Leibniz (1646-1716), mais tarde, com Gaspard Monge (1746-1818), considerado o pai da Geometria Diferencial.

Nesse trabalho, exploramos algumas curvas planas com o GeoGebra, um *software* de matemática dinâmica que possibilita a manipulação de objetos matemáticos, tanto algébricos quanto geométricos. Acreditamos que o mesmo pode auxiliar alunos na percepção de diversas relações dos objetos matemáticos, facilitando que se apropriem dos conceitos e que tenham autonomia durante o processo de aprendizagem.

De acordo com [5], a prática pedagógica é complexa e é composta pelo conteúdo de aprendizagem, pelo aluno, pelo professor e, sobretudo, pelo modo de apropriação da cultura e do desenvolvimento humano. A função do professor, nesse sentido, é maior do que apresentar o conteúdo a ser desenvolvido. É preciso que suas atividades sejam permeadas pela intencionalidade de ensinar. De acordo com o mesmo autor, o professor deve estar atento para permitir ao aluno, sempre que possível, refletir, repensar e refazer as atividades.

Nesse sentido, propomos uma investigação inspirada na proposta de [11], baseada nas ações: experimentação, conjecturação, formulação e generalização do saber matemático. Estas permitem, tanto ao professor quanto ao aluno, se articularem no processo de ensino-aprendizagem, transformando a informação em um modelo fundamentado na construção do saber. [11] reafirma a importância de se trabalhar metodologias nas aulas de matemática, e apresenta o *software* GeoGebra como potencialidade pedagógica que permite ao discente um aprendizado significativo, promovendo o caráter dedutivo e generalizante

da matemática.

No primeiro capítulo, fazemos uma breve apresentação do *software* GeoGebra, possibilitando ao leitor a familiarização com suas ferramentas básicas. No segundo capítulo, apresentamos os principais conceitos das curvas planas e passos para a construção das mesmas no Geogebra. No último capítulo, sugerimos um experimento investigativo aplicando as quatro etapas de [11] às curvas planas, afim de determinar quais possuem evolutas semelhantes a si mesmas, ou seja, a evoluta é a composição de transformações como translação, rotação, dilatação ou contração da própria curva.

Sugerimos também para uma possível continuidade desse trabalho a investigação dos casos de epitrocoides não abordados; das hipocicloides e a seguinte questão: "Existem curvas, além das apresentadas neste trabalho, tais que sua evoluta é semelhante a si mesma?".

Capítulo 1

O *Software* GeoGebra

O *software* GeoGebra foi desenvolvido por Marcus Hohenwarter, como proposta para melhorar e facilitar o ensino de matemática. O GeoGebra tem recebido vários prêmios na Europa, sendo utilizado atualmente em 190 países e traduzido em 55 idiomas. É um *software* livre, de fácil acesso, e possibilita novas estratégias de ensino-aprendizagem de matemática, já que as construções são dinâmicas e permitem várias possibilidades de visualização e experimentação com conteúdos diversos.

O GeoGebra é um *software* educativo que apresenta inúmeras capacidades funcionais, que podem vir a ser reconhecidas e aproveitadas por professores e alunos na obtenção de resultados eficientes no processo de ensino-aprendizagem. Acreditamos que a utilização de *softwares*, neste processo, pode ser um caminho para despertar o interesse do aluno, e torná-lo sujeito do seu próprio conhecimento.

Portanto, o GeoGebra é uma possibilidade de promover a compreensão do conceito pela autonomia do aluno, e pelo desenvolvimento da atividade de cunho investigativo, para atingir a essência do objeto.

1.1 Breve introdução ao *software*

O GeoGebra é multiplataforma e pode ser obtido de forma gratuita através do site oficial¹ na seção *Downloads*. Estão disponíveis versões para dispositivos portáteis *Android*, *IOS* e *Windows Phone*, além das versões para os sistemas *Linux*, *Mac* e *Windows*.

O site funciona também como uma espécie de rede social para compartilhamento

¹<https://www.geogebra.org>

de material e disponibiliza ainda um *blog* com atualizações sobre o projeto. Estão disponíveis, também, manuais de ajuda e um fórum para discussões.

Apesar de já disponível a versão 6.0, usamos neste trabalho a versão 5.0 por ser, em nossa opinião, por enquanto, melhor em alguns aspectos que a versão mais recente.

A tela principal do *software* é, em geral, independente do sistema operacional, semelhante à que apresentamos na Figura 1.1. Descrevemos a seguir cada item que a compõe.

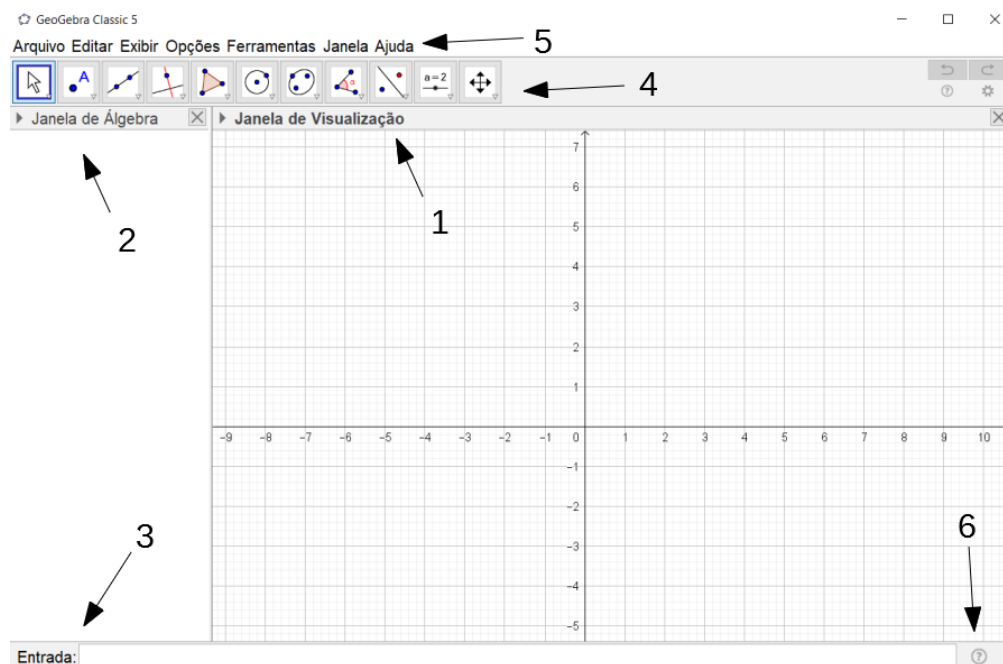


Figura 1.1: Tela de trabalho do GeoGebra

1. A *Janela de Visualização* é o ambiente de visualização geométrica, na qual podemos criar objetos como pontos, retas, polígonos, cônicas e etc; pode-se inserir e interagir com figuras; texto comum e texto formatado em latex, e possui eixos cartesianos e malha, que podem ser ocultos se necessário.
2. A *Janela de Álgebra* é o ambiente onde são exibidos os objetos numéricos, equações e funções, coordenadas de pontos e listas (conjuntos).
3. O *Campo de Entrada* tem o propósito de receber as fórmulas, funções, coordenadas de pontos e comandos a serem executados. Nas seções seguintes, apresentamos, com exemplos, os principais comandos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

4. A *Barra de Ferramentas*, como o próprio nome diz, possui as principais ferramentas para criação e manipulação de objetos geométricos, texto, desenho e imagens. Na seção 1.3 mostramos como criar novas ferramentas (comandos) e disponibilizá-las nesta posição.
5. O *Menu Principal* fornece, como a maioria dos *softwares*, opções relacionadas ao salvamento de trabalhos, abrir trabalhos criados anteriormente, exportar imagens, editar objetos, exibir janelas, arredondar e definir o número de casas decimais, idiomas, gerenciamento de ferramentas, ajuda através de tutoriais e informações sobre versão do *software*.
6. Ao ativar o botão *Ajuda*, nos é apresentada uma janela com a listagem de todos os comandos divididos por categorias, com a possibilidade de ajuda através do guia disponível no site oficial (em inglês).

Além das Janelas citadas (1 e 2), temos ainda a *Janela CAS*, *Planilhas*, *Janela de Visualização 3D*, *Protocolo de Construção* e a *Calculadora de Probabilidades*. Não apresentaremos cada janela citada, pois não serão utilizadas no desenvolver do trabalho. O leitor interessado pode encontrar mais informações no manual do GeoGebra [3].

1.1.1 Opções Habilitar Rastro e Animar

Estas opções podem ser bastante úteis para investigações matemáticas sobre a dinâmica de movimento de objetos. Para habilitar o rastro de algum objeto, basta clicar com o botão auxiliar do mouse sobre o mesmo e ativar a opção *Habilitar Rastro*. De forma análoga, ativamos a animação de algum objeto através da opção *Animar*. Esse objeto deve estar vinculado a outro ou ser uma variável (*controle deslizante*).

Exemplo 1.1. Nesse exemplo, exibimos uma construção que utiliza as opções *habilitar rastro* e *Animar* para reproduzir um círculo.

1. Crie um círculo de centro em um ponto A e raio R qualquer;
2. Crie o vetor u paralelo ao eixo x ;
3. Defina o ponto B vinculado ao círculo, ou seja, B deve variar somente sobre o círculo;

4. Defina o ponto $C = B + u$;
5. Ative a opção *habilitar rastro* para o ponto C ;
6. Clique com o botão auxiliar do *mouse* sobre o ponto B e selecione a opção animar.

Veja o resultado na Figura 1.2.

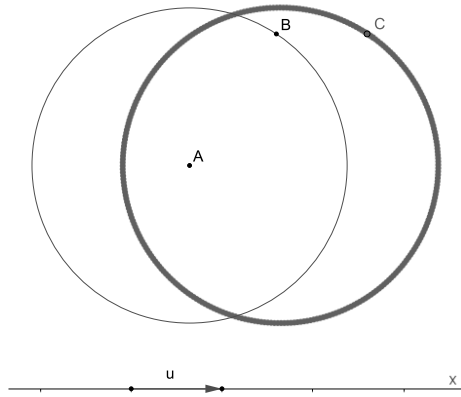


Figura 1.2: Opção *Habilitar Rastro e Animar*

1.2 Alguns Comandos do GeoGebra

Nessa seção apresentamos a descrição e exemplos de alguns comandos do GeoGebra, os quais serão essenciais para as construções e investigações nos capítulos seguintes.

1.2.1 Ponto

Ponto ($\langle \text{Objeto} \rangle$)

Cria um ponto vinculado ao objeto geométrico, ou seja, o ponto resultante pode ser movido sobre o objeto.

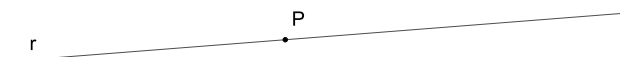


Figura 1.3: Comando *Ponto*.

Exemplo 1.2. Seja r uma reta qualquer, o comando $P = \text{Ponto}(r)$ cria um ponto sobre a reta. Veja a Figura 1.3.

1.2.2 Tangente

Tangente(<Ponto>, <Curva ou Cônica>)

Pode ser usado de duas maneiras; na primeira, cria todas as retas tangentes através de um ponto P até uma seção cônica; na segunda, cria a tangente no ponto especificado pertencente à curva.

Exemplo 1.3. Sejam $P = (-1, 1)$ e a curva $c := x^2 + y^2 = 2$, objetos definidos em uma construção do GeoGebra. Usando o comando $\text{Tangente}(P, c)$, obtemos a reta $-x + y = 2$, como podemos ver na Figura 1.4b.

Exemplo 1.4. Para a mesma curva c do exemplo anterior e o ponto $P = (2, 0)$ retorna as retas $r : -x - y = -2$ e $s : x - y = 2$ pelo uso do comando $\text{Tangente}(P, c)$. Veja a Figura 1.4a.

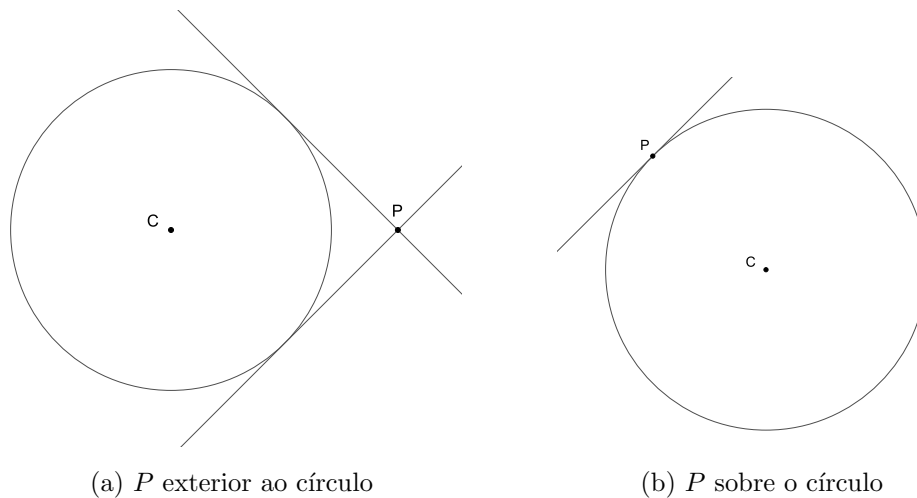


Figura 1.4: Exemplo do uso do comando *Tangente*.

1.2.3 Girar

Girar (<objeto>, <ângulo> , <ponto>)

Gira o *objeto* geométrico pelo *ângulo* em torno do *ponto*. Caso o argumento *ponto* seja omitido, o *objeto* geométrico é girado em torno da origem, exceto vetores, que são girados em torno de seu ponto inicial.

Exemplo 1.5. Podemos criar uma reta s perpendicular à reta $r : x + y = 10$ através do comando $s: \text{Girar}(r, \text{Pi}/2, P)$, sendo P um ponto pertencente a r .

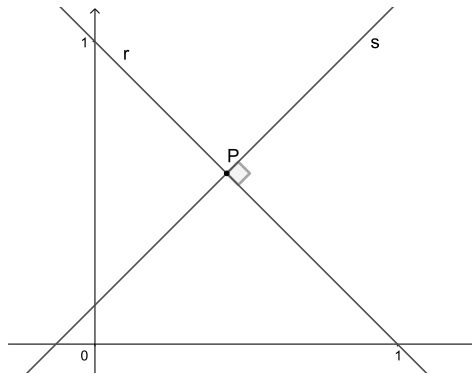


Figura 1.5: Retas perpendiculares.

1.2.4 Sequência

Sequência(*<Expressão>*, *<var>*, *<a>*, **)

Cria uma sequência de objetos definidos pela *Expressão* na variável *var*, iniciando sua contagem em *a* e terminando em *b*. A expressão pode definir objetos de várias formas, como pontos, funções, cônicas e outros.

Exemplo 1.6. O comando *Sequência*($2k$, k , 1, 10) cria uma lista contendo números pares entre 2 e 20.

Exemplo 1.7. O comando *Sequência*((k, k), k , -2, 2) cria uma lista contendo pontos com coordenadas inteiras sobre a reta $x = y$ no intervalo $[-2, 2]$. Veja a Figura 1.6.

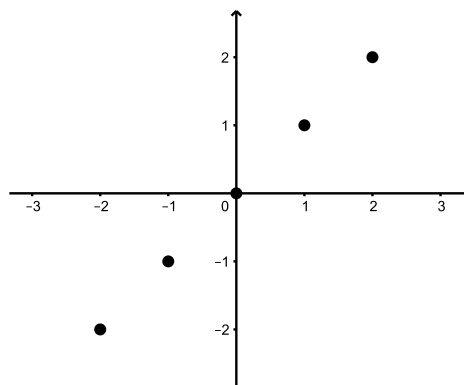


Figura 1.6: Exemplo Sequência 2.

Exemplo 1.8. O comando $Sequência(x^i, i, 1, 3)$ cria a lista de funções $L = \{x, x^2, x^3\}$. Veja a Figura 1.7.

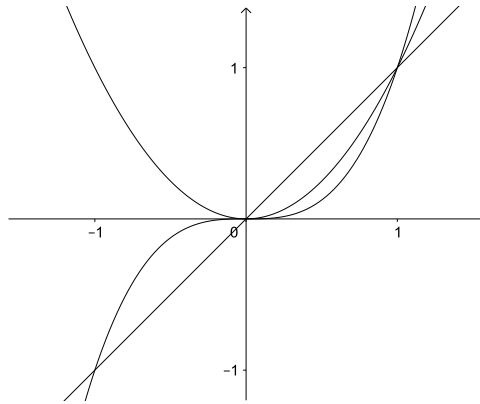


Figura 1.7: Exemplo Sequência 3.

1.2.5 Se

$Se(<Condição>, <a>,)$

Retorna a caso a *condição* seja satisfeita ou b caso contrário.

Exemplo 1.9. Inserindo $f(x)=Se(x==0, 0, 1/x)$ no *campo de entrada*, definimos a função $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ com $f(0) = 0$.

1.2.6 Spline

$Spline(<ListaPontos>, <Grau>)$

Interpola uma curva por spline de *Grau* maior ou igual a 3, que passa por todos os pontos da lista (conjunto) *ListaPontos*. O argumento *Grau* pode ser omitido.

Exemplo 1.10. Usando o comando $Spline(L)$ para a lista $L = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$ obtemos a curva a dada por

$$a : \left. \begin{array}{l} x = Se(t < 0.5, 0t^3 + 0t^2 + 2t - 1, 0t^3 + 0t^2 + 2t - 1) \\ y = Se(t < 0.5, 4t^3 + 0t^2 - 3t + 1, -4t^3 + 12t^2 - 9t + 2) \end{array} \right\} 0 \leq t \leq 1.$$

Veja a Figura 1.8 a seguir.

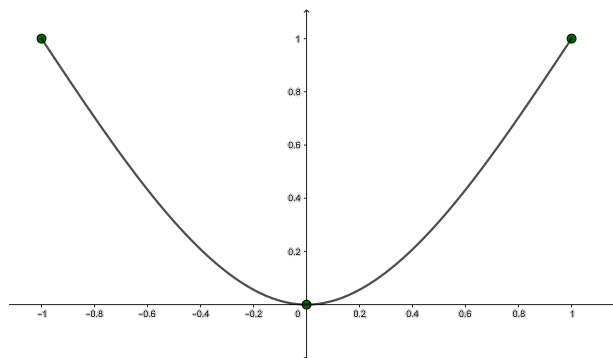


Figura 1.8: Curva gerada por spline com 3 pontos.

Exemplo 1.11. Considere a lista $L=\{A, B, C, D, E, F, G, A\}$ composta pelos pontos de A a G dispostos conforme a Figura 1.9. O comando $Spline(L,3)$ cria a curva com início e fim no ponto A .

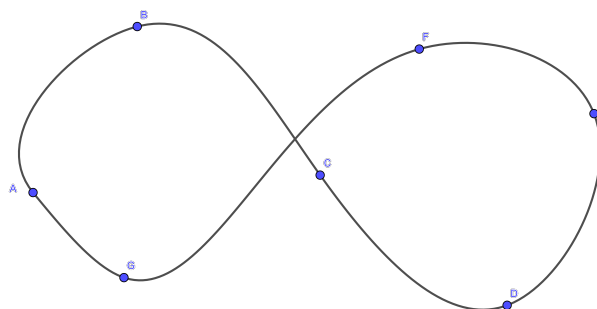


Figura 1.9: Curva criada por um spline de grau 3.

1.2.7 Curva

$Curva(<curva\ parametrizada>, <parâmetro>, <a>,)$

Define o traço de uma *curva parametrizada* por um *parâmetro* no intervalo $[a, b]$.

Exemplo 1.12. O comando $a: Curva((t,t^{**2}), t, -1, 1)$ define a parábola $f(x) = x^2$ no intervalo $[-1, 1]$. Veja o resultado na Figura 1.10

1.2.8 LugarGeométrico

$LugarGeométrico(<P>, <A>)$

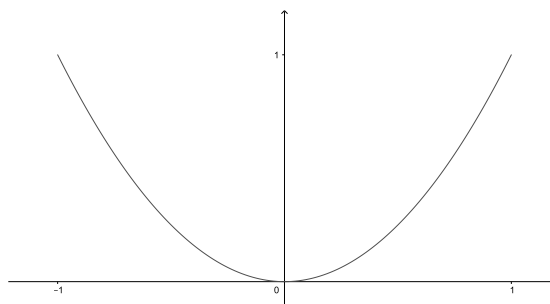


Figura 1.10: Parábola definida pelo comando *Curva*.

Determina a curva definida pelo ponto do lugar geométrico P que deve depender de outro ponto A . Também pode ser usado de outras maneiras, o leitor interessado pode buscar mais informações através da *ajuda* do próprio GeoGebra.

Exemplo 1.13. Considere A um ponto vinculado ao *eixo x*. Definimos um ponto B por $B = A + \text{sen}(x(A)) \cdot (0, 1)$ e um ponto C por $C = B + \text{cos}(x(A)) \cdot (1, 0)$, sendo que $x(A)$ assume o valor da abscissa do ponto A . Ao usar o comando *LugarGeométrico*(C, A) obtemos o resultado apresentado na Figura 1.11.

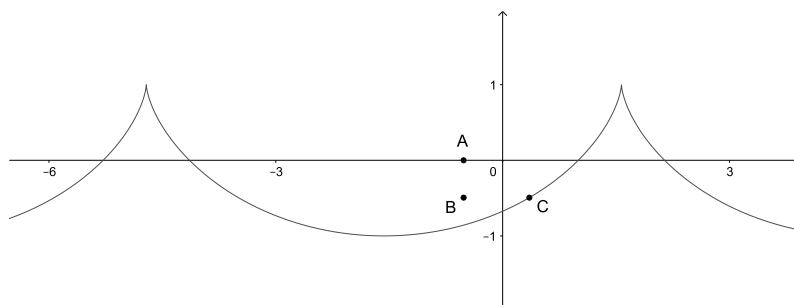


Figura 1.11: Parábola definida pelo comando *Curva*.

1.2.9 Derivada

Derivada(*<função ou curva>*, *<n>*)

Determina a n -ésima derivada da função ou curva.

Exemplo 1.14. Seja $f(x) = x^{**2}$. O comando *Derivada*(f) retorna $g(x) = 2x$, já o comando *Derivada*($f, 2$) retorna $g(x) = 2$.

1.2.10 Vetor

$Vetor(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$

Cria o vetor com ponto inicial A e ponto final B . Caso A seja omitido, o ponto inicial será a origem.

Exemplo 1.15. Considere os vetores $u = Vetor(A, B)$ e $v = Vetor(B, C)$, sendo $A = (1, 1)$, $B = (1, 2)$ e $C = (2, 2)$, o resultado pode ser visualizado na Figura 1.12.

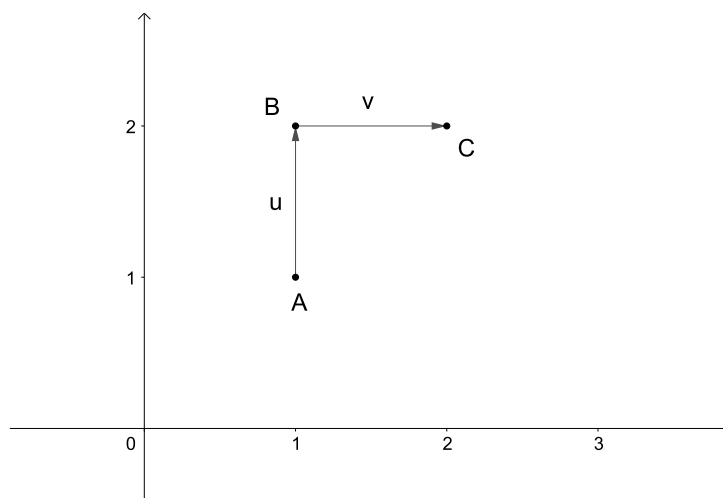


Figura 1.12: Exemplo do comando *Vetor*.

1.2.11 Comprimento

$Comprimento(\langle curva \rangle, \langle a \rangle, \langle b \rangle)$

Determina o comprimento da *curva* no intervalo $[a, b]$. Também pode ser usado de outras maneiras, como para determinar o comprimento de um vetor ou segmento. Para mais detalhes, consulte a *ajuda* do GeoGebra.

Exemplo 1.16. Vamos determinar o comprimento da parábola apresentada no exemplo 1.12. O comando $d = Comprimento(a, -1, 1)$ retorna $d = 2.96$.

1.3 Criando Ferramentas

Além dos comandos oferecidos pelo GeoGebra podemos criar novos comandos, denominados por ferramentas, que executam e retornam algum resultado (um ou mais objetos)

para um determinado processo que podemos "ensinar" ao *software*. No exemplo a seguir, mostramos como criar uma nova ferramenta personalizada.

Exemplo 1.17. Vamos criar uma ferramenta que irá determinar a projeção de um ponto sobre uma reta. O primeiro passo é construir o processo a ser executado pela ferramenta, ou seja, dado um ponto A e uma reta r , queremos o ponto P sobre a reta tal que o segmento AP seja ortogonal a mesma (veja a Figura 1.13c). Os passos são:

- Crie um ponto A ;
- Crie uma reta r ;
- Crie a reta s perpendicular a r passando por A ;
- Determine a interseção P entre as retas r e s ;

Após esses passos, o processo a ser reproduzido pela nova ferramenta está concluído. Assim, selecione *criar nova ferramenta* na aba *Ferramentas*, especifique o objeto final (ponto P), os objetos iniciais (ponto A e reta r) e, finalmente, os nomes da ferramenta e do comando. Uma observação importante é que o nome do comando não pode conter espaços, e a ordem dos objetos finais determina a ordem dos argumentos do comando. Em nosso exemplo, nomeamos a ferramenta por ***Projeção de ponto em reta*** e o comando por ***ProjeçãoP***. Agora, o comando *ProjeçãoP* pode ser usado no campo de entrada da forma *ProjeçãoP*(A , r), sendo A e r um ponto e uma reta quaisquer. As Figuras 1.13a e 1.13b ilustram, respectivamente, o antes e o depois do uso do comando.

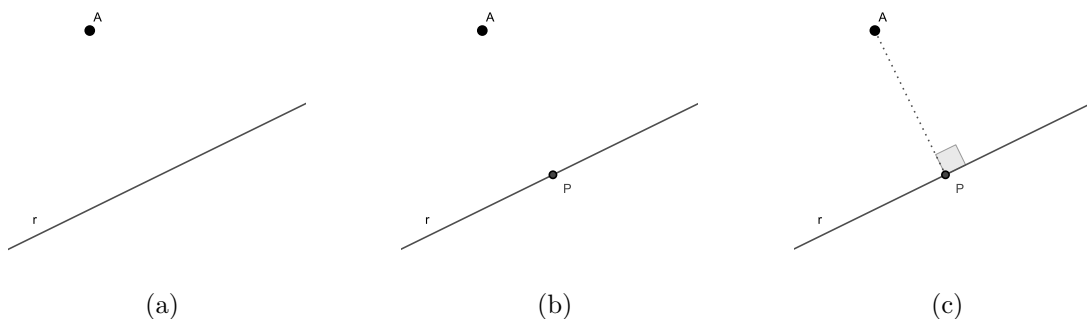


Figura 1.13: Uso da ferramenta *ProjeçãoP*

Finalizamos esta breve apresentação do *software* recomendando os livros [1] e [7]. O primeiro apresenta detalhadamente cada ferramenta do GeoGebra e trabalha conteúdos

de matemática básica como ângulos, triângulos, quadriláteros, teorema de Tales, funções afim e quadráticas, razão áurea e trigonometria básica. O segundo livro é um projeto ainda em desenvolvimento do Instituto GeoGebra de Goiás, que fornece uma versão, em português, adaptada do guia oficial² de comandos em inglês.

Acreditamos que estas leituras complementares são de grande importância para o desenvolvimento crítico construtivo do leitor interessado neste tipo de trabalho.

²<https://wiki.geogebra.org/en/Commands>

Capítulo 2

Curvas Planas

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos para o desenvolvimento da investigação proposta no capítulo 3. Faremos uma breve introdução às curvas planas tomando como referencial teórico [9] e [10].

2.1 Curvas parametrizadas e diferenciáveis

Definição 2.1. Uma *curva parametrizada diferenciável* do plano é uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ que associa para cada $t \in I$ o elemento $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ na forma

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

onde t é o parâmetro e o subconjunto dos pontos $\alpha(t)$ de $\mathbb{R}^2$ é dito o traço de α .

Exemplo 2.2. Considere as curvas $\alpha(t) = (t + 1, t + 2)$ e $\beta(t) = (t, |t|)$ com $t \in \mathbb{R}$. A curva α é uma curva parametrizada diferenciável e seu traço é uma reta paralela ao vetor $(1, 1)$ que passa pelo ponto $(1, 2)$. Já β não é uma curva parametrizada diferenciável, pois $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$.

Definição 2.3. Seja C uma cônica. A aplicação $\alpha : G \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é uma parametrização de C se o conjunto imagem $\alpha(G)$ coincide com C , ou seja,

$$C = \alpha(G) = \{(x(t), y(t)); t \in G\},$$

onde G é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.4. Uma elipse é obtida ao cortar uma superfície cônica circular com um plano que não é paralelo a nenhuma das geratrizes do cone, e corta apenas uma de suas folhas. Sua equação é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e pode ser representada pela aplicação

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Assim, $\alpha(t)$ é uma curva parametrizada diferenciável. Note também que, se $a = b$, temos uma circunferência.

Para criar a curva do exemplo no GeoGebra, basta inserir sua forma paramétrica $(a \cos t, b \sin t)$ no *campo de entrada* e apertar o botão *enter*. Caso os coeficientes a e b ainda não estejam definidos, uma janela será exibida sugerindo que *controles deslizantes* sejam criados para elas. Veja o resultado na Figura 2.1.

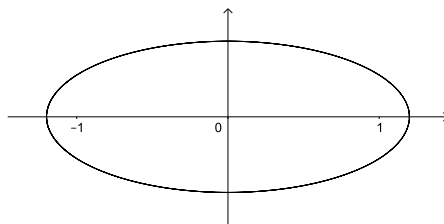


Figura 2.1: Elipse com $a = \frac{6}{5}$ e $b = \frac{1}{2}$.

2.2 Vetor tangente

Definição 2.5. Dada uma curva parametrizada

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

definimos para todo $t \in I$ o vetor $\alpha'(t)$, denominado **vetor tangente** de α em t pela expressão

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h},$$

onde h é suficientemente pequeno de tal modo que $t+h \in I$. O limite acima equivale a

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)). \quad (2.1)$$

Exemplo 2.6. Uma cicloide é a curva obtida pela trajetória de um ponto P pertencente a uma circunferência quando esta gira sem deslizar sobre uma reta (veja a Figura 2.2). Suas equações paramétricas são $x(t) = t - \sin t$ e $y(t) = 1 - \cos t$. Derivando α , temos $x'(t) = 1 - \cos t$ e $y'(t) = \sin t$. Então, o vetor tangente à $\alpha(t)$ é dado por

$$\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

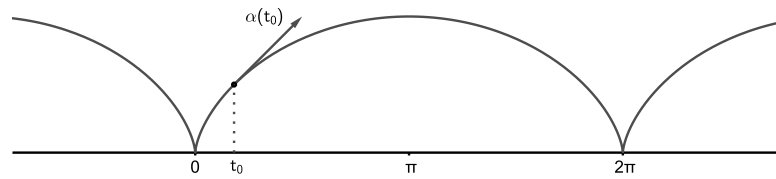


Figura 2.2: Cicloide e seu vetor tangente em $t = \frac{\pi}{2}$.

Assim, a equação da reta r tangente à curva $\alpha(t)$ em um ponto t_0 qualquer é

$$r(t) = \alpha(t_0) + t \cdot \alpha'(t_0), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

No GeoGebra, podemos obter de forma dinâmica o vetor tangente. Apresentamos a seguir, os passos para sua construção, sendo α uma cicloide, sem perda de generalidade.

1. Crie a cicloide inserindo sua forma paramétrica $a = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ no *campo de entrada*. Note que, por padrão, o intervalo de variação para o parâmetro será $[0, 2\pi]$;
2. Crie o vetor tangente com o comando $d = \text{Derivada}(a)$;
3. Crie um controle deslizante t_0 variando no intervalo de definição da curva;
4. Crie o ponto P pertencente à cicloide através do comando $P = a(t_0)$;
5. Finalmente, para obtermos o vetor tangente à curva partindo do ponto P , inserimos o comando $v = \text{Vetor}(P, P + d(t_0))$;
6. O último passo é criar a ferramenta (comando) **VetorTangente** como explicado no Capítulo 1, na Seção 1.3. Os objetos de entrada são o parâmetro t_0 e a curva a . O objeto de saída é o vetor tangente v . Qualquer que seja a curva, o vetor tangente será calculado de acordo com a mesma.

Ao variar o parâmetro t_0 , o GeoGebra atualiza as coordenadas de P e calcula novamente o vetor v (veja a Figura 2.3). Podemos, ainda, obter a reta r tangente à curva usando o comando $r = \text{Reta}(P, v)$ ou $r = \text{Tangente}(P, a)$.

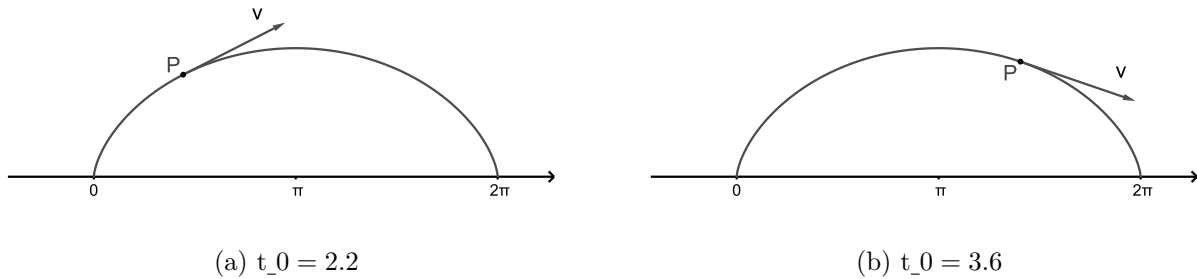


Figura 2.3: Exemplo de variação do parâmetro t_0

Exemplo 2.7. Considere a parábola $f(x) = x^2$ e sua parametrização $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Temos α parametrizada e diferenciável. No GeoGebra, inserindo α no *campo de entrada* com $a = \text{Curva}((t, t^{**2}), t, -5, 5)$ e usando a ferramenta *VetorTangente* criada no exemplo anterior, obtemos as Figuras 2.4a, 2.4b e 2.4c para os valores -2.25 , 0.1 e 1.4 de t_0 , respectivamente.

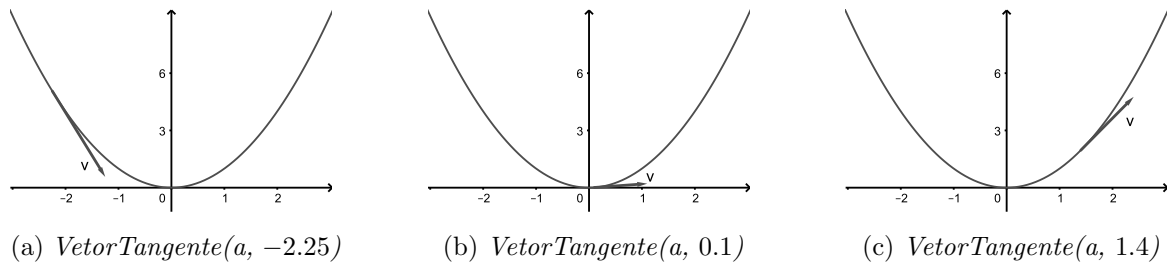


Figura 2.4: Exemplo do uso da ferramenta *VetorTangente*.

2.3 Curva Regular

Definição 2.8. Dada uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dizemos que α é **regular** quando $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Exemplo 2.9. A parábola apresentada no exemplo 2.7 é uma curva regular, já que $\alpha'(t) = (1, 2t)$ nunca é nulo.

Exemplo 2.10. A curva $\beta(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ não é regular, pois $\beta'(t) = (2t, 3t^2)$ é nulo se $t = 0$.

Proposição 2.11. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, então α é localmente injetiva. Em particular, α é uma curva regular de classe C^1 .

Seja $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$ e $t_0 \in I$. Como $\alpha'(t) \neq 0$, temos $x'_i(t_0) \neq 0$ para algum i . Se $x'_i(t_0) > 0$, como por hipótese a derivada x'_i é contínua, existe um intervalo aberto $J_{t_0} \subset I$ contendo t_0 tal que $x'_i(t) > 0$ para todo $t \in J_{t_0}$; segue que x_i é crescente neste intervalo, em particular injetiva, logo α também é. Se $x'_i(t_0) < 0$, o mesmo argumento implica a existência de um intervalo aberto $J_{t_0} \subset I$ contendo t_0 onde x_i é decrescente, em particular injetiva. Logo, α também é. ■

2.4 Comprimento do Arco

A aplicação

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \quad (2.3)$$

é denominada **função comprimento de arco** da curva α a partir de t_0 . A dedução para s está disponível em [8, p. 658-659].

No GeoGebra, o comprimento de uma curva a em um intervalo $[t_0, t_n]$ pode ser obtido com o comando *Comprimento* apresentado no Capítulo 1, Seção 1.2.11 ou pelo comando

$$\text{Integral}(\text{sqrt}(x(a'(x))^{**2} + y(a'(x))^{**2}), t_0, t_n).$$

Exemplo 2.12. Para a cicloide apresentada no exemplo 2.6, usando o comando $s = \text{Comprimento}(a, 0, 2\pi)$, obtemos como resultado $s = 8$. Isso significa que, para uma cicloide formada por um círculo de raio $r = 1$, temos, a cada ciclo completo, um incremento de 8 unidades no comprimento da curva. Apresentamos os cálculos formais no exemplo 2.14.

Definição 2.13. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para cada $t_0, t_1 \in I$ tal que $t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Conclui-se que uma curva regular $I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\forall t \in I$ tivermos $|\alpha'(t)| = 1$.

Exemplo 2.14. (*Comprimento da Cicloide*) Neste exemplo vamos calcular o comprimento de uma cicloide gerada por um círculo de raio R . Como dito anteriormente (exemplo 2.6), a curva é formada pela trajetória de um ponto fixo em um círculo de raio R que gira sem deslizar sobre uma reta. Uma parametrização para a cicloide sobre o eixo x partindo da origem é $\alpha(t) = R(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$. Daí, $\alpha'(t) = R(1 - \cos(t), \sin(t))$, de modo que

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= R(1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}R(1 - \cos(t))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}R\left(2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2R \cdot \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|. \end{aligned}$$

Consequentemente, o comprimento de um arco completo da cicloide (quando o ponto que era o ponto inferior do círculo volta a ser o ponto inferior do círculo) é

$$s(2\pi) = 2R \int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 8R,$$

confirmando o resultado exibido no exemplo 2.12.

2.5 Mudança de Parâmetro

Definição 2.15. Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável de classe C^∞ tal que sua derivada primeira não se anula em todo ponto de J e $h(J) = I$. Assim, a aplicação $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita a reparametrização de α por h e a função h é chamada mudança de parâmetro.

Exemplo 2.16. A função $t = (b - a)\theta + a$, $\theta \in [0, 1]$, $a < b$ é uma mudança de parâmetro do intervalo $\theta \in [0, 1]$ sobre $t \in [a, b]$. A inversa $\theta = (t - a) / (b - a)$ é a mudança de parâmetro do intervalo $t \in [a, b]$ sobre $\theta \in [0, 1]$.

Proposição 2.17. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Segue a demonstração desta proposição dada por [10].

α é uma curva regular, portanto $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$, isto é, s é uma função estritamente crescente. Logo existe a função inversa de s , $h : J \rightarrow I$, onde $J = s(I)$. Como $\forall t \in I, h(s(t)) = t$, temos que

$$\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1,$$

portanto,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Concluimos que $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, $s \in J$, é uma reparametrização de α e

$$\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} \right| = \left| \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = 1.$$

Portanto, pela definição 2.13, está parametrizada pelo comprimento de arco. ■

Exemplo 2.18. Considere a cicloide α do exemplo 2.14, temos

$$s(t) = 4R \left(1 - \cos \left(\frac{t}{2} \right) \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Portanto,

$$h(s) = 2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{s}{4R} \right), \quad s \in [0, 8R].$$

A curva $\beta = \alpha \circ h$ que a cada s associa

$$\beta(s) = \left(2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{s}{4R} \right) - \sin \left(2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{s}{4R} \right) \right), 1 - \cos \left(2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{s}{4R} \right) \right) \right),$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco com $s \in [0, 8R]$.

2.6 Teoria local das curvas Planas e Fórmulas de Frenet

Definição 2.19. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento arco, ou seja, $|\alpha'(s)| = 1$. Denotamos o vetor tangente à curva α em cada $s \in I$, por

$$t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)). \quad (2.4)$$

Sabemos, da Geometria Analítica, que o vetor $(-y'(s), x'(s))$ é ortogonal ao vetor $t(s)$. Este vetor é denominado vetor normal de α em cada $s \in I$. O indicamos por $n(s)$ isto é,

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)). \quad (2.5)$$

O conjunto de vetores ortonormais $\{t(s), n(s)\}$ forma, em cada ponto, uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e é denominado **Referencial de Frenet**. Como $t(s)$ é unitário, tem-se $|t(s)| = 1$. Elevando ao quadrado, obtemos $|t(s)|^2 = 1$ ou, $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$. Derivando esta igualdade com relação ao parâmetro t , tem-se: $2\langle t'(s), t(s) \rangle = 0$, logo $\langle t'(s), t(s) \rangle = 0$; concluímos que $t(s)$ e $t'(s)$ são ortogonais para todo $s \in I$.

Assim, $t'(s)$ é proporcional a $n(s)$, com fator de proporcionalidade que denotaremos por $k(s)$. Portanto,

$$t'(s) = k(s) \cdot n(s). \quad (2.6)$$

O número $k(s)$ é denominado a **curvatura** de α em $s \in I$, e pode ser obtido por

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle \Rightarrow k(s) = -x''y' + y''x'.$$

Se fizermos os mesmos cálculos para $n(s)$ que é unitário, obtemos $\langle n(s), n(s) \rangle = 1$, logo $\langle n'(s), n(s) \rangle = 0$; temos também que $n'(s)$ é proporcional a $t(s)$,

$$n'(s) = k_1(s) \cdot t(s),$$

daí,

$$k_1(s) = \langle n'(s), t(s) \rangle \Rightarrow k_1(s) = -x'y'' + x''y' = -k(s).$$

Portanto,

$$n'(s) = -k(s) \cdot t(s). \quad (2.7)$$

As expressões (2.6) e (2.7) são conhecidas como **fórmulas de Frenet**.

Exemplo 2.20. Considere a curva $\alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Observe que

$$x^2 + y^2 = r^2 \left(\cos^2\left(\frac{s}{r}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{r}\right) \right) \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2,$$

logo, α é um círculo de raio r e está parametrizado pelo comprimento de arco, pois

$$\alpha'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \Rightarrow |\alpha'(s)| = 1.$$

Concluimos que o Referencial de Frenet para α é

$$t(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right),$$

$$n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right).$$

A curvatura é

$$k(s) = -x''y' + x'y'' = \frac{1}{r}.$$

A proposição a seguir exhibe uma forma para o cálculo do Referencial de Frenet e da curvatura para curvas parametrizadas regulares.

Proposição 2.21. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular dada por $\alpha(r) : (x(r), y(r))$.*

Então

$$t(r) = \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad (2.8)$$

$$n(r) = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \quad (2.9)$$

e

$$k(r) = \frac{-x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r)}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.10)$$

A demonstração detalhada pode ser encontrada em [10, p. 46-47].

■

Exemplo 2.22. Para a cicloide formada por um círculo de raio $R = 1$, mostramos, no exemplo 2.6, que o vetor tangente à $\alpha(r)$ é dado por $\alpha'(r) = (1 - \cos r, \sin r)$, logo

$$\alpha''(r) = (\sin r, \cos r).$$

Portanto,

$$t(r) = \frac{(1 - \cos r, \sin r)}{(2 - 2 \cos r)^{\frac{1}{2}}},$$

$$n(r) = \frac{(-\sin r, 1 - \cos r)}{(2 - 2 \cos r)^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$k(r) = \frac{\cos r - 1}{(2 - 2 \cos r)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exemplo 2.23. Podemos obter o Referencial de Frenet no GeoGebra. Seguem os passos:

1. Seja a uma curva qualquer determinada como na seção 1.2.7;
2. Determine as derivadas de a por $v1 = Derivada(a)$ e $v2 = Derivada(a, 2)$;
3. Determine o módulo de $v1$ por $m = sqrt(x(v1)**2 + y(v1)**2)$;
4. Determine $t(r)$ por $t(r) = v1(r) / m(r)$;
5. Determine $n(r)$ por $n(r) = (-y(t(r)), x(t(r)))$;
6. A curvatura pode ser determinada pelo comando $Curvatura(<Ponto>, <curva>)$ ou pelo comando

$$k(r) = (-x(v2(r))*y(v1(r)) + x(v1(r))*y(v2(r))) / m(r)**3 ;$$

7. Para obter a representação geométrica de $t(r)$ e $n(r)$, crie um ponto P vinculado a curva;
8. Crie os vetores u e v com origem em P ,

$$u = Vetor(P, P + t(x(P))),$$

$$v = Vetor(P, P + n(x(P)));$$

9. Finalmente, crie o ponto $K = (x(P), k(x(P)))$. Na Figura 2.5 apresentamos o resultado da construção para $\alpha(t) = (t, t^2)$. Ao mover o ponto P , os vetores são atualizados de maneira que terão sempre a origem no mesmo, como definimos. Na Janela de Visualização 2, temos a função que representa a curvatura, dada pela ordenada do ponto K .

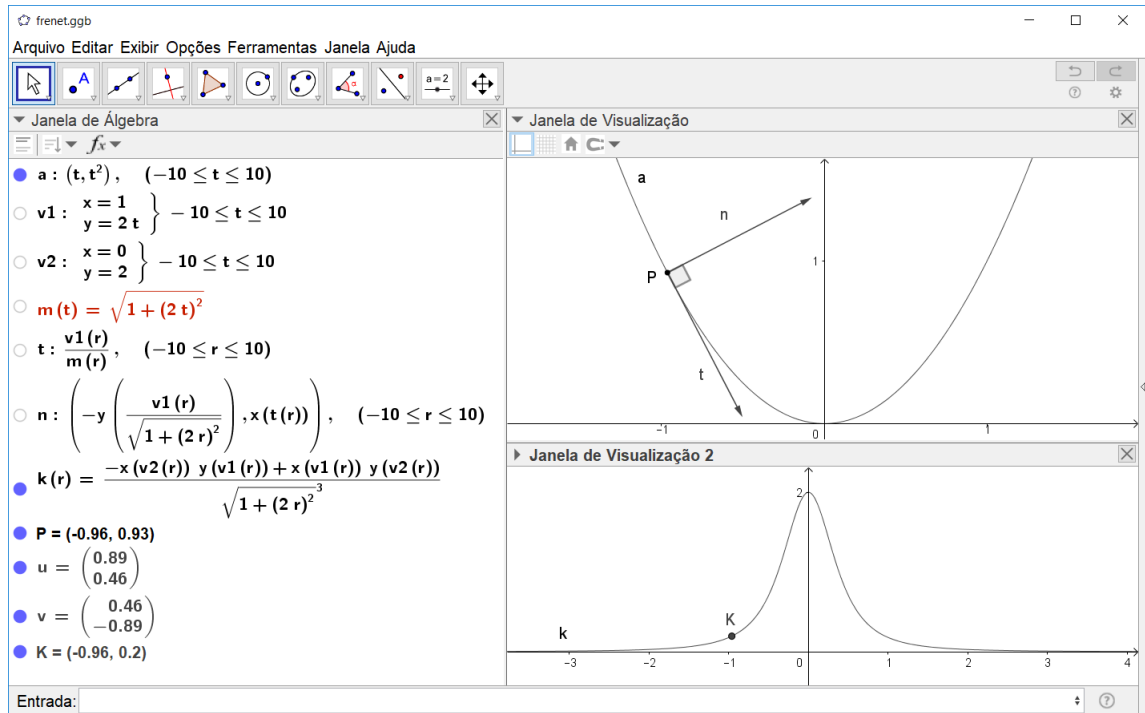


Figura 2.5: Referencial de Frenet e Curvatura.

2.7 Círculo Osculador

Se $\alpha(s)$ é uma curva regular de curvatura $k(s) \neq 0$, a quantidade $\rho(s) = \frac{1}{|k(s)|}$ é denominada **raio de curvatura** de α em s . O círculo de raio $\rho(s)$ e centro

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s) \quad (2.11)$$

é denominado **círculo osculador** e $c(s)$ é dito **centro de curvatura**.

Teorema 2.24. *A curvatura de uma curva regular α , parametrizada pelo comprimento de arco em s , é dada por $k(s) = \frac{1}{|\alpha(s) - c(s)|}$.*

Pela equação (2.11) temos

$$c(s) - \alpha(s) = \frac{1}{k(s)}n(s).$$

daí,

$$\begin{aligned} |\alpha(s) - c(s)|^2 &= \langle c(s) - \alpha(s), c(s) - \alpha(s) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{k(s)}n(s), \frac{1}{k(s)}n(s) \right\rangle \\ &= \frac{1}{k^2(s)} \langle n(s), n(s) \rangle. \end{aligned}$$

Como α é parametrizada pelo comprimento do arco, segue que:

$$|\alpha(s) - c(s)|^2 = \frac{1}{k^2(s)}.$$

Portanto,

$$k(s) = \frac{1}{|\alpha(s) - c(s)|}.$$

■

O círculo osculador é a melhor aproximação da curva por um círculo em algum t_0 , ou seja, possuem a mesma curvatura e a mesma tangente. Veja a figura 2.6.

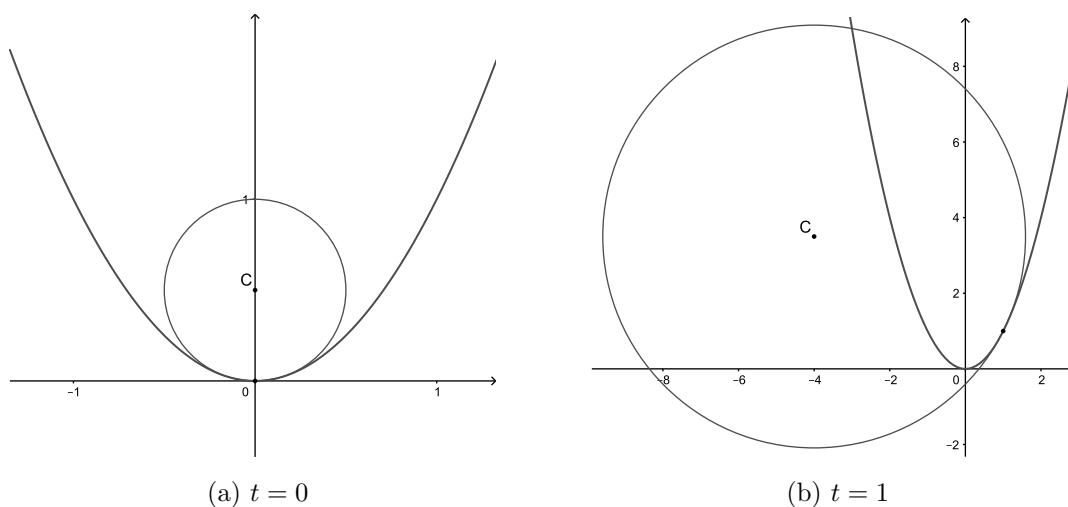


Figura 2.6: Círculo osculador da parábola

Exemplo 2.25. Vamos determinar o círculo osculador da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ na origem e em $t = 1$. Teremos $\alpha'(t) = (1, 2t)$ e $\alpha''(t) = (0, 2)$. Assim, $k(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$. Portanto, na origem temos $k(0) = 2$, raio $\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ e centro $(0, \frac{1}{2})$. Concluimos que a equação do círculo em $t = 0$ é $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Já para $t = 1$, teremos $k(1) = \frac{2}{5^{3/2}}$, raio $\rho = \frac{5^{3/2}}{2}$ e centro $(-4, \frac{7}{2})$. Concluimos que a equação do círculo em $t = 1$ é $(x + 4)^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{125}{4}$. Nas Figuras 2.6a e 2.6b ilustramos os dois casos.

Exemplo 2.26. Para obter o círculo osculador no GeoGebra, damos sequência aos passos apresentados no exemplo 2.23.

1. Crie o ponto C de acordo com a equação 2.11 pelo comando $C = a(x(P)) + n(x(P))/k(x(P))$;

2. Crie o círculo pelo comando c : $\text{Círculo}(C, P)$.

Temos, assim, o círculo c com centro em C e $\text{raio} = \text{Distância}(P, C)$. Veja a Figura 2.7

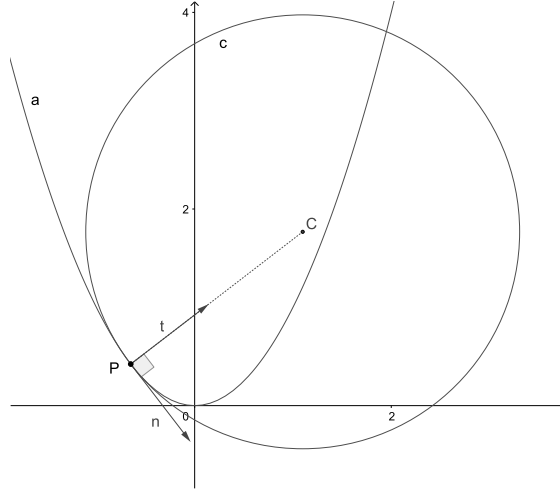


Figura 2.7: Círculo Osculador da Parábola

2.8 Evolutas

Nesta seção, chegamos ao foco da investigação a ser desenvolvida no próximo capítulo.

Seja α uma curva como descrita na seção anterior. A curva formada pelos centros de curvatura de α é chamada de **evoluta** de α e é dada por

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s) \quad (2.12)$$

Pelo fato do centro de curvatura estar univocamente determinado, independente da orientação da curva, temos que a evoluta de α é única.

Exemplo 2.27. A evoluta de uma curva regular pode não ser regular. Mostramos, neste exemplo, que a evoluta de um círculo se degenera em um único ponto, em específico, seu centro.

Consideremos a circunferência $\alpha(s) = (\cos s, \sin s)$, $s \in [0, 2\pi]$. É claro que esta é parametrizada pelo comprimento de arco. Como

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \langle (-\cos s, -\sin s), (-\cos s, -\sin s) \rangle = 1.$$

Segue que

$$\beta(s) = (\cos s, \sin s) + 1(-\cos s, -\sin s) = (0, 0).$$

Portanto, a evoluta de uma circunferência é seu ponto central.

Teorema 2.28. *Seja β evoluta de α . A normal a curva α é tangente a β .*

Seja $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a evoluta de α parametrizada pelo comprimento do arco. Se $\beta'(s) \neq 0, \forall s \in [a, b]$, então β é regular. Note que a reta tangente a $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s)$ é dada por $r(t) = \beta(s) + t\beta'(s)$. Como $\beta'(s) = \frac{-n(s) \cdot k'(s)}{k^2(s)}$, temos

$$r(t) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s) - t \frac{k'(s)}{k^2(s)}n(s),$$

logo,

$$r(t) = \alpha(s) + \left(\frac{1}{k(s)} - t \frac{k'(s)}{k^2(s)} \right) n(s).$$

Concluimos que a reta r é normal a α em s , já que $n(s)$ é o vetor normal a α .

■

Exemplo 2.29. Vamos determinar a evoluta de uma elipse.

Considere a elipse parametrizada por $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, onde $a > b > 0$ e $t \in [0, 2\pi]$. Temos $\alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$, $\alpha''(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$ e curvatura

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como $k(t) \neq 0 \forall t \in [0, 2\pi]$, a evoluta é dada por

$$\beta(t) = (a \cos t, b \sin t) + \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} (-b \cos t, -a \sin t).$$

Simplificando, segue que

$$\beta(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right).$$

Ilustramos, na Figura 2.8, uma elipse e sua evoluta.

Teorema 2.30. *A evoluta de uma cicloide é também uma cicloide.*

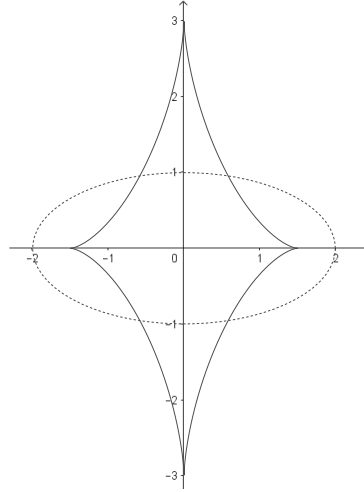


Figura 2.8: Elipse definida por $a = 2$ e $b = 1$.

Considere a cicloide dada pelo traço da curva α , definida por

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Temos $x'(t) = 1 - \cos t$, $x''(t) = \sin t$, $y'(t) = \sin t$ e $y''(t) = \cos t$. Substituindo na expressão da curvatura, segue que

$$k(t) = \frac{\cos t - 1}{(2 - 2 \cos t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como $n(t) = \frac{(-\sin t, 1 - \cos t)}{(2 - 2 \cos t)^{\frac{1}{2}}}$, a evoluta será

$$\beta(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) + \frac{(2 - 2 \cos t)^{\frac{3}{2}}}{\cos t - 1} \frac{(-\sin t, 1 - \cos t)}{(2 - 2 \cos t)^{\frac{1}{2}}}.$$

Simplificando, obtemos

$$\beta(t) = (t + \sin t, -1 + \cos t).$$

Observe que $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ e $\beta(t) = (t + \sin t, -1 + \cos t)$, portanto,

$$\beta(t) = \alpha(t + \pi) - (\pi, 2).$$

Concluimos que a evoluta β também é uma cicloide, já que é a translação de α . Veja a Figura 2.9.

■

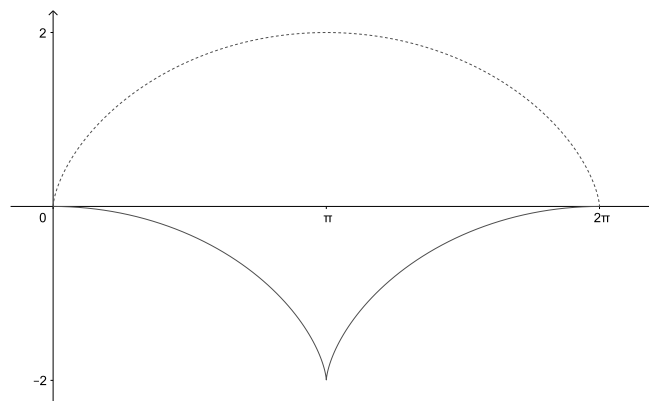


Figura 2.9: Cicloide e sua evoluta.

Exemplo 2.31. Para obtermos a evoluta de uma curva a no GeoGebra, damos continuidade aos passos apresentados no exemplo 2.26, criando a curva que representa o lugar geométrico de C ao mover P , como descrito na seção 1.2.8 do capítulo 1. Veja o resultado do comando $b = \text{LugarGeométrico}(C, P)$ na Figura 2.10.

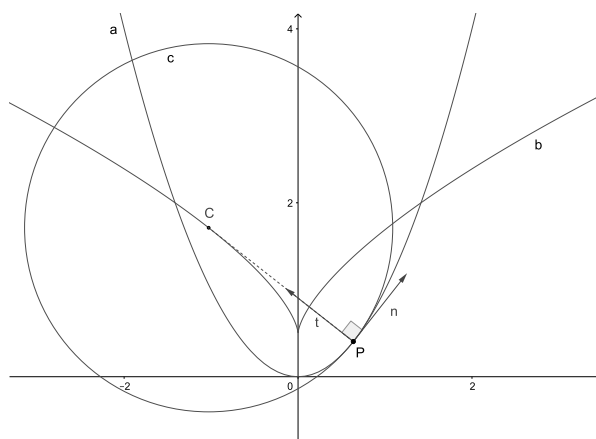


Figura 2.10: Evoluta criada pelo comando *LugarGeométrico*.

Definição 2.32. Chamamos de **envolvente** de uma família de curvas do plano, a uma curva que é tangente a cada membro da família em algum ponto.

Com base na definição 2.32, se considerarmos α uma curva regular qualquer, suas retas normais aparentam "envolver" uma outra curva β , que por sua vez pertence à família das retas normais a α . Pelo teorema 2.28, se β é a evoluta de α , então a normal a curva α é tangente a β . Portanto, a envolvente β da família das normais a α é a evoluta de α .

Exemplo 2.33. Para visualizarmos a curva β envolvente das retas normais à a no GeoGebra, executamos os seguintes passos:

1. Definir a curva a ;
2. Criar um ponto P sobre a ;
3. Criar a reta r tangente à curva no ponto P ;
4. Criar a reta s reta normal à tangente no ponto P ;
5. *Habilitar Rastro* na reta s ;
6. Animar P ;

Veja na Figura 2.11 o resultado da execução destes passos na cicloide e compare com a Figura 2.9.

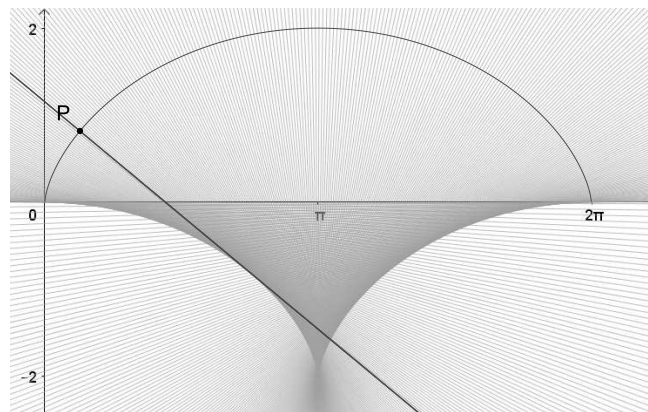


Figura 2.11: Envolvente da família das normais a cicloide.

Para a investigação proposta no próximo capítulo, usaremos os passos do exemplo 2.33 pela simplicidade, visto que os passos apresentados nos exemplos 2.23, 2.26 e 2.31 são bastante trabalhosos.

Capítulo 3

A Investigação

[11], usando as ideias de Investigação Matemática em sala de aula de [6], propõe a Investigação Matemática com GeoGebra. Ele percebeu, em suas pesquisas, que as atividades mediadas pelo *software* poderiam levar a uma compreensão melhor das essências dos objetos estudados. Vaz ressalta a importância do aluno enxergar o objeto, e o *software* possibilita ver a representação geométrica e algébrica de forma dinâmica. As articulações entre as representações possibilitam, ao aluno, a compreensão do objeto em toda a sua essência.

A proposta da Investigação Matemática com GeoGebra tem como objetivo integrar pesquisa e ensino, garantindo que o professor faça pesquisa enquanto ensina e o aluno participe ativamente do processo, fazendo investigação dos problemas sugeridos com o objetivo de se desenvolver matematicamente.

Na proposta de [11], a Investigação Matemática acontece a partir do desenvolvimento das etapas de experimentação, conjecturação, formalização e generalização. Estas permitem, tanto ao professor quanto ao aluno, se articularem no processo de ensino-aprendizagem, transformando a atividade de ensino para a construção do saber.

O instrumento básico, em todas as etapas, é o laboratório de informática onde, na experimentação, utiliza-se o *software* para visualizar conceitos, propriedades, representações algébricas e geométricas, e a movimentação dos objetos matemáticos. Na etapa de levantar conjecturas, são analisadas as propriedades, relações e resultados gerais úteis no desenvolvimento do ensino da matemática, permitindo que o aluno anuncie um problema a ser investigado.

Na fase de formalização, torna-se necessário a demonstração matemática do fato pro-

priamente dito, ou uma contra proposição da conjectura levantada, levando em conta o nível (fundamental, médio ou superior) em que se está trabalhando. A generalização trata de investigar outras situações e explorar o alcance do resultado obtido.

Nos baseamos nesses ideais para a proposta apresentada neste capítulo. Apresentamos uma sugestão para um experimento que utiliza a Investigação Matemática com o GeoGebra, aplicando as quatro etapas de [11] às curvas planas, afim de determinar quais possuem evolutas semelhantes a si mesmas, ou seja, a evoluta é a composição de transformações como translação, rotação, dilatação ou contração. Em particular, investigaremos as famílias das cicloides e epicloides.

3.1 Investigação matemática com GeoGebra

Mostramos, no Teorema 2.28, que a normal a uma curva α é tangente a β , sendo β evoluta de α , e a definição 2.32 nos leva a concluir que a evoluta pode ser definida pela envolvente das normais a α . Através desse resultado, podemos ter noção de como se comporta a evoluta de uma curva, sem fazer grandes cálculos, apenas usando as funções *Habilitar rastro* e *Animar* do GeoGebra.

Exemplo 3.1. No exemplo 2.27, mostramos que a evoluta de uma circunferência é um único ponto, e especificamente, seu centro.

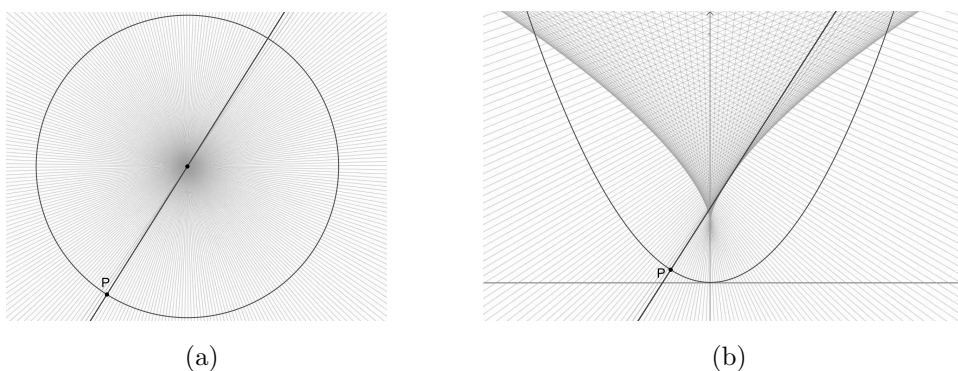


Figura 3.1: Evolutas.

Na Figura 3.1a, mostramos esta representação no GeoGebra através do rastro da reta normal à circunferência, como descrito no exemplo 2.33. É possível notar que a família de retas normais são todas tangentes ao ponto central. De forma análoga podemos verificar

que a evoluta da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ não é uma parábola (veja a Figura 3.1b). Portanto, estas curvas não se enquadram à classe de curvas que estamos investigando.

3.1.1 Trocoides

Definição 3.2. Considere um círculo de centro O e raio r e uma semireta OB . A **trocoide** é o lugar geométrico do ponto B , quando o círculo gira sobre uma reta s , sem deslizar. A curva parametrizada e diferenciável é dada por

$$\alpha(t) = (Rt - b \sin(t), R + b \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (3.1)$$

Se $b = R$, temos a cicloide como exibimos no exemplo 2.14. Caso $b > R$, teremos curvas conforme a Figura 3.2, as chamadas **cicloides alongadas**. Já se $b < R$, teremos curvas conforme a Figura 3.3, estas chamadas de **cicloides reduzidas**.

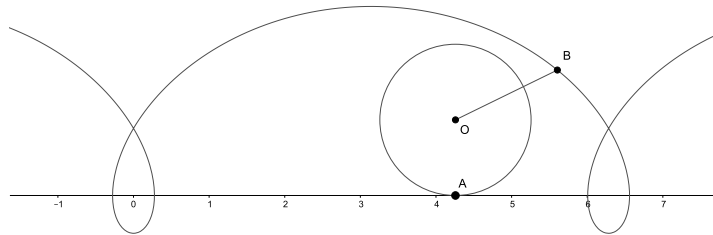


Figura 3.2: Trocoide com $b > R$.

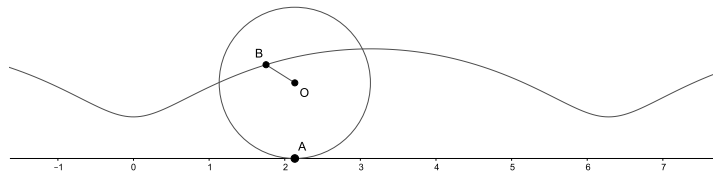


Figura 3.3: Trocoide com $b < R$.

Na primeira etapa da investigação, a **experimentação**, consideremos inicialmente a cicloide (caso $b = R$). Apesar de conhecermos sua forma parametrizada e já termos demonstrados alguns resultados que são apresentadas nesta investigação, faremos sua construção pela definição, utilizando, apenas, as ferramentas do GeoGebra, mostrando assim, que é possível investigar uma curva sem o conhecimento de sua forma parametrizada.

Os passos para a construção da cicloide são:

- Crie inicialmente um ponto A qualquer; este será o ponto de contato entre o círculo e uma reta paralela ao *eixo* x ;
- Crie um controle deslizante r que irá determinar o raio do círculo;
- Crie o centro O do círculo com o comando $O = A + (0,1)*r$. Note que AO é paralelo ao *eixo* y ;
- Crie o círculo de centro em O passando em A .
- Crie o ponto B sobre o círculo através do comando

$$B = \text{Girar}(A, -x(A)/r, O).$$

Ao mover o ponto A , o ponto B gira em torno da circunferência causando a ilusão de deslize da mesma na direção do *eixo* x .

Como o comando *LugarGeométrico* não possibilita criarmos a reta tangente a uma curva dada por ele, podemos criar uma sequência de pontos com o comando *Sequência* e obter uma aproximação da cicloide pelo comando *Spline* (descrição na subseção 1.2.6). Para isso, precisamos criar uma ferramenta que retorne para cada ponto A as coordenadas do ponto B .

- Vamos criar a ferramenta ***PontosCicloide*** como descrito no capítulo 1 seção 1.3. O objeto final é o ponto B e os objetos iniciais são o ponto A e o número r ;
- O próximo passo é vincular o ponto A ao *eixo* x . Para isso use o comando $A = \text{Ponto}(\text{EixoX})$;
- Crie os controles deslizantes m e n inteiros e positivos. O controle m irá determinar o número de voltas completas da circunferência sobre o *eixo* x , já o controle n determinará a quantidade de pontos sobre a cicloide. É importante que $n \geq 3$, pois, usaremos em seguida o comando *Spline* para interpolar a curva.
- Use o comando $L = \text{Sequência}(\text{PontosCicloide}((2*\text{Pi}*r*m*i/n, 0), r), i, 0, n)$ para criar o conjunto L contendo $n + 1$ pontos pertencentes a cicloide no intervalo $[0, 2\pi r m]$. Veja a Figura 3.4.
- Para criar a curva, use o comando $a = \text{Spline}(L)$.

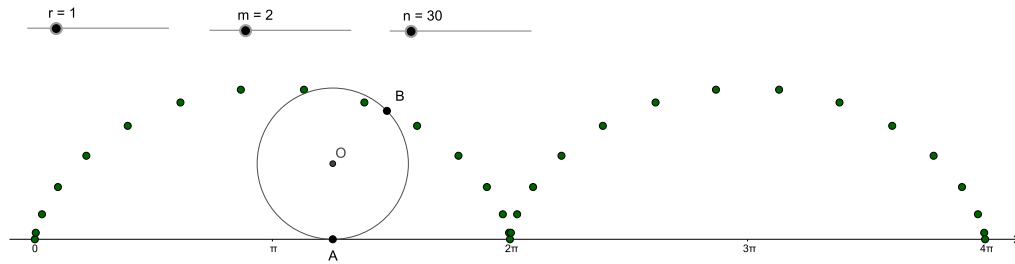


Figura 3.4: Pontos da lista L .

Ocultando o conjunto (lista) L , temos, finalmente, a cicloide, como podemos ver na Figura 3.5.

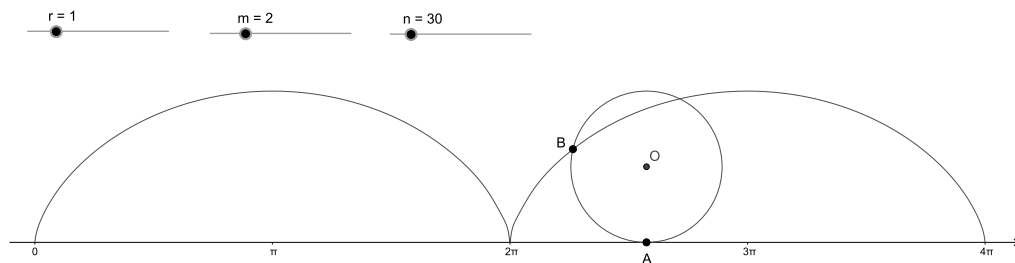


Figura 3.5: Aproximação da Cicloide pelo comando *Spline*.

- Repetindo os passos do exemplo 2.33 e ocultando a reta tangente, obtemos a envolvente das retas normais à cicloide. O resultado pode ser visualizado na Figura 3.6.

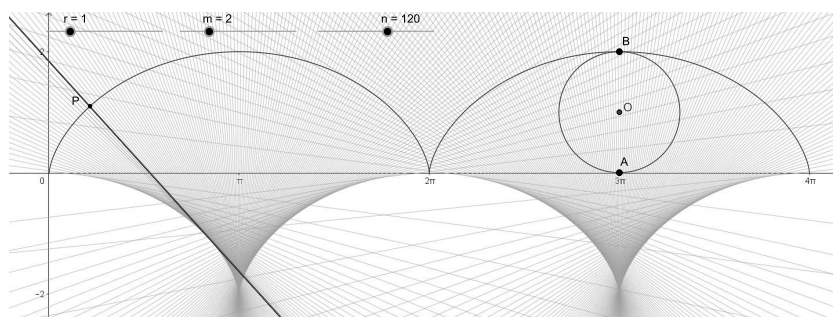


Figura 3.6: Retas tangentes à Evoluta da Cicloide

Analisando a Figura 3.6, percebe-se que a evoluta da cicloide também é uma cicloide, já que a envolvente das retas normais possui traço semelhante à uma cicloide. **Conjeturamos** que:

1. A evoluta β de uma cicloide α é também uma cicloide e pode ser descrita na forma

$$\beta(t) = \alpha(t + \pi) - (\pi, 2); \quad (3.2)$$

2. O comprimento da evoluta é igual ao comprimento da cicloide em um mesmo intervalo.

A primeira conjectura está formalizada no Teorema 2.30. Quanto a segunda, derivando a equação 3.2, obtemos

$$\beta'(t) = \alpha'(t + \pi). \quad (3.3)$$

No exemplo 2.14, mostramos que $|\alpha'(t)| = 2R \cdot \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|$, logo

$$|\beta'(t)| = |\alpha'(t + \pi)| = 2R \left| \sin\left(\frac{t + \pi}{2}\right) \right|.$$

No mesmo exemplo, mostramos que o comprimento da cicloide no intervalo $[0, 2\pi]$ é $8R$. Agora, calculando o comprimento s_e da evoluta nesse mesmo intervalo, segue que

$$s_e(2\pi) = \int_0^{2\pi} |\beta'(t)| dt = 2R \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{t + \pi}{2}\right) \right| dt = 4R \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t + \pi}{2}\right) dt = 8R.$$

Confirmamos, assim, nossa segunda conjectura através da **formalização**.

Nos resta a tentativa de **generalizar** os resultados que conseguimos obter nas etapas anteriores, verificando se as mesmas conjecturas são válidas nos dois casos restantes, ou seja, quando $b > R$ e $b < R$.

Para esses dois casos, inserimos a equação 3.1 no GeoGebra pelo *campo de entrada* e nos é solicitada a criação dos controles deslizantes R e b . Ao executar os passos descritos no exemplo 2.33, obtemos as Figuras 3.7 e 3.8.

Concluimos, ao analisar estas, que as conjecturas levantadas na segunda etapa não se aplicam aos casos em que $b \neq R$, já que as evolutas de trocoides nesses casos não são trocoides.

3.1.2 Epitrocoides

Definição 3.3. Uma **epicicloide** é uma curva cíclica definida por um ponto P de um círculo centrado em C de raio r , que rola sem deslizar sobre um círculo de centro O de

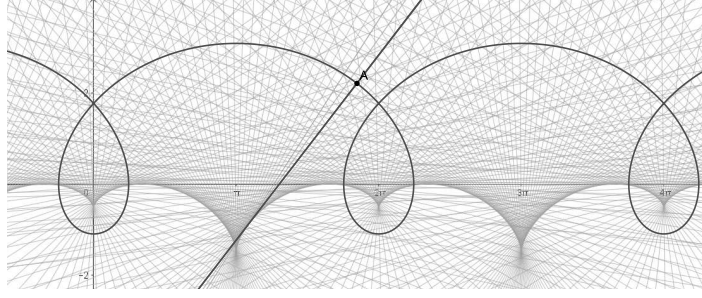


Figura 3.7: Aproximação da Evoluta do Trocoide com $b > R$.

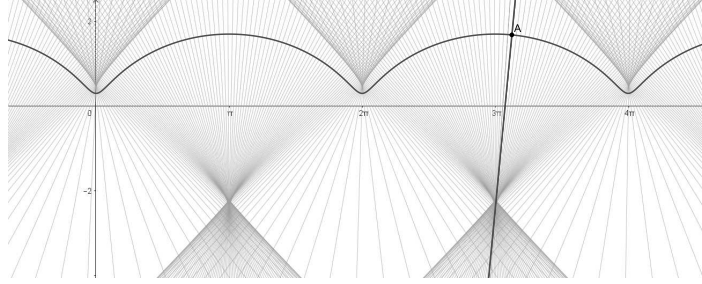


Figura 3.8: Aproximação da Evoluta do Trocoide com $b < R$.

raio R . O caso geral da epicloide é chamado de **epitrocoide**, e é obtido quando P não pertence ao círculo de raio r e possui distância b de C , como representado na Figura 3.9.

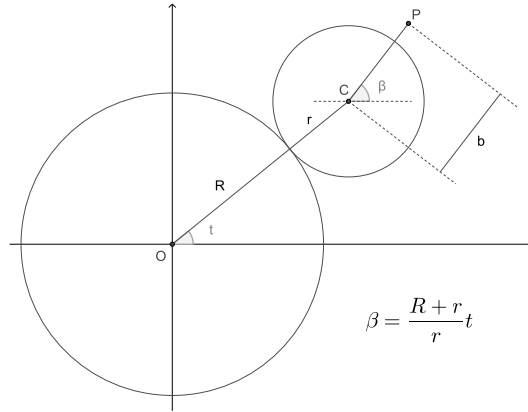


Figura 3.9: Ilustração da construção de uma epitrocoide.

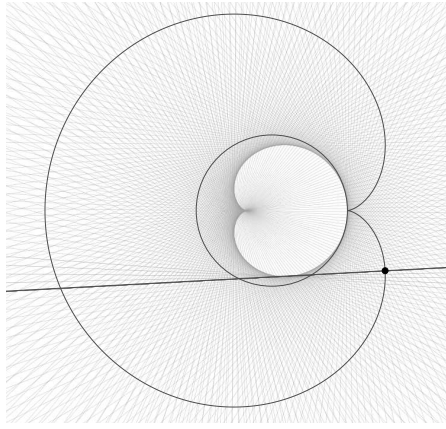
Uma epitrocoide α possui as seguintes equações paramétricas:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} (R+r)\cos(t) - b\cos\left(\frac{R+r}{r}t\right) \\ (R+r)\sin(t) - b\sin\left(\frac{R+r}{r}t\right) \end{pmatrix}^T, \quad t \in [0, 2\pi] \text{ e } R > r > 0. \quad (3.4)$$

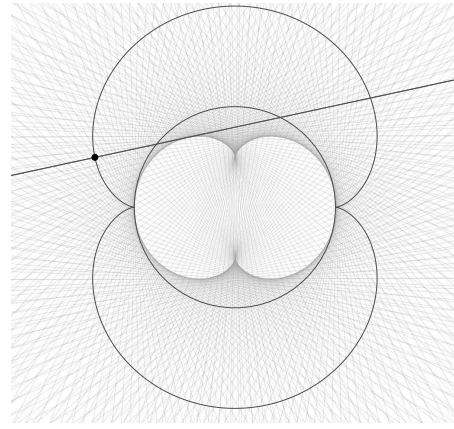
Temos α parametrizada e diferenciável. Detalhes sobre como obter estas equações paramétricas são apresentados em [4, p. 160-161].

Vamos analisar nesta investigação os casos em que r divide R , ou seja, o círculo menor completa apenas um ciclo do círculo maior, e o ponto P finaliza o ciclo no mesmo lugar geométrico que inicia. Assim, fazendo $n = \frac{R}{r}$ em (3.4), obtemos

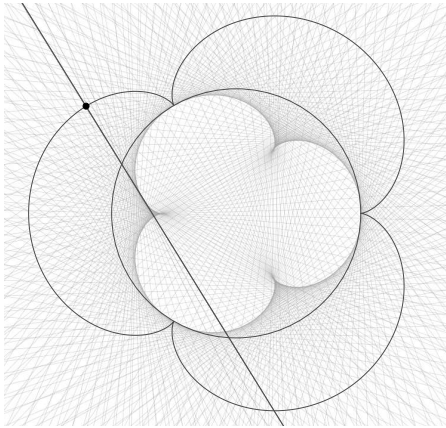
$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} r(n+1)\cos(t) - b\cos[(n+1)t] \\ r(n+1)\sin(t) - b\sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (3.5)$$



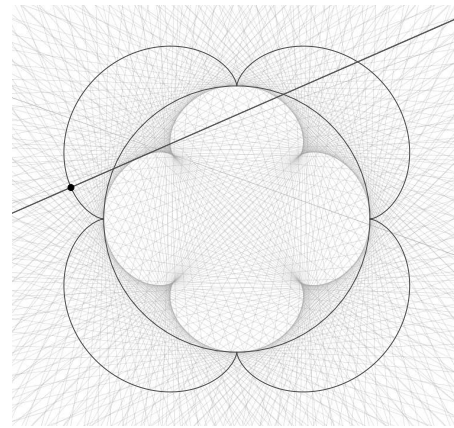
(a) $n = 1$



(b) $n = 2$



(c) $n = 3$



(d) $n = 4$

Figura 3.10: Epicicloides com $b = r = 1$ e $n = R$.

Como na seção anterior, iniciamos a investigação pela etapa de **experimentação** com as epicicloides, ou seja, $b = r$ na equação (3.5). Note que, fixando $r = 1$, teremos $n = R$, e n determinará o número de ciclos do círculo menor. Seguindo novamente os passos do exemplo 2.33, obtemos as Figuras 3.10a, 3.10b, 3.10c e 3.10d, variando n .

Nos quatro casos da Figura 3.10, podemos observar que a envolvente da família de

curvas normais à epicicloide, aparentemente, também são epicicloides rotacionadas e re-dimensionadas. Essas informações são suficientes para **conjecturarmos** que, sendo α uma epicicloide com equações paramétricas dadas por (3.4), com $b = r$ e β sua evoluta, temos:

1. β é uma epicicloide e pode ser expressa na forma

$$\beta(t) = p \cdot \alpha(t) \cdot M_\theta \quad (3.6)$$

sendo p um fator de proporcionalidade e M_θ a matriz de rotação em torno da origem com $\theta = \frac{\pi}{n}$.

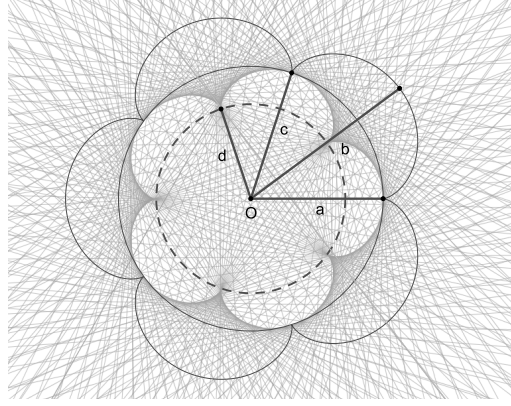


Figura 3.11: Relação de proporção

Podemos obter o fator p de maneira simples. Observe os segmentos a , b , c e d na Figura 3.11. Temos que b está para a , assim como c está para d . Portanto, d que é o raio do círculo diretor da evoluta, é dado por

$$d = \frac{ac}{b}.$$

Como $a = R = n$, $b = R + 2r = n + 2$ e $c = R = n$, concluímos que $d = n \frac{n}{n+2}$. Isso significa que o raio do círculo diretor da evoluta é dado pelo produto entre o raio do círculo diretor da curva e o fator

$$p = \frac{n}{n+2}.$$

2. O comprimento de β é uma contração do comprimento de α , sendo p o fator de proporcionalidade descrito na conjectura anterior.

As conjecturas reforçam a potencialidade desta proposta de trabalho. Percebe-se que o *software* fornece ferramentas de fácil acesso e possibilita investigações profundas, mesmo em conteúdos mais avançados.

O próximo passo é **formalizar** as conjecturas levantadas. Assim, sendo α descrita na equação 3.5, com $r = b = 1$, segue que

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} (n+1) \cos(t) - \cos[(n+1)t] \\ (n+1) \sin(t) - \sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (3.7)$$

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -(n+1) \sin(t) + (n+1) \sin[(n+1)t] \\ (n+1) \cos(t) - (n+1) \cos[(n+1)t] \end{pmatrix}^T, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (3.8)$$

e

$$\alpha''(t) = \begin{pmatrix} -(n+1) \cos(t) + (n+1)^2 \cos[(n+1)t] \\ -(n+1) \sin(t) + (n+1)^2 \sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (3.9)$$

Calculando o módulo de α' , obtemos a expressão 3.10 após as devidas simplificações.

$$|\alpha'(t)| = (n+1) \sqrt{2 - 2 \cos(nt)}. \quad (3.10)$$

Das equações (3.8), (3.9) e (3.10) concluímos que o vetor normal é

$$n(t) = \frac{\begin{pmatrix} -(n+1) \cos(t) + (n+1) \cos[(n+1)t] \\ -(n+1) \sin(t) + (n+1) \sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T}{(n+1) \sqrt{2 - 2 \cos(nt)}} \quad (3.11)$$

e a curvatura é

$$k(t) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1 - \cos(nt)}{\left(\sqrt{2 - 2 \cos(nt)}\right)^3}. \quad (3.12)$$

Finalmente, substituindo (3.7), (3.11) e (3.12) na equação (2.12) da evoluta, segue que

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \begin{pmatrix} (n+1)\cos(t) - \cos[(n+1)t] \\ (n+1)\sin(t) - \sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T \\
&\quad + \frac{(n+1) \left(\sqrt{2-2\cos(nt)} \right)^3 \begin{pmatrix} -(n+1)\cos(t) + (n+1)\cos[(n+1)t] \\ -(n+1)\sin(t) + (n+1)\sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T}{(n+2)(1-\cos(nt))(n+1)\sqrt{2-2\cos(nt)}} \\
&= \begin{pmatrix} (n+1)\cos(t) - \cos[(n+1)t] \\ (n+1)\sin(t) - \sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T + \frac{2(n+1)}{n+2} \begin{pmatrix} -\cos(t) + \cos[(n+1)t] \\ -\sin(t) + \sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{n}{n+2} \begin{pmatrix} (n+1)\cos(t) + \cos[(n+1)t] \\ (n+1)\sin(t) + \sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{n}{n+2} \begin{pmatrix} (n+1)\cos\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left[(n+1)t + \frac{\pi}{n}\right] \\ (n+1)\sin\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \sin\left[(n+1)t + \frac{\pi}{n}\right] \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{n}{n+2} \begin{pmatrix} (n+1)\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos[(n+1)t]\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ -(n+1)\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin[(n+1)t]\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ (n+1)\cos(t)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos[(n+1)t]\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ +(n+1)\sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin[(n+1)t]\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{n}{n+2} \begin{pmatrix} (n+1)\cos(t) - \cos[(n+1)t] \\ (n+1)\sin(t) - \sin[(n+1)t] \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{n}{n+2} \cdot \alpha(t) \cdot M_\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Confirmamos, assim, a primeira conjectura. Usaremos esse resultado para demonstrar

a segunda. Assim,

$$\beta'(t) = \frac{n}{n+2} \cdot \alpha'(t) \cdot M_\theta.$$

Claro que a rotação da curva não altera seu comprimento, portanto,

$$s_e(t) = \int_0^t |\beta'(t)| dt = \int_0^t \left| \frac{n}{n+2} \cdot \alpha'(t) \cdot M_\theta \right| dt = \frac{n}{n+2} \int_0^t |\alpha'(t)| dt,$$

mostrando que a segunda conjectura também está correta. Nos resta a tentativa de **generalização** das propriedades conjecturadas e formalizadas para a epitrocoide nos casos $b > r$ e $b < r$. Mais uma vez, seguindo os passos do exemplo 2.33, usando a equação 3.7, obtemos as imagens a seguir.

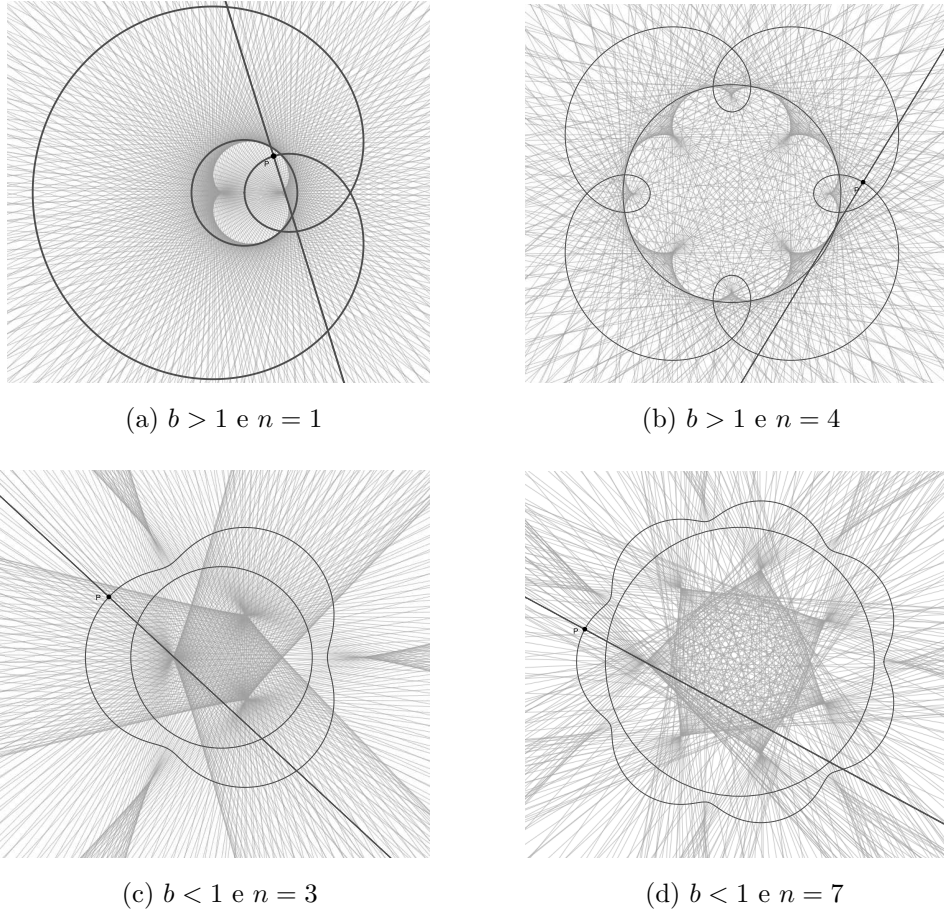


Figura 3.12: Etapa da generalização.

A experimentação com o *software* é suficiente para percebermos que as conjecturas levantadas para a trocoide, no caso $b = r$, não se aplicam aos demais casos. Finalizamos,

assim, a proposta investigativa de [11]. Espera-se do aluno uma melhor compreensão das propriedades das curvas planas, com o auxílio da investigação matemática com o GeoGebra.

3.1.3 Hipotrocoides

Definição 3.4. Uma *hipocicloide* é uma curva cíclica definida por um ponto P de um círculo centrado em C de raio r , que gira sem deslizar, tangencialmente no interior de um círculo de centro O de raio R . O caso geral da hipocicloide é chamado de *hipotrocoide* e é obtido quando P não pertence ao círculo de raio r e possui distância b de C . Sua forma parametrizada é:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} (R-r)\cos(t) + b\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right) \\ (R-r)\sin(t) - b\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right) \end{pmatrix}^T, \quad t \in [0, 2\pi] \text{ e } R > r > 0. \quad (3.13)$$

Detalhes sobre como obter estas equações paramétricas estão disponíveis em [4, p. 165-168].

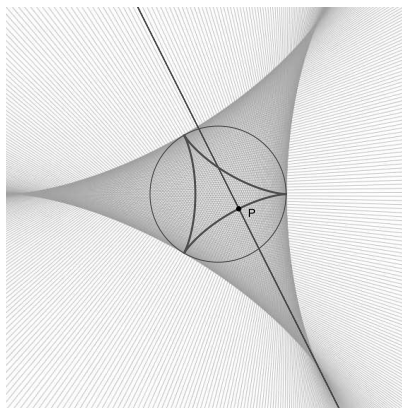


Figura 3.13: Hipocicloide e a envolvente de suas retas normais.

Deixamos como sugestão a investigação das hipotrocoides, note pela Figura 3.13 que a hipocicloide aparenta possuir propriedades semelhantes às demonstradas para as epicloides.

Conclusão

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou a análise de como o *software* GeoGebra pode melhorar os conhecimentos matemáticos, desenvolver habilidades práticas fundamentadas em teorias consistentes e amplas, como a de [11], sobre o desenvolvimento das etapas de experimentação, conjecturação, formalização e generalização.

Apresentamos construções, utilizando conceitos matemáticos e as ferramentas do *software*, que permitiram-nos fazer investigação matemática de uma forma mais atraente.

Mostramos que o *software* permite um aprendizado significativo, devido a sua praticidade, facilitando, ao aluno, a percepção das propriedades e relações entre objetos matemáticos.

Apresentamos uma investigação que possibilita a consolidação de práticas de ensino articuladas com investigações matemáticas e o desenvolvimento de um ensino de mais qualidade, cuja finalidade principal é provocar mudanças na percepção dos alunos, aguçando sua atividade mental e despertando seu interesse por meio da ação e da reflexão pelo contato visual.

O objetivo de determinar quais curvas possuem evolutas semelhantes a si mesmas por meio de transformações como translação, rotação, dilatação ou contração, foi parcialmente concluído. Em particular, investigaremos as trocoides e as epitrocoides.

Sugerimos, para uma possível continuidade desse trabalho, a investigação dos casos de epitrocoides em que r não divide R ; das hipocicloides e a seguinte questão: "Existem curvas, além das apresentadas neste trabalho, tais que sua evoluta é semelhante a si mesma?".

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de. NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. Editora Exato, São Paulo, 2010.
- [2] BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1974.
- [3] GEOGEBRA. **GeoGebra Manual**. Disponível em <https://wiki.geogebra.org/en/Manual>>. Acesso em 14 mar. 2018.
- [4] LAWRENCE, J. Dennis. **A catalog of special plane curves**. New York, Dover Publications, 1972.
- [5] MOURA, M.O de et al. **Atividade Orientadora de Ensino : unidade entre ensino e aprendizagem** . In: Ver. Diálogo Educ., n.29, p.205/229, jan./abr. 2010.
- [6] PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemática na sala de aula**. 3ª edição, Revista e ampliada. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.
- [7] SOUZA, Uender B., **Guia de Comandos do GeoGebra: Exemplos e desafios**. Projeto do Instituto GeoGebra de Goiás. Goiânia, 2018. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/EedVvbU>>. Acesso em 25 mar. 2018.
- [8] STEWART, J. **Cálculo**. Volume II, 5ª edição. Tradução. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- [9] TAPP, K. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing. 2016.
- [10] TENENBLAT. Ketiv **Introdução á Geometria Diferencial**. 2ª edição revisada. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2008.

- [11] VAZ, D. A. de F. **Experimentando, Conjecturando, Formalizando e Generalizando: Articulando Investigação Matemática com o GeoGebra.** In: Educativa, Goiânia, v.15, n.1. p.39-51, jan./jun. 2012.